BOZZA 27.1.2011 23:26

Università di Roma Tor Vergata

Corso di Laurea in

Scienze e Tecnologie per i Media

Esempi sulla stima dell'errore negli sviluppi di Taylor

Massimo A. Picardello

CAPITOLO 1

Stima numerica dell'errore di approssimazione di Taylor: esempio nel caso di derivate decrescenti in modulo

Esempio 1. Calcoliamo l'errore di approssimazione per il calcolo di $\sqrt{26}$ con un opportuno sviluppo di Taylor di grado 0 e di grado 1 (in analogia all'Esempio 8.41 del libro di Bertsch, Dal Passo e Giacomelli).

Svolgimento. Il punto più vicino in cui la radice è nota è 25. Conviene scrivere $26 = 25 + 1$ e sviluppare secondo Taylor al punto $x = 1$ la funzione $g(x) = \sqrt{25 + x} = 5\sqrt{1 + \frac{x}{25}}$. Ponendo $t = x/25$ dobbiamo quindi calcolare lo sviluppo di $f(t) = 5\sqrt{1+t}$ al punto $1/25$, nel quale $f(1/25) = \sqrt{26}$. Se viceversa avessimo deciso di sviluppare $\sqrt{1+x}$ con centro 0 per $x = 25$, avremmo avuto una approssimazione di taylor molto scadente perché l'errore di sviluppo della serie binomiale tende a zero al crescere dell'ordine di approssimazione solo nell'intervallo $-1 < x < 1$.
Calcoliamo anzitutto le prime due derivate di f:

$$f'(t) = \frac{5}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+t}} \tag{1}$$

$$f''(t) = -\frac{5}{4}\,\frac{1}{\sqrt{(1+t)^3}} \tag{2}$$

Osserviamo che, in valore assoluto, queste due derivate sono decrescenti per $t \geqslant 0$, e considerandole con il segno, la prima è positiva (e quindi decrescente) e la seconda è negativa (e quindi crescente. È altrettanto chiaro, per induzione, che le derivate successive sono a segno alterno e tutte decrescenti per $t \geqslant 0$ (anzi di più, anche per $t > -1$, punto al quale hanno tutte una singolarità).

Ordine 0.

Sia T_0 il polinomio di McLaurin di f di grado 0, ossia la costante $f(0) = 5$. Grazie al teorema di Lagrange, all'ordine 0 stimiamo l'errore $E_0(x) = f(x) - T_0(x)$, con $x = 1/25$:

$$E_0(x) = f(x) - f(0) = \sqrt{26} - 5 = f'(\xi_0)\,\frac{1}{25} = \frac{1}{25}\,\frac{5}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+\xi_0}}$$

per qualche $\xi_0 \in (0, 1/25)$. Allora, siccome $f' > 0$, sappiamo che $f(1/25) - f(0) = \sqrt{26} - 5$ è positivo (come d'altra parte è ovvio dalla crescenza della funzione radice quadrata). Inoltre f' è decrescente, e quindi

$$\sqrt{26} - 5 < \frac{1}{25}\,f'(0) = \frac{1}{25}\,\frac{5}{2} = \frac{1}{10}\,.$$

Inoltre, notiamo che, sempre per la monotonia di f', si ha

$$f'(\xi_0) > f'(1/25) = \frac{5}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{25}}} = \frac{5}{2}\,\frac{5}{\sqrt{26}} > \frac{5}{2}\,\frac{5}{\sqrt{36}} = \frac{25}{12}$$

e quindi

$$\sqrt{26} - 5 > \frac{1}{25}\,\frac{25}{12} = \frac{1}{12} \sim 0.0888889\,.$$

Combinando le ultime due disuguaglianze otteniamo

$$5.0888889 < \sqrt{26} < 5.1\,,$$

quindi c'è un'incertezza di una unità sulla prima cifra decimale.

Ordine 1.

Ora stimiamo l'errore di approssimazione $E_1(x) = f(x) - T_1(x)$, dove $T_1(x) = f(0) + f'(0)\,x$ è il polinomio di McLaurin di f di grado 1 e $x = 1/25$. A questo scopo usiamo due volte il teorema di Cauchy:

$$\frac{f(x) - f(0) - f'(0)\,x}{x^2} = \frac{f'(y) - f'(0)}{2y} = \frac{1}{2}\,f''(\xi_1) \qquad (3)$$

per opportuni punti $0 < \xi_2 < y < x = \frac{1}{25}$. Ne segue che

$$E_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(0) - f'(0)\,x = \frac{1}{2}\,f''(\xi_1)\,x^2\,.$$

