

Analisi armonica: aspetti classici e numerici

*Serie e trasformate di Fourier,
trasformate di Laplace e zeta,
trasformata discreta di Fourier, FFT e wavelets,
filtri e trattamento numerico dei segnali*

Massimo A. Picardello

Dipartimento di Matematica
Università di Roma “Tor Vergata”
Via della Ricerca Scientifica
00133 Roma, Italy
e-mail: picard@mat.uniroma2.it

BOZZA 10.4.2022 23:58

Indice

Prefazione	xiii
------------	------

I Preliminari di Analisi Reale, Complessa e Funzionale	3
---	----------

1 Panoramica su calcolo ed analisi reale	5
1.1 Fatti elementari ben noti	5
1.2 Spazi normati e completezza	15
1.3 Convergenza uniforme	22
1.3.1 Convergenza di successioni di funzioni	22
1.3.2 Convergenza uniforme di serie	34
1.4 Serie di potenze	39
1.5 Esercizi	46
1.6 Serie di Taylor	54
1.6.1 Sviluppabilità in serie di Taylor	54
1.6.2 *Funzioni analitiche reali	56
1.6.3 *La serie binomiale	59
1.7 Spazi ℓ^p	61
1.8 Uniforme continuità	70
1.9 Misura ed integrale di Lebesgue	72
1.9.1 Insiemi aperti ed insiemi misurabili	74
1.9.2 Caratterizzazione della integrabilità secondo Riemann	83
1.9.3 Funzioni misurabili secondo Lebesgue	84
1.9.4 Costruzione dell'integrale di Lebesgue	85
1.10 *Topologie e proprietà di separazione	95
1.11 *Caratterizzazione della compattezza	104
1.12 *Equicontinuità	106

1.13	*Topologie deboli indotte da famiglie di funzioni	108
1.14	*Approssimazione con funzioni semicontinue o continue	110
1.15	Funzioni convesse	116
1.16	Spazi L^p	123
1.17	Inclusioni fra spazi L^p e fra spazi ℓ^p	135
1.18	Densità di $C(I)$ in $L^p(I)$	136
1.19	Dualità fra spazi L^p	143
1.20	Integrali multipli	148
1.21	Limiti e continuità in più variabili	152
1.22	Calcolo in più variabili e cambio di variabili negli integrali	158
	1.22.1 Derivate parziali e differenziale	159
	1.22.2 *Derivata complessa e differenziabilità	165
	1.22.3 Regola della catena, invertibilità locale	165
	1.22.4 Integrazione per cambiamento di variabile	168
1.23	Integrali dipendenti da un parametro	171
	1.23.1 Derivazione sotto il segno di integrale	171
	1.23.2 Integrali su domini illimitati, uniformem. convergenti	173
	1.23.3 Integrali con singolarità, uniformemente convergenti	176
	1.23.4 Esempio: la funzione Gamma	176
1.24	Misura esterna e Lemma di Vitali	178
1.25	Derivabilità di funzioni monotone	181
1.26	Funzioni di variazione limitata	184
1.27	*Il teorema fondamentale del calcolo	187
1.28	*Funzioni assolutamente continue	191
	1.28.1 **Variazione limitata e misure di Borel	202
	1.28.2 **Funzioni continue singolari	204
	1.28.3 **L'insieme di Cantor	205
1.29	*Integrali curvilinei e forme differenziali	211
	1.29.1 Curve regolari	211
	1.29.2 Curve di lunghezza finita	214
	1.29.3 Integrali curvilinei di campi scalari	215
	1.29.4 Altre nozioni di integrale curvilineo	217
	1.29.5 Campi vettoriali e forme differenziali	222
	1.29.6 Insiemi connessi	223
	1.29.7 Campi conservativi e forme differenziali esatte	225
	1.29.8 *Forme differenziali esatte di classe C^1	227
1.30	Appendice: misura di Lebesgue secondo Carathéodory	230
	1.30.1 Misura esterna	230

1.30.2	Insiemi misurabili secondo Lebesgue	232
1.30.3	I Boreliani sono misurabili	234
1.30.4	Misura di Lebesgue	236
1.31	Appendice: disuguaglianza di Minkowski	237
2	Analisi complessa	239
2.1	*Derivata complessa e differenziabilità	239
2.2	Funzioni olomorfe ed armoniche	243
2.3	Indice di avvolgimento	246
2.4	Invarianza per omotopia e teorema di Cauchy	248
2.5	Formula di Cauchy	253
2.6	Zeri di funzioni olomorfe	258
2.7	Singularità rimovibili ed essenziali	259
2.8	Crescita di funzioni olomorfe	261
2.9	Sviluppi di Laurent	264
2.10	Il teorema dei residui	269
2.11	L'indicatore logaritmico	272
2.12	Calcolo di integrali	273
2.12.1	Integrali di funzioni senza singolarità reali	274
2.12.2	Integrali di funzioni con poli semplici reali	276
2.12.3	Trasformate di Fourier di funzioni limitate all'infinito	280
2.12.4	La trasformata di Fourier della funzione sinc	281
2.12.5	Integrali di espressioni trigonometriche razionali	284
2.12.6	Residui: esercizi ed esempi	286
2.13	La funzione Gamma	298
2.14	Prolungamento analitico	301
2.14.1	Il logaritmo complesso: definizione naturale	301
2.14.2	Elementi analitici di funzione	302
2.14.3	Prolungamento analitico lungo curve	304
2.14.4	Primitive complesse e logaritmo	311
2.14.5	Rami olomorfi	319
2.15	Interpolazione sulle strisce: il teorema di Phragmén–Lindelöf	329
2.16	Appendice: teorema di Cauchy in un convesso	332
3	Spazi vettoriali topologici, analisi funzionale	337
3.1	Spazi vettoriali topologici	338
3.1.1	Sottospazi e quozienti	339
3.1.2	Intorni bilanciati	342

3.1.3	Proprietà di separazione e di limitatezza	343
3.2	**Spazi metrizzabili e normabili	346
3.2.1	*Spazi vettoriali localmente limitati	346
3.2.2	Spazi metrizzabili	347
3.2.3	Spazi normabili	351
3.2.4	**Appendice: seminorme, topologie localmente con-	
	vesse e funzioni di supporto	353
3.3	Operatori lineari e funzionali lineari continui	355
3.3.1	Operatori lineari continui	355
3.3.2	Funzionali lineari continui	359
3.4	*Assioma della scelta e principio di massimalità	360
3.5	Il teorema di Hahn–Banach	362
3.6	Teorema di Hahn–Banach in forma geometrica	370
3.7	*Prodotto di spazi compatti	373
3.8	Dualità su spazi vettoriali topologici	376
3.9	*Teorema di Krein–Milman	380
3.9.1	*Separabilità di insiemi convessi con funzionali	380
3.9.2	*Teorema di Krein–Milman	384
3.9.3	*Punti estremi di sfere in spazi di Banach	387
3.10	Il teorema di Banach–Alaoglu	392
3.11	Topologia debole*; spazi riflessivi	396
3.11.1	Annichilatori; duali di sottospazi e di quozienti	400
3.11.2	Annichilatori e riflessività	403
3.12	Esempi di dualità fra spazi di Banach	405
3.13	Il teorema di categoria di Baire	410
3.13.1	Teorema di Baire	410
3.13.2	Insiemi di prima e di seconda categoria	411
3.13.3	**Basi di Hamel	412
3.14	Il teorema di uniforme limitatezza	414
3.15	Il teorema dell’applicazione aperta	416
3.16	Il teorema del grafico chiuso	422
3.17	L’operatore aggiunto; kernel e range di un operatore lineare	423
3.18	Operatori compatti; l’alternativa di Fredholm	427
3.19	*Seminorme e spazi localmente convessi	430
3.19.1	Famiglie numerabili di seminorme	431
3.20	Esempi di spazi di Fréchet	434
3.20.1	Gli spazi $C^\infty(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ e \mathcal{D}_K	434
3.20.2	La topologia di limite induttivo su $\mathcal{D}(\Omega)$	438

3.21	*Proprietà di Heine–Borel	446
3.21.1	Proprietà di Heine–Borel	450
3.22	*Esempi esotici: spazi non localmente limitati	452
3.22.1	$C^\infty(\Omega)$ non è localmente limitato	452
3.23	**Esempi esotici: spazi non localmente convessi	454
3.23.1	Spazi $L^p[0, 1]$ e $L^p(\mathbb{R})$ per $0 < p < 1$	454
3.23.2	Un compatto numerabile senza punti estremi	457
3.23.3	Spazi ℓ^p per $0 < p < 1$	458
3.24	Il teorema di interpolazione di Riesz–Thorin	460
II Serie e trasformate di Fourier		461
4	Spazi di Hilbert	463
4.1	Teorema di migliore approssimazione	463
4.2	Completezza	469
4.3	Sistemi ortonormali	472
4.4	Spazi di Hilbert	479
4.5	Disuguaglianza di Cauchy–Schwarz	488
4.6	Operatori e funzionali lineari, dualità	489
5	Serie di Fourier	497
5.1	Il sistema trigonometrico	497
5.2	Sviluppi di Fourier in L^2	504
5.3	Esempi di sviluppi di Fourier in L^2	508
5.4	Sviluppi di Fourier in L^1	515
5.5	Problematiche sulle serie di Fourier	515
5.6	Sviluppi di Fourier con periodo arbitrario	519
5.7	Scelta del periodo	520
5.8	Somme di Dirichlet	521
5.9	Stime puntuali ed uniformi per il resto n -esimo	525
5.10	Visualizzazione del Lemma di Riemann–Lebesgue	536
5.11	Gli spazi $LIP(\alpha)$	538
5.12	Convergenza puntuale e uniforme in $LIP(\alpha)$	545
5.13	Completezza del sistema trigonometrico	548
5.14	La funzione a denti di sega	555
5.15	Serie di Fourier di funzioni C^1 a tratti con salti	557
5.16	Derivazione ed integrazione di serie di Fourier	559

5.17	Velocità di convergenza della serie di Fourier	564
5.18	Ordine di infinitesimo dei coefficienti	567
5.19	Fenomeno di Gibbs	577
5.20	Esercizi	587
6	Approssimazione trigonometrica e polinomiale	617
6.1	Convoluzione ed identità approssimate	617
6.2	Nucleo di Féjèr ed altri nuclei di sommabilità	631
6.2.1	Nucleo di Féjèr	633
6.2.2	*Nucleo di Poisson	640
6.2.3	*Nucleo di de la Vallée-Poussin	644
6.3	*Approssimazione con polinomi	646
7	*Complementi sulle serie di Fourier	651
7.1	Premessa notazionale	651
7.2	Serie di Fourier: un approccio facile	652
7.3	Coefficienti di Fourier di funzioni BV e $Lip(\alpha)$	658
7.4	Convergenza puntuale di serie di Fourier di funzioni BV	659
7.5	I test di Dini e Jordan	661
7.6	Convergenza in norma di serie di Fourier	668
7.6.1	Divergenza delle costanti di Lebesgue	669
7.6.2	Spazi di Banach omogenei sul toro	671
7.6.3	Divergenza in norma in L^1 e C	674
7.6.4	La funzione coniugata	678
7.6.5	Una serie trigonometrica coniugata che non è di Fourier	686
7.6.6	L^p_* ammette coniugazione per $1 < p < \infty$	691
7.6.7	Convergenza in norma in spazi con coniugazione	695
7.7	*L'operatore coniugato è di tipo debole 1-1	698
7.7.1	La funzione di distribuzione	698
7.7.2	Lo spazio L^p debole	699
7.7.3	L'operatore coniugato è di tipo debole 1-1	702
7.7.4	**L'operatore coniugato manda $L \log L$ in L^1	705
7.7.5	**L'operatore coniugato come operatore integrale sin- golare	709
7.8	*Appendice: il teorema massimale di Hardy–Littlewood	709
7.8.1	Operatori massimali	709
7.8.2	Limitatezza dell'operatore massimale di Hardy–Littlewood	710
7.8.3	**Limitatezza dell'operatore coniugato massimale radiale	713

7.9	Insiemi di divergenza puntuale	714
7.10	Appendice: la disuguaglianza di Hausdorff–Young	714
7.11	Appendice: interpolazione di norme e di operatori, teorema di Riesz–Thorin	716
8	Trasformata di Fourier	717
8.1	Dal discreto al continuo: approccio intuitivo	717
8.2	Proprietà della trasformata di Fourier	721
8.3	Trasformata di Fourier della Gaussiana	734
8.4	Teorema di inversione di Fourier	737
8.5	Convoluzione e teorema di Plancherel	739
8.6	Localizzazione nel tempo e nella frequenza	743
8.7	**Appendice: la disuguaglianza di Heisenberg	745
8.8	Esercizi	749
8.9	Varianti dei precedenti esercizi	760
9	Classe di Schwartz	773
9.1	Convergenza rispetto a famiglie di seminorme	773
9.2	Continuità rispetto a famiglie di seminorme	777
9.3	Classe di Schwartz	779
9.4	Completezza di \mathcal{S}	782
9.5	Operatori lineari continui su \mathcal{S}	784
9.6	Prodotto con funzioni a crescita polinomiale	786
9.7	Trasformata di Fourier su \mathcal{S}	789
9.8	Operatori di convoluzione su \mathcal{S}	794
9.9	Esercizi	797
III	Campionamento e ricostruzione di segnali	807
10	Campionamento	809
10.1	Campionamento di segnali	809
10.2	Periodicizzazione	812
10.3	Formula di somma di Poisson	815
10.4	Teorema del campionamento	818

11 Distribuzioni	829
11.1 Campionamento e funzionali	829
11.2 Funzionali continui e prodotti scalari	837
11.3 Dualità	838
11.4 Densità di \mathcal{S} e convergenza in \mathcal{S}'	844
11.5 Distribuzioni temperate	849
11.6 Convergenza puntuale e convergenza in \mathcal{S}'	854
11.7 Serie di distribuzioni temperate	856
11.8 La δ non è una funzione	863
11.9 Operatori sulle distribuzioni	868
11.9.1 Moltiplicazione per una funzione	868
11.9.2 Derivata	870
11.10 Derivate, primitive ed approssimazioni in \mathcal{S}'	872
11.11 Supporto di distribuzioni	878
11.12 Trasformata di Fourier su \mathcal{S}'	879
11.13 Proprietà della trasformata di Fourier	882
11.14 Convoluzione con funzioni	890
11.15 Convoluzione con la delta e traslazione	892
11.16 Appendice: identità approssimate	894
11.17 Esercizi	897
11.18 Distribuzioni non temperate	935
11.18.1 Lo spazio \mathcal{D}	936
11.18.2 Convergenza nel senso delle distribuzioni	937
11.18.3 Supporto e convoluzione di distribuzioni	938
11.18.4 Distribuzioni e distribuzioni temperate	939
12 Approssimanti in \mathcal{S} del treno di impulsi	941
12.1 Il treno di impulsi	941
12.2 Trasformata di Fourier del treno di impulsi	943
12.3 Approssimanti di K	947
12.4 *Appendice: approssimazione di K con funzioni in \mathcal{S}	952
12.5 Appendice: radici dell'unità	959
13 Ricostruzione ed aliasing	963
13.1 Campionamento e distribuzioni	963
13.2 Ricostruzione numerica ingenua	971
13.3 Ricostruzione numerica corretta	973
13.4 Campionamento di distribuzioni	975

13.5	Aliasing	981
13.5.1	Campionamento multidimensionale e risoluzione di immagini	985
13.6	Ricostruzione di segnali nella pratica quotidiana: prefiltraggio e stabilità	986
13.6.1	Segnali a durata finita	986
13.6.2	Stabilità della ricostruzione sotto perturbazioni dei dati	990
13.6.3	Ricostruzione esatta e ricostruzioni approssimate	991
13.7	Cenni sul campionamento non uniforme	992
 IV DFT, DCT, FFT, deconvoluzione		1001
 14 DFT		1003
14.1	Segnali periodici e discreti	1003
14.2	Discretizzazione e DFT	1004
14.3	*Trasformata di Fourier su \mathbb{Z}_N	1010
14.4	Convoluzione ciclica e DFT	1014
14.5	Convoluzione non normalizzata	1021
14.6	Traslazione e DFT	1023
14.7	Parità e DFT di successioni reali	1026
14.8	DFT e dilatazioni	1029
14.9	RDFT	1032
14.10	DCT	1035
14.11	DFT, periodicizzazione e formula di somma di Poisson	1037
14.12	Esercizi	1039
 15 FFT		1053
15.1	Dalla DFT alla FFT	1053
15.2	Algoritmi FFT basati sulla decimazione nel tempo	1055
15.2.1	Bit reversal	1067
15.3	Algoritmi FFT basati sulla decimazione in frequenza	1070
15.4	Algoritmi FFT a radice 2	1076
15.5	Algoritmi di FFT a radice arbitraria	1080
15.6	Preprocessing e postprocessing	1088
15.7	Esercizi	1092

16	L'errore di approssimazione di \mathfrak{F} con la DFT	1095
16.1	DFT e coefficienti di Fourier	1096
16.1.1	La formula di somma di Poisson discreta	1096
16.1.2	Dati periodici, spettro limitato: ricostruzione esatta	1098
16.1.3	Dati periodici, spettro illimitato: stima dell'errore	1100
16.2	DFT e trasformata di Fourier	1103
16.2.1	Funzioni a supporto compatto	1103
16.2.2	Funzioni a banda spettrale limitata	1107
16.2.3	Supporto e banda spettrale illimitate	1110
17	Deconvoluzione e DFT a finestre	1115
17.1	Deconvoluzione non partizionata	1115
17.1.1	Filtri invarianti per traslazione	1115
17.1.2	Soppressione a posteriori dell'equalizzazione	1118
17.2	Convoluzione a finestre; equalizzazione in tempo reale	1124
17.3	De-equalizzazione in tempo reale	1130
17.3.1	Esempi numerici di de-equalizzazione	1134
V	Trasformata di Laplace, trasformata zeta, filtri lineari	1147
18	Trasformata di Laplace	1149
18.1	Trasformata di Laplace, inversione	1149
18.2	Proprietà della trasformata di Laplace	1155
18.3	Esempi di trasformate di Laplace	1159
18.4	Trasformata di Laplace della convoluzione	1161
18.5	Trasformata di Laplace di distribuzioni	1163
18.5.1	Distribuzioni a supporto in \mathbb{R}^+	1163
18.5.2	Immagine di \mathcal{L} su \mathcal{D}'	1166
18.5.3	Continuità di \mathcal{L} su \mathcal{D}'	1168
18.5.4	Distribuzioni a supporto bi-illimitato	1169
18.6	\mathcal{L} su \mathcal{D} e teoremi di Paley–Wiener	1171
19	Trasformata zeta	1181
19.1	Trasformata zeta e sue proprietà	1182
19.2	Inversione della trasformata zeta	1189
19.2.1	Metodo iterativo di inversione per funzioni razionali	1197

19.3	Trasformata zeta e convoluzione	1198
20	Sistemi a tempo discreto: filtri digitali	1205
20.1	Equazioni alle differenze	1205
20.2	Sistemi a tempo discreto: filtri digitali lineari di ordine finito .	1209
20.2.1	Filtri digitali causali e stabili	1212
20.2.2	Filtri stabili del primo e secondo ordine	1217
20.2.3	Risposta all'impulso di filtri causali razionali	1218
20.3	Analisi spettrale di filtri digitali lineari	1221
20.3.1	Risposta in frequenza di filtri causali	1224
20.4	Fattorizzazione fase minima + passa-tutto	1237
20.4.1	Invertibilità e filtri a fase minima; filtri a fase massima o mista	1237
20.4.2	Filtri a fase minima	1239
20.4.3	Filtri passa-tutto	1243
20.4.4	Fattorizzazione fase minima + passa-tutto	1250
20.4.5	Filtri a retroazione (<i>feedback</i>)	1255
20.5	Filtri <i>AZ</i> e filtri <i>AP</i>	1262
20.6	Diagrammi di flusso di filtri digitali lineari	1262
VI	Wavelets e compressione dei segnali	1267
21	Il sistema di Haar	1269
21.1	Intervalli diadici	1269
21.2	Funzioni semplici diadiche	1271
21.3	Il sistema di Haar su \mathbb{R}	1272
21.4	Ortogonalità del sistema di Haar	1273
21.5	Il Lemma di divisione	1276
21.6	Sistemi ortonormali completi	1277
21.7	Completezza del sistema di Haar su \mathbb{R}	1278
21.8	Il sistema di Haar su $[0, 1]$	1280
21.9	Ortonormalità del sistema di Haar su $[0, 1]$	1280
21.10	Localizzazione delle discontinuità	1283
22	L'Analisi in Multirisoluzione	1287
22.1	Richiami di analisi di Fourier	1287
22.1.1	Serie di Fourier	1287

22.1.2	Trasformata di Fourier	1288
22.2	Sistemi ortonormali di traslate	1291
22.3	Analisi di Multirisoluzione	1294
22.4	Funzione di scala e ondicella associata ad una MRA	1305
22.5	Esempi di MRA	1307
22.5.1	Spline lineari	1307
22.5.2	L'ondicella di Shannon	1314
22.5.3	Ondicelle che non provengono da MRA	1315
23	La Trasformata Discreta di Ondicelle	1317
23.1	L'algoritmo	1317
23.2	Proprietà dei filtri provenienti da MRA	1319
23.3	Filtri	1320
23.4	QMF	1324
23.5	La trasformata discreta di ondicelle	1326
23.6	QMF che generano MRA	1328
23.6.1	Prodotti infiniti	1329
23.6.2	QMF e funzione di scala	1331
23.7	L'algoritmo a cascata	1332
24	Ondicelle a Supporto Compatto	1337
24.1	Lunghezza del filtro e supporto della funzione di scala	1337
24.2	Ondicelle ed approssimazione	1340
24.3	Riproducibilità dei polinomi	1344
24.4	Le ondicelle di Daubechies	1347
24.5	Fattorizzazione spettrale	1351

Prefazione

I primi passi che portarono alla redazione di questo libro furono intrapresi nel 2001 per le esigenze di un insegnamento del secondo anno di Analisi Armonica presso un Corso di Laurea sulle basi scientifiche, in particolare matematiche, della comunicazione multimediale che era recentemente stato istituito presso l'Università di Roma "Tor Vergata" e che allora si chiamava "Scienza dei Media e della Comunicazione". La opportunità di introdurre l'analisi di Fourier in qualsiasi corso di studi a base matematica non richiede spiegazioni. Peraltro, gli studenti di quello specifico Corso di Laurea erano molto più interessati alla comunicazione multimediale che non alla matematica, e per questo tentammo di fornirgli ulteriore motivazione inserendo nel programma dell'insegnamento di Analisi Armonica una applicazione concreta di loro interesse, cruciale per la ricostruzione nel tempo di segnali noti solo su una successione equispaziata discreta di campioni: il teorema del campionamento di Shannon. L'approccio rigoroso a tale risultato necessita solo di un fatto classico dell'analisi di Fourier, la formula di somma di Poisson: però la sua visualizzazione precisa, la sua collocazione naturale nell'ambito della teoria di Fourier e lo studio dell'errore nel caso in cui le condizioni del teorema siano solo approssimate richiedono di visualizzare i segnali campionati come distribuzioni discrete. Poiché uno degli obiettivi del processo formativo era la trattazione matematica rigorosa ed esauriente, questo portava ad un ampliamento notevole del programma abituale di analisi di Fourier. D'altra parte, la necessità imprescindibile di trattare le serie di Fourier portava inevitabilmente anche ad esporre gli spazi di Hilbert, ed era opportuno dare almeno un cenno sulla trasformata rapida di Fourier e la trasformata di Fourier discreta. Divenne subito chiaro che il numero di libri di testo da suggerire, e la quantità di incisi e divagazioni necessarie a visualizzare concetti così sofisticati in un insegnamento del secondo anno, eccedeva le capacità di sintesi degli studenti: era pertanto necessario redigere le note del corso sotto

forma di un libro unitario.

