Università di Roma Tor Vergata

Corso di Laurea in

Scienze e Tecnologie per i Media

Successioni, massimo e minimo limite e compattezza in $\mathbb{R}$

Massimo A. Picardello

CAPITOLO 1

Successioni limitate

Per prima cosa, rammentiamo che una successione $\{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ ha limite $\ell \in \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che, per ogni $n > N$, vale la disuguaglianza

$$|a_n - \ell| < \varepsilon\,.$$

Una successione $\{a_n\}$ è limitata se i suoi valori formano un insieme limitato inferiormente e superiormente, ossia se esiste una costante positiva M tale che $|a_n| < M$ per tutti gli n. Si osservi che una successione definitivamente limitata è limitata (perché tutti gli insiemi finiti sono limitati).

1.1. Massimo e minimo limite

Definizione 1.1.1. Sia $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successione *a valori reali*. Definiamo il massimo ed il minimo limite di $\{a_n\}$ rispettivamente come

$$\ell_+ := \max\lim a_n := \inf_{k\geqslant 0} \sup_{n\geqslant k} a_n$$

$$\ell_- := \min\lim a_n := \sup_{k\geqslant 0} \inf_{n\geqslant k} a_n$$

Corollario 1.1.2. *Se $\{a_n\}$ è illimitata inferiormente, allora $\ell_- = -\infty$; se è illimitata superiormente, allora $\ell_+ = +\infty$.*

Dimostrazione. Se $\{a_n\}$ è illimitata superiormente, allora $b_k = \sup_{n\geqslant k} a_n = +\infty$ per ogni k, quindi $\ell_+ = \inf_{n\geqslant k} b_k = +\infty$. Stessa dimostrazione per l'estremo inferiore. $\square$

Sia ora $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successione reale limitata (superiormente e inferiormente): ossia, esiste una costante $M > 0$ tale che $|a_n| < M$ per ogni n.

Corollario 1.1.3. *Il massimo ed il minimo limite di una successione limitata esistono finiti. Inoltre, $\ell_- \leqslant \ell_+$.*

Dimostrazione. Consideriamo la successione $b_k := \sup_{n\geqslant k} a_n$. Chiaramente, $\{b_k\}$ è una successione non crescente (perché all'aumentare di k si calcola l'estremo superiore su un insieme di valori più piccolo) e limitata inferiormente da $-M$: quindi esiste finito il suo estremo inferiore, ma questo estremo inferiore $\inf_k b_k$ è precisamente ℓ_+. Un ragionamento simmetrico basato ora sulla successione $b'_k := \inf_{n\geqslant k} a_n$ mostra che anche il minimo limite ℓ_- esiste finito (si lascia la dimostrazione per esercizio).

Nel caso di successioni illimitate (superiormente o inferiormente) l'enunciato segue direttamente dal Corollario 1.1.2. Invece, per una successione $\{a_n\}$ limitata, osserviamo che, per ogni k, si ha $b'_k = \inf_{n\geqslant k} a_n \leqslant \sup_{n\geqslant k} a_n = b_k$. Poiché b'_k è non decrescente e b_k è non crescente, si ha $b'_k \leqslant b_m$ per ogni k, m: infatti, se $m > k$ abbiamo $b'_k \leqslant b'_m \leqslant b_m$, mentre se $m < k$ abbiamo $b'_k \leqslant b_k \leqslant b_m$. Ne segue che, per ogni m, il numero b_m è un maggiorante dell'insieme $\{b'_k : k \in \mathbb{N}\}$, e quindi $\ell_- := \sup_k b'_k \leqslant b_m$ per ogni m. Ma allora abbiamo anche $\ell_- \leqslant \inf_k b_k := \ell_+$. □