Ponendo $x = 1/25$, otteniamo da (1):

$$f\left(\frac{1}{25}\right)-f(0)-\frac{1}{25}\,f'(0)=\sqrt{26}-5-\frac{1}{25}\,\frac{5}{2}=\sqrt{26}-5.1=\frac{1}{2}\,\frac{1}{625}\,f''(\xi_1)\,. \tag{4}$$

A causa della monotonia di f'' (che è crescente, perché $|f''|$ è decrescente ma $f''<0$), da (1) si ottiene:

$$\begin{aligned} f''(0) = -\frac{5}{4} = -1.25 < f''(\xi_1) < f''\left(\frac{1}{25}\right) &= -\frac{5}{4}\,\frac{5^3}{\sqrt{26^3}} \\ &< -\frac{5}{4}\,\frac{5^3}{\sqrt{36^3}} = -\frac{625}{864} \sim -0.7233796\,, \end{aligned}$$

e quindi, da (4),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,f''(0)\,\frac{1}{25^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{625}\,\frac{5}{4} = -\frac{1}{1000} &= -0.001 < \sqrt{26}-5.1 \\ &< \frac{1}{2}\,f''(\frac{1}{25})\,\frac{1}{25^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{625}\,\frac{625}{864} = -\frac{1}{1728} \sim -0.0005787\,. \end{aligned}$$

In altre parole, $5.1-0.001 = 5.0999 < \sqrt{26} < 5.1-0.0005787 := 5.0999421$. Pertanto, al primo ordine di sviluppo di Taylor, abbiamo calcolato $\sqrt{26}$ con 4 cifre decimali esatte, ed una incertezza di quattro unità sulla quinta cifra decimale. $\square$

CAPITOLO 2

Errore di approssimazione di Taylor in forma di Lagrange

Il modo in cui abbiamo stimato l'errore di Taylor all'ordine zero (con il teorema di Lagrange) e all'ordine 1 (facendo uso del teorema di Cauchy, in particolare in (3), è a tutti gli effetti la dimostrazione del seguente risultato:

Teorema 2. (Resto di Taylor in forma di Lagrange.) *Sia f derivabile $n+1$ volte in un intervallo $(x_0\,,\,x)$ con $f^{(n)}$ continua in $[x_0\,,\,x]$. Allora esiste $\xi \in (x_0\,,\,x)$ tale che l'errore di approssimazione di Taylor $E_n = E_n[f;x_0] := f - T_n[f;x_0]$ verifica*

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1}\,.$$

Dimostrazione. . Abbiamo già dimostrato i casi $n=0$ e $n=1$ nell'Esempio precedente, e quindi potremmo procedere per induzione su n, ma per semplificare l'esposizione scriviamo l'induzione esplicitamente. Applicando n volte il teorema di Cauchy, vediamo che esistono $x_0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_n < x$ tali che

$$\begin{aligned}
&\frac{E_n(x)}{(x-x_0)^{(n+1)}}\\
&:= \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x-x_0) - \frac{1}{2}\,f''(x_0)\,(x-x_0)^2 - \cdots - \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)\,(x-x_0)^n}{(x-x_0)^{n+1}}\\
&= \frac{f'(t_0) - f'(x_0) - f''(x_0)\,(t_0-x_0) - \cdots - 1(n-1)!\,f^{(n)}(x_0)\,(t_0-x_0)^{n-1}}{(n+1)\;(t_0-x_0)^n} = \ldots\\
&= \frac{f^{(n+1)}(t_n)}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

che è esattamente l'enunciato se scriviamo $\xi := t_n$. $\square$

Corollario 3. *Sia* f *derivabile* $n+1$ *volte in un intervallo* $(x_0\,,\,x)$ *con* $f^{(n)}$ *continua in* $[x_0\,,\,x]$. *Allora*

$$|E_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}\max_{t\in[x_0\,,\,x]}|f^{(n+1)}(t)|\,.$$