In quel periodo, si tentò anche di fornire agli studenti libri di testo per tutti i corsi, disponibili gratuitamente online, ed aggiornabili di lezione in lezione sulla base dei risultati didattici. Come buona norma per corsi inerenti la multimedialità, questi libri di testo dovevano essere navigabili, ossia dovevano avere almeno la struttura di un ipertesto con link interni per spostarsi da un argomento a quelli logicamente collegati. Pertanto questo libro è redatto come documento in formato pdf, dove tutti i riferimenti matematici numerati (teoremi, proposizioni, lemmi, corollari, definizioni, esempi, esercizi, riferimenti bibliografici, riferimenti a capitoli e così via) sono connessioni di ipertesto. Sottolineamo, come cautela per il lettore, che questo è l'intendimento del libro: offrire a studenti generalmente con scarse basi e scarsa memoria dei preliminari matematici la possibilità di rintracciare immediatamente, con un clic del mouse, ciascuno dei risultati citati. Naturalmente, ciò implica che ogni risultato che viene utilizzato viene citato esplicitamente: questo è assai fastidioso per il lettore anche solo parzialmente esperto, che vede l'esposizione rallentata da continui riferimenti espliciti a fatti perfettamente noti, come ad esempio il teorema fondamentale del calcolo o la definizione di funzione caratteristica: ma è utile per gli studenti più deboli, per le cui esigenze il libro fu inizialmente concepito. Inevitabilmente, un lettore non alle prime armi troverà la presentazione troppo prolissa: ma d'altra parte, la trattazione è ormai molto ampia, ed è imprescindibile che i lettori non perdano i contatti con i riferimenti interni. Un'altra conseguenza fastidiosa di questo stile espositivo è il fatto che ogni commento è formulato come Nota separata e numerata, invece che come osservazione discorsiva incidentale.

Il nucleo originale del libro consisteva dei Capitoli 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ma in forma assai più concisa. A poco a poco questi capitoli si arricchirono di nuove sezioni o argomenti, ad esempio esercizi svolti assegnati in classe od agli esami. In realtà, il Capitolo 12 è in parte di per sé stesso un esercizio: la sua Appendice 12.4 (e precisamente l'Esempio ?? ed il Teorema 12.3.7) è un elaborato e difficile esercizio sull'approssimazione uniforme ed in \mathcal{S} . Questo argomento è esposto solo per stimolare l'intuito dei lettori su questi argomenti invece che il ricorso a metodi più astratti come la formula di somma di Poisson, ma è esposto non in modo completo: il lettore non fortemente motivato è invitato ad astenersene.

Visto che il libro si stava evolvendo verso un'opera con riferimenti (interni o esterni) ai preliminari necessari, cercai di incorporarvi alcuni di tali preliminari sui quali spesso si sorvolava negli insegnamenti precedenti: solo

cenni alle basi concettuali del Calcolo, ovviamente, ma un trattamento un pochino più approfondito, sebbene non esauriente, di argomenti più avanzati di Calcolo e di Analisi Reale: convergenza uniforme, serie di potenze, uniforme continuità, calcolo in più variabili, integrali dipendenti da un parametro, integrali curvilinei, forme differenziali, misura di Lebesgue, spazi L^p , teorema di Fubini, funzioni di variazione limitata ed assolutamente continue e generalizzazioni del teorema fondamentale del Calcolo. Questi argomenti sono esposti nel Capitolo preliminare 1, che, a parte l'eccezione già citata del Capitolo 12, è l'unico nel quale alcune dimostrazioni non sono completamente sviluppate, e su dettagli talvolta delicati si sorvola, o vengono aggirati a spese del rigore.

In effetti, i contenuti di questo Capitolo coprono gran parte dei corsi preliminari di Analisi del primo e secondo anno, ma sono stati progettati più per coprire lacune che come libro di testo. Alcuni punti specifici sono stati relegati ad appendici. Gli argomenti elementari del Calcolo non sono stati ridimostrati, ma sono stati enunciati nella Sezione iniziale 1.1, che quindi viene citata frequentemente: però il lettore con sufficiente competenza per capire questo libro non dovrebbe averne bisogno, e quindi il suo eventuale ricorso a questi link ai preliminari della prima Sezione è un indizio di inadeguatezza sul quale dovrebbe riflettere e trarre le debite conseguenze. Esigui cenni minimali di Analisi Funzionale, necessari solo per problemi specifici più avanzati su convergenza o divergenza di serie di Fourier e sulla nozione di convergenza nello spazio delle distribuzioni temperate, sono succintamente trattati nel Capitolo 3. La parte preliminare è completata da una esposizione sull'analisi complessa in una variabile (Capitolo 2) e sull'Analisi Funzionale (Capitolo 3), che non sono necessari per il Corso di Laurea in “Scienza e Tecnologia per i Media”, ma potrebbero essere usati al Corso di Laurea Magistrale in “Matematica” come testi di insegnamenti elementari ma abbastanza esaurienti su questi temi (manca però lo studio delle mappe conformi e la dimostrazione del teorema di Picard).

Ulteriori approfondimenti sulla convergenza di serie di Fourier sono inclusi nel Capitolo 7: essi includono una dimostrazione molto più semplice del teorema di convergenza puntuale di serie di Fourier, dovuta a Chernoff (sulla quale sono grato ad Alessandro Figà-Talamanca di aver richiamato la mia attenzione, mettendomi anche a disposizione le sue note [12]), i criteri di convergenza più avanzati di Dini e Jordan, la convergenza delle serie di Fourier in L^p per $1 < p < \infty$ (e quindi il teorema massimale di Hardy–Littlewood), la divergenza di serie di Fourier in L^1 e L^∞ ed esempi di serie di Fourier di

funzioni continue divergenti in un punto, o divergenti in insiemi di misura zero più vasti. Una Sezione è dedicata alla funzione coniugata, ed in essa trova spazio il teorema di rappresentazione integrale di Poisson di funzioni armoniche in un disco a partire dai loro valori al bordo in L^1 , ed il principio del massimo. Tutti questi argomenti non sono qui introdotti in vista di applicazioni della matematica ad altre scienze, ma sono stimolanti per un matematico interessato agli aspetti profondi dell'analisi di Fourier. A parte la Sezione iniziale 7.2, lo stile di questo Capitolo, che tratta argomenti più sofisticati, è orientato a lettori più maturi. Ovviamente, tale Capitolo richiede qualche cenno di Analisi Funzionale, e proprio per questo è stato scritto il Capitolo 3, inizialmente come compendio di tali conoscenze elementari, ma che si è poi sviluppato in una trattazione abbastanza esauriente. Proprio per rendere possibile tale trattazione, nel Capitolo 1 sono state aggiunte parti relative alla topologia (assiomi di separazione, proprietà degli spazi topologici, Lemma di Urysohn e Teorema di estensione di Tietze (Sezione 1.10), e le loro conseguenze naturali, i teoremi di Egoroff e di Lusin sulla approssimabilità di funzioni misurabili (Sezione 1.14). Questi argomenti servono solo come premessa ad alcuni aspetti dell'Analisi Funzionale e come completamento su alcune questioni di densità nelle inclusioni fra spazi di funzioni. Per rammentarne la non indispensabilità i titoli di queste Sezioni sono stati contrassegnati con un asterisco.

Un caso emblematico è la ripetizione di argomenti pressoché identici in Capitoli diversi, al fine di permetterne la lettura anche a coloro che non fossero interessati a leggere il Capitolo 3 sull'Analisi Funzionale. Questo succede, ad esempio, con la completezza di L^p e ℓ^p , che era stata inizialmente esposta per $p \geq 1$ nel Capitolo 1 sull'Analisi Reale mediante il Teorema di Riesz-Fischer 1.16.26, e poi ripresa in maniera più diretta nel Capitolo 4 sugli Spazi di Hilbert per presentare enunciati ed esercizi soprattutto nel caso $p = 2$. Questo argomento è stato poi riutilizzato nella Sottosezione 3.23.1 per evidenziare alcune proprietà insolite dei funzionali lineari sugli spazi L^p e ℓ^p con $0 < p < 1$, e questo ha richiesto di rielaborare il Capitolo 1 per estendere a tale range insolito di valori di p i risultati precedentemente esposti per $p \geq 1$: ci scusiamo con i lettori non interessati se questo crea qualche piccolo disagio, e li invitiamo a saltare le parti contrassegnate con asterisco.

Ma un caso più paradossale di ripetizione si ha per l'esposizione della dualità per spazi L^p ed altri spazi di Banach, presentata nella Sezione 1.19 del Capitolo iniziale e riassunta nella Sezione 11.3 del capitolo sulle distribuzioni, al fine di agevolarne la comprensione a coloro che non avessero letto con cura il

capitolo iniziale, ma naturalmente riesposta con maggiore profondità in tutto l'arco del Capitolo 3 sull'Analisi Funzionale: alcuni enunciati e dimostrazioni sono proprio triplicati!

Anche una parte del Capitolo 6, e precisamente alcuni risultati più avanzati dovuti a Lebesgue ed a Fatou sulla convergenza dei convolutori definiti dai nuclei di Féjèr e di Poisson (Sezione 6.2), è rivolta a lettori più maturi, esclusivamente matematici, e non è mirata ad applicazioni (questi risultati, comunque, sono qui esposti per completezza, e non vengono mai ripresi nel seguito: per far presente questo fatto li abbiamo contrassegnati con doppio asterisco).

Non sono stati inclusi argomenti di Algebra Lineare e Geometria (aparte gli spazi di Hilbert) perché essi sono contenuti nel libro online [19] scritto parallelamente a questo.

A questo punto, la tentazione di includere anche argomenti degli insegnamenti matematici del Corso di Laurea successivi all'analisi di Fourier era molto forte: questo avrebbe permesso di creare una sorta di libro di testo matematico unico, ossia di collegare tutti gli argomenti matematici dell'intero processo formativo in maniera facilmente navigabile, e sviluppati con una notazione coerente. Ho omesso gli argomenti dell'insegnamento di base di Analisi Numerica, ma ho incluso quelli di wavelets, incorporando, nei capitoli 21, 22, 23 e 24, le note redatte per il proprio insegnamento da Sandra Saliani, a cui esprimo la mia gratitudine. Al momento, per questi capitoli la revisione della notazione e la predisposizione dei links di ipertesto è appena cominciata: ce ne scusiamo con i lettori.

Naturalmente, in questo modo quest'opera si avviava a diventare un trattato più che un libro. Diventava importante renderla esauriente, nei limiti delle mie conoscenze, che sono assai limitate nei settori numerici: ma le applicazioni numeriche sono imprescindibili in un processo formativo inizialmente pensato per le applicazioni della matematica al trattamento di segnali acustici, video e più in generale multimediali. Un tema importante e naturale era quello degli errori numerici nel calcolo della FFT e della DFT, presentato nel Capitolo 16. Alcuni ulteriori argomenti furono originati dalla direzione di tesi di ricerca, ad esempio sulla trasformata di Fourier a finestre e la deconvoluzione, e sono ora inclusi nel Capitolo 17, che contiene un link ad un segnale acustico il quale, ovviamente, è fruibile solo nella versione online del libro, ma non in una eventuale versione stampata. Sono grato a Raffaele Presciutti ed a Stefano Daino per aver messo a mia disposizione la propria competenza in merito a questi argomenti. Nessuno di questi argomenti è

trattato nel Corso di Laurea in “Scienze e Tecnologie per i Media” (il nome attuale del precedente “Scienza dei Media e della Comunicazione”), o, per quanto mi consta, in altri corsi di studio in Italia.

C’è un intero altro settore, legato sia all’analisi di Fourier sia al trattamento dei segnali, che si basa sull’analisi complessa. L’ambizioso obiettivo di presentarlo si è sviluppato nei Capitoli 18 (trasformata di Laplace), 19 (trasformata zeta) e 20 (applicazioni della trasformata zeta ai sistemi a tempo discreto ed al filtraggio di segnali discreti). La analogata trattazione delle applicazioni della trasformata di Laplace alla risoluzione di equazioni differenziali lineari ordinarie non è stata intrapresa, e forse lo sarà in futuro. Anche questi argomenti non sono trattati nell’ambito del Corso di Laurea in “Scienze e Tecnologie per i Media”.

In effetti, le prime due Parti di quest’opera vertono su temi generali, spesso non applicati, e la terza tratta temi generali che preludono ad applicazioni (con la notevole eccezione del Capitolo 7 sugli approfondimenti sulle serie di Fourier, che tratta di temi classici fortemente legati all’analisi funzionale e non appare in alcun modo applicabile, ma non poteva essere inserito nella prima Parte perché richiede la conoscenza di serie e trasformata di Fourier). Da questo punto in poi lo spirito cambia: le ultime tre Parti si indirizzano soprattutto a tematiche numerico-applicative (con la parziale eccezione del capitolo sulla trasformata di Laplace). Per il momento, però, la sesta parte, ossia la trattazione di un argomento di valenza naturalmente applicativa come le wavelets, è stata mantenuta nelle linee di una trattazione puramente analitica e non numerica.

Un’opera così vasta, ma pur sempre mirata alla didattica elementare per studenti di media qualità, inevitabilmente deve molto alle fonti bibliografiche: i contributi originali in questo libro spesso si limitano alla rielaborazione di argomenti già presenti in letteratura, ed a volte solo alla realizzazione di note esplicative e dei moltissimi riferimenti incrociati. Colgo questa opportunità per elencare con gratitudine quelle fra le fonti bibliografiche che mi sono state più utili o mi hanno ispirato di più: [10], [14], [18], [22], [23]; per le parti preliminari più elementari, desidero citare anche [1], [5].

Da questo resoconto dovrebbe essere ormai chiaro che quest’opera non vuole essere una esposizione compiuta e finita, bensì un lavoro in corso, in evoluzione, da ampliare, approfondire e correggere dopo ogni lezione, o comunque frequentemente (questa è infatti un’altra ragione, oltre alla navigabilità dell’ipertesto, per mantenerla nella versione online). Ad esempio, nuovi capitoli o sezioni sono in preparazione. Alla data odierna, i prossimi

dovrebbero riguardare una trattazione più esauriente (ma forzatamente molto incompleta) dei filtri digitali, ad esempio la loro realizzazione come reticoli o grafi, i filtri di fase minima e l'invertibilità e la fattorizzazione spettrale, ed una trattazione della compressione di immagini tramite wavelets. Ai preliminari di Calcolo verranno aggiunti gli integrali di superficie ed il teorema della divergenza e del rotore.

Manca un indice analitico, per ora. Sarebbe molto utile in un libro di questa mole, anche se il formato di ipertesto permette di sostituirlo con gli strumenti di ricerca del computer. Poiché i tag di riferimento all'indice analitico non son stati inseriti nel corso della stesura in TeX, farlo a posteriori è un compito molto laborioso e tedioso... ma, col tempo, spero che verrà fatto.

Pertanto, anche questa prefazione è un lavoro in corso. Il quadro sinottico delle propedeuticità fra i capitoli, alla data odierna è nella prossima pagina. Freccie tratteggiate indicano propedeuticità facilmente evitabili con una lieve riscrittura del testo: elenchiamone i casi più tipici. Una prima, banale freccia tratteggiata è legata al fatto che, per studiare l'analisi funzionale su spazi di Banach, occorre ricordarsi cosa sia la completezza, e quindi le successioni di Cauchy. Una freccia tratteggiata più significativa è dovuta al fatto che gli operatori lineari invarianti nel tempo siano convolutori e che la loro limitatezza su L^∞ equivalga alla appartenenza a L^1 del nucleo di convoluzione, spiegato nel Capitolo 17 ed utilizzato anche nel capitolo 20; un'altra ha a che fare con la formula per i coefficienti dello sviluppo di Laurent, ricavata nel Capitolo 2 ed utilizzata anche nel Capitolo 19; questi fatti sono richiamati (ed in un caso brevemente ridimostrati) laddove vengono utilizzati. A volte invece si tratta di argomenti propedeutici delicati, come il teorema di uniforme limitatezza e nel teorema di Banach-Alaoglu sulla compattezza debole* del Capitolo 3, utilizzati pesantemente per la divergenza di serie di Fourier nel Capitolo 7, ma anche, per breve cenno, nel Capitolo 11 per chiarire la nozione di convergenza nello spazio delle distribuzioni temperate: in effetti qui vengono ri enunciati succintamente, senza dimostrazione, il che è sufficiente per il tipico studente che legge questo libro. Ancora minore è l'utilizzazione del teorema di categoria di Baire, limitata ad un cenno sugli insiemi di divergenza delle serie di Fourier. Pertanto, non è indispensabile per il lettore seguire il flusso delle frecce tratteggiate.

A questo proposito, osserviamo anche che vari risultati più profondi, ed un intero capitolo (il Capitolo 7), sono esposti per completezza culturale ma non vengono ripresi nel seguito. Quando questo accade, i singoli enunciati o una intera sottosezione o sezione, o in un caso l'intero capitolo sono

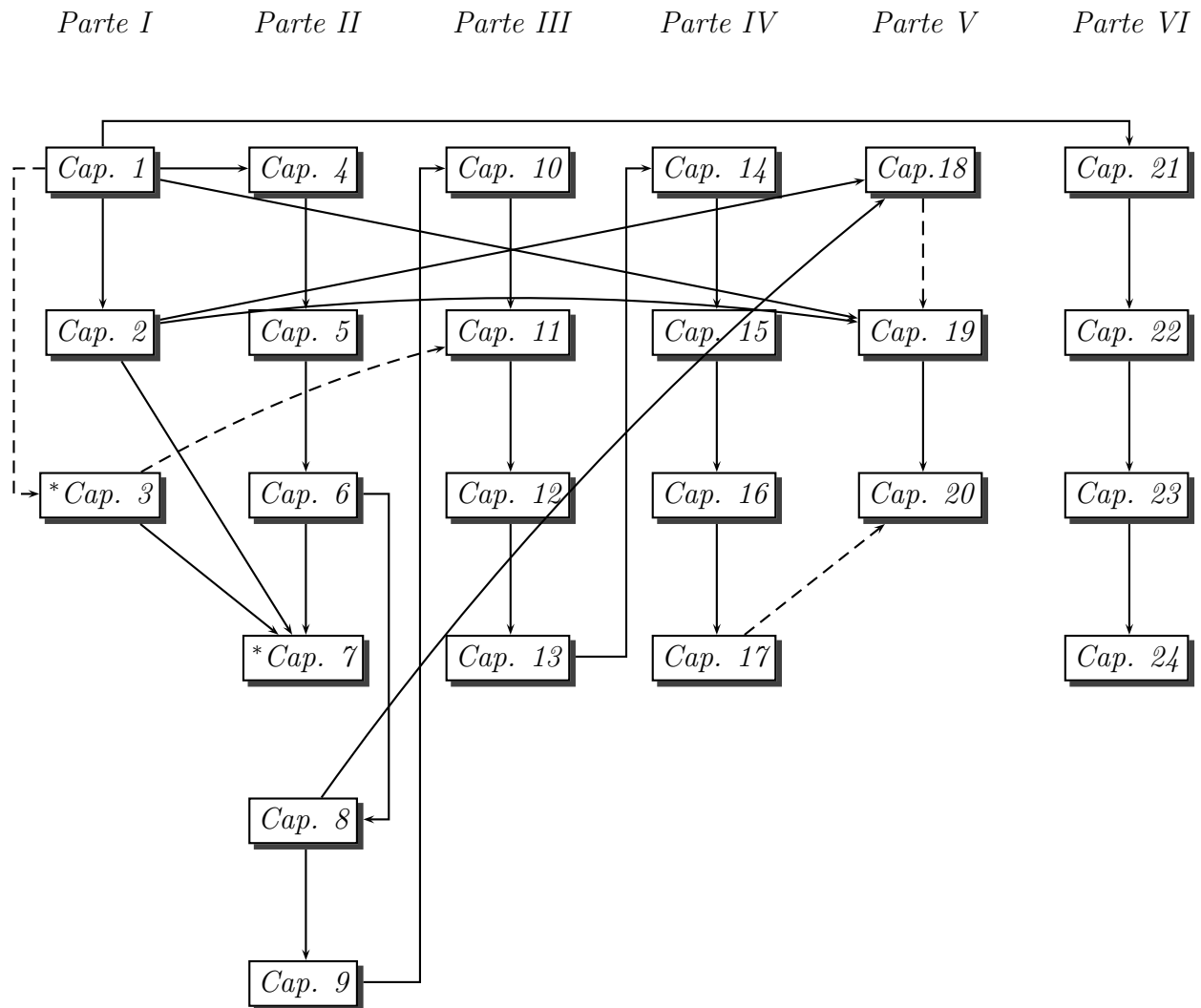
contrassegnati con una stelletta.

Anche la terminologia ha a volte un carattere provvisorio, legato a convenienze didattiche momentanee. Un esempio emblematico è la scelta del periodo delle funzioni periodiche da sviluppare in serie di Fourier: nei Capitoli 5 (sviluppi in serie di Fourier) e 7 (approfondimenti sulla convergenza di serie di Fourier), e nella Sezione 6.2 (nuclei di Féjèr e di Poisson), viene scelto, per motivi storici, il periodo 2π , e quindi i coefficienti di Fourier prendono la forma $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$. Invece negli altri Capitoli, dove il paragone fra il caso di funzioni periodiche e quello di funzioni in $L^1(\mathbb{R})$ è a volte più stringente e si vogliono avere identiche costanti di normalizzazione, scegliamo il periodo 1 ed i coefficienti di Fourier diventano $\hat{f}(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) e^{-2\pi int} dt$. È auspicabile che anche questa anomalia venga prima o poi corretta, con il mantenere periodo 2π (ed esponenziali e^{int}) in tutta la trattazione.

Ringrazio vari colleghi che hanno contribuito allo sviluppo di quest'opera: Andrea Pagano per la stesura in TEX dei capitoli del nucleo originario (circa un terzo della mole attuale: un compito già molto laborioso), Federica Andreano per la prima revisione di quei capitoli, ed Enrico Valdinoci e Francesco Fidaleo per la segnalazione di vari errori e suggerimenti e consigli per alcune estensioni.

Massimo Picardello

Roma, luglio 2010



Legenda:

- **Parte 1: Preliminari**

Cap. 1: Preliminari di Calcolo ed Analisi Reale

Cap. 2: Elementi di Analisi Complessa

Cap. 3: Brevi cenni di Analisi Funzionale

- **Parte 2: Serie e trasformate di Fourier**

Cap. 4: Spazi di Hilbert

Cap. 5: Serie di Fourier

Cap. 6: Approssimazione trigonometrica e polinomiale

Cap. 7: Complementi sulle serie di Fourier

Cap. 8: Trasformata di Fourier

Cap. 9: Classe di Schwartz

- **Parte 3: Campionamento e ricostruzione di segnali**

Cap. 10: Campionamento

Cap. 11: Distribuzioni

Cap. 12: Approssimanti in \mathcal{S} del treno di impulsi

Cap. 14: Ricostruzione ed aliasing

- **Parte 4: DFT, DCT, FFT, deconvoluzione**

Cap. 15: DFT

Cap. 16: FFT

Cap. 17: L'errore di approssimazione di \mathfrak{F} con la DFT

Cap. 18: Deconvoluzione e DFT a finestre

- **Parte 5: Trasformate di Laplace e zeta; filtri**

Cap. 19: Trasformata di Laplace

Cap. 20: Trasformata zeta

Cap. 21: Trasformata zeta e sistemi a tempo discreto

- **Parte 6: Wavelets e compressione dei segnali**

Cap. 22: Il sistema di Haar

Cap. 23: L'analisi in multirisoluzione

Cap. 24: La trasformata discreta di ondicelle

Cap. 25: Ondicelle a supporto compatto

e trattamento dei

Parte I

Panoramica su Calcolo, Analisi
Reale, Analisi Complessa, Spazi
Vettoriali Topologici ed Analisi
Funzionale

Capitolo 1

Appfondimenti di calcolo differenziale ed integrale e di analisi reale

In questo capitolo riassumiamo, sinteticamente e talvolta senza dimostrazioni, vari argomenti di Calcolo e di Analisi Reale preliminari allo studio dell'analisi matematica, ed in particolare dell'analisi di Fourier.

Per quanto riguarda l'Analisi Reale, la maggior parte dell'esposizione è tratta da [22]: rinviamo a questo eccellente riferimento bibliografico per maggiori dettagli ed approfondimenti. L'esposizione delle disuguaglianze di Hölder e di Minkowski e della dualità per spazi L^p segue invece un approccio più rapido ed elegante (si veda, ad esempio, [21]). Le sezioni 1.15, 1.20, 1.24, 1.26, 1.27, 1.28 ed i risultati principali di 1.19 sono interamente tratti da [22]. La Sezione 1.23 è tratta da [18].

1.1 Fatti elementari ben noti

Non è possibile comprendere i concetti basilari dell'analisi di Fourier senza una completa assimilazione del Calcolo e dell'Algebra Lineare. Questo libro è sviluppato per essere consultabile online: per facilitarne la navigazione ipermediale, ci sforziamo di citare ogni risultato utilizzato, anche se questo rende pignola l'esposizione per chi lo legge in versione scritta invece che interattiva. È sorprendente scoprire quanti pochi siano i risultati preliminari elementari di Calcolo necessari (quelli meno elementari verranno presentati in dettaglio

in seguito, anche se dovrebbero essere già noti). È ancora più sorprendente osservare che la grande maggioranza di questi risultati sono utilizzati solo per la comprensione di questo capitolo preliminare e non della analisi di Fourier che sviluppiamo nel resto del libro. Per comodità del lettore, e per evitare collegamenti ipermediali a documenti esterni, enunciamo i prerequisiti di base in questa Sezione introduttiva: le dimostrazioni si possono trovare il qualunque libro di testo di calcolo, ad esempio [5] (o [19] per la numerabilità dei razionali, il teorema di Weierstrass sull'esistenza di massimi e minimi di funzioni continue sui compatti e l'esistenza dei limiti di funzioni monotone limitate).