Proposizione 1.1.4.
(*i*) *Per ogni $\varepsilon > 0$, a_n è definitivamente minore di $\ell_+ + \varepsilon$: ossia, esiste $N = N_\varepsilon$ tale che $a_n < \ell_+ + \varepsilon$ per ogni $n > N$. (Questo enunciato vale per qualunque successione, anche illimitata superiormente, nel qual caso diventa banale perché $\ell_+ = +\infty$).*
(*ii*) *Se $\{a_n\}$ è limitata superiormente (e quindi ℓ_+ è finito), per infiniti indici a_n è maggiore di $\ell_+ - \varepsilon$: ossia, esiste una sottosuccessione a_{n_k} tale che $a_{n_k} > \ell_+ - \varepsilon$ per ogni k.*
(*iii*) *Analogamente, per ogni $\varepsilon > 0$, a_n è definitivamente maggiore di $\ell_- - \varepsilon$, e se ℓ_- è finito esistono infiniti indici n'_k tali che $a_{n'_k} < \ell_- - \varepsilon$.*

Dimostrazione. (*i*): poniamo, come prima, $b_k = \sup_{n\geqslant k} a_n$. Allora $\ell_+ = \inf_k b_k$. Per definizione di estremo inferiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $k = k_\varepsilon$ tale che $b_k < \ell_+ + \varepsilon$. Quindi, per ogni $m > k = k_\varepsilon$, abbiamo

$a_n \leqslant \sup_{n \geqslant k} a_n = b_k < \ell_+ + \varepsilon$.

(ii): ancora per le proprietà dell'estremo inferiore $\ell_+ := \inf_k b_k$ si ha $b_k > \ell_+$ per ogni k. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché $b_k = \sup_{n \geqslant k} a_n$, per le proprietà dell'estremo superiore deve esistere un indice n_k tale che $a_{n_k} > b_k - \varepsilon$. Quindi $a_{n_k} > \ell_+ - \varepsilon$.

La dimostrazione di (iii) è analoga. □

Corollario 1.1.5. *(i) Sia $\{a_{n_k}\}$ una sottosuccessione di $\{a_n\}$ che converge ad un limite ℓ. Allora* $\min\lim a_n := \ell_- \leqslant \ell \leqslant \max\lim a_n := \ell_+$.

(ii) Esistono sottosuccessioni $\{a_{n_k}\}$, $\{a_{n'_k}\}$ che convergono a ℓ_+, ℓ_-, rispettivamente.

(iii) Se $\ell_+ = \ell_-$ allora $a_n \to \ell_+ = \ell_-$. Viceversa, se $\{a_n\}$ converge ad un limite ℓ (finito od infinito), allora $\ell_+ = \ell_- = \ell$.

Dimostrazione. (i): per ogni $\varepsilon > 0$, la Proposizione precedente assicura che definitivamente si ha

$$\ell_- - \varepsilon < a_n < \ell_+ + \varepsilon \,. \tag{1.1.1}$$

Quindi, per il teorema del confronto, $\ell_- - \varepsilon \leqslant \ell \leqslant \ell_+ + \varepsilon$ per ogni ε. Pertanto $\ell_- \leqslant \ell \leqslant \ell_+$.

(ii): per la Proposizione precedente, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ che verifica $\ell_+ - \varepsilon < a_{n_k} < \ell_+ + \varepsilon$ definitivamente. Scegliamo $\varepsilon = 1/m$ e chiamiamo j_m il primo indice per cui si ha $\ell_+ - \frac{1}{m} < a_{j_m} < \ell_+ + \frac{1}{m}$: per quanto appena osservato, per ogni m esiste un tale indice. Per definizione di limite, la sottosuccessione $\{a_{j_m}\}$ converge a ℓ_+. Una sottosuccessione che converge a ℓ_- si costruisce in modo analogo.

(iii): se il numero $\ell_- = \ell_+ := \ell$ è finito, allora $a_n \to \ell$ in base alle disuguaglianze (1.1.1). Se invece $\ell_+ = -\infty = \ell_-$, rammentando che $\ell_+ = \inf b_k$ con $b_k = \sup_{n \geqslant k} a_n$, abbiamo $\inf b_k = -\infty$, e quindi per ogni M esiste k tale che $b_k = \sup_{n \geqslant k} a_n < M$. Pertanto, per ogni M, $a_n < M$ definitivamente, e di conseguenza $a_n \to -\infty$. Stessa dimostrazione nel caso $\ell_- = +\infty$.