CAPITOLO 3

Altri esempi numerici dell'errore di approssimazione di Taylor

Esempio 4. Ritorniamo all'esempio del Capitolo 1, ma questa volta proviamo ad approssimare $\sqrt{24}$. Procediamo direttamente all'approssimazione di ordine 1. Ora dobbiamo sviluppare la funzione $f(x) = 5\sqrt{1+x}$ e calcolare lo sviluppo per $x = -1/25$. Pertanto invece di (4) troviamo

$$f\left(-\frac{1}{25}\right) - f(0) - \left(-\frac{1}{25}\right) f'(0) = \sqrt{24} - 5 + \frac{1}{25}\,\frac{5}{2} = \sqrt{24} - 4.9 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{625}\, f''(\xi)$$

per un opportuno $\xi \in (-1/25\,,\,0)$. Sappiamo che f'' è negativa e decrescente in modulo, quindi crescente. Pertanto

$$\sqrt{24} - 4.9 < \frac{1}{2}\,\frac{1}{625}\, f''(0) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{625}\,\frac{5}{4} = -\frac{1}{1000} = -0.001\,,$$

ma per la stima dall'altro verso ora dobbiamo cercare un numero *minore* di 24 di cui sia nota la radice. Fra questi numeri il più vicino a 24 è 16, e quindi

$$\sqrt{24} - 4.9 > \frac{1}{2}\,\frac{1}{625}\, f''\left(-\frac{1}{25}\right) = -\frac{1}{1250}\,\frac{5}{4}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{25}{24}\right)^3}} = -\frac{1}{1250}\,\frac{5}{4}\,\frac{125}{\sqrt{24^3}}$$

$$> -\frac{1}{8}\,\frac{1}{\sqrt{16^3}} = -\frac{1}{8\cdot 4^3} = -\frac{1}{528} \sim -0.0018939\,.$$

Da queste due stime troviamo $4.9 - 0.0001 < \sqrt{24} < 4.9 - 0.0018939$, ossia

$$4.8999 < \sqrt{24} < 4.8981061\,,$$

quindi c'e' una incertezza di due unità sulla terza cifra decimale: l'ordine di approssimazione è di due cifre decimali.

A causa del fatto che la derivata seconda è crescente, per ottenere la maggiorazione per difetto abbiamo dovuto calcolarla al punto $-1/16$, che è più lontano dal centro di sviluppo di quanto non sia il punto $-1/25$ che avevamo usato nell'Esempio 1, e come conseguenza abbiamo una precisione peggiore di due cifre decimali rispetto a prima. $\square$

Molto spesso viene richiesta solo una approssimazione senza il segno: in tal caso, si usa il Corollario 3 e i calcoli diventano un po' più facili perché tutte le disuguaglianze coinvolgono quantità positive.

CAPITOLO 4

A che ordine di approssimazione di Taylor ci si deve arrestare per ottenere una precisione prefissata

Esempio 5. A che ordine n di sviluppo di Taylor occorre arrivare per approssimare $\sqrt{26}$ a meno di 10^{-m}, per un dato m intero assegnato? Dal Corollario 3 sappiamo che n è il più piccolo intero che verifica

$$\frac{1}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1} \max_{t\in[x_0\,,\,x]} |f^{(n+1)}(t)| \geqslant 10^{-m} \tag{5}$$

(qui $x_0 = 0$ e $x = 1/25$). Per questo occorre calcolare le derivate successive di $f(x) = 5\sqrt{1+x}$, che si calcolano immediatamente per induzione. Il risultato (già visto negli esempi dello sviluppo binomiale) per $n \geqslant 2$ è

$$f^{(n)}(x) = 5(-1)^n\,\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\dots\cdot(2n-3)}{2^n}\,(1+x)^{-n-\frac{1}{2}}\,.$$

In modulo, tutte le derivate sono decrescenti nell'intervallo $[0\,,\,1/25]$, e quindi in questo intervallo il loro massimo è al punto 0. Quindi (5) diventa

$$\frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{25^{n+1}}\cdot 5\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\dots\cdot(2n-3)}{2^n} < 10^{-m}\,.$$

Il primo membro vale Ad esempio, per $n = 2$ il primo membro vale $\frac{1}{32}\,\frac{1}{3125} = \frac{1}{100000} = 10^{-6}$, e quindi occorre l'ordine $n = 2$ per ottenere la precisione di 10^{-6}. Per $n = 3$ il primo membro vale una frazione di $\frac{1}{3}\,\frac{1}{25}\,\frac{3}{2}$ di quanto valeva per $n = 2$, ovvero vale $\frac{1}{5000000} = 2\cdot 10^{-8}$, e quindi occorre arrivare all'ordine di sviluppo $n = 3$ per ottenere la precisione di 10^{-7}, ma non basta per ottenere quella a meno di 10^{-8} (con un passaggio in più si vede immediatamente che la precisione di 10^{-8} si ottiene con $n = 4$, perché per $n = 4$ il primo membro di sopra vale $\frac{1}{4}\,\frac{1}{25}\,\frac{5}{2}$ rispetto a prima, ossia vale $5\cdot 10^{-9}$. $\square$