Rammentiamo per prima cosa la definizione di punto di accumulazione di un insieme E in \mathbb{R}^n (o più in generale in uno spazio topologico):

Definizione 1.1.1. Un punto x è un *punto di accumulazione* di E se per ogni aperto O che contiene x esistono punti di E diversi da x ed appartenenti a O . Se E è un sottoinsieme di un insieme A , un punto $x \in A$ è un *punto limite* di E se per ogni intorno O di x esistono punti di E appartenenti ad O : in particolare, ogni punto di E è un punto limite.

Inoltre, rammentiamo la definizione di infinitesimo:

Notazione 1.1.2. Date due funzioni f, g a valori reali o complessi definite su un insieme E ed un punto x_0 di accumulazione di E (ad esempio un suo punto interno), diciamo che $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, e che $f = O(g)$ per $x \rightarrow x_0$ se esiste una costante $C > 0$ tale che, se x appartiene ad un intorno appropriato di x_0 (escluso il punto x_0 stesso) si ha $|f(x)| < C|g(x)|$.

Infine, richiamiamo la definizione di funzione caratteristica:

Definizione 1.1.3. Per ogni insieme $I \subset \mathbb{R}$, la funzione caratteristica χ_I è la funzione che vale 1 in I e 0 al di fuori.

Nelle dimostrazioni, useremo talvolta il (si veda [19, Capitolo 1, Appendice]).

Ecco la lista degli enunciati elementari di cui faremo uso nel seguito:

- Numerabilità dei razionali: \mathbb{Q} è un insieme numerabile.
- Continuità e controimmagini di aperti: una funzione $f : X \rightarrow Y$ fra due spazi topologici X e Y è continua se e solo se la controimmagine

$f^{-1}(O)$ di ogni aperto $O \subset Y$ è un aperto in X (Il lettore non abituato alla nozione di spazio topologico e di insieme aperto riscriva questa proprietà nel caso in cui $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ e O sia la sfera di centro $a \in \mathbb{R}^m$ e raggio $\varepsilon > 0$: allora dire che la controimmagine di ogni tale O è aperta equivale a dire che, per ogni punto x tale che $f(x)$ appartenga a O , essa contiene la sfera di centro x e raggio δ per qualche $\delta > 0$. Si verifichi per esercizio che questo fatto è equivalente alla proprietà $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.)

- Definizione e caratterizzazione degli insiemi compatti: K si dice compatto se da ogni ricoprimento di K con insiemi aperti si può estrarre un sottoricoprimento finito. I compatti K in \mathbb{R}^n , e più in generale in uno spazio metrico, sono caratterizzati dalla proprietà che ogni successione in K ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di K (in uno spazio non metrico questa proprietà è seguita dalla compattezza ma non è equivalente). Da questo fatto segue anche che i sottoinsiemi chiusi di un compatto sono anch'essi compatti.

Inoltre i compatti hanno anche altre proprietà interessanti che vedremo in seguito: ad esempio la proprietà dell'intersezione finita (Nota 1.9.7) e la proprietà di Bolzano–Weierstrass (Teorema 1.9.6): queste proprietà sono conseguenze della compattezza, e sono ad essa equivalenti in uno spazio metrico. Per questi approfondimenti si veda la Sezione ??.

- Definizione di esponenziale complesso: $e^{it} = \cos t + i \sin t$. O equivalentemente, $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ e $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$
- L'esponenziale diverge più rapidamente dei polinomi: per ogni $\alpha, \beta > 0$ si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x}/x^\beta = \infty$. Equivalentemente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^\beta/x^\alpha = 0$
- Esistenza del limite per funzioni monotone: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona non decrescente, allora esiste $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ se e solo se f è limitata superiormente, ed in tal caso $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$. Analogamente vale se f è non crescente, nel qual caso il limite esiste se f è limitata inferiormente e coincide con l'estremo inferiore dei valori di f , e se l'intervallo di definizione è illimitato (ad esempio tutto \mathbb{R}); in quest'ultimo caso abbiamo un teorema identico per successioni monotone (cioè per funzioni monotone definite su \mathbb{N} anziché \mathbb{R}).

- Punti di discontinuità di funzioni monotone: una funzione monotona su un intervallo è ivi continua tranne che per una successione di punti di salto, quindi al più con una quantità numerabile di salti.
- Se A è un insieme arbitrario di indici α e $c_\alpha > 0$, la serie $\sum_{\alpha \in A} c_\alpha$ è definita come $\sup\{\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A} c_{\alpha_j}\}$. Se la serie converge, allora A è un insieme numerabile. In particolare, una funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ monotona in un intervallo può solo avere un insieme numerabile di punti di discontinuità, tutti di tipo salto con ampiezza finita.
- Criterio di Cauchy per la convergenza di successioni: una successione di numeri reali o complessi è di Cauchy (Definizione 1.2.1) se e solo se è convergente.
- Teorema del confronto: se $f \leq g \leq h$ sono tre funzioni a valori reali definite in un sottoinsieme E di uno spazio topologico (o più restrittivamente di \mathbb{R}^n) e x_0 è un punto di accumulazione di E (o più restrittivamente, un punto interno di E), allora se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$, anche g ha limite per $x \rightarrow x_0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$. Un enunciato analogo vale per successioni.
- Teorema del confronto per serie: combinando i due enunciati precedenti si ottiene il seguente: se una serie è a termini non negativi ed i suoi termini sono maggiorati da quelli di una serie convergente, allora la serie data è convergente.
- Teorema del confronto di una serie con un integrale: se f è una funzione positiva non crescente definita nella semiretta $x \geq 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ e l'integrale $\int_1^{\infty} f(x) dx$ convergono entrambi oppure divergono entrambi. Nel primo caso si ha $\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$. Più precisamente, ponendo $s_{m,n} = \sum_{k=m}^n f(k)$ e $t_{m,n} = \int_m^n f(x) dx$, otteniamo per ogni m, n le disuguaglianze $s_{m+1,n} \leq t_{m,n} \leq s_{m,n}$: quindi o la serie e l'integrale divergono entrambi oppure convergono entrambi con la stessa velocità, nel senso che le code $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ e $\int_m^{\infty} f(x) dx$ sono infinitesime dello stesso ordine rispetto a m .
- Teorema di Weierstrass: una funzione a valori reali continua su un compatto (ad esempio su un intervallo limitato e chiuso in \mathbb{R} , o su un plurirettangolo limitato e chiuso in \mathbb{R}^n) ammette massimo e minimo.

- Teorema della permanenza del segno: se f è una funzione continua a valori reali e $f(x) > 0$ in un punto x interno al dominio di definizione di f , allora esiste un intorno aperto O di x tale che $f > 0$ in O . Più in generale, se f è continua a valori complessi e $f(x) \neq 0$, allora f è diversa da zero in un intorno di x .
- Confronto asintotico fra polinomi ed esponenziali: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-ax} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$
- Continuità di funzione composta: se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ sono continue, allora la loro composizione $g \circ f : A \rightarrow C$ è continua.
- Regola di derivazione di funzione composta: se $A, B, C \subset \mathbb{R}$ e $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ sono derivabili, allora la loro composizione $g \circ f : A \rightarrow C$ è derivabile, e $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)$.
- Se una funzione derivabile è pari la sua derivata è dispari, e viceversa.
- Teorema dei valori intermedi per le funzioni continue: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora essa assume in $[a, b]$ tutti i valori intermedi fra $f(a)$ e $f(b)$.
- Teorema dei valori intermedi per le funzioni continue sui connessi in \mathbb{R}^n : la proprietà precedente vale per le funzioni continue su un insieme connesso in \mathbb{R}^n . In tal caso f assume tutti i valori intermedi fra il proprio valore minimo e massimo, o comunque fra due qualsiasi valori assunti. (per dimostrarlo, nel caso non fosse già noto, basta rammentare che un insieme connesso in \mathbb{R}^n è connesso per archi, nel senso della successiva Proposizione 1.29.46, e considerare una curva continua fra il punto in cui viene assunto il primo valore e quello in cui viene assunto il secondo. La restrizione della funzione f all'immagine di questa curva è una funzione continua su un intervallo di \mathbb{R} , e si applica il risultato precedente.)
- Teorema del valor medio di Lagrange: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b) , allora esiste $x \in (a, b)$ tale che $f(b) - f(a) = f'(x)(b - a)$.
- Regola della derivata nulla: se due funzioni f e g derivabili su un insieme connesso verificano $f' \equiv g'$, allora $f - g$ è costante.

- Teorema della media integrale: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua su $[a, b]$, allora è integrabile su $[a, b]$ ed esiste $x \in [a, b]$ tale che $\int_a^b f(t) dt = (b - a) f(x)$.
- Integrabilità di funzioni monotone: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona e limitata, allora f e $|f|$ sono integrabili su $[a, b]$ con integrale finito.
- Teorema Fondamentale del Calcolo: si veda l'enunciato più sotto, Teorema 1.27.1.
- Teorema di integrazione per sostituzione: se $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ ha derivata continua e g è continua su $[c, d]$, allora $\int_c^d g(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(f(t)) f'(t) dt$. (Grazie al Teorema fondamentale del calcolo enunciato più sopra, questo teorema è equivalente alla precedente regola di derivazione di funzione composta.)
- Regola di derivazione del prodotto: se f e g sono derivabili, allora $(fg)' = f'g + fg'$. Iterando si ottiene che, se le due funzioni sono derivabili n volte,

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f D^{n-k} g,$$

dove $\binom{n}{k}$ è il *simbolo combinatorio* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, ed il *fattoriale* $n!$ è il prodotto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Con lo stesso argomento si prova il Teorema del Binomio di Newton: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

- Teorema di integrazione per parti: se f e g hanno derivata continua su $[a, b]$, allora $\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f'(x) g(x) dx$. (Grazie al Teorema Fondamentale del Calcolo enunciato più sopra, questo teorema è equivalente alla precedente regola di derivazione del prodotto.)
- Formula di somma geometrica: se $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 1$, allora $\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$.

- Condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica (ma non sufficiente, visto il prossimo enunciato) è che il suo termine generale tenda a 0.
- La serie $\sum n^{-\alpha}$ è convergente se e solo se $\alpha > 1$.

Si noti che nessuna stima sul tasso di decrescenza dei termini implica la divergenza di una serie a meno che i termini siano monotoni decrescenti. Infatti, sia $\{a_n\}$ tale che $\sum |a_n| < \infty$, e consideriamo una nuova successione di indici $\{n_k\}$. Poniamo $b_n = 0$ a meno che $n = n_k$, e $b_{n_k} = a_{n_k}$. I valori non nulli dei b_n sono gli stessi degli a_n , ma più distanziati: quindi $\sum |b_n| = \sum |a_n| < \infty$, ma la successione b_n tende a zero in maniera arbitrariamente lenta se gli n_k crescono in maniera arbitrariamente veloce. Invece, se la successione dei termini è non crescente, le cose vanno diversamente. Poiché questo fatto non appare di solito nei manuali di Calcolo, lo dimostriamo qui:

Lemma 1.1.4. *Sia $\{a_n > 0\}$ una successione non crescente con $\lim_n a_n = 0$. Se la serie $\sum_n a_n$ converge, allora $a_n = o(1/n)$, ossia $\lim_n na_n = 0$.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che $\lim_n a_n \neq 0$. Per definizione di limite, allora deve esistere $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k > k$ con $ka_{n_k} > \varepsilon_0$ (osserviamo in particolare che si possono scegliere gli n_k in maniera che crescano in modo arbitrariamente veloce). In altre parole, esiste $\varepsilon_0 > 0$ ed una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ tale che $a_{n_k} > \varepsilon_0/k$, e gli indici della sottosuccessione si possono scegliere a crescita arbitrariamente veloce. D'altra parte, grazie alla monotonia, per tutti gli indici m con $n_{k-1} < m \leq n_k$ si ha $a_m \geq a_{n_k} = \varepsilon_0/k$. Quindi

$$S_k := \sum_{n_{k-1}+1}^{n_k} a_m \geq \frac{n_k - n_{k-1}}{n_k} \varepsilon_0.$$

Ora, se gli n_k crescono in modo abbastanza veloce, $\lim_k (n_k - n_{k-1})/n_k = 1$, e quindi $S_k \sim \varepsilon_0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_k = \infty$. Questa contraddizione prova l'enunciato. \square

- Una proprietà analoga a quella precedente per le serie vale per gli integrali impropri: l'integrale improprio di $\frac{1}{x}$ è divergente: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$. A maggior ragione, per $\beta < 1$, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\beta} dx = +\infty$; invece, per $\alpha > 1$, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < \infty$.

- Riordinamento di serie: una serie converge alla stessa somma qualunque sia l'ordine con cui si sommano i suoi termini se e solo se è assolutamente convergente (ossia la serie dei moduli dei suoi termini è convergente).
- Stime di Leibnitz per il resto di una serie a segni alterni: se la successione $a_k > 0$ è non crescente da un certo indice in poi, ossia se esiste k_0 tale che $a_{k+1} \leq a_k$ per ogni $k > k_0$, ed è infinitesima, ossia $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, allora la serie a segni alterni $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ è (semplicemente) convergente, ed il suo resto n -simo è maggiorato dal primo termine omissso:

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}.$$

- Teorema di Taylor: se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile n volte in un punto $x_0 \in (a, b)$, allora esiste un unico polinomio P_n di grado n che approssima f a meno di infinitesimi rispetto a $(x - x_0)^n$, ossia $f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$ per $x \rightarrow x_0$, e questo polinomio, detto *polinomio di Taylor di grado n* , è dato da

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Inoltre, se $n \geq 0$ e f è derivabile $n + 1$ volte in x_0 , si ha $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ per qualche $\xi \in [x_0, x]$. Il polinomio di Taylor è l'unico polinomio di grado n le cui prime n derivate in x_0 coincidono con quelle di f .

Completiamo questa Sezione presentando due criteri di convergenza per serie numeriche che estendono le stime di Leibnitz, i quali potrebbero non essere noti ad alcuni lettori. Per questo ne presentiamo anche le dimostrazioni. Il primo dei due criteri non è necessario per il resto del libro, ma lo presentiamo insieme ad alcune sue applicazioni a causa della loro rilevanza in connessione con le serie di Fourier.

***Teorema 1.1.5. (Criterio di convergenza di Dirichlet.)**

- (i) Se $a_k \in \mathbb{C}$ e $b_k \in \mathbb{R}^+$ sono tali che b_k tende a zero in maniera monotona per $k \rightarrow \infty$ e le somme parziali $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ sono limitate da qualche costante $C > 0$, allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ è convergente.
- (ii) Se invece le serie sono serie di funzioni, dove le somme parziali della successione di funzioni a_k sono uniformemente limitate, e le funzioni b_k sono uniformemente convergenti a 0 in maniera non crescente (ossia $b_k(x)$ è non crescente per ogni x), allora la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ converge uniformemente.

Dimostrazione. Dimostriamo la parte (i): la dimostrazione, pensata per successioni di funzioni invece che di numeri, si applica parola per parola anche per dimostrare (ii).

Vogliamo applicare il criterio di Cauchy: per questo dobbiamo provare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste N intero tale che, per ogni $n > m \geq N$, si abbia

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| < \varepsilon. \quad (1.1)$$

Nel primo membro di questa disuguaglianza sostituiamo $a_k = A_k - A_{k-1}$ per ottenere la seguente *versione discreta del teorema di integrazione per parti* citato più sopra:

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^n A_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} A_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_{m-1} b_m. \quad (1.2)$$

Pertanto

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| \leq C \left(\sum_{k=m}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| + b_n + b_m \right). \quad (1.3)$$

Poiché $\{b_k\}$ è una successione decrescente, possiamo togliere il modulo in $|b_k - b_{k+1}| = b_k - b_{k+1}$. Pertanto la sommatoria nel lato destro dell'ultima disuguaglianza, a causa delle cancellazioni successive, dà come somma $\sum_{k=m}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = b_m - b_n$. Quindi la disuguaglianza (1.3) diventa $|\sum_{k=m}^n a_k b_k| \leq 2Cb_m$. Ora (1.1) segue dall'ipotesi che $\lim_{n \rightarrow \infty} b_m = 0$.

□

Come applicazione, ecco un esempio che fornisce il primo risultato significativo in questo libro sulla convergenza di serie trigonometriche. Si confrontino i risultati con il contenuto della Sezione 5.15.

Esempio 1.1.6. Rimandiamo all'Appendice in Sezione 12.5 per la dimostrazione della seguente disuguaglianza trigonometrica elementare: per ogni $x \neq 2k\pi$, con k intero, si ha

$$\left| \sum_{n=-N}^N e^{-inx} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|},$$

Da questa disuguaglianza segue che la successione e^{-inx} ha somme parziali limitate, e quindi lo stesso vale per la parte reale $\cos(nx)$ e la parte immaginaria, $\sin(nx)$. Pertanto, per il criterio di Dirichlet per la convergenza di serie numeriche (Teorema 1.1.5 (i)), per ogni successione b_n di numeri reali che tende a zero in maniera decrescente, le serie trigonometriche $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-inx}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ sono convergenti per $x \neq 2k\pi$. Inoltre, in ogni intervallo $[a, 2\pi - a]$ con $a > 0$ le suddette serie sono uniformemente convergenti, per il criterio di Dirichlet per la convergenza uniforme, Teorema 1.1.5 (ii).

Ad esempio, le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-inx}}{n^\alpha}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ convergono puntualmente per $x \neq 2k\pi$ per ogni $\alpha > 0$, ed uniformemente in $[a, 2\pi - a]$ per $a > 0$. Se $\alpha > 1$ sappiamo che queste serie convergono assolutamente, dal confronto con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, ed anche uniformemente per il test di Weierstrass (Teorema 1.3.29), ma per $0 < \alpha \leq 1$ la convergenza è assai meno ovvia.

□

Il secondo criterio è una variante del precedente. Verrà applicato in seguito solo ad un risultato sulla continuità radiale di serie di potenze al bordo di convergenza (Teorema di Convergenza radiale di Abel 1.4.11, che dimostreremo per completezza ma che non verrà usato in questo libro.

***Teorema 1.1.7. (Criterio di convergenza di Abel.)**

- (i) Se a_k sono numeri complessi tali che la serie $\sum_k a_k$ è convergente, e $\{b_n\}$ è una successione di numeri reali monotona limitata (quindi convergente, ma non necessariamente al limite 0), allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ è convergente.
- (ii) Se invece le serie sono serie di funzioni, con la proprietà che le somme parziali della successione di funzioni a_k sono uniformemente convergenti, e le funzioni b_k sono uniformemente limitate e per ogni x la successione $a_k(x)$ è non crescente, allora la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ converge uniformemente.

Dimostrazione. la dimostrazione è pressoché la stessa del criterio di Dirichlet (Teorema 1.1.5). Anche in questo caso basta dimostrare il criterio di convergenza per le serie numeriche: lo stesso argomento si applica riga per riga alla convergenza uniforme. Vediamo le differenze rispetto alla dimostrazione del criterio di Dirichlet. Nel termine di destra dell'identità (1.2), ora gli addendi $A_n b_n$ e $A_{m-1} b_m$ sono successioni convergenti (perché ciascuna è il prodotto di due successioni convergenti). Anche la somma che costituisce il restante termine nel lato destro dell'identità converge ad un limite per $n \rightarrow \infty$, esattamente per lo stesso argomento usato nella dimostrazione del criterio di Dirichlet. \square

1.2 Spazi normati, successioni di Cauchy e completezza

Rammentiamo la definizione di successione di Cauchy di numeri reali.

Definizione 1.2.1. (Successioni di Cauchy.)

Una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri reali si dice *successione di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che se $n, m > \nu$ allora $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Esercizio 1.2.2. Se una successione è convergente allora è di Cauchy. \square

Definizione 1.2.3. (Spazio metrico.) Una *metrica* su un insieme X è una funzione d su $X \times X$ a valori reali con le seguenti proprietà:

- (i) per ogni x e y in X , $d(x, y) \geq 0$, e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
- (ii) per ogni x e y in X , $d(x, y) = d(y, x)$ (*proprietà riflessiva*);
- (iii) per ogni x, y e z in X , $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*disuguaglianza triangolare*).

Uno spazio X munito di una metrica si chiama *spazio metrico*.

La disuguaglianza triangolare ha questo nome perché, nel caso della distanza usuale nel piano, essa enuncia il fatto che un lato di un triangolo ha lunghezza non superiore alla somma degli altri due (il lettore visualizzi per esercizio il legame fra i due concetti).

Definizione 1.2.4. (Completezza.) Uno spazio metrico X si dice completo se ogni successione di Cauchy converge ad un elemento di X (rispetto alla metrica di X).

Nota 1.2.5. L'insieme dei numeri reali è uno spazio metrico completo. Questo fatto è equivalente alla proprietà archimedeo dei numeri reali [19, Cap. 1 (Appendice)]. \square

Nota 1.2.6. Le precedenti definizioni mostrano che in uno spazio metrico completo (ad esempio \mathbb{R}) non vi è alcuna differenza tra successione convergente e successione di Cauchy, ossia una successione è convergente se e solo se è di Cauchy.

Osserviamo che la proprietà di Cauchy presenta un vantaggio rispetto alla definizione di limite: permette di dimostrare l'esistenza del limite senza che sia necessario conoscere quale sia il limite a cui converge la successione.

\square

Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$. Ricordiamo che la distanza euclidea di u e v è definita da

$$\text{dist}(u, v) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2}. \quad (1.4)$$

La distanza euclidea di u dall'origine è la *norma euclidea* di u , definita da

$$\|u\| \equiv \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \quad (1.5)$$

In \mathbb{R}^n è definito anche un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ associato alla norma nel senso che $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ per ogni $u \in \mathbb{R}^n$. La definizione è la seguente: se $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Definizione 1.2.7. Se $u, v \in \mathbb{C}^n$, il prodotto scalare è definito da

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i \quad (1.6)$$

Vogliamo introdurre spazi vettoriali di dimensione infinita e definire norme e prodotti scalari su tali spazi.

In generale si ha

Definizione 1.2.8. (Norma.) Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{C} (di dimensione finita o infinita). Un'applicazione

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

si dice una *norma* se valgono le tre proprietà seguenti:

$$(i) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(ii) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

$$(iii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{per ogni } x, y \in X$$

L'ultima proprietà si chiama la *disuguaglianza triangolare*.

Esercizio 1.2.9. Verificare che $\|\cdot\|_2$ definita in (1.5) è una norma in \mathbb{R}^n .

□

Estendiamo il concetto di successione di Cauchy a uno spazio normato qualsiasi.

Definizione 1.2.10. (Distanza.) Dato un insieme V , una funzione $\text{dist} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ si chiama una *distanza* se

$$(i) \quad \text{dist}(u, v) \geq 0 \text{ e } \text{dist}(u, v) = 0 \text{ se e solo se } u = v;$$

$$(ii) \quad \text{dist}(u, v) = \text{dist}(v, u) \text{ per ogni } u, v;$$

$$(iii) \quad (\text{disuguaglianza triangolare:}) \text{ per ogni } u, v, w, \text{dist}(u, v) \leq \text{dist}(u, w) + \text{dist}(w, v) .$$

Definizione 1.2.11. (Distanza in uno spazio normato.) Ricordiamo che, se X è uno spazio normato, una distanza tra u, v in X è data da

$$\text{dist}(u, v) = \|u - v\| .$$

Si dice che questa distanza è associata alla norma. È elementare verificare che questa distanza verifica le condizioni della Definizione 1.2.10.

Definizione 1.2.12. (Norme e distanze equivalenti.) Due norme $\|\cdot\|$ e $\|\|\cdot\|\|$ su uno spazio vettoriale V si dicono *equivalenti* se esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni vettore $v \in V$ si abbia

$$\|v\| \leq C\|\|v\|\|$$

(senza perdita di generalità, aumentando il valore di C , la disuguaglianza si può esprimere come disuguaglianza stretta, ed infatti di solito così avviene nei libri di testo).

Analogamente, due distanze d_1 e d_2 si dicono equivalenti se esistono $A, B > 0$ tali che, per ogni $u, v \in V$, si abbia

$$Ad_1(u, v) < d_2(u, v) < Bd_1(u, v).$$

In base a questa definizione, date due norme (o due distanze) equivalenti ciascuna palla rispetto ad una delle due è contenuta in una palla dell'altra e viceversa.

Ricordiamo la definizione di relazione di equivalenza:

Definizione 1.2.13. (Relazione di equivalenza.) Sia I un insieme e sia \approx una relazione tra gli elementi di I .