Viceversa, se $\{a_n\}$ converge ad un limite ℓ, allora ogni sottosuccessione di $\{a_n\}$ deve anch'essa convergere a ℓ, e quindi, per la Proposizione precedente, $\ell_+ = \ell_- = \ell$. $\square$

Corollario 1.1.6. *Da ogni successione limitata, anche a valori complessi, si può estrarre una sottosuccessione convergente ad un limite finito.*

Dimostrazione. L'enunciato segue immediatamente dai Corollari 1.1.3 e 1.1.5 per successioni $\{a_n\}$ a valori reali. Se gli a_n sono complessi, scriviamo $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, con α_n, $\beta_n \in \mathbb{R}$. Per quanto appena detto, poiché gli α_n sono reali, esiste, una sottosuccessione $\{\alpha_{n_j}\}$ convergente ad un limite $\alpha \in \mathbb{R}$. Limitiamo l'attenzione agli indici $\{n_j\}$ ed alla (sotto)successione (reale) $\{\beta_{n_j}\}$: anch'essa ha una sottosuccessione convergente a qualche numero reale β, diciamo $\left\{\beta_{n_{j_k}}\right\}$. Natulamente, la sottosuccessione $\left\{\alpha_{n_{j_k}}\right\}$ di $\{\alpha_{n_j}\}$ continua a convergere ad α, e quindi la sottosuccessione costituita dai numeri $\left\{a_{n_{j_k}} = \alpha_{n_{j_k}} + i\beta_{n_{j_k}}\right\}$ converge ad $\alpha + i\beta$. $\square$

1.2. Successioni di Cauchy

Definizione 1.2.1. Una successione $\{a_n\}$ si dice una *successione di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $|a_n - a_m| < \varepsilon$ per ogni n, $m > N$.

Definizione 1.2.2. Chiamiamo *variazione* della successione $\{a_n\}$ la successione $\{\mathrm{Var}_k\}$ definita da

$$\mathrm{Var}_k = \sup_{n,m \geqslant k} |a_n - a_m| \,.$$

Il seguente fatto è ovvio:

Corollario 1.2.3. *Una successione è di Cauchy se e solo se la sua variazione tende a zero.*

Nota 1.2.4. *Ogni successione di Cauchy è limitata. Infatti, fissiamo un valore di ε, ad esempio $\varepsilon = 1$. In corrispondenza ad esso esiste N tale che $-1 < a_n - a_m < 1$ per ogni n, $m > N$. Fissiamo un qualsiasi indice $m_0 > N$: dalla precedente disuguaglianza abbiamo $a_{m_0} - 1 <$*

$a_n < a_{m_0} + 1$ per ogni $n > N$ (ovvero $a_m - 1 < a_n < a_m + 1$), quindi la successione $\{a_n\}$ è definitivamente limitata fra le costanti $a_{m_0} - 1$ e $a_{m_0} + 1$; essendo definitivamente limitata, è limitata, come abbiamo osservato all'inizio di questo Capitolo.

Il prossimo teorema fornisce un criterio di convergenza per successioni la cui verifica, a differenza dalla definizione di limite, non richiede la conoscenza o la congettura di quale sia il valore del limite.

TEOREMA 1.2.5. *Una successione limitata (in generale a valori complessi) ha limite se e solo se è di Cauchy.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{a_n\}$ una successione in generale a valori complessi. Supponiamo $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$: questo vuol dire che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste N tale che $|a_n - \ell| < \varepsilon$ per $n > N$. Pertanto, grazie alla disuguaglianza triangolare, per tutti gli indici n, $m > N$,

$$|a_n - a_m| = |a_n - \ell + \ell - a_m| \leqslant |a_n - \ell| + \ell - a_m| < 2\varepsilon$$

e quindi $\{a_n\}$ è di Cauchy.

Viceversa, sia $\{a_n\}$ una successione di Cauchy a valori reali, o, se si preferisce formulare il concetto in questa terminologia, $\mathrm{Var}_k \to 0$. Allora la successione è limitata, come osservato alla Nota precedente, e quindi ℓ_+ e ℓ_- sono finiti (Corollario 1.1.3). È sufficiente mostrare che $\ell_+ = \ell_-$. In effetti, supponiamo per assurdo $\ell_+ > \ell_-$. Poniamo $d = \ell_+ - \ell_- > 0$ e sia $\varepsilon < d/3$. In base alla Proposizione 1.1.4 esistono due sottosuccessioni $a_{n_k} \to \ell_+$ e $a_{n'_k} \to \ell_-$: in particolare, da un certo indice N in poi, si ha $a_{n_k} > \ell_+ - \varepsilon$ e $a_{n'_k} < \ell_- + \varepsilon$. Quindi $a_{n_k} - a_{n'_k} > \ell_+ - \ell_- - 2\varepsilon = d - 2\varepsilon > \varepsilon$, perché abbiamo scelto $\varepsilon < d/3$. Pertanto $\{a_n\}$ non è di Cauchy (la sua variazione $\mathrm{Var}_k > \varepsilon$ per tutti i k e quindi non tende a zero).

Mostriamo infine che, anche se la successione di Cauchy $\{a_n\}$ è a valori complessi, essa ha limite. Il ragionamento è identico a quello della dimostrazione del Corollario 1.1.6, ma lo ripetiamo a beneficio del lettore. Procediamo passando alle parti reale ed immaginaria. Consideriamo le successioni reali $\{\mathrm{Re}\, a_n\}$ e $\{\mathrm{Im}\, a_n\}$: poiché per ogni numero complesso z si ha $|\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z|$ e $|\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z|$, anche le due successioni $\{\mathrm{Re}\, a_n\}$ e $\{\mathrm{Im}\, a_n\}$ sono di Cauchy. Pertanto esse hanno limite, per quanto visto finora: chiamiamo ℓ_r e ℓ_i i rispettivi limiti. Ma allora

$\operatorname{Re} a_n \to \ell_r$ e $\operatorname{Im} a_n \to \ell_i$ e quindi $a_n = \operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n \to \ell_r + i\ell_i$.
$\square$

1.3. Compattezza per successioni

Il seguente teorema generalizza molto notevolmente il Corollario 1.1.6.

Teorema 1.3.1. **(Bolzano–Weierstrass.)** *Ogni sottoinsieme limitato infinito di $\mathbb{R}$ ha un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Sia E un insieme infinito limitato in $\mathbb{R}$. Allora E è contenuto in qualche intervallo $[a, b]$. Poniamo $d = |b - a|$ e bisechiamo l'intervallo in due metà. Almeno uno dei due sottointervalli deve contenere infiniti punti di E: scegliamo questa metà (o una delle due a caso se entrambe contengono infiniti punti di E), chiamiamola E_1, osserviamo che è un intervallo di lunghezza $d/2$ e scegliamo in esso un elemento a_1. Procediamo ricorsivamente a suddividere il sottointervallo E_{n-1} al passo di ricorrenza n (che ha lunghezza $d/2^{n-1}$) in due metà, di cui almeno una, diciamo E_n contiene infiniti punti di E, e scegliamo in essa uno di questi punti, a_n, *diverso da tutti i precedenti a_j per $j < n$*: questo è possibile perché ci sono infiniti punti di E in E_n. Osserviamo che, per $m \geqslant n$, si ha $a_m \in E_n$: poiché E_n è un intervallo di lunghezza $d/2^n$, la successione $\{a_n\}$ è di Cauchy. Pertanto essa converge ad un limite a: a causa del fatto che gli a_n sono stati scelti tutti diversi, a è un punto di accumulazione della successione, e quindi di E. $\square$

Per il prossimo risultato occorre una caratterizzazione degli insiemi chiusi in $\mathbb{R}$, ossia gli insiemi che sono complementari di aperti. Rammentiamo che

Definizione 1.3.2. Un insieme O è aperto se ogni suo punto appartiene ad un intervallo aperto tutto contenuto in O).
Un insieme è chiuso se è il complementare di un aperto.