\approx è una relazione di equivalenza se:

1. $a \approx a \quad \forall a \in I$
2. $a \approx b$ se e solo se $b \approx a \quad \forall a, b \in I$
3. se $a \approx b$ e $b \approx c$ allora $a \approx c \quad \forall a, b, c \in I$

Esercizio 1.2.14. Verificare che l'equivalenza di norme è una relazione di equivalenza.

□

Per la dimostrazione del seguente celebre enunciato rinviamo, ad esempio, a [19, Appendice, Sezione 2].

Proposizione 1.2.15. (Tutte le norme sono equivalenti in dimensione finita.) *In spazi vettoriali di dimensione finita, tutte le norme sono equivalenti.*

Come vedremo in seguito, questo enunciato non è vero su spazi a dimensione infinita. Questo fatto è la principale fonte di varietà e sottigliezza della geometria degli spazi normati, della loro struttura di convergenza e del resto di questo libro.

Norme equivalenti inducono la stessa nozione di convergenza in V , ai sensi della prossima definizione.

Definizione 1.2.16. (Successioni convergenti e successioni di Cauchy in uno spazio normato.) Una successione $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in uno spazio normato X si dice *convergente* ad un limite $u \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > \nu$, allora $\|u_n - u\| < \varepsilon$. La successione si dice di *Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > \nu$, $m > \nu$, allora $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$.

Nota 1.2.17. Uno spazio normato, essendo in particolare uno spazio metrico, si dice completo se le successioni di Cauchy sono convergenti. \square

Come è naturale studiare la convergenza di successioni, così lo è quella di serie.

Definizione 1.2.18. (Serie convergenti ed assolutamente sommabili in uno spazio normato.) Una serie di vettori v_i in uno spazio normato X è *convergente* ad un vettore somma s se converge a s la successione delle sue somme parziali: $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| s - \sum_{i=1}^N v_i \right\| = 0$. La serie si dice *assolutamente sommabile* se $\sum_{i=1}^{\infty} \|v_i\| < \infty$.

Nota 1.2.19. Su \mathbb{R} , le serie assolutamente sommabili sono anche convergenti (ma non è vero il viceversa: si pensi alla serie a segni alterni $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i/n$). Però, se lo spazio non è completo, non tutte le serie assolutamente convergenti sono convergenti. Consideriamo ad esempio il sottospazio \mathbb{Q} dei razionali. Esso è un sottospazio di \mathbb{R} e quindi è uno spazio normato, ma non è completo. Perciò esistono successioni in \mathbb{Q} che convergono ad un limite in \mathbb{R} ma non in \mathbb{Q} (ad esempio, la successione degli approssimanti decimali di un qualsiasi numero irrazionale). Consideriamo una tale successione di numeri razionali $\{v_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$ assolutamente sommabile ad un numero irrazionale v , e formiamo la successione delle sue differenze consecutive $w_0 = v_0$ e $\{w_i = v_i - v_{i-1}, i = 1, 2, \dots\}$. La somma parziale di ordine N della successione $\{w_i\}$ vale

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N w_i &= (v_N - v_{N-1}) + (v_{N-1} - v_{N-2}) + \cdots + (v_1 - v_0) + v_0 \\ &= v_N \end{aligned}$$

che converge al numero irrazionale v per $N \rightarrow \infty$. Pertanto la serie $\sum w_i$ è assolutamente sommabile in \mathbb{Q} ma non è convergente in \mathbb{Q} (lo è invece nello spazio completo \mathbb{R}). \square

Nota 1.2.20. I termini di una serie convergente in norma tendono a 0 in norma.) Se una serie di vettori $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge in norma, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\| = 0$.

Dimostrazione. La proprietà di Cauchy, applicata alla serie convergente dell'enunciato, asserisce che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $N = N_\varepsilon$ tale che, se $N \leq k \leq m$, si ha $\|\sum_{n=k}^m v_n\| < \varepsilon$. Prendendo $m = k \geq N$ concludiamo che, per ogni ε , esiste N tale che $\|v_k\| < \varepsilon$ se $k \geq N$: per definizione di limite, questo equivale a dire che $\|v_k\| \rightarrow 0$. \square

In seguito utilizzeremo il seguente criterio di completezza per spazi normati.

Lemma 1.2.21. *Uno spazio normato X è completo se e solo se ogni serie assolutamente sommabile è convergente in X .*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia completo e consideriamo una serie assolutamente sommabile $\sum v_i$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $N > 0$ tale che $\sum_{i \geq N} \|v_i\| < \varepsilon$. Indichiamo con s_n le somme parziali $s_n = \sum_{i=1}^n v_i$. Allora, se $n, m > N$, si ha

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{i=m+1}^n v_i \right\| \leq \sum_{i=m+1}^n \|v_i\| \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} \|v_i\| < \varepsilon.$$

Pertanto la successione $\{s_n\}$ è di Cauchy (Definizione 1.2.16), e dal momento che X è completo essa converge in X .

Viceversa, supponiamo che le serie assolutamente sommabili in X siano convergenti e consideriamo una successione $\{v_n\}$ di Cauchy. Vogliamo provare che questa successione converge in X . Grazie alla proprietà di Cauchy esiste una successione crescente di numeri interi n_k tali che $\|v_n - v_m\| \leq 2^{-k}$

se $n, m > n_k$. Consideriamo la sottosuccessione v_{n_k} e formiamo la successione delle sue differenze consecutive $w_1 = v_1$ e $w_i = v_{n_i} - v_{n_{i-1}}$. Come nella Nota 1.2.19, la somma parziale N -sima $\sum_{i=1}^N w_i$ vale v_N . Ma abbiamo visto che $\|v_N\| \leq 2^{-N}$. Quindi la serie $\sum w_i$ è assolutamente sommabile, e perciò converge ad un vettore $v \in X$.

A questo punto basta mostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$. Usiamo il fatto che $\{v_n\}$ è di Cauchy: per ogni ε esiste N tale che $\|v_n - v_m\| < \varepsilon/2$ se $n, m > N$. D'altra parte, poiché $v_{n_k} \rightarrow v$, esiste K tale che $\|v_{n_k} - v\| < \varepsilon/2$ se $k > K$. Ora, se scegliamo $k > K$ così grande che $n_k > N$, abbiamo

$$\|v_n - v\| \leq \|v_n - v_{n_k}\| + \|v_{n_k} - v\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

e quindi $v_n \rightarrow v$. □

Definizione 1.2.22. (Prodotto scalare.) Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{C} . Un'applicazione

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

si dice *prodotto scalare* se

1. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} \quad \forall x, y \in X$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in X$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in X, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$ e $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Esercizio 1.2.23. Verificare che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definita in (1.6) è un prodotto scalare in \mathbb{C}^n . □

Nota 1.2.24. Ogni prodotto scalare dà luogo ad una norma

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\rightarrow [0, +\infty) \\ x &\mapsto \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} \end{aligned}$$

□

1.3 Convergenza uniforme

1.3.1 Convergenza di successioni di funzioni

Cominciamo con la definizione di convergenza puntuale per una successione di funzioni.

Definizione 1.3.1. (Convergenza puntuale.) Sia x una variabile in un insieme $A \subset \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) e $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, una successione di funzioni. La successione $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente alla funzione $f(x)$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n > \nu(\varepsilon, x) \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

cioè se, per ogni x in A , si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

con velocità di convergenza che può dipendere dalla scelta di x .

Esempio 1.3.2. Poniamo $f_n(x) = e^{-nx}$ con $x \in [0, 1]$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx} = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Osserviamo che, pur essendo le $f_n(x)$ funzioni continue per ogni $n \in \mathbb{N}$, il loro limite puntuale è una funzione discontinua in $x_0 = 0$. \square

Esempio 1.3.3. Poniamo $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan(nx)$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \arctan(nx) = 0.$$

In questo caso sia le $f_n(x)$ che la funzione limite (che è la funzione identicamente uguale a zero) sono continue.

Ci chiediamo quale sia il comportamento della successione delle derivate, ossia della successione $f'_n(x) = \frac{1}{n} \frac{1}{1+(nx)^2} n = \frac{1}{1+(nx)^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+(nx)^2} = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Quindi la successione delle derivate non converge alla derivata della funzione limite di $f_n(x)$. \square

Esempio 1.3.4. Poniamo $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{se } x \notin [n, n+1] \end{cases}$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{[n,n+1]}(x) = 0.$$

Quindi la funzione limite è la funzione identicamente uguale a zero.

Osserviamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[n,n+1]}(x) dx = \int_n^{n+1} dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

mentre l'integrale della funzione limite è ovviamente zero.

Quindi non è possibile passare al limite sotto il segno di integrale, ossia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[n,n+1]}(x) dx = 1 \neq 0 = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{[n,n+1]}(x) dx$$

□

Abbiamo visto (Esempio 1.3.2) che la continuità delle funzione $f_n(x)$ non implica la continuità della funzione limite.

Ci chiediamo allora sotto quali condizioni si può ottenere la continuità della funzione limite nel caso in cui le funzioni $f_n(x)$ siano tutte continue.

In altre parole, sia $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue in $x_0 \in A$, cioè le funzioni $f_n(x)$ verificano

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f_n(x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ci stiamo domandando sotto quali condizioni si avrà $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

In altri termini, ci chiediamo quando è possibile scambiare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Una condizione sufficiente a permettere di scambiare i due limiti è la convergenza uniforme della successione $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Definizione 1.3.5. (Convergenza uniforme.) Una successione di funzioni $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f(x)$ in A se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu(\varepsilon)$ (che dipende da ε , ma non dal punto x) tale che per $n > \nu(\varepsilon)$ e per ogni $x \in A$ si ha $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Chiaramente si ha:

Corollario 1.3.6. *Il limite uniforme di una successione di funzioni, se esiste, è anche il suo limite puntuale (ma non viceversa: il limite puntuale può esistere ma non essere anche limite uniforme).*

Nota 1.3.7. Se le funzioni $f_n(x)$ sono a valori reali per ogni $n \in \mathbb{N}$, la disuguaglianza $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ è equivalente alle due disuguaglianze

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon \quad (1.7)$$

□

Le disuguaglianze (1.7) sono vere per ogni $n > \nu(\varepsilon)$, indipendentemente dal punto $x \in A$. Quindi se $n > \nu(\varepsilon)$, allora il grafico di $f_n(x)$ è contenuto in un intorno tubolare di ampiezza 2ε centrato nel grafico di $f(x)$.

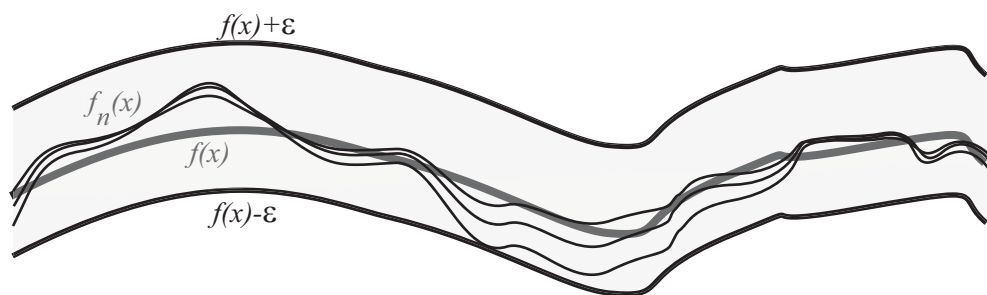


Figura 1.1: Approssimanti di f nella norma uniforme

Nota 1.3.8. Sia $I \subset \mathbb{R}$ e sia $B(I)$ lo spazio delle funzioni limitate definite su I con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Allora una successione f_n converge a f nello spazio normato $B(I)$ se e solo se f_n converge a f uniformemente. In altre parole la convergenza uniforme in I coincide con la convergenza rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ □

Esempio 1.3.9. La successione $f_n(x) = e^{-nx}$ con $x \in [0, 1]$ non converge uniformemente alla sua funzione limite.

Infatti

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{-nx} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1.$$

Quindi

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$$

non tende a zero per $n \rightarrow \infty$ e quindi la successione $f_n(x)$ non converge uniformemente alla funzione $f(x)$, ma solo puntualmente.

Vedremo in seguito che ciò si sarebbe potuto dedurre dalla discontinuità della funzione limite $f(x)$. \square

Esercizio 1.3.10. (i) Si mostri che la successione

$$f_n(x) = n^3 x^2 e^{-n^2 x^2}$$

non converge uniformemente in $(0, +\infty)$, ma che per ogni $a > 0$, la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in $(a, +\infty)$.

(ii) Si mostri che esiste finito il limite

$$\lim_n \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$$

ed è maggiore di zero. Quindi le $\{f_n\}$ convergono puntualmente a zero in $(a, +\infty)$ (e uniformemente in ogni semiretta propriamente contenuta in $(0, +\infty)$), ma il loro integrale non tende a zero.

Svolgimento. Sia

$$g(x) = x e^{-x^2}.$$

Allora $f_n(x) = n g(nx)$. Nella semiretta positiva, la funzione g ha un solo punto di massimo x_0 , a destra del quale è decrescente, e tende a zero all'infinito. I valori della funzione $h_n(x) := g(nx)$ sono gli stessi di g (la funzione h_n si ottiene da g comprimendone orizzontalmente il grafico di un fattore n), e quindi per la norma uniforme di $f_n = n h_n$ si trova $\|f_n\|_\infty = n \|g\|_\infty \rightarrow +\infty$. D'altra parte, se n è così grande che $x_0/n < a$, il punto di massimo x_0/n

della funzione h_n è minore di a , ed allora, come abbiamo visto, la funzione h_n è decrescente in $(a, +\infty)$. Perciò lo è anche f_n , e quindi la norma uniforme in $(a, +\infty)$ è

$$\sup_{\{x \geq a\}} f_n(x) = f_n(a) = n^3 a^2 e^{-n^2 a^2}$$

che tende a zero quando $n \rightarrow \infty$. Questo prova la parte (i). Per la parte (ii), basta applicare il teorema di integrazione per sostituzione ($x \rightarrow nx$) per ottenere

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = n \int_0^{+\infty} g(nx) dx = \int_0^{+\infty} g(x) dx,$$

indipendente da n . □

Esempio 1.3.11.

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan(nx) \rightarrow 0.$$

Quindi la funzione limite puntuale è $f = 0$, e

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\arctan(nx)}{n} \right|$$

da cui

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\arctan(nx)}{n} \right| \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$. Pertanto la convergenza è uniforme.

Consideriamo la successione delle derivate $f'_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2}$. La funzione limite è

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

e quindi

$$|f'_n(x) - \phi(x)| = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{1+(nx)^2} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Allora

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'_n(x) - \phi(x)| = 1$$

e non tende quindi a zero per $n \rightarrow \infty$.

In questo esempio, pur essendo $f_n(x)$ una successione uniformemente convergente, $f'_n(x)$ converge puntualmente a $\phi(x)$ ma non uniformemente. \square

Esempio 1.3.12. $f_n(x) = \chi_{[n, n+1]}(x)$.

Abbiamo visto che $f_n(x)$ converge puntualmente a zero. Ci chiediamo se tale convergenza sia uniforme.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\chi_{[n, n+1]}(x)| = 1$$

non tende a zero per $n \rightarrow \infty$, quindi la successione non converge uniformemente a zero. \square

Teorema 1.3.13. (*Limiti uniformi di successioni di funzioni limitate.*) Sia f_n una successione di funzioni limitate uniformemente convergente ad una funzione limite f . Allora anche f è una funzione limitata.

Dimostrazione. Poiché $f_n \rightarrow f$ nella norma uniforme, fissato ε esiste n tale che, per ogni x , vale la disuguaglianza $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Pertanto, per ogni x ,

$$- \|f_n\|_\infty - \varepsilon \leq f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon \leq \|f_n\|_\infty + \varepsilon$$

e quindi f è limitata. \square

Esempio 1.3.14. Per $n > 0$, consideriamo la successione di funzioni limitate f_n definite sulla semiretta $\{x \geq 0\}$ da

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, n) \\ n & \text{se } x \in [n, +\infty) \end{cases}$$

Questa successione non converge uniformemente in conseguenza del Teorema 1.3.13, perché il suo limite puntuale è la funzione $f(x) = x$, che è illimitata, e quindi non può esserne limite uniforme (Teorema 1.3.13). Senza usare questo teorema, si può arrivare alla stessa conclusione direttamente dalla definizione di convergenza uniforme (Definizione 1.3.5), e dal suo Corollario 1.3.6: basta osservare che per ogni n si ha $\|f_n - f\|_\infty = +\infty$.

\square

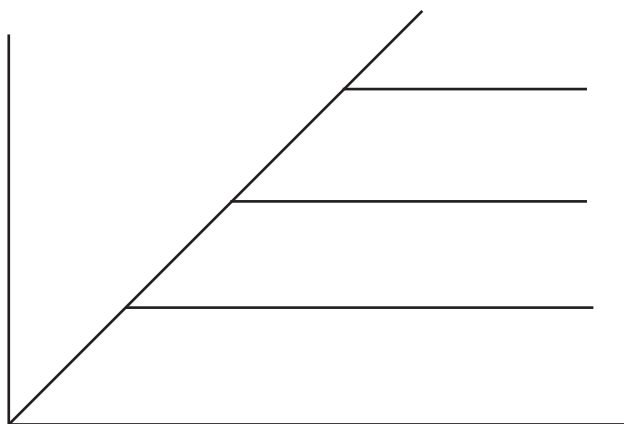


Figura 1.2: Gli approssimanti puntuali della bisettrice non sono approssimanti uniformi

Teorema 1.3.15. (Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme di successioni di funzioni.)

Sia $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite in un intervallo I . Allora $f_n(x)$ converge uniformemente a una funzione $f(x)$ in $I \Leftrightarrow$ per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε tale che, per ogni $x \in I$, se $n, m > n_\varepsilon$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Dimostrazione.

(\Rightarrow) Sia $\varepsilon > 0$. Dato che $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$, esiste n_ε tale che se $n > n_\varepsilon$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I.$$

Sia $m > n_\varepsilon$, allora anche

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I.$$

Quindi

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Quindi

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq 2\varepsilon \quad \forall x \in I$$

(\Leftarrow) Supponiamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista n_ε tale che, se $n, m > n_\varepsilon$, allora $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ per ogni $x \in I$. Quindi la successione $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy e dunque $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Sia

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in I.$$

Vogliamo fare vedere che $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ uniformemente in I .

Sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste n_ε tale che se $n, m > n_\varepsilon$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Supponiamo che $m > n$ e scriviamo quindi $m = n + k$ con $k \in \mathbb{N}$. Allora se $n > n_\varepsilon$

$$|f_n(x) - f_{n+k}(x)| \leq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I.$$

Quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \varepsilon.$$

D'altra parte

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_{n+k}(x)| = \left| f_n(x) - \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n+k}(x) \right| = |f_n(x) - f(x)|,$$

e allora

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in I.$$

Quindi, se $n > n_\varepsilon$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in I.$$

cioè $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f(x)$.

□

Teorema 1.3.16. (Limiti uniformi di successioni di funzioni continue.) Sia $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite in un intervallo I e sia $x_0 \in I$. Se le funzioni $f_n(x)$ sono tutte continue in x_0 e se la successione $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a una funzione $f(x)$ in I , allora $f(x)$ è continua in x_0 .

Dimostrazione. Dato che $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f(x)$, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ e per ogni $x \in I$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

D'altra parte le funzioni $f_n(x)$ sono tutte continue in x_0 , quindi se si fissa un indice \bar{n} tale che $\bar{n} > n_\varepsilon$, esiste δ tale che se $|x - x_0| < \delta$ si ha

$$|f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| < \varepsilon.$$

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{\bar{n}}(x) + f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0) + f_{\bar{n}}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_{\bar{n}}(x)| + |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| + |f_{\bar{n}}(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

cioè $f(x)$ è continua in x_0 . □

Teorema 1.3.17. (Convergenza uniforme e passaggio al limite sotto il segno di integrale.) Sia $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue in un intervallo $[a, b]$. Se $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a una funzione $f(x)$ in $[a, b]$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Dimostrazione. Dato che $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a $f(x)$ in $[a, b]$, $f(x)$ risulta essere continua in $[a, b]$ e quindi ha senso scrivere $\int_a^b f(x) dx$.

Sia $\varepsilon > 0$. Per la convergenza uniforme della successione $\{f_n(x)\}$, esiste n_ε tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ e per ogni $x \in [a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Allora per ogni $n > n_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

□

Esempio 1.3.18. Il precedente Teorema 1.3.17 di passaggio al limite sotto il segno di integrale vale per successioni uniformemente convergenti su un compatto $[a, b]$, ma non vale su insiemi illimitati.

Infatti, sia $f_n(x) = 1/2n$ se $-n \leq x \leq n$ e $f_n(x) = 0$ altrimenti. Allora $\|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1/2n$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$, e quindi f_n converge uniformemente alla funzione nulla su tutto \mathbb{R} , ma $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 1$. Però la stessa dimostrazione data per questo Teorema prova che, se $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue in un insieme misurabile A di misura finita (si veda la definizione nella successiva Sottosezione 1.9.1) e $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente in A ad una funzione $f(x)$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

□

Teorema 1.3.19. (Convergenza uniforme e derivabilità.) Sia $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni di classe $C^1([a, b])$ tale che

1. per qualche $x_0 \in [a, b]$, $f_n(x_0)$ converge a $f(x_0)$;
2. f'_n converge uniformemente ad una funzione g in $[a, b]$.

Allora $f \in C^1([a, b])$ e $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Inoltre anche f_n converge uniformemente a f in $[a, b]$.

Dimostrazione. Per il Teorema Fondamentale del Calcolo integrale (Teorema 1.27.1) abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt, \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Allora

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f_n(x_0) + \int_a^x f'_n(t) dt \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt, . \end{aligned}$$

Per ipotesi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Inoltre la successione $\{f'_n\}$ converge uniformemente a g e quindi, per il Teorema 1.3.17

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f'_n(t) dt = \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) dt = \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

Quindi

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt. \quad (1.8)$$

Analogamente, $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$. Poiché f'_n converge uniformemente a g , per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che, per ogni $n \geq N$, si ha $|f'_n(t) - g(t)| < \varepsilon$ per ogni $t \in [a, b]$. Pertanto, per ogni $n \geq N$, prendendo n sufficientemente grande perché si abbia $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$, otteniamo

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + \left| \int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| dt \right| \\ &\leq \varepsilon + |x - x_0| \varepsilon \leq (b - a + 1) \varepsilon \end{aligned}$$

e quindi f_n converge uniformemente a f in $[a, b]$.

Ora deriviamo ambo i membri di (1.8):

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^x g(t) dt \right).$$

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo (Teorema 1.27.1)

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^x g(t) dt \right) = g(x),$$

quindi $f' = g$ e il teorema è dimostrato. \square

Nota 1.3.20. La nozione di convergenza richiesta nell'enunciato del Teorema 1.3.19 può essere formulata in termini di una norma, in analogia con quanto accade per la convergenza uniforme. Nel caso in oggetto la norma è $\|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$. Essa si chiama che si chiama *norma C^1* , ovvero norma nello spazio $C^1([a, b])$ delle funzioni derivabili con derivata continua nell'intervallo $[a, b]$. Questa norma verrà studiata più approfonditamente nell'Esempio 9.1.6. \square

Nota 1.3.21. Tutti i precedenti teoremi di questa Sezione continuano a valere, con dimostrazione analoga, se invece di considerare una successione di funzioni f_n indicizzata da un indice intero n si prende in esame una famiglia di funzioni f_δ indicizzata da un parametro reale (o complesso) δ che tende ad un limite δ_0 . A titolo di esempio formuliamo la prossima definizione ed il prossimo teorema in questo senso. \square

Il prossimo risultato è un parziale reciproco del Teorema 1.3.16: infatti esso mostra che, se il limite è continuo, allora la convergenza puntuale implica quella uniforme, purché abbia luogo su un compatto ed in maniera puntualmente decrescente. A questo fine anticipiamo l'uso della nozione di compattezza (e di sottoricoprimenti finiti), per la quale rinviemo alla successiva Definizione 1.9.4. Per concretezza, anticipiamo anche che gli intervalli limitati e chiusi su \mathbb{R} sono compatti.

Teorema 1.3.22. (Dini.) *Sia K un insieme compatto e siano $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue che convergono puntualmente ovunque ad una funzione continua f in maniera monotona non crescente, ossia $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ per ogni $x \in K$. Allora la convergenza è uniforme.*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché le f_j convergono puntualmente a f ed f è continua, per ogni $y \in K$ esistono un indice j ed un sottoinsieme aperto $U(y, j) \subset K$ tali che

$$|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (1.9)$$

per ogni $x \in U(y, j)$: infatti, $f_j(y)$ converge a $f(y)$ e quindi (1.9) è verificata per $x = y$, e, per gli altri $x \in U(y, j)$, $|f_j(x) - f(x)| \leq |f_j(x) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)|$. Quindi (1.9) segue dalla continuità di f_j .

Allora la famiglia $U(y, j)$ forma un ricoprimento aperto di K . Per la compattezza, esiste un sottoricoprimento finito $U(y_1, j_1), \dots, U(y_m, j_m)$ di K . Sia $k = \max\{j_1, \dots, j_m\}$. Poiché la successione f_j è non crescente, sappiamo che per ogni i si ha $|f_k(x) - f(x)| < |f_{j_i}(x) - f(x)| < \varepsilon$ se $x \in U(y_i, j_i)$. Ma poiché l'unione degli $U(y_i, j_i)$ è tutto K , abbiamo che $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ ovunque. Ora, di nuovo per la monotonia, $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ per ogni $n \geq k$. \square

Esercizio 1.3.23. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + e^{nx}}.$$

Dimostrare che nella semiretta $\{x \geq 0\}$ la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0.

Suggerimento: per $x > 0$,

$$\frac{x}{1 + e^n x} < \frac{x}{e^n x} = \frac{1}{1 + e^n}.$$

Invece, per $x = 0$, si ha $f_n(0) = 0$ per ogni n . □

Esercizio 1.3.24. Studiare la convergenza uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = (n \sin x + \cos x)/(2n + 1)$ per $x \in \mathbb{R}$.

□

Esercizio 1.3.25. In quali sottoinsiemi di \mathbb{R} la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^3}$$

converge uniformemente? □

1.3.2 Convergenza uniforme di serie di funzioni

Una serie di funzioni è una serie il cui termine n -esimo è una funzione

$$\sum_n f_n(x)$$

Definizione 1.3.26. La successione delle somme parziali della serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ è la successione di funzioni

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in I.$$

Definizione 1.3.27. (Convergenza uniforme di serie.) Una serie di funzioni $\sum_k f_k(x)$ definite in I converge uniformemente ad una funzione f definita in I se la successione delle sue somme parziali $\{S_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f(x)$ in I . In tal caso scriviamo che

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{uniformemente } \in I.$$

Teorema 1.3.28. (Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme di serie di funzioni.) Una serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente in I se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε tale che se $n > n_\varepsilon$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}, x \in I.$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione delle somme parziali della serie

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad \forall x \in I.$$

Allora il teorema si dimostra applicando a tale successione il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme di successioni di funzioni (Teorema 1.3.15). \square

Teorema 1.3.29. (Test di Weierstrass o della convergenza totale.)

Sia $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri non negativi tale che

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I.$$

Sia, inoltre, $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ una serie numerica convergente.

Allora la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in I .

Dimostrazione. Dato che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in I$, si ha $|f_n(x)| \leq M_n$, otteniamo

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k.$$

La serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ è convergente e quindi per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε tale che se $n > n_\varepsilon$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k \right| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che se $n > n_\varepsilon$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k \leq \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in I.$$

Ma la condizione di Cauchy è equivalente alla convergenza uniforme della serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ (Teorema 1.3.28). \square

Esempio 1.3.30. Convergenza puntuale ed uniforme di serie di funzioni a supporti disgiunti.) Il presente esempio anticipa, limitatamente a ciò che riguarda la convergenza puntuale ed uniforme di serie, un esempio analogo (Esercizio 11.17.32) che estenderemo anche alla convergenza nel senso delle distribuzioni. Consigliamo fortemente al lettore di tracciare i grafici dei termini delle serie e delle loro somme parziali, per evitare confusioni (i termini delle serie che studieremo nell'Esempio 11.17.32 hanno grafici più semplici: in caso di dubbio il lettore può considerare quelle funzioni invece di queste).

Sia c_0 la funzione che vale $\sin x$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e 0 altrove, e sia c_n il suo traslato di passo $2n\pi$, che vale quindi $\sin(x - 2n\pi) = \sin x$ in $[2n\pi - \pi, 2n\pi + \pi] = [(2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi]$ e 0 altrove. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x).$$

(i) La serie converge puntualmente? La serie converge uniformemente?

La serie converge puntualmente alla funzione $S(x)$ che vale $c_n(x)$ nell'intervallo $[(2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi]$. In altre parole, la funzione S somma della serie vale $\sin x$ negli intervalli $[(2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi]$ al variare di n , e quindi vale $\sin x$ su tutto \mathbb{R} .

Infatti, poiché questi intervalli sono adiacenti, per ogni x si ha $c_n(x) = 0$ per tutti gli interi n tranne che per l'unico valore di n (che indichiamo con n_x) che verifica $(2n - 1)\pi \leq x < (2n + 1)\pi$ (qui il segno di minore o uguale a sinistra si potrebbe rimpiazzare col segno di minore, perché ai punti $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ tutti gli addendi sono nulli). Questo valore n_x è facile da calcolare, anche se non serve farlo: in effetti si ha $n_x = \left\lceil \frac{(x+\pi)}{2\pi} \right\rceil$.

Quindi, per ogni x , c'è al più soltanto un termine non nullo nella serie, da cui la convergenza puntuale: pertanto ogni somma parziale $S_n(x)$ vale 0 per $n < n_x$, e per tutti gli $n \geq n_x$ vale $\sin x$. In altre parole, passato n_x il valore delle somme parziali $S_n(x)$ diventa costante rispetto a n , e quindi ovviamente esse convergono.

La serie però non converge uniformemente. Se la convergenza fosse uniforme, le somme parziali convergerebbero uniformemente alla somma puntuale $S(x)$ calcolata nella parte precedente. Quindi, indicando

con S_N la somma parziale $S_N = \sum_{n=1}^N c_n(x)$, il resto N -simo $S - S_N$ verificherebbe

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S - S_N\|_{\infty} = 0.$$

Invece,

$$S(x) - S_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(x)$$

vale $\sin x$ se x appartiene ad un intervallo del tipo $[(2n-1)\pi, (2n+1)\pi]$ con $n > N$, e 0 altrimenti (ossia se $x \geq (2N-1)\pi$). Poiché in questi intervalli il seno raggiunge il valore massimo 1 si ha $\|S - S_N\|_{\infty} = 1$ per ogni N , e pertanto non si ha convergenza uniforme.

Una variante di questo ragionamento, più semplice perché non richiede il calcolo preliminare della somma S della serie, segue dal criterio di Cauchy (Teorema 1.3.28): per il momento lasciamo questa variante per esercizio, rinviando i lettori che non fossero in grado di affrontarlo alla spiegazione dettagliata che troveranno nel seguito alla Nota 1.2.20.

(ii) Consideriamo ora invece la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} c_n(x).$$

Come cambiano le risposte precedenti se $\alpha = 1$?

In questo caso $n^{\alpha} = n$. Come prima, al più soltanto un termine della serie è non nullo per ciascun x , e quindi la serie converge puntualmente. Però questo termine ora vale $n \sin x$. Quindi la somma della serie è illimitata per $x \rightarrow \infty$ (vale n nel punto $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, dove il seno vale 1), e la serie diverge nella norma uniforme.

(iii) Come cambiano le risposte precedenti se $\alpha = -\frac{1}{2}$?

Come prima, la serie converge puntualmente perché per ogni x c'è al più un solo addendo non nullo: si tratta del termine con $n = n_x$, come sempre. Ora però questo termine si maggiora, in valore assoluto, con il massimo del seno (che ovviamente vale 1) moltiplicato per $n_x^{-\frac{1}{2}}$. Quindi la somma parziale n -sima della serie è nulla a destra dei primi n intervalli, e su ciascuno di essi si maggiora con $n^{-\frac{1}{2}}$. Pertanto ora

$S(x) - S_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} c_n(x)$ si maggiora uniformemente con $(N+1)^{-\frac{1}{2}}$, che tende a 0 con N , e quindi la serie converge uniformemente.

Cautela: nell'ultimo passaggio non si può applicare il test di Weierstrass (Teorema 1.3.29), perché la serie numerica dei maggioranti, $\sum n^{-\frac{1}{2}}$, non converge (Sezione 1.1). Ed in effetti, qui la convergenza uniforme non segue in realtà dal fatto che gli addendi diventino piccoli rapidamente, bensì dal fatto che diventano piccoli anche se lentamente ma i loro supporti sono disgiunti...

□

Esercizio 1.3.31. Discutere in dettaglio l'analogo del precedente Esempio 1.3.30 se la funzione c_0 è ridefinita così: $c_0(x) = \cos x$ se $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e 0 altrove. □

Esercizio 1.3.32. (i) Sia χ_n la funzione caratteristica dell'intervallo $[n, n+1)$ (quella definita nella Sezione 1.1 che vale 1 se $n \leq x < n+1$ e 0 altrove). Si mostri che la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n$ converge puntualmente alla costante 1 ma non converge uniformemente.

(ii) Sia ψ_n la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, n)$. Si mostri che la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n$ non converge puntualmente: più precisamente, che essa diverge per ogni x .

(iii) Sia θ_n la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, 1/n)$. Si mostri che la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n$ diverge in $x = 0$ ma converge puntualmente per ogni $x \neq 0$, e converge uniformemente in ogni intervallo chiuso che non contiene 0. (*Suggerimento:* per ogni fissato $x \neq 0$, solo un numero finito dei numeri $\theta_n(x)$ sono non nulli.)

□

Dai teoremi sulla continuità e derivabilità ed il passaggio al limite sotto il segno di integrale dimostrati per le successioni di funzioni seguono i relativi teoremi per le serie di funzioni (si dimostrano considerando la successione delle somme parziali della serie e applicando i suddetti teoremi a tale successione).

Teorema 1.3.33. (Convergenza uniforme e continuità di serie di funzioni.) *Se una serie di funzioni continue in I , $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, converge uniformemente a una funzione $f(x)$ in I , allora $f(x)$ è continua in I*

Teorema 1.3.34. (Convergenza uniforme ed integrabilità per serie.) Sia $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni continue in un intervallo $[a, b]$. Se la serie converge uniformemente a $f(x)$ in $[a, b]$, allora

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Teorema 1.3.35. (Convergenza uniforme e derivabilità per serie.) Sia $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni di classe $C^1(I)$ tale che

1. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ in I ;
2. $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ converge uniformemente a una funzione $g(x)$ in I .

Allora $f \in C^1(I)$ e $g(x) = f'(x)$ in I

1.4 Serie di potenze

Definizione 1.4.1. Sia a_n una successione a valori reali o complessi. Una serie della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C} \quad (\text{oppure } z \in \mathbb{R})$$

è detta *serie di potenze*. A meno di una traslazione, quindi senza perdita di generalità, assumeremo in tutti gli enunciati che sia $z_0 = 0$.

Teorema 1.4.2. (Disco di convergenza di serie di potenze.) Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

una serie di potenze, e sia

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (1.10)$$

dove conveniamo che sia $R = 0$ se il denominatore è infinito, e $r = +\infty$ se il denominatore è zero. Allora la serie converge assolutamente per $|z| < R$ e non converge per $|z| > R$. Inoltre, la serie converge uniformemente in ogni compatto contenuto nel disco $B_R(0) = \{|z| < R\}$.

Dimostrazione. Per la convergenza, basta applicare il criterio della radice (Sezione 1.1), ed osservare che $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z|/R$.

Proviamo la convergenza uniforme sui compatti. Per il Teorema di Weierstrass sull'esistenza dei massimi di funzioni continue sui compatti (Sezione 1.1), in ogni compatto K contenuto nel disco di convergenza c'è un punto w a distanza massima dall'origine, perchè, per definizione di continuità, la distanza è una funzione continua. Poiché il disco di convergenza ha raggio R , per ogni $z \in K$ si ha $|z| \leq |w| < R$. Allora $|a_n z^n| \leq |a_n w^n|$, e la convergenza uniforme segue da questa maggiorazione uniforme rispetto a z e dalla prima parte della dimostrazione grazie al test di Weierstrass (Teorema 1.3.29). \square

Nota 1.4.3. Se esiste, finito od infinito, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

allora anche questo limite è uguale al raggio di convergenza: basta applicare il criterio del rapporto (Sezione 1.1) anziché quello della radice. \square

Corollario 1.4.4. *Nel suo disco aperto di convergenza, una serie di potenze converge ad una funzione continua.*

Esempio 1.4.5. Le serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$, $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ hanno tutte e tre raggio di convergenza uguale a 1, quindi il disco di convergenza è la palla con centro l'origine e raggio 1. Sul bordo del disco di convergenza (la circonferenza con centro l'origine e raggio 1) il comportamento delle tre serie è diverso: lo determiniamo sulla base dei criteri di convergenza enunciati nella Sezione 1.1. La prima non converge, perché il termine generico non tende a zero. L'ultima converge ovunque, perché i coefficienti decrescono in modulo a velocità $1/n^2$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ diverge per $z = 1$ dove i coefficienti valgono $1/n$, e converge puntualmente sul resto della circonferenza per il criterio di Dirichlet (Teorema 1.1.5). In particolare essa converge a $z = -1$ per il criterio di Leibnitz sulle serie a segni alterni, che il criterio di Dirichlet estende agli altri punti $z = e^{it}$ con $t \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). \square

Esempio 1.4.6. Determiniamo il raggio di convergenza della serie

$$\sum_n n! z^n.$$

Qui $a_n = n!$, e quindi

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Pertanto la serie converge solo per $z = 0$. \square

***Teorema 1.4.7. Sviluppabilità in serie di potenze rispetto a diversi centri di sviluppo.)** Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$, e sia z_1 tale che il disco $B_S(z_1)$ è contenuto nel disco di convergenza $B_R(z_0)$, ossia tale che

$$|z_1 - z_0| + S \leq R. \quad (1.11)$$

Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ la serie

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (z_1 - z_0)^{n-k}$$

è convergente, e nel disco $B_S(z_1)$ la funzione somma f è sviluppabile in serie di potenze con centro z_1 : per ogni $z \in B_S(z_1)$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_1)^k. \quad (1.12)$$

Dimostrazione. Dal Teorema del Binomio di Newton (Sezione 1.1) si ha

$$(z - z_0)^n = (z - z_1 + z_1 - z_0)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z - z_1)^k (z_1 - z_0)^{n-k}. \quad (1.13)$$

Allo stesso modo si ha

$$(|z - z_1| + |z_1 - z_0|)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |z - z_1|^k |z_1 - z_0|^{n-k}. \quad (1.14)$$

Poniamo $u(n, k) = \binom{n}{k} a_n (z - z_1)^k (z_1 - z_0)^{n-k}$ se $0 \leq k \leq n$, e $u(n, k) = 0$ altrimenti. Allora da (1.13) abbiamo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u(n, k).$$

Ora mostriamo che la serie doppia nel lato destro di questa identità converge assolutamente. Sia $z \in B_S(z_1)$, ossia $|z - z_1| < S$. Poniamo $w = z_0 + |z - z_1| + |z_1 - z_0|$, ed osserviamo che

$$|w - z_0| < S + |z_1 - z_0| \leq R$$

dall'identità (1.11). Pertanto segue da (1.14) che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |u(n, k)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z - z_1| + |z_1 - z_0|)^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (w - z_0)^n,$$

ma questa serie di potenze converge perché $|w - z_0|$ è inferiore al suo raggio di convergenza R . Abbiamo quindi convergenza assoluta della serie, e quindi possiamo riordinarne i termini (Section 1.1) scambiando l'ordine delle due somme, ossia sommando prima rispetto a n e poi rispetto a k : in tal modo si ottiene (1.12). \square

Lemma 1.4.8. *Una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ hanno lo stesso raggio di convergenza. Rem: in questo enunciato, per maggiore generalità, la derivata è quella per funzioni di variabile complessa (si veda in seguito la Definizione 1.22.13). Il lettore per cui questa nozione sia per ora poco familiare può limitare l'attenzione, nel presente enunciato, a serie di potenze reali.*

Dimostrazione. Basta osservare che $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n a_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, perché $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (infatti $\sqrt[n]{n} = e^{\log n/n}$ e $\log n$ diverge più lentamente di n (Sezione 1.1)). \square

Teorema 1.4.9. (Derivazione di serie di potenze.) *Se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge nel disco di raggio R ed ha somma $f(z)$, allora in questo disco f è derivabile (in senso complesso, Definizione 1.22.13) e la derivata si ottiene derivando per serie, cioè termine a termine:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

In particolare, se una serie di potenze di una variabile reale converge in un segmento, al suo interno essa è derivabile termine a termine e la derivata della serie coincide con la serie delle derivate.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal precedente Lemma 1.4.8 e dal teorema di derivazione per serie, Teorema 1.3.35. \square

Corollario 1.4.10. *(Ogni serie di potenze è integrabile termine a termine.)* In ogni intervallo chiuso all'interno del suo intervallo aperto di convergenza, ogni serie di potenze reale $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ è integrabile termine a termine, ossia il segno di integrale commuta con quello di serie. In altre parole, per ogni x tale che $|x-x_0| < R$:

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^x (t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}.$$

Dimostrazione. La serie converge uniformemente in $[x_0, x]$ per il teorema di convergenza (Teorema 1.4.2). Il risultato segue quindi dal teorema di integrazione per serie (Teorema 1.3.34). \square

***Teorema 1.4.11. (Teorema di convergenza radiale di Abel.)** Consideriamo uno sviluppo in serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergente nell'intervallo aperto $(-r, r)$. Se la serie converge anche al punto $x = r$, allora esiste il limite $\lim_{x \rightarrow r^-} f(x)$ e vale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$. Equivalentemente, se la serie di potenze è di variabile complessa e converge puntualmente su un raggio del disco di convergenza, estremo incluso, allora la sua somma ha limite radiale lungo quel raggio, ed è continua su tutto il raggio estremo incluso.

Dimostrazione. Se la serie converge al punto $x = r$ allora il suo raggio spettrale R verifica la disuguaglianza $R \geq r$. Scriviamo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x}{r}\right)^n r^n$ e consideriamo la convergenza di questa serie nell'intervallo $[0, r]$. Poiché $\frac{x}{r} \leq 1$, la successione di funzioni $\frac{x}{r}$ è uniformemente limitata, ed inoltre è monotona non crescente. Per ipotesi, la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ è convergente. Quindi la serie a secondo membro converge uniformemente in questo intervallo per il criterio di convergenza uniforme di Abel (Teorema 1.1.7 (ii)): in particolare, la sua somma è una funzione continua in $[0, r]$, ed analogamente in $(-r, r]$. \square

Esercizio 1.4.12. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_n 2^{-n} \log \left(1 - \frac{1}{n^\alpha} \right) z^n,$$

dove $\alpha > 0$. *Svolgimento.* Sia $a_n = 2^{-n} \log \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)$, allora il raggio di convergenza della serie è

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 2$$

Quindi la serie in esame converge assolutamente per $|z| < 2$ e non converge per $|z| > 2$. Inoltre, per $|z| = 2$ la serie converge assolutamente se $\alpha > 1$: infatti, se $z = 2e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$), allora dalle stime di Leibnitz (Sezione 1.1) per lo sviluppo di Taylor al primo ordine del logaritmo a $x = 1$ (che è a segni alterni), o più semplicemente dal fatto che il logaritmo è concavo e quindi il suo grafico sta sotto alla retta tangente al punto $x = 1$, si vede che

$$\left| 2^{-n} \log \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right) 2^n e^{in\theta} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

e la convergenza segue dal confronto con la serie $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (Sezione 1.1). Analogamente, dallo sviluppo del logaritmo al secondo ordine, segue che

$$\left| 2^{-n} \log \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right) 2^n e^{in\theta} \right| \geq \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} > \frac{1}{2n^\alpha}$$

se n è sufficientemente grande. Quindi, per $\alpha \leq 1$, la serie diverge se $|z| = 2$, sempre grazie al criterio del confronto. \square

Esercizio 1.4.13. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_n 2^{\sqrt{n}} z^n.$$

Svolgimento. Qui $a_n = 2^{\sqrt{n}}$. Quindi

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{\frac{\sqrt{n}}{n}}} = 1$$

Il raggio di convergenza è $R = 1$, quindi la serie in esame converge per $|z| < 1$ e non converge per $|z| > 1$. Si vede inoltre che per $|z| = 1$ la serie non converge perchè in tal caso il termine generale non tende a zero.

\square

Esercizio 1.4.14. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_n (n - \sqrt{n} \cos n) z^n.$$

Svolgimento. Poiché $a_n = n - \sqrt{n} \cos n$, il raggio di convergenza della serie è

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|n - \sqrt{n} \cos n|}{|n+1 - \sqrt{n+1} \cos(n+1)|} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|1 - \frac{\sqrt{n}}{n} \cos n|}{|1 + \frac{1}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n} \cos(n+1)|} = 1. \end{aligned}$$

Quindi la serie converge assolutamente per $|z| < 1$ e non converge per $|z| > 1$. Si vede inoltre che per $|z| = 1$ la serie non converge perchè in tal caso il termine generale non tende a zero. \square

Esercizio 1.4.15. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_n \frac{(2x)^n}{n + 3\sqrt{n}}$$

al variare del parametro reale x .

Svolgimento. Qui $a_n = \frac{1}{n+3\sqrt{n}}$, ed il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_n \frac{z^n}{n + 3\sqrt{n}}$ è

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1.$$

Quindi la serie converge assolutamente per $|x| < 1/2$ e non converge per $|x| > 1/2$. Dal criterio del confronto (Sezione 1.1) si vede che per $x = 1/2$ la serie diverge. Dal Criterio di Leibnitz (Sezione 1.1) si vede che per $x = -1/2$ la serie converge. \square

Esercizio 1.4.16. Per $k > 0$ intero, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^k}$$

converge puntualmente in $(0, 1)$? Converge uniformemente in $(0, 1)$? *Svolgimento.* Il raggio di convergenza di queste serie, calcolato come in (1.10), è 1 per ogni k , quindi le serie convergono tutte puntualmente in $(0, 1)$. I loro termini sono funzioni crescenti e continue, estendibili con continuità all'intervallo $(0, 1]$, dove hanno massimo al punto $x = 1$ con valore massimo 1: quindi la norma uniforme sull'intervallo $(0, 1)$ di ciascun termine vale 1. Per lo stesso motivo le somme parziali m -sime sono crescenti in $(0, 1)$, hanno senso anche in $(0, 1]$, e la loro norma uniforme diverge. Non si ha convergenza uniforme per nessun k intero positivo. \square

1.5 Ulteriori esercizi sulla convergenza uniforme

Esercizio 1.5.1. In quali sottoinsiemi dell'intervallo $[-2, 2]$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

converge uniformemente? \square

Esercizio 1.5.2. 1. Utilizzando il test di Weierstrass si dimostri che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k|x|}}{k^5}$$

converge uniformemente in ogni intervallo limitato contenuto in $[0, 1]$.

2. Si dimostri inoltre che le somme parziali della serie al punto (a),

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{-k|x|}}{k^5}$$

formano una successione di Cauchy.

Suggerimento: si maggiorino le somme

$$\sum_{k=M+1}^N \frac{e^{-k|x|}}{k^5}$$

per M, N sufficientemente grandi.)

□

Esercizio 1.5.3. 1. Utilizzando il test di Weierstrass si dimostri che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan(x - k)}{k^3}$$

converge uniformemente in ogni intervallo limitato contenuto in $[0, 1]$.

2. Si dimostri inoltre che le somme parziali delle serie al punto (a),

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\arctan(x - k)}{k^3}$$

formano una successione di Cauchy.

(*Suggerimento:* si maggiorino le somme

$$\sum_{k=M+1}^N \frac{\arctan(x - k)}{k^3}$$

per M, N sufficientemente grandi.)

□

Esercizio 1.5.4. 1. Utilizzando il test di Weierstrass si dimostri che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-(x-k)^2}}{k^2}$$

converge uniformemente in ogni intervallo limitato contenuto in $[0, 1]$.

2. Si dimostri inoltre che le somme parziali della serie al punto (a),

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{-(x-k)^2}}{k^2}$$

formano una successione di Cauchy.

(Suggerimento: si maggiorino le somme

$$\sum_{k=M+1}^N \frac{e^{-(x-k)^2}}{k^2}$$

per M, N sufficientemente grandi.)

□

Esercizio 1.5.5. 1. Utilizzando il test di Weierstrass si dimostri che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos x^k}{k^4}$$

converge uniformemente in ogni intervallo limitato contenuto in $[0, 1]$.

2. Si dimostri inoltre che le somme parziali della serie al punto (a),

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos x^k}{k^4}$$

formano una successione di Cauchy.

(Suggerimento: si maggiorino le somme

$$\sum_{k=M+1}^N \frac{\cos x^k}{k^4}$$

per M, N sufficientemente grandi.)

□

Esercizio 1.5.6. In quali sottoinsiemi dell'intervallo $[0, 4]$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^n}{n^3}$$

converge uniformemente?

□

Esercizio 1.5.7. In quali sottoinsiemi dell'intervallo $(-1, +\infty)$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log(x+1))^n}{n^4}$$

converge uniformemente?