Ora stabiliamo una terminologia opportuna:

Definizione 1.3.3. Dato un insieme E, i punti di E che appartengono ad un intervallo aperto contenuto in E si chiamano *punti interni*, e

l'insieme dei punti interni di E si indica con E°.
Un punto è *esterno* ad E se è interno al complementare $\complement E$ di E, ossia se è contenuto in un intervallo aperto disgiunto da E. L'esterno di E verrà qui indicato con $\operatorname{Ext} E$.
Un punto si dice *di frontiera* per E se non è né interno né esterno, ossia se ogni intervallo aperto che lo contiene interseca E ma non è interamente contenuto in E. La frontiera di E si indica con ∂E. Osserviamo che si ha

$$\mathbb{R} = E^\circ \cup \partial E \cup \operatorname{Ext} E \tag{1.3.1}$$

Si chiama *chiusura* di E l'insieme $\overline{E} := E \cup \partial E$.

NOTA 1.3.4. *È evidente che un insieme E è aperto se e solo se $E = E^\circ$. Infatti, per definizione di aperto, E è aperto se e solo se ogni suo punto è interno.*
Osserviamo anche, comunque si scelga E, l'insieme E° è aperto. Infatti, per la sua definizione, ogni $x \in E^\circ$ appartiene ad un intervallo aperto I_x tutto contenuto in E. Per mostrare che E° è aperto basta mostrare che I_x è contenuto in E°. Ma ogni altro punto $y \in I_x$ appartiene anch'esso all'intervallo aperto $I_x \subset E$, e quindi è interno a E, ossia è in E°.
Esattamente lo stesso argomento prova che $\operatorname{Ext} E$ *è aperto; ma se non vogliamo ripetere l'argomento, basta comunque osservare che* $\operatorname{Ext} E$ *è l'interno di un insieme:* $\operatorname{Ext} E := (\complement E)^\circ$.
Osserviamo poi che $\overline{E}$ è un chiuso. Infatti ora mostriamo che il suo complemento è aperto, e più precisamente che

$$\complement \overline{E} = \operatorname{Ext} E\ . \tag{1.3.2}$$

Infatti, se un punto x non appartiene a $\overline{E}$, allora, in base alla decomposizione (1.3.1), deve essere $x \in \operatorname{Ext} E$, quindi $\complement \overline{E} \subset \operatorname{Ext} E$. Mostriamo allora la inclusione opposta,

$$\operatorname{Ext} E \subset \complement \overline{E}\ . \tag{1.3.3}$$

dal momento che $\overline{E} := E \cup \partial E$, abbiamo che $\complement \overline{E} = \complement E \cap \complement \partial E$. Ora, è chiaro che $\operatorname{Ext} E \subset \complement E$ perché $\operatorname{Ext} E$ è disgiunto da E, ed anche che $\operatorname{Ext} E \subset \complement \partial E$, perché $\operatorname{Ext} E$ è anche disgiunto da ∂E (ogni intorno aperto di un punto di ∂E contiene qualche punto di E, mentre i punti di $\operatorname{Ext} E$ ammettono qualche intorno aperto che non contiene punti di

E). Quindi $\operatorname{Ext} E \subset \complement E \cap \complement \partial E = \complement \overline{E}$. *Questo prova (1.3.3), e quindi (1.3.2).*
Infine, è evidente che i punti di frontiera di E sono punti di accumulazione.

LEMMA 1.3.5. *Se E è chiuso, allora*

(*i*) $E = E^\circ \cup \partial E$;
(*ii*) $\overline{E} = E$.