□

Esercizio 1.5.8. In quali sottoinsiemi dell'intervallo $[-1, 1]$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^3}$$

converge uniformemente?

□

Esercizio 1.5.9. In quali sottoinsiemi dell'intervallo $[-1, 1]$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^3}$$

converge uniformemente?

□

Esercizio 1.5.10. Utilizzando il test di Weierstrass dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x-n)}{n^3}$$

converge uniformemente su tutto \mathbb{R} .

□

Esercizio 1.5.11. In quali sottoinsiemi di \mathbb{R} la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(x-n)^2}}{n^2}$$

converge uniformemente?

□

Esercizio 1.5.12. In quali sottoinsiemi di \mathbb{R} la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^4}$$

converge uniformemente?

□

Esercizio 1.5.13. In quali sottoinsiemi di \mathbb{R} la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x - n)}{n^2}$$

converge uniformemente? □

Esercizio 1.5.14. In quali sottoinsiemi di \mathbb{R} la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x^2+n}}{n^2}$$

converge uniformemente? □

Esercizio 1.5.15. In quali sottoinsiemi di \mathbb{R} la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x - n)}{n^3}$$

converge uniformemente? □

Esercizio 1.5.16. In quali sottoinsiemi di \mathbb{R} la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x - n)}{n^3}$$

converge uniformemente? □

Esercizio 1.5.17. In quali sottoinsiemi di \mathbb{R} la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x + n)}{n^3}$$

converge uniformemente? □

Esercizio 1.5.18. In quali sottoinsiemi di \mathbb{R} la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$$

converge uniformemente? □

Esercizio 1.5.19. In quali sottoinsiemi di \mathbb{R} la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

converge uniformemente?

□

Esercizio 1.5.20. In quali sottoinsiemi di \mathbb{R} la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(x-n)^2}}{n^2}$$

converge uniformemente?

□

Esercizio 1.5.21. In quali sottoinsiemi dell'intervallo $[-a, a]$ con $a \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$$

converge uniformemente?

□

Esercizio 1.5.22. Data la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{\cos x}{n^\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$ stabilire in quali sottoinsiemi di \mathbb{R} converge uniformemente.

□

Esercizio 1.5.23. In quali intervalli $[a, b]$ di \mathbb{R} la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+n)^3}{n^5}$$

converge uniformemente?

□

Esercizio 1.5.24. Studiare la convergenza uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = (\sqrt{x})^n$ nell'intervallo $[0, 1]$.

□

Esercizio 1.5.25. Studiare la convergenza uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

□

Esercizio 1.5.26. In quali sottoinsiemi dell'intervallo $[-2, 2]$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$$

converge uniformemente? □

Esercizio 1.5.27. In quali sottoinsiemi dell'intervallo $[-2, 2]$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

converge uniformemente? □

Esercizio 1.5.28. In quali sottoinsiemi dell'intervallo $[0, 4]$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^n}{n^3}$$

converge uniformemente? □

Esercizio 1.5.29. In quali sottoinsiemi dell'intervallo $(0, +\infty)$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n}{x^2}}}{n^2}$$

converge uniformemente? □

Esercizio 1.5.30. Sia $f(x) = 1/(1+x^2)$. La successione di funzioni $f_n(x) = f(x/n)$ converge puntualmente su \mathbb{R} ? Converge uniformemente sui compatti? Converge uniformemente su tutto \mathbb{R} ?

Svolgimento. È evidente che $f_n(x) \nearrow 1$ puntualmente per ogni x . La convergenza non è uniforme su \mathbb{R} , perché, per ogni n , si ha $\|f_n - 1\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} 1 - f_n(x) = 1$, visto che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 - f_n(x) = 1 - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n = 1$. Si osservi che l'estremo superiore non è un massimo, visto che non viene raggiunto in un punto di \mathbb{R} ma solo approssimato all'infinito: questo non contraddice il Teorema di Weierstrass sui massimi e minimi delle funzioni continue sui compatti (Sezione 1.1) perché stiamo studiando la funzione $1 - f_n$ sull'intera retta e non su un compatto. Pertanto questo estremo superiore non può

essere localizzato annullando la derivata di f_n : in tal modo si localizzerebbe il minimo, raggiunto in 0.

Consideriamo ora la convergenza uniforme sui compatti. Ogni compatto in \mathbb{R} è contenuto in un intervallo $[a, b]$, con $a < b$, quindi, senza perdita di generalità, limitiamo l'attenzione ad un tale intervallo. Consideriamo dapprima il caso $a < 0 < b$. Osserviamo che la funzione $1 - f_n(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2/n^2}$ è il dilatato di $1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$, e quindi è una funzione monotona crescente in $[0, b]$ e monotona decrescente in $[a, 0]$. Quindi $1 - f_n$ 'ha minimo in 0, come già sapevamo, ma nell'intervallo $[0, b]$ ha massimo nel punto b , per monotonia, e nell'intervallo $[a, 0]$ ha massimo nel punto a , per la stessa ragione. Quindi il massimo della funzione $1 - f_n$ nell'intervallo $[a, b]$ è il più grande fra i due valori che essa assume in a ed in b ; inoltre la funzione $1 - f_n$, come la funzione f , è pari, e quindi il suddetto punto di massimo è assunto nel più lontano da 0 fra i punti a e b . Senza perdita di generalità, supponiamo che il più lontano sia il punto b . Allora $\|f_n - 1\|_{L^\infty[a, b]} = 1 - f_n(b) = 1 - \frac{1}{1-b^2/n^2}$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$, e quindi si ha convergenza uniforme in $[a, b]$ di f_n alla funzione 1.

Se l'intervallo $[a, b]$ è tutto contenuto in \mathbb{R}^+ o \mathbb{R}^- , la convergenza uniforme segue per restrizione dal caso di intervalli che contengono l'origine. \square

Esercizio 1.5.31. Sia $f(x) = 1/(1+x^2)$ e $f_n(x) = f(x - 1/n)$. Determinare se f_n converge uniformemente

1. sui compatti;
2. su tutto \mathbb{R} .

Svolgimento. È chiaro che il limite puntuale delle funzioni f_n è f , dal momento che $1/n$ tende a zero con n . Per quanto riguarda la convergenza uniforme, osserviamo che si ha

$$(f_n - f)(x) = \frac{1}{1 + (x + \frac{1}{n})^2} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{n} \frac{2x + \frac{1}{n}}{(1 + (x + \frac{1}{n})^2)(1 + x^2)}.$$

Quindi, visto che $\frac{1}{1+(x+\frac{1}{n})^2} \leq 1$, abbiamo

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \frac{2|x| + \frac{1}{n}}{1 + x^2} < \frac{1}{n} \frac{2|x| + 1}{1 + x^2} < \frac{1}{n},$$

perché $2|x| \leq 1 + x^2$ (questo equivale al fatto che $(x \pm 1)^2 \geq 0$). Quindi f_n converge uniformemente a f su tutto \mathbb{R} .

A maggior ragione si ha convergenza uniforme su ogni compatto. Osserviamo che su un compatto, che senza perdita di generalità, come nell'esercizio precedente, possiamo scegliere come $[a, b]$, con $a < 0 < b$, la funzione $f_n - f$ assume un massimo, per il Teorema di Weierstrass citato nell'Esercizio precedente, ma questo massimo non viene raggiunto negli estremi dell'intervallo: a differenza dell'esercizio precedente, ora la funzione $f_n - f$ non è monotona in $[a, 0]$ e in $[0, b]$. \square

Esercizio 1.5.32. Sia f come nel problema precedente e $f_n(x) = f(x - n) = 1/(1 + (x - n)^2)$. Determinare se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente

1. sui compatti;
2. su tutto \mathbb{R} .

Svolgimento. Le funzioni f_n sono tutte traslate della stessa funzione f , e quindi hanno tutte la stessa norma uniforme: $\|f_n\|_{\infty} = 1$ per ogni n . Pertanto la serie non converge uniformemente su \mathbb{R} in base alla Nota 1.2.20.

Diversa è la situazione sui compatti: lì la serie converge uniformemente. Per questo, come negli esercizi precedenti, basta restringere l'attenzione ad un intervallo $[a, b]$. Il massimo della funzione f_n è raggiunto al punto $x = n$. A sinistra del loro punto di massimo, le f_n sono crescenti. Pertanto, se limitiamo l'attenzione agli indici $n > b$ (in tal modo trascuriamo solo un numero finito di termini, e la convergenza della serie non ne è affetta), le f_n sono tutte crescenti in $[a, b]$, e quindi il loro massimo *su questo intervallo* viene assunto all'estremo destro b , e vale $\|f_n\|_{L^{\infty}[a, b]} = 1/(1 + (b - n)^2)$: si tratta di un infinitesimo dell'ordine di $1/n^2$, e quindi $\|f_n\|_{L^{\infty}[a, b]} < C/n^2$ per qualche costante $C > 0$, e la serie converge uniformemente per il test di Weierstrass (Teorema 1.3.29). \square

1.6 Serie di Taylor

1.6.1 Sviluppabilità in serie di Taylor

Per ragioni di enfasi, dedichiamo questa Sezione specifica a reinterpretare le serie di potenze come serie di Taylor. Al fine di chiarezza, ritorniamo a considerare serie di potenze con centro non necessariamente in $z_0 = 0$.

Corollario 1.6.1. (Ogni serie di potenze è una serie di Taylor.) All'interno del suo disco di convergenza, ogni serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ è derivabile infinite volte. Inoltre, ponendo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, i coefficienti a_n sono necessariamente i coefficienti di Taylor di f al centro di sviluppo:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Dimostrazione. La prima asserzione si ottiene applicando iterativamente il precedente Teorema 1.4.9. Da questa parte dell'enunciato il resto segue derivando successivamente la funzione somma f : per $k \leq n$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) a_n (z-z_0)^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-z_0)^{n-k}.$$

Ponendo $z = z_0$ in questa uguaglianza sopravvive solo il termine con $n = k$, da cui l'enunciato. \square

Esempio 1.6.2. (Lo sviluppo in serie dell'esponenziale.) Determiniamo il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Sia $a_n = \frac{1}{n!}$: allora

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty.$$

Quindi la serie converge per ogni valore di $z \in \mathbb{C}$. La serie $\sum_n \frac{z^n}{n!}$ è detta

serie esponenziale. Osserviamo che, se scriviamo $f(z) = e^z$, si ha $f^{(k)}(z) = f(z) = e^z$ qualunque sia k . Pertanto i coefficienti di Taylor a $z_0 = 0$ della funzione esponenziale valgono proprio $\frac{1}{n!}$, e quindi, grazie al Corollario 1.6.1, si ha che $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ per ogni z ; in particolare, restringendo l'attenzione ad una variabile reale, l'identità vale per l'esponenziale reale per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché si tratta di una serie di potenze, il raggio di convergenza è infinito ed in particolare la serie converge uniformemente su ogni compatto. \square

Definizione 1.6.3. Data una funzione $f \in C^\infty$ in un intorno aperto di z_0 , la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ si chiama *serie di Taylor* di f con centro di sviluppo in z_0 .

In base al Teorema di Taylor (Sezione 1.1) il resto n -simo della serie di Taylor di f con centro in x_0 verifica

$$E_n(x; x_0; f) \equiv f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (x - z_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (1.15)$$

per qualche $\xi \in [x_0, x]$. La serie di Taylor converge al punto x se e solo se $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x; x_0; f) = 0$, quindi dall'uguaglianza (1.15) e dal fatto ovvio che il fattoriale cresce più rapidamente dell'esponenziale segue:

Corollario 1.6.4. *Se esiste una costante $C > 0$ tale che $|f^{(n)}(z_0)| \leq C^n$ per tutti gli interi n , allora la serie di Taylor di f converge al punto x .*

Esempio 1.6.5. La serie di Taylor della funzione esponenziale converge ovunque alla funzione esponenziale, perché la derivata di e^x vale ancora e^x , e quindi non dipende da n (per una dimostrazione alternativa si usi il prossimo Teorema 1.6.6). Analogamente, le serie di Taylor di $\sin x$ e di $\cos x$ convergono ovunque alle stesse funzioni, perché le loro derivate n -sime sono sempre uguali a $\pm \cos x$ o $\pm \sin x$, e quindi maggiorate da 1 in valore assoluto. \square

Enunciamo il seguente criterio di convergenza della serie di Taylor. Per la dimostrazione, si veda [1, Capitolo 9, Sezione 20].

Teorema 1.6.6. (Criterio di convergenza di Bernstein.) *Sia $f \in C^\infty[x_0, x_0 + a]$. Se f e tutte le sue derivate sono non negative in $[x_0, x_0 + a]$, allora la serie di Taylor di f converge in ogni punto $x \in [x_0, x_0 + a)$.*

1.6.2 *Funzioni analitiche reali

Definizione 1.6.7. Una funzione che coincide con la somma della sua serie di Taylor laddove questa converge si dice *analitica reale*.

Nota 1.6.8. Se una funzione è sviluppabile in serie di Taylor convergente in un disco con centro z_0 , non è detto che in questo disco la serie di Taylor

converga alla funzione che l'ha generata, tranne ovviamente al centro di sviluppo z_0 . Ovviamente, se f è la somma della serie, allora f è C^∞ nel disco di convergenza e la serie è la serie di Taylor di f , ma potrebbe esistere un'altra funzione $g \neq f$ tale che la serie sia la serie di Taylor anche della funzione g . In altre parole, stiamo asserendo che possono esistere due diverse funzioni C^∞ in un intorno di z_0 con le tutte le derivate uguali in z_0 , per ciascun ordine. Dimostriamo questo asserto con un esempio. \square

Esempio 1.6.9. (Una funzione non analitica reale.) Mostriamo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

è di classe C^∞ su tutto \mathbb{R} , e le sue derivate in 0 sono tutte nulle: quindi la serie di Taylor di questa funzione coincide con la serie di Taylor della funzione identicamente 0, ossia la serie nulla.

È evidente che f è derivabile infinite volte in ogni punto $x \neq 0$, per il teorema di derivazione di funzione composta (Sezione 1.1); dimostriamo quindi che in $x = 0$ tutte le derivate esistono e sono nulle.

Per determinare le derivate nell'origine è necessario calcolare esplicitamente l'esistenza ed il valore del limite del rapporto incrementale: non è infatti possibile ricorrere alla regola di derivazione delle funzioni composte (Sezione 1.1) perché nell'origine cambia la regola in base alla quale la funzione è definita.

Cominciamo con la derivata prima. Il rapporto incrementale in 0 è

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

ed ha limite 0 per $x \rightarrow 0$ perché il polinomio al denominatore si annulla con ordine di infinitesimo inferiore a quello dell'esponenziale.

Calcoliamo allora la derivata seconda in 0. In ogni $x \neq 0$ la regola di derivazione di funzione composta fornisce il risultato $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Pertanto il rapporto incrementale di f' in 0 è $\frac{2}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}}$, che per la stessa ragione di prima tende a zero per $x \rightarrow 0$.

Per $x \neq 0$, abbiamo calcolato la derivata prima $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ grazie alla regola di derivazione del prodotto e quella di funzione composta (Sezione 1.1). Iterando l'applicazione di questa regola troviamo la derivata seconda per $x \neq 0$: $f''(x) = \left(\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$. Generalizzando, asseriamo che *la derivata*

n -sima $f^{(n)}$, per $x \neq 0$, è data da

$$f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

dove P_n è un polinomio di grado $3n$.

Dimostriamo questa asserzione per induzione su n (Sezione 1.1). Abbiamo mostrato che l'asserzione è vera per $n = 1$ (e anche per $n = 2$). Supponiamo che sia vera per un intero n_0 e mostriamo che rimane vera per $n_0 + 1$. L'ipotesi quindi è che

$$f^{(n_0)}(x) = P_{n_0} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

dove P_n è un polinomio di grado $3n_0$. Applicando ancora la regola di derivazione del prodotto e quella di funzione composta ora otteniamo

$$f^{(n_0+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2} P'_{n_0} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{2}{x^3} P_{n_0} \left(\frac{1}{x} \right) \right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Poiché la derivata P'_{n_0} è un polinomio di grado $3n_0 - 1$, il primo termine dentro la parentesi è un polinomio nella variabile $\frac{1}{x}$ di grado $3n_0 + 1$. Invece il secondo termine dentro la parentesi è un polinomio nella variabile $\frac{1}{x}$ di grado $3n_0 + 3$: quindi l'intera parentesi è un polinomio di grado $3n_0 + 3$. Questo prova l'asserzione.

Ora finalmente possiamo calcolare la derivata n -sima nell'origine, come limite del rapporto incrementale. Mostriamo che questa derivata vale zero per ogni n . Procediamo ancora per induzione. Abbiamo già visto che $f'(0) = 0$. Supponiamo che $f^{(n)}(0) = 0$ e mostriamo che allora anche $f^{(n+1)}(0) = 0$. Il rapporto incrementale da utilizzare è

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{1}{x} P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

In questo rapporto incrementale, il termine che moltiplica l'esponenziale è un polinomio nella variabile $\frac{1}{x}$ (di grado $3n + 1$, ma il valore del grado ora è inessenziale). Come prima, il limite del prodotto fra polinomio ed esponenziale è lo stesso che avremmo se ci fosse solo l'esponenziale e non anche il polinomio, ossia zero. Quindi anche la derivata $f^{(n+1)}$ vale zero nell'origine. \square

Esempio 1.6.10. (Approssimazione C^∞ del gradino.) Abbiamo visto nel precedente Esempio 1.6.9 che per ogni $\alpha > 0$ la funzione

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-(\alpha x)^2} & (\text{se } x \neq 0) \\ 0 & (\text{se } x = 0) \end{cases}$$

è di classe C^∞ su tutto \mathbb{R} , e le sue derivate in 0 sono tutte nulle. Abbiamo studiato nel precedente Esempio il caso $\alpha = 1$, nel quale questa funzione ha grafico assai prossimo all'asse x per $|x| < 1$ ed assai prossimo alla retta $\{y = 1\}$ per $|x| > 1$. Quando α cresce il grafico si avvicina sempre di più a quello della funzione che vale 0 per $|x| < 1$ e 1 altrimenti.

Allora anche la funzione

$$h_\alpha^+(x) = \begin{cases} 0 & (\text{se } x \leq 0) \\ e^{-(\alpha x)^2} & (\text{se } x > 0) \end{cases}$$

è di classe C^∞ su tutto \mathbb{R} , e le sue derivate in 0 sono tutte nulle, e lo stesso accade per $h_\alpha^-(x) = h_\alpha^+(-x)$. I grafici di queste due funzioni rappresentano due gradini arrotondati, il primo a livello zero fino all'origine e a salire fino al livello asintotico 1 man mano che ci si sposta a destra dell'origine, il secondo invece a scendere dal livello asintotico 1 (a $-\infty$) fino al livello zero raggiunto all'origine e poi mantenuto a destra dell'origine. All'aumentare del parametro positivo α i grafici si avvicinano sempre di più ai gradini ideali. Traslando queste funzioni otteniamo gradini arrotondati centrati in un punto reale qualsiasi.

Moltiplicando due tali traslati otteniamo una forma arrotondata dell'onda quadra: ad esempio, la funzione $q_\alpha(x) = h_\alpha^+(x+1)h_\alpha^-(x-1)$ ha per grafico un arrotondamento di classe C^∞ della funzione caratteristica dell'intervallo $[-1, 1]$ (Definizione 1.1.3). \square

1.6.3 *La serie binomiale

Definizione 1.6.11. (Coefficienti binomiali generalizzati.) Cominciamo con l'estendere il coefficiente binomiale $\binom{a}{n}$ al caso di a reale e non solamente intero: poniamo $\binom{a}{n} = a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)/n!$. Un elementare argomento per induzione prova l'identità di Tartaglia

$$\binom{a+1}{n} = \binom{a}{n-1} + \binom{a}{n}. \quad (1.16)$$

Proposizione 1.6.12. (La serie binomiale.) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, per ogni $x \in (-1, 1)$, vale lo sviluppo in serie di potenze

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n. \quad (1.17)$$

Si osservi che, se a è un intero positivo, per ogni intero $n > a$ il coefficiente binomiale si annulla, e quindi la serie è una somma finita, e si riottiene il Teorema del Binomio di Newton (Sezione 1.1).

Dimostrazione. La derivata della funzione $f(x) = (1-x)^a$ è $Df(x) = -a(1-x)^{a-1}$, la derivata seconda è $D^2f(x) = a(a-1)(1-x)^{a-2} = -a(1-a)(1-x)^{a-2}$, e la sua derivata di ordine n è $D^n f(x) = -a(1-a)(2-a)\cdots(n-1-a)(1-x)^{a-n}$. In particolare, osserviamo due cose: la prima è che

$$D^n f(0) = (-1)^n n! \binom{-a}{n}; \quad (1.18)$$

la seconda è che per $a < 0$ e $x < 1$ tutte le derivate di f sono non negative: quindi grazie al criterio di Bernstein (Teorema 1.6.6) si conclude che la serie di Taylor di f converge nell'intervallo aperto con centro in $x_0 = -1$ e raggio 2. Per il teorema sul cambiamento di centro di sviluppo (Teorema 1.4.7), la serie di Taylor di f converge quando si fissa come centro il punto $x_1 = 0$ e raggio 1 (quindi nell'intervallo aperto $-1 < x < 1$). D'altra parte, lo sviluppo di Taylor di f con centro in 0 è $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(0)}{k!} x^k$, e quindi segue da (1.18) che per $a < 0$ e $x \in (-1, 1)$ si ha

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-a}{n} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-a}{n} (-x)^n.$$

Da qui, scambiando x con $-x$, si ottiene l'identità (1.17) dell'enunciato per ogni $a < 0$.

Ora, per $-1 < x < 1$, integriamo fra 0 e x entrambi i membri dell'identità (1.17) appena dimostrata, ed otteniamo

$$\frac{1}{a+1}(1+x)^{a+1} - \frac{1}{a+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

da cui

$$\begin{aligned}(1+x)^{a+1} &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a+1}{n+1} \binom{a}{n} x^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+1}{n+1} x^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a+1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+1}{n} x^n.\end{aligned}$$

In tal modo abbiamo esteso l'identità (1.17) un passo più a destra, ossia per tutti gli $a < 1$. Iterando il procedimento otteniamo l'enunciato per tutti gli $a \in \mathbb{R}$. \square

1.7 Spazi ℓ^p

Definizione 1.7.1. (Spazi ℓ^p .) Sia $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ una successione di numeri complessi.

Per ogni $p \geq 1$ poniamo

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $\|x\|_p < \infty$ diciamo che $x \in \ell^p$.

Si notino i due importanti casi particolari seguenti:

$$p = 1$$

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|.$$

$$p = 2$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nota 1.7.2. La norma $\|\cdot\|_2$ è generata, nel senso della Nota 1.2.24, al prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i.$$

Infatti

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|x\|_2^2.$$

□

Esercizio 1.7.3. A titolo di richiamo, proponiamo al lettore di dimostrare la convessità della funzione $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x|^p$ per $p \geq 1$. Chi non ci riuscisse verificando direttamente la definizione di convessità può trovare in seguito un approccio alternativo nella dimostrazione del Teorema 1.16.10. □

Definizione 1.7.4. (Spazio ℓ^∞ .) Sia $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ una successione di numeri complessi.

Se $p = +\infty$, definiamo

$$\|x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j|.$$

Se $\|x\|_\infty < \infty$ diciamo che $x \in \ell^\infty$.

Intendiamo ora presentare le relazioni di inclusione fra gli spazi ℓ^p . L'approccio che seguiamo richiede un calcolo che scorporiamo in un lemma separato.

Lemma 1.7.5. *Se $1 \leq p < \infty$ e $a, b > 0$,*

$$(a + b)^p \geq a^p + b^p.$$

La disuguaglianza è stretta per $p > 1$, mentre è una identità per $p = 1$.

Invece, per $0 < p < 1$,

$$(a + b)^p \leq a^p + b^p.$$

Dimostrazione. Se $p = 1$ è ovvio che nell'enunciato vale l'uguaglianza. Supponiamo allora $p \neq 1$, $p > 0$. Per $t \geq 0$ poniamo

$$\psi(t) = (a + tb)^p - a^p - t^p b^p.$$

Allora $\psi(0) = 0$, e $\psi'(t) = pb(a + tb)^{p-1} - pt^{p-1}b^p$ non si annulla mai per $t > 0$, perché altrimenti, per il teorema di Rolle (Sezione 1.1 si dovrebbe avere $\psi'(t) = 0$ per qualche $t \geq 0$: ma allora si avrebbe $(a + tb)^{p-1} = t^{p-1}b^{p-1}$: ma poiché a, b e t sono positivi questo equivale a $a + tb = tb$, assurdo. Inoltre

$\psi'(0) = pba^{p-1} > 0$ (questo è il passo che viene meno nel caso $p < 1$ della seconda parte dell'enunciato, dove $p < 1$ e la funzione $t \mapsto t^{p-1}$ non tende a zero per $t \rightarrow 0^+$). Perciò ψ ha derivata positiva per $t \geq 0$, e quindi $\psi(1) > \psi(0) = 0$. Poiché $\psi(1) = (a+b)^p - a^p - b^p$ questo dimostra che vale la disuguaglianza desiderata in senso stretto.

Nel caso $0 < p < 1$, di nuovo ψ' non si annulla mai in $0 < t \leq 1$, ma ora

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} pb(a+tb)^{p-1} - pt^{p-1}b^p = pba^{p-1} - pb^p \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{p-1} = -\infty.$$

Quindi $\psi' < 0$ in $(0, 1]$, e rispetto a prima la disuguaglianza si rovescia. \square

Esercizio 1.7.6. Si mostri che per $p \geq 1$ l'enunciato del precedente Lemma 1.7.5 è un caso particolare della disuguaglianza di Jensen che enunceremo e dimostreremo nella Proposizione 1.15.10.

Suggerimento: si consideri una funzione su $[0, 1]$ che assume valore costante a in una metà dell'intervallo e b nell'altra metà. \square

Proposizione 1.7.7. (Inclusioni fra spazi ℓ^p .) Se $0 \leq p < q \leq \infty$, allora $\ell^p \subset \ell^q$.

Dimostrazione. L'enunciato equivale ad asserire che, per ogni $0 \leq p < q$, esiste $C = C_{p,q} > 0$ tale che per ogni successione $\{a_n\}$ valga la disuguaglianza

$$\|\{a_n\}\|_p \geq C_{p,q} \|\{a_n\}\|_q.$$

Proveremo questa disuguaglianza con $C = 1$, ovvero

$$\|\{a_n\}\|_p \geq \|\{a_n\}\|_q. \quad (1.19)$$

Anzitutto proviamo l'inclusione $\ell^1 \subset \ell^q$. Segue dal Lemma 1.7.5 che per ogni $q \geq 1$, per ogni successione $\{a_n\}$ di numeri complessi e per ogni intero N si ha

$$\left(\sum_{n=1}^N |a_n| \right)^q \geq \sum_{n=1}^N |a_n|^q.$$

Prendendo l'estremo superiore rispetto a N otteniamo $\|\{a_n\}\|_1 \geq \|\{a_n\}\|_q$. Quindi $\ell^1 \subset \ell^q$.

Ora prendiamo $0 \leq p < q$. Mostriamo che $\|\{a_n\}\|_p \geq \|\{a_n\}\|_q$, cioè che

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q\right)^{1/q}.$$

Poniamo $b_n = |a_n|^p$. Allora $\{b_n\}$ appartiene a ℓ^1 e l'ultima disuguaglianza diventa

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{q/p}\right)^{1/q},$$

cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{q/p}\right)^{p/q}.$$

Quindi la disuguaglianza da provare è $\|\{b_n\}\|_1 \geq \|\{b_n\}\|_{q/p}$: questa disuguaglianza è vera per la prima parte della dimostrazione, dal momento che $q/p > 1$. \square

Esercizio 1.7.8. Si consideri lo spazio bidimensionale V delle successioni $\mathbf{a} = \{a_0, a_1, 0, 0, \dots\}$ nulle tranne che per i primi due indici. Si verifichi che l'inclusione della precedente Proposizione 1.7.7, ossia la disuguaglianza $\|\mathbf{a}\|_q \leq \|\mathbf{a}\|_p$ se $0 \leq p < q \leq \infty$, equivale alla disuguaglianza provata nel lemma 1.7.5, ed alle inclusioni fra sfere unitarie illustrate nelle Figure della successiva Nota 1.7.10. \square

Nota 1.7.9. (Completezza di ℓ^p .) Dimostreremo in seguito (Corollario 1.16.30) che gli spazi ℓ^p sono spazi metrici completi, per tutti i $p > 0$ (ma sono spazi normati solo per $p \geq 1$, dove la quantità $\|\{x_n\}\|_p = (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$ verifica la disuguaglianza triangolare e quindi è una norma; per $p < 1$, invece, non è così, ed infatti le sfere unitarie non sono convesse, come vedremo nella seguente Nota 1.7.10). Per il caso $p = 2$ una dimostrazione alternativa (ma di fatto analoga) viene sviluppata nell'Esercizio 4.4.3). \square

Nota 1.7.10. (Sfere unitarie in sottospazi di dimensione finita in ℓ^p .) Consideriamo il sottospazio V di ℓ^p che consiste delle successioni con solo i primi due valori non nulli (ovviamente isomorfo a \mathbb{C}^2):

$$x = (x_1, x_2, 0, 0, \dots)$$

Lo spazio V è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per uno scalare, quindi è un sottospazio vettoriale di ℓ^p . Ovviamente V è isomorfo a \mathbb{C}^2 , quindi ℓ^p contiene un sottospazio isomorfo a \mathbb{C}^2 . Studiamo la forma geometrica della sfera unitaria di questo sottospazio nelle norma ℓ^p . Consideriamo il caso di sottospazi di dimensione due solo per semplicità: gli argomenti valgono per qualsiasi dimensione. Sempre per semplicità limitiamo l'attenzione a sottospazi reali, cioè a successioni di numeri reali. Sappiamo già (Definizione 1.2.12) che su uno spazio a dimensione finita tutte le norme sono equivalenti, e quindi che queste sfere unitarie, a meno di dilatazione, devono essere inscatolate una nell'altra; di più, dalla disuguaglianza (1.19) segue che la sfera unitaria di ℓ^p è all'interno della sfera unitaria di ℓ^q per $p < q$.

Determiniamo la forma di queste sfere: in $V (\cong \mathbb{R}^2)$ consideriamo la sfera unitaria nelle norme ℓ^p per i diversi valori di p .

- *Caso $p = 1$* : l'equazione della circonferenza unitaria è

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|.$$

La sfera (o *palla*) unitaria è

$$|x_1| + |x_2| \leq 1.$$

Nel primo quadrante abbiamo $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$. Quindi

$$|x_1| + |x_2| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \leq 1 - x_1$$

e perciò si ottiene la figura seguente:

Nel secondo quadrante $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$, e quindi

$$|x_1| + |x_2| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 + x_2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \leq 1 + x_1$$

da cui la seguente figura:

Nel terzo quadrante $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$, da cui

$$|x_1| + |x_2| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 - x_2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \leq -1 - x_1$$

e pertanto la figura è la seguente:

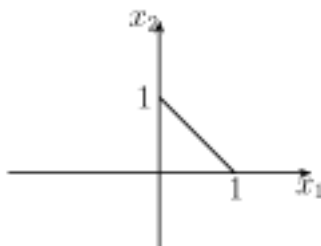


Figura 1.3: La parte nel primo quadrante della sfera unitaria di \mathbb{R}^2 nella norma ℓ^1

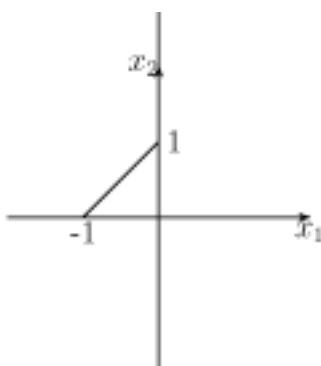


Figura 1.4: La parte nel secondo quadrante della sfera unitaria di \mathbb{R}^2 nella norma ℓ^1

Nel terzo quadrante $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$, da cui

$$|x_1| + |x_2| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \leq -1 + x_1$$

ed otteniamo la seguente figura:

Mettendo insieme i vari quadranti, troviamo che l'intera palla unitaria è quella disegnata nella seguente figura:

- *Caso $p = 2$* : in questo caso l'equazione della circonferenza unitaria diventa

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

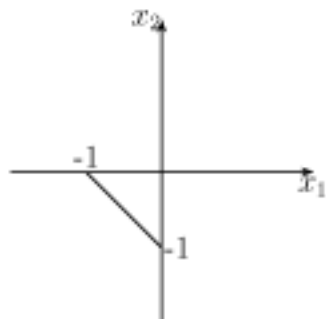


Figura 1.5: La parte nel terzo quadrante della sfera unitaria di \mathbb{R}^2 nella norma ℓ^1

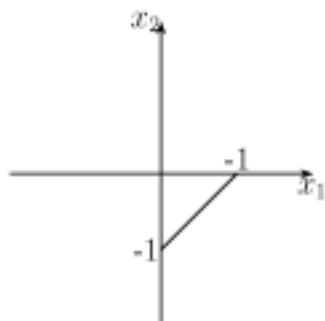


Figura 1.6: La parte nel quarto quadrante della sfera unitaria di \mathbb{R}^2 nella norma ℓ^1

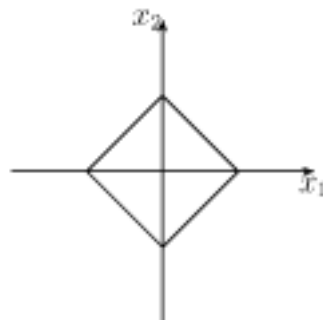
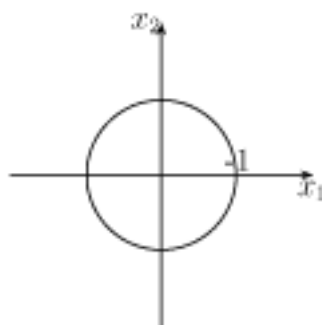
Pertanto la palla unitaria è

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

cioè il cerchio unitario di raggio 1 e centro l'origine.

$p = +\infty$

$$\|x\|_\infty = \sup_{j=1,2} |x_j| = \max \{|x_1|, |x_2|\}.$$

Figura 1.7: Sfera unitaria di \mathbb{R}^2 nella norma ℓ^1 Figura 1.8: Sfera unitaria di \mathbb{R}^2 nella norma ℓ^2

In questo caso la palla unitaria è

$$\|x\|_{\infty} \leq 1.$$

- *Caso* $1 < p < 2$: la palla unitaria di ℓ^p contiene la palla unitaria di ℓ^1 ed è contenuta in quella di ℓ^2 . In effetti, le sfere unitarie si ingrandiscono al crescere di p : questo fatto è una conseguenza della disuguaglianza

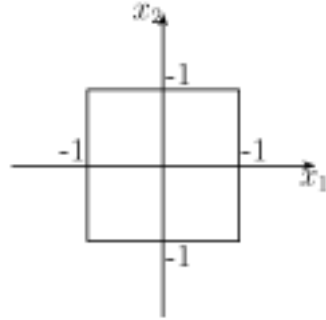


Figura 1.9: Sfera unitari di \mathbb{R}^2 nella norma ℓ^∞

$$(|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} \geq (|x_1|^r + |x_2|^r)^{\frac{1}{r}}$$

se $p < r$. Lasciamo questa disuguaglianza per esercizio. *Suggerimento:* un modo tedioso di risolvere l'esercizio è quello di fissare, diciamo, $0 < x_1 < 1$, ricavare x_2 come funzione di p dall'equazione $(|x_1|^p + |x_2|^p) = 1$ e mostrare che la soluzione positiva per x_2 è crescente al crescere di p (e quella negativa è decrescente: cioè la soluzione $x_2 = x_2(p)$ è tale che $|x_2(p)|$ cresce con p). Un modo più brillante consiste nell'uso intelligente delle proprietà della convessità: si vedano la Sezione 1.15 e la Proposizione 1.17 nel seguito.

Si osservi che la sfera unitaria nella norma ℓ^2 è rotonda, cioè in ogni punto ha retta tangente ortogonale al raggio che termina in quel punto. Ci si può aspettare un fenomeno di questo genere solo per $p = 2$, perché solo per questo valore di p la norma proviene da un prodotto scalare, nel senso introdotto nella Nota (1.2.24). Infatti, l'ortogonalità è definita solo grazie ad un prodotto scalare. \square

Nota 1.7.11. Come nella Nota 1.7.10, immergiamo lo spazio euclideo \mathbb{C}^n come sottospazio in ℓ^p nel modo seguente:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \mapsto \{x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots\}.$$

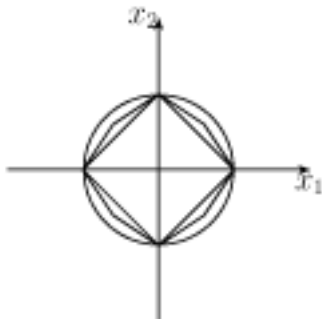


Figura 1.10: Sferre unitarie di \mathbb{R}^2 nelle norme ℓ^p per $1 \leq p \leq 2$

L'immagine di questa immersione è un sottospazio chiuso di ℓ^p , e se $p = 2$ l'immersione è una isometria. In particolare, non c'è ambiguità nell'aver usato lo stesso simbolo per la norma euclidea in (1.5) e per la norma di ℓ^2 nella Definizione 1.7.1. \square

1.8 Uniforme continuità

I contenuti di questa Sezione dovrebbero essere già noti dai corsi elementari di Calcolo: li riportiamo qui per completezza.

Nota 1.8.1. Rammentiamo che una funzione è continua se per ogni x nel suo dominio di definizione e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$, $\delta = \delta_{x,\varepsilon}$, tale che, per ogni y nel dominio di definizione che verifica $|y-x| < \delta$ si ha $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Questa definizione equivale a richiedere che il limite di f valga $f(x)$ quando la variabile tende a x (ovviamente per ogni x tale che il limite abbia senso, ossia tale che in ogni sfera con centro in x ci sia almeno un altro punto y dove f è definita: un tale punto x si chiama *punto di accumulazione* del dominio di f). \square

Definizione 1.8.2. (Uniforme continuità.) Una funzione f è *uniformemente continua* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni x, y dove f è definita, si abbia $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Questa definizione si esten-

de a funzioni definite su \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n semplicemente sostituendo il modulo in $|f(y) - f(x)|$ con la rispettiva norma euclidea introdotta in (1.5).

È chiaro che ogni funzione uniformemente continua è anche continua. Si noti che la differenza fra continuità ed uniforme continuità consiste nel fatto che per la seconda δ dipende da ε ma non da x , ovvero che, per ogni punto di accumulazione x del dominio, il limite di f è il valore $f(x)$ e la velocità di convergenza è uniforme rispetto a x .

La definizione di uniforme continuità, Definizione 1.8.2, si può riformulare come segue.

Definizione 1.8.3. (Modulo di continuità.) Data una funzione f su \mathbb{R} , il suo *modulo di continuità* è la funzione $\omega = \omega_f$ su \mathbb{R}^+ data da

$$\omega(t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| < t\}.$$

Nota 1.8.4. La funzione modulo di continuità è chiaramente non decrescente sulla semiretta positiva. Segue direttamente dalla Definizione 1.8.2 che f è uniformemente continua se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\omega(t) < \varepsilon$ se $0 < t < \delta$, ossia se e solo se $\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega(t) = 0$. \square

Esercizio 1.8.5. (i) La funzione x è uniformemente continua.

(ii) La funzione x^2 è uniformemente continua in ogni intervallo limitato, ma non lo è su tutto \mathbb{R} .

(iii) La funzione della parte (ii) ha derivata divergente se x tende all'infinito, ma la divergenza della derivata non è condizione sufficiente per la perdita della uniforme continuità: ad esempio, la funzione \sqrt{x} è uniformemente continua.

(iv) La funzione $\tan(x)$ è uniformemente continua in ogni intervallo chiuso contenuto in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ma non lo è nell'intero intervallo aperto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; più in generale, ogni funzione che ha un asintoto verticale non è uniformemente continua in un intervallo aperto che contiene al suo interno o ad un suo estremo il punto di singolarità. \square

Teorema 1.8.6. (Heine.) Sia K un compatto (ossia un insieme limitato e chiuso, grazie al Teorema di Bolzano–Weierstrass 1.9.6) in \mathbb{R}^n (o \mathbb{C}^n). Ogni funzione continua su K vè anche uniformemente continua.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che f sia continua su K ma non uniformemente continua. Questo vuol dire che esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni intero n , esistono punti x_n e y_n in K con

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad (1.20)$$

ma

$$|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon. \quad (1.21)$$

Per la proprietà di Bolzano–Weierstrass illustrata nel Teorema 1.9.6, da ciascuna delle successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione (rispettivamente $\{x_{j_n}\}$ e $\{y_{j_n}\}$) convergente ad un limite, ed i due limiti coincidono grazie a (1.20). Sia x questo limite comune. Allora, poiché f è continua, deve essere $\lim_n f(x_{j_n}) = f(x) = \lim_n f(y_{j_n})$. Questo contraddice (1.21). \square

1.9 Misura ed integrale di Lebesgue

L'integrale di Riemann di una funzione f continua, definita in un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ si è definito partendo da una partizione dell'intervallo $[a, b]$ e costruendo le somme inferiori di rettangoloidi inscritti nel sottografico della funzione in esame e le somme superiori dei rettangoloidi circoscritti. Si dimostrava che, al variare di tutte le possibili partizioni di $[a, b]$ ciascuna somma inferiore è minore o uguale di ogni somma superiore, ed esistono somme superiori e somme inferiori i cui valori sono arbitrariamente vicini.

Si è quindi definito l'integrale di f su $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x) dx$$

come il numero I tale che ogni somma inferiore è minore o uguale a I e ogni somma superiore è maggiore o uguale a I . In altre parole, come l'elemento di separazione delle due classi, ovvero l'estremo superiore delle somme inferiori, coincidente con l'estremo inferiore delle somme superiori (assioma delle sezioni di Dedekind: si veda [19, Appendice Capitolo 1])

Vogliamo ora definire un integrale (l'integrale di Lebesgue) per cui sia possibile integrare funzioni più generali di quelle integrabili secondo Riemann, su una classe di insiemi più ampia (gli insiemi *misurabili*).

Per definire l'integrale di Riemann si parte suddividendo in sottointervalli il dominio in cui è definita la funzione f . Invece per definire l'integrale di Lebesgue costruiamo rettangoloidi basati su partizioni più complicate. Gli insiemi che compongono la partizione non sono più intervalli contigui. In effetti non sono più intervalli: persino per una funzione continua, di solito, ciascun insieme della partizione è una unione di intervalli disgiunti. La partizione del dominio di definizione si ottiene partendo da una partizione in intervalli disgiunti contigui, non nel dominio di definizione, ma nell'immagine di f . In particolare, possiamo prendere intervalli J_k tutti di lunghezza uguale ε . Allora, i corrispondenti insiemi I_k della partizione del dominio della funzione f sono

$$I_k = \{x : f(x) \in J_k\} = f^{-1}(J_k).$$

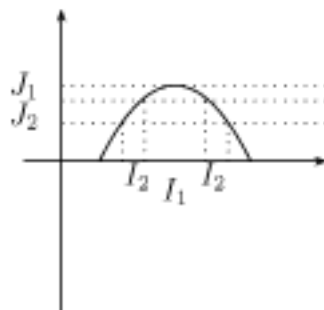


Figura 1.11: Partizione delle ordinate per costruire l'integrale di Lebesgue

Questo metodo si adatta di più alla funzione e come conseguenza vedremo che è possibile applicarlo a funzioni meno regolari.

Siamo interessati dunque alla misura di insiemi del tipo $f^{-1}([a, b])$.

Non tutti gli insiemi sono adatti ad essere misurati. Noi consideriamo soltanto funzioni tali che $f^{-1}([a, b])$ sia misurabile in un senso appropriato, che presenteremo più oltre nella Definizione 1.9.8.

1.9.1 Insiemi aperti ed insiemi misurabili

Definizione 1.9.1. (Insiemi aperti.) Un sottoinsieme aperto di \mathbb{R} è un insieme O tale che, per ogni $x \in O$, esiste un intervallo aperto I_x tale che $x \in I_x \subset O$. Per ogni aperto O , il complementare $\mathbb{R} \setminus O$ si chiama un insieme chiuso.

Nota 1.9.2. È facile vedere che un insieme K è chiuso in \mathbb{R} se e solo se per ogni successione di elementi di K che converge ad un limite in \mathbb{R} , il limite appartiene anch'esso a K . \square

Vale il seguente risultato elementare, che non dimostriamo (per la parte (i) si veda [22, Cap. 2, Sezione 5, Proposizione 8], per la parte (ii) [22, Cap. 2, Sezione 5, Proposizione 15 e Cap. 7, Sezione 7, Corollario 23]).

Lemma 1.9.3. (i) Ogni insieme aperto in \mathbb{R} è unione di una famiglia numerabile di intervalli aperti disgiunti.

(ii) (**Heine-Borel.**) Un insieme $C \subset \mathbb{R}$ è limitato e chiuso se e solo se, per ogni famiglia O_α di aperti (indicizzati da un indice α non necessariamente intero) tale che $C \subset \cup_\alpha O_\alpha$, esiste una sottofamiglia finita O_1, \dots, O_n tale che $C \subset \cup_{j=1}^n O_j$.

Definizione 1.9.4. (Insiemi compatti.) Una famiglia O_α come nel Lemma 1.9.3 (ii) si chiama un *ricoprimento aperto* di C . La sottofamiglia O_1, \dots, O_n si chiama un *sottoricoprimento finito*. Un insieme C tale che da ogni suo ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito si chiama un *insieme compatto*.

Nota 1.9.5. Alla luce della precedente Definizione 1.9.4, il Lemma 1.9.3 (ii) asserisce che i sottoinsiemi di \mathbb{R} limitati e chiusi sono compatti: questo fatto è alla base del Teorema di Weierstrass sulla esistenza dei massimi e dei minimi delle funzioni continue su un intervallo limitato e chiuso (si veda [19, Cap. 16 (Appendice)]). \square

Dimostriamo una proprietà dei compatti che in realtà è una loro caratterizzazione, e che vale, con opportune varianti e con una dimostrazione diversa, per compatti non solo in \mathbb{R}^n ma in qualsiasi spazio metrico [22, Cap. 7, Sezione 7]) o topologico [22, Cap. 9, Sezione 2, Proposizione 7]).

Teorema 1.9.6. (Bolzano - Weierstrass.) *Sia K un compatto in \mathbb{R}^n . Allora da ogni successione $\{x_j\}$ a valori in K si può estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto limite $x \in K$; equivalentemente, ogni successione in K ha un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Se la successione è finita (ossia consiste di un numero finito di punti ripetuti) il risultato è ovvio, quindi assumiamo che sia infinita. Poiché K è limitato, è racchiuso in un cubo, di lato, diciamo A . Procediamo per bisezioni successive: dividiamo a metà ogni lato del cubo, generando quindi 2^n sottocubi di lato $\frac{A}{2}$. Poiché la successione è infinita, ad almeno uno di tali sottocubi devono appartenere infiniti punti della successione. Consideriamo la sottosuccessione costituita da questi punti, che giacciono in un cubo di lato $\frac{A}{2}$, ed iteriamo il procedimento di bisezione. Continuando così selezioniamo, per ogni intero m , una sottosuccessione infinita di $\{x_j\}$ che giace in un cubo C_k di lato $\frac{A}{2^k}$. Sia x_{j_k} il primo punto della successione $\{x_j\}$ che giace in C_k : allora la sottosuccessione x_{j_k} è di Cauchy, e quindi convergente ad un punto $x \in \mathbb{R}^n$. Poiché K è chiuso, x deve appartenere a K .

Per provare l'equivalenza di questa proprietà con l'esistenza di punti di accumulazione, osserviamo per prima cosa che è chiaro che x è un punto di accumulazione di $\{x_j\}$. Viceversa, se un punto x è di accumulazione per una successione $\{x_j\}$, allora per ogni intero m ci deve essere un indice j_m tale che x_{j_m} disti da x meno di $\frac{1}{m}$, e la sottosuccessione x_{j_m} converge a x . \square

Nota 1.9.7. (Proprietà dell'intersezione finita.) Nel corso della dimostrazione del precedente Teorema 1.9.6 abbiamo provato che la successione di sottocubi ottenuta tramite bisezioni successive si stringe ad un punto, nel senso che l'intersezione infinita dei sottocubi inscatolati C_k è non vuota (e consiste, ovviamente, di un unico punto). Più in generale, si ha una ulteriore caratterizzazione della compattezza, chiamata la *proprietà dell'intersezione finita*: un insieme K è compatto se ogni famiglia di suoi sottoinsiemi C_α tale che per qualunque famiglia finita di indici $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ l'intersezione finita $\bigcap_{j=1, \dots, n} C_{\alpha_j}$ è non vuota ha la proprietà che l'intersezione totale $\bigcap_\alpha C_\alpha$ è non vuota. \square

Ora introduciamo famiglie di sottoinsiemi di \mathbb{R} su cui definire il concetto di integrale:

Definizione 1.9.8. (Insiemi misurabili e σ -algebre.) Sia V una famiglia di sottoinsiemi di \mathbb{R} (questa definizione vale più in generale per qualsiasi

spazio ambiente X al posto di \mathbb{R}). Estendiamo V ad una famiglia \mathcal{M} di sottoinsiemi di \mathbb{R} che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$, ed ogni elemento di V appartiene a \mathcal{M}
2. se $A \in \mathcal{M}$, allora $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{M}$ (*vogliamo poter integrare nel complemento!*)
3. se $A_m \in \mathcal{M}$ allora $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{M}$ (*vogliamo poter integrare un insieme tramite esaustione!*)

Allora la famiglia \mathcal{M} di insiemi si chiama la famiglia (o σ -algebra) degli *insiemi misurabili* in \mathbb{R} generata da V .