DIMOSTRAZIONE. Se E è chiuso, il suo complementare è aperto, quindi $\operatorname{Ext} E := (\complement E)^\circ = \complement E$. Ma allora da (1.3.1) abbiamo $E^\circ \cup \partial E = \complement \operatorname{Ext} E = \complement\complement E = E$. Questo prova ($i$). Da qui segue $\overline{E} := E \cup \partial E = (E^\circ \cup \partial E) \cup \partial E = E^\circ \cup \partial E$, ossia ($ii$). □

PROPOSIZIONE 1.3.6. *Le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(*i*) *E è chiuso;*
(*ii*) $\partial E \subset E$;
(*iii*) $E = \overline{E}$;
(*iv*) *E contiene l'insieme* $\operatorname{Acc} E$ *dei suoi punti di accumulazione.*

DIMOSTRAZIONE. Per la prima parte del Lemma precedente, se E è chiuso si ha $E = E^\circ \cup \partial E$. In particolare $\partial E \subset E$. Pertanto (i) $\Rightarrow$ (ii).
Viceversa, se $\partial E \subset E$ allora $E = E \cup \partial E := \overline{E}$: quindi ($ii$) $\Rightarrow$ (iii).
È ovvio che $E = \overline{E}$ implica che E sia chiuso, perché sappiamo dalla Nota 1.3.4 che $\overline{E}$ è un chiuso: quindi (iii) $\Rightarrow$ (i).
Infine, notiamo che un punto di accumulazione di E non può appartenere a $\operatorname{Ext} E$, perché altrimenti esisterebbe un suo intorno disgiunto da E. Quindi, in base a (1.3.1), si ha $\operatorname{Acc} E \subset E^\circ \cup \partial E$. Quindi, se E è chiuso, abbiamo $\operatorname{Acc} E \subset E$, dalla parte ($i$) del Lemma precedente: pertanto (i) implica (iv). Viceversa, se $\operatorname{Acc} E \subset E$, segue dalla Nota 1.3.4 che $\partial E \subset \operatorname{Acc} E \subset E$. Quindi ($iv$) implica ($ii$). □

DEFINIZIONE 1.3.7. Un insieme $K \subset \mathbb{R}$ è (sequenzialmente) compatto se da ogni successione a valori in K si può estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto di K (si osservi in particolare che questo punto limite è in $\mathbb{R}$, non è infinito).

TEOREMA 1.3.8. *Un insieme è sequenzialmente compatto se e solo se è limitato e chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. È chiaro che un insieme compatto K deve essere limitato superiormente: se non lo fosse, per ogni intero n potremmo trovare un punto $k_n \in K$ tale che $k_n > n$. Ma allora, per il Teorema del Confronto, $k_n \to \infty$, e quindi ogni sottosuccessione diverge positivamente. Un ragionamento identico prova che K deve essere anche limitato inferiormente.
Inoltre, un insieme compatto K deve essere chiuso. Dimostriamolo per assurdo. Se K non fosse chiuso, la sua frontiera non sarebbe contenuta in K, in base alla Proposizione 1.3.6. Ma allora sia $x \in \partial K \setminus K$. Sappiamo dalla Nota 1.3.4 che x, essendo un punto di frontiera, è anche un punto di accumulazione di K. Quindi esiste una successione di punti $k_n \in K$ che converge a $x \notin K$: lo stesso quindi capita ad ogni sua sottosuccessione, ma allora K non è compatto.

Viceversa, mostriamo che ogni insieme K limitato e chiuso è compatto. Sia $\{k_n\}$ una successione non costante in K, e notiamo che, essendo in K, la successoione è limitata. Passando se necessario ad una sottosuccessione, si può restringere l'attenzione al caso in cui $\{k_n\}$ non abbia sottosuccessioni costanti. In base al Corollario 1.1.6, si può estrarre una sottosuccessione convergente ad un limite k finito. Poiché questa sottosuccessione non ha sottosuccessioni costanti, k è un punto di accumulazione di K. Poiché pero' K è chiuso, esso contiene tutti i suoi punti di accumulazione, in base alla Proposizione 1.3.6. Quindi $k \in K$, e la dimostrazione è completa. $\square$