Veniamo ora alla definizione centrale di questa sottosezione: quella di insiemi misurabili secondo Lebesgue. Una definizione alternativa, che segue una costruzione dovuta a Caratheodory, è presentata nell'Appendice 1.30.

Definizione 1.9.9. (σ -algebra di Borel: insiemi misurabili secondo Lebesgue.) La σ -algebra \mathfrak{A} generata dagli aperti si chiama *famiglia (o σ -algebra) di Borel*, ma in questo libro, dove consideriamo raramente misure diverse da quella di Lebesgue, indicheremo sempre questi insiemi come *gli insiemi misurabili (secondo Lebesgue)*.

Nota 1.9.10. Ovviamente tutti gli aperti sono misurabili secondo Lebesgue. Passando ai complementari, tutti i chiusi sono misurabili secondo Lebesgue. Però gli insiemi misurabili formano una famiglia molto più vasta degli aperti e dei chiusi: costruire insiemi non misurabili non è un obiettivo elementare (si veda [22, Chapter 3, Sect. 4]).

È invece facile mostrare che per ogni insieme A misurabile secondo Lebesgue e non vuoto esistono compatti $K \subset A$ ed aperti $V \supset A$ non vuoti. Questo è vero in \mathbb{R} , in \mathbb{R}^n e più in generale in qualunque spazio topologico che verifica la seguente *proprietà di separazione di Hausdorff*: dati due punti, esistono un intorno aperto del primo ed un intorno aperto del secondo disgiunti (esercizio). □

Definizione 1.9.11. (Misure di Borel e misure regolari.) Sia \mathfrak{A} la σ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue. Una *misura* (o più precisamente una *misura di Borel*) positiva è una funzione $m : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$

(possono esistere insiemi di misura infinita!) che sia numerabilmente additiva, ossia tale che se $\{A_n\}$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi a due a due disgiunti di \mathfrak{A} , allora

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n). \quad (1.22)$$

Se i valori di m sono reali ma non positivi, m si chiama una misura (non positiva). In maniera analoga si definisce una *misura complessa* $m : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$, o una *misura complessa finita* $m : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$.

Una misura di Borel si dice *regolare* se per ogni insieme misurabile E e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un insieme compatto K ed un insieme aperto V tali che $K \subset E \subset V$ (si veda la precedente Nota 1.9.10) e $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$: in altre parole, se ogni boreliano può essere invaso da compatti e contornato da aperti in maniera esaustiva nel senso della misura.

Tutte le misure in questo libro sono tacitamente assunte regolari e σ -finite, nel senso che nello spazio X dove la misura è definita esiste una successione numerabile di sottoinsiemi misurabili X_n di misura finita tali che $\bigcup_n X_n = X$.

Si dice che una misura non ha *atomi* se ogni insieme di misura positiva contiene un sottoinsieme di misura strettamente inferiore ma ancora positiva.

Corollario 1.9.12. *Sia m una misura positiva e consideriamo una famiglia decrescente di insiemi misurabili $\{E_n, n = 1, 2, \dots\}$ (cioè tale che $E_{n+1} \subset E_n$ per ogni n), con $m(E_1) < \infty$. Allora $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$.*

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che la positività della misura e la condizione di decrescenza, $E_{n+1} \subset E_n$ per tutti gli n , assicurano che $\{m(E_n)\}$ sia una successione monotona non crescente di numeri non negativi: pertanto esiste il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$ (Sezione 1.1). In generale questo limite può essere finito o infinito, ma nel nostro caso, poiché abbiamo fatto l'ipotesi che la misura di E_1 sia finita, il limite è anch'esso finito.

Poniamo $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ e $F_n = E_n \setminus E_{n+1}$. Allora E e gli F_n sono insiemi disgiunti e $E_1 = E \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Da (1.22) si ha

$$m(E_1) = m(E) + \sum_{n=1}^{\infty} m(F_n). \quad (1.23)$$

D'altra parte, anche $E_n = E_{n+1} \cup (E_n \setminus E_{n+1}) = E_{n+1} \cup F_n$ è una decomposizione disgiunta, e quindi, di nuovo, $m(F_n) = m(E_n) - m(E_{n+1})$. Perciò possiamo riscrivere (1.23) così:

$$\begin{aligned} m(E_1) &= m(E) + \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n \setminus E_{n+1}) \\ &= m(E) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{k-1} m(E_n \setminus E_{n+1}) \\ &= m(E) + m(E_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k). \end{aligned}$$

Poiché abbiamo supposto che $m(E_1)$ sia finito, possiamo semplificarlo ad entrambi i membri, e così otteniamo il risultato. \square

Esercizio 1.9.13. Si costruisca un esempio che mostri che l'enunciato del Corollario 1.9.12 non vale nel caso in cui la misura sia infinita. Ad esempio, si consideri \mathbb{R} munito della misura di Lebesgue, che verrà definita nella successiva Definizione 1.9.20, ma che possiamo anticipare dicendo che la misura di Lebesgue di un intervallo è la sua lunghezza, e quindi la misura di Lebesgue di tutto \mathbb{R} è infinita. Si prenda la seguente successione di insiemi: $E_0 = \mathbb{R}$, $E_1 = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [2n, 2n+1]$, $E_2 = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [2n, 2n + \frac{1}{2}]$, \dots , $E_k = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [2n, 2n + \frac{1}{n}]$. Allora tutti gli insiemi E_k hanno misura infinita, ma la loro intersezione consiste dell'insieme numerabile \mathbb{Z} , che ha misura zero.

\square

Nota 1.9.14. È chiaro dalle Definizioni 1.9.11 e 1.9.8 che ogni misura è univocamente determinata dai suoi valori su una famiglia di generatori della σ -algebra su cui è definita. Questo vale non solo per le misure di Borel, ma più in generale per σ -algebre e misure definite in un qualsiasi spazio ambiente X , nel senso della Definizione 1.9.8.

\square

Definizione 1.9.15. Se E è un insieme misurabile, E si dice di misura nulla se $m(E) = 0$.

Definizione 1.9.16. Una proprietà si dice verificata quasi ovunque (q.o.) se l'insieme su cui non è verificata è di misura nulla.

Esempio 1.9.17. Due funzioni $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ sono uguali q.o. se

$$m(\{x \in S : f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

□

Dalla additività numerabile della misura segue:

Corollario 1.9.18. *Se $\{F_n\}$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di \mathbb{R} tutti di misura nulla, allora $\bigcup_n F_n$ ha misura nulla.*

Ancora grazie alla additività numerabile, dal Lemma 1.9.3 (i) segue immediatamente:

Corollario 1.9.19. *Una misura è univocamente determinata dai suoi valori sugli intervalli aperti (o equivalentemente, passando ai complementari, sugli intervalli chiusi).*

Definizione 1.9.20. (Misura di Lebesgue.) La misura m definita su ogni intervallo aperto (a, b) da

$$m(a, b) = |b - a|$$

si chiama la *misura di Lebesgue* su \mathbb{R} . Perché questa definizione sia compatibile con la Definizione 1.9.11 di misura di Borel, occorre mostrare che la misura di Lebesgue è numericamente additiva: questa dimostrazione viene posposta all'Appendice (Proposizione 1.30.15).

Nota 1.9.21. Per futuro riferimento, osserviamo che la definizione di misura, ed in particolare di misura di Lebesgue, si generalizza immediatamente allo spazio vettoriale n -dimensionale \mathbb{R}^n , con coordinate x_1, \dots, x_n . Basta sostituire gli intervalli aperti con i *rettangoli* (multidimensionali) $\{a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \dots, a_n < x_n < b_n\}$: su un tale rettangolo, la misura di Lebesgue vale $|(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)|$. □

Esempio 1.9.22. (Una misura di Borel puramente atomica: la misura che conta.) Si prenda come spazio ambiente non \mathbb{R} ma un qualsiasi insieme numerabile X , ad esempio gli interi \mathbb{Z} o gli interi positivi \mathbb{N} (ma anche i razionali \mathbb{Q}). Come generatori di una σ -algebra scegliamo i singoli punti, cioè gli insiemi costituiti da un punto solo (che spesso si chiamano *singletons*). A ciascun singleton diamo misura 1. La misura definita su di

essi si estende in maniera unica alla σ -algebra che essi generano, come osservato nella Nota 1.9.14. È chiaro che questa σ -algebra consiste di tutti i sottoinsiemi di X (X è numerabile, e quindi ogni suo sottoinsieme è unione numerabile di singoli punti!), e che la misura m così ottenuta è quella che su ogni sottoinsieme U di X ha per valore il numero di punti di U (la sua *cardinalità*). Questa misura m si chiama la *misura che conta* (*counting measure*). \square

Esempio 1.9.23. Un punto, o un insieme finito o numerabile, ha misura nulla, grazie a (1.22). Se ad un insieme misurabile aggiungiamo o eliminiamo un insieme di misura nulla la misura di Lebesgue non cambia.

In particolare, il campo \mathbb{Q} dei numeri razionali è un sottoinsieme di \mathbb{R} di misura nulla, dato che è un insieme numerabile (Sezione 1.1). \square

Esercizio 1.9.24. Si provi che il sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$ dato da $E = (\cup_{n=0}^{+\infty} E_n) \setminus \mathbb{Q}$, dove

$$E_n = \left[\frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n+1}}, \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}} \right],$$

è misurabile secondo Lebesgue, e se ne calcoli la misura.

Svolgimento. Osserviamo dapprima che gli insiemi E_n sono disgiunti: questo segue immediatamente dalla disuguaglianza

$$\frac{1}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+2}} < \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n+1}},$$

che vale per ogni n perché equivale a $1/10 - 1/100 < 1 - 1/10$, banalmente vera. Perciò dalla numerabile additività della misura (Definizione 1.9.11) (e dall'invarianza per traslazione della misura di Lebesgue) segue

$$m(\cup_n E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} m(E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} m\left[-\frac{1}{10^{n+1}}, \frac{1}{10^{n+1}}\right] = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{2}{9}.$$

Poiché l'insieme E differisce da questa unione solo per un insieme di misura nulla (contenuto in \mathbb{Q}), la misura di E (ossia la differenza delle misure) è la stessa. \square

Definizione 1.9.25. (*Misure assolutamente continue e misure singolari.*) Una misura reale o complessa m_1 si dice *assolutamente continua* rispetto ad un'altra misura m_2 definita sulla stessa σ -algebra (ad esempio

quella di Borel, a cui restringeremo l'attenzione nel seguito) se per ogni insieme misurabile E tale che $m_2(E) = 0$ anche $m_1(E) = 0$.

Si dice che una misura m ha *supporto* in un insieme misurabile S se $m(E) = m(E \cap S)$ per ogni insieme misurabile E , o, equivalentemente (esercizio), se $m(E) = 0$ per ogni insieme misurabile E disgiunto da S .

Si dice che due misure m_1 e m_2 sono *mutuamente singolari* se esistono due insiemi disgiunti S_1 e S_2 tali che m_i ha supporto in S_i , $i = 1, 2$.

Notazione 1.9.26. Useremo spesso nel resto di questa Sezione la notazione $\mu(E) = \int_E d\mu$, e più in generale anticipiamo la notazione $\int_E f d\mu$ ed alcune proprietà ovvie dell'integrale rispetto ad una misura di Borel: per la definizione esplicita di integrale rispetto ad una misura di Borel rinviamo il lettore alla successiva sottosezione 1.9.4 (dove l'attenzione si limita alla misura di Lebesgue, ma la costruzione vale in generale).

Il prossimo enunciato, che non dimostriamo, è un risultato classico sulla teoria della misura. Si veda [22, Cap. 11, Sezione 6, Teorema 23], o [23, Teorema 6.9].

Teorema 1.9.27. (Radon–Nikodym.)

- (i) *Siano m_1 e m_2 due misure su \mathbb{R} (rispetto alla stessa σ -algebra, ad esempio due misure di Borel) con la proprietà che m_1 è assolutamente continua rispetto a m_2 , nel senso della precedente Definizione 1.9.25. Allora esiste una funzione misurabile g con integrale finito rispetto a m_2 tale che, per ogni insieme misurabile W , si ha*

$$m_1(W) = \int_W g(t) dm_2(t) \equiv \int_{\mathbb{R}} g(t) \chi_W(t) dm_2(t)$$

dove χ_W è la funzione caratteristica di W (Definizione 1.1.3). Se le due misure sono positive, allora g è una funzione positiva. Ovviamente vale anche l'implicazione inversa.

- (ii) *Se invece m_1 non è assolutamente continua rispetto a m_2 , allora esistono e sono uniche una misura m_s singolare rispetto a m_2 ed una funzione g di integrale finito rispetto a m_2 tali che, per ogni insieme misurabile E*

$$m_1(E) = m_s(E) + \int_E g(t) dm_2(t).$$

(iii) Scrivendo $f_1(x) = m_1(-\infty, x)$ e $f_s(x) = m_s(-\infty, x)$, abbiamo $f'_1 = g$ e $f'_s = 0$ quasi ovunque.

Definizione 1.9.28. La funzione misurabile g del precedente Teorema 1.9.27 si chiama la *derivata di Radon–Nykodim* di m_1 rispetto a m_2 , e si scrive

$$g = \frac{dm_1}{dm_2}.$$

Definizione 1.9.29. Sia μ una misura reale su \mathbb{R} o \mathbb{R}^n assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue m (la quale, per \mathbb{R}^n , verrà definita in seguito nella Definizione 1.9.29), con derivata di Radon–Nykodim g (nel senso della precedente Definizione 1.9.28). Consideriamo le due misure positive μ_+ e μ_- assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue le cui derivate di Radon–Nykodim sono, rispettivamente, $d\mu_+/dm = \max\{g, 0\}$ e $d\mu_-/dm = -\min\{g, 0\}$. Allora, ovviamente, si ha $\mu = \mu_+ - \mu_-$. Definiamo *variazione totale* della misura μ la misura $|\mu|$ (assolutamente continua rispetto a m) data da $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$.

Se μ è una misura complessa assolutamente continua rispetto a m , allora spezziamo μ come la combinazione lineare di due misure reali, $\mu = \operatorname{Re} \mu + i \operatorname{Im} \mu$, e definiamo la variazione totale di μ come $|\mu| = |\operatorname{Re} \mu| + |\operatorname{Im} \mu|$.

Si introduce una norma sulle misure finite su \mathbb{R}^n nel modo seguente:

$$\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^n).$$

Una misura di norma finita si dice una *misura finita*.

Nota 1.9.30. È facile verificare che, se m_2 è una misura reale finita e m_1 è assolutamente continua rispetto a m_2 , allora $g = dm_1/dm_2$ appartiene a $L^1(m_2)$ e $\|g\|_{L^1(m_2)} = \int |g| dm_2 \leq \int |g| d|m_2| = \|m_1\|$. Ovviamente si ha l'uguaglianza se m_2 è una misura positiva: in tal caso $d|m_1|/dm_2 = |g|$. Lasciamo al lettore il compito di stabilire le corrispondenti relazioni per misure complesse. \square

Dalla precedente Nota segue subito questo risultato:

Corollario 1.9.31. Se μ è una misura complessa su \mathbb{R}^n , allora per ogni $f \in L^1(\mu)$ e per ogni insieme misurabile W ,

$$\left| \int_W f d\mu \right| \leq \int_W |f| d|\mu|.$$

Notiamo anche la seguente generalizzazione ovvia del teorema classico della media integrale (Sezione 1.1):

Proposizione 1.9.32. *Se μ è una misura di Borel positiva finita e f è una funzione limitata su un insieme misurabile E , allora*

$$\mu(E) \cdot \min_E f \leq \int_E f d\mu \leq \mu(E) \cdot \max_E f.$$

In particolare, se E è connesso e f è continua, allora esiste $\xi \in E$ tale che $\int_E f d\mu = \mu(E) f(\xi)$ (quest'ultima asserzione segue dalla precedente grazie al teorema dei valori intermedi per le funzioni continue sui connessi, Sezione 1.1).

Chiudiamo questa sottosezione con un altro risultato elementare sugli insiemi misurabili secondo Lebesgue, che non dimostriamo (si veda [22, Cap. 2, Sezione 3, Proposizione 15 (ii)]). In combinazione con il Lemma 1.9.3 (i), il prossimo lemma prova in maniera precisa un enunciato suggestivo ma vago che asserisce che ogni insieme misurabile è approssimativamente una unione numerabile di intervalli. In realtà si può provare in maniera precisa un enunciato più forte, che si chiama il *primo principio di Littlewood*, e che in maniera vaga si enuncia dicendo che ogni insieme misurabile è approssimativamente una unione finita di intervalli [22, Cap. 2, Sezione 3, Proposizione 15 (vi)].

Lemma 1.9.33. *Per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}$ misurabile secondo Lebesgue e per ogni $\delta > 0$ esiste un aperto $O \supset E$ tale che la misura di Lebesgue del complemento $O \setminus E$ verifica la disuguaglianza $m(O \setminus E) < \delta$, ed un chiuso $C \subset E$ tale che $m(E \setminus C) < \delta$. In particolare, la misura di Lebesgue è una misura di Borel regolare nel senso della Definizione 1.9.11. Se $m(E) < \infty$ si può trovare un tale C limitato (cioè compatto). Inoltre, esiste una unione finita A di intervalli aperti tale che $m(\{A \setminus E\} \cup \{E \setminus A\}) < \delta$.*

1.9.2 Relazione tra insiemi misurabili ed integrabilità secondo Riemann

Definizione 1.9.34. Sia f definita in un intorno di un punto x e tale che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(t) - f(x)| dt = 0,$$

ossia che la variazione di f tenda a zero all'avvicinarsi a x . Un punto x con questa proprietà si chiama un *punto di Lebesgue* di f .

Nota 1.9.35. Il valore $f(x_0)$ che rende x_0 un punto di Lebesgue di f , se esiste, è univocamente determinato. Infatti, supponiamo che, se si sceglie $f(x_0) = y_0$, il punto x_0 risulti un punto di Lebesgue, ossia $\lim_{r \rightarrow 0^+} 1/(2r) \int_{x-r}^{x+r} |y_0 - f(t)| dt = 0$. Mostriamo che, se invece si assegna $f(x_0) = y_1 \neq y_0$, il punto x_0 smette di essere un punto di Lebesgue di f . Infatti, dalla disuguaglianza triangolare $|y_1 - f(t)| \geq ||y_1 - y_0| - |y_0 - f(t)||$, segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |y_1 - f(t)| dt &\geq \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} ||y_1 - y_0| - |y_0 - f(t)|| dt \\ &\geq \frac{1}{2r} \left| \int_{x-r}^{x+r} (|y_1 - y_0| - |y_0 - f(t)|) dt \right| \\ &= \left| |y_1 - y_0| - \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |y_0 - f(t)| dt \right| \end{aligned}$$

e per $r \rightarrow 0$ il secondo membro tende a $|y_1 - y_0| > 0$. □

Esercizio 1.9.36. Ogni punto di continuità di una funzione f è anche un punto di Lebesgue di f . □

Teorema 1.9.37. (Lebesgue.) *Le funzioni integrabili secondo Riemann sono le funzioni continue quasi ovunque. Se una funzione è integrabile secondo Lebesgue, allora è misurabile (si veda la Definizione 1.9.39 subito oltre) e quasi ogni x è un punto di Lebesgue di f nel senso della precedente Definizione 1.9.34.*

Esempio 1.9.38. La funzione che vale 1 su \mathbb{Q} e 0 altrimenti non è integrabile secondo Riemann. □

La classe di funzioni integrabili secondo Lebesgue è più ampia. Definiamo quindi le funzioni misurabili.

1.9.3 Funzioni misurabili secondo Lebesgue

Definizione 1.9.39. (Funzioni misurabili.) Una funzione $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ si dice misurabile (rispetto ad una misura assegnata, che in questa Sezione si

sottintende essere la misura di Lebesgue) se gli insiemi $f^{-1}(a, b)$, $f^{-1}(a, +\infty)$ e $f^{-1}(-\infty, b)$ sono misurabili, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. (Naturalmente, grazie alle proprietà delle σ -algebre, basta assumere una sola di queste condizioni).

Nota 1.9.40. Dal fatto che il complemento, l'intersezione finita e l'unione numerabile di insiemi misurabili sono misurabili segue che, se $f^{-1}(a, +\infty)$ è misurabile per ogni a , lo sono anche $f^{-1}[a, +\infty)$, $f^{-1}(-\infty, b)$, $f^{-1}(-\infty, b]$ e $f^{-1}(a, b)$, per ogni b : quindi nella definizione di funzione misurabile basta richiedere una qualsiasi di queste condizioni. \square

Esercizio 1.9.41. Se f e g sono funzioni misurabili, allora le loro combinazioni lineari sono misurabili, e le funzioni $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono misurabili. Se E_1 ed E_2 sono due insiemi disgiunti e f_1 è una funzione misurabile definita su E_1 ed f_2 è una funzione misurabile definita su E_2 , allora la funzione f definita su $E_1 \cup E_2$ dall'incollamento di f_1 e f_2 , ossia $f(x) = f_1(x)$ se $x \in E_1$ e $f(x) = f_2(x)$ se $x \in E_2$, è anch'essa misurabile. Se f_n sono misurabili, allora $f(x) = \lim_n f_n(x)$, $g(x) = \sup_n f_n(x)$ e $h(x) = \inf_n f_n(x)$ sono anch'esse misurabili. \square

Cominciamo con il definire l'integrale di Lebesgue per una classe di funzioni misurabili elementari.

1.9.4 Costruzione dell'integrale di Lebesgue

Definizione 1.9.42. (Funzioni semplici.) Sia $\{A_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ una successione finita di insiemi misurabili disgiunti tali che $\cup_{n=1}^N A_n = \mathbb{R}$, χ_n la funzione caratteristica di A_n (Definizione 1.1.3) e $\{c_n \in \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots, N\}$. Allora la funzione $\theta = \sum_{n=1}^N c_n \chi_n$ si chiama *funzione semplice*.

Nota 1.9.43. Se E è un insieme misurabile allora la sua funzione caratteristica χ_E è una funzione misurabile.

Infatti, se $1 \in (a, b)$, allora l'insieme controimmagine $\chi_E^{-1}(a, b) = E$ è misurabile. Se $0 \in (a, b)$ allora $\chi_E^{-1}(a, b) = \mathbb{R} \setminus E$ è misurabile. Se infine $0 \notin (a, b)$ e $1 \notin (a, b)$, allora $\chi_E^{-1}(a, b) = \emptyset$ è misurabile.

Quindi $\chi_E^{-1}(a, b)$ un insieme misurabile per tutti gli $a, b \in \mathbb{R}$, e quindi χ_E è misurabile in virtù della Definizione 1.9.39.

Pertanto tutte le funzioni semplici sono misurabili. Ovviamente esse sono anche limitate, perché assumono un numero finito di valori. \square

Definiamo l'*integrale di Lebesgue* di una funzione semplice su un insieme misurabile.

Definizione 1.9.44. Sia E un insieme misurabile e sia s la funzione semplice

$$s(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}(x).$$

Se m è una misura, si definisce integrale di s su E rispetto a m la quantità

$$\int_E s(x) dx = \sum_{j=1}^n \alpha_j m(A_j \cap E).$$

Generalmente limiteremo l'attenzione al caso della misura di Lebesgue, e chiameremo l'integrale così definito *integrale di Lebesgue* di funzioni semplici. Si osservi che, nel caso particolare in cui $A_j = [a_j, b_j)$ siano intervalli tutti contenuti in E , si ottiene

$$\int_E s(x) dx = \sum_{j=1}^n \alpha_j |b_j - a_j|$$

e quindi, per queste particolari funzioni, che nel seguito chiameremo *funzioni a gradini* (Definizione 1.18.1), l'integrale di Lebesgue coincide con quello di Riemann.

Esercizio 1.9.45. Sia $s(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]} + 3\chi_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]} - 2\chi_{[\frac{3}{4}, 1]}$. Allora l'integrale di Lebesgue di s vale $\frac{3}{4}$. \square

A partire dall'integrale delle funzioni semplici si definisce l'integrale di Lebesgue delle funzioni misurabili. Per fare ciò abbiamo bisogno del seguente

Teorema 1.9.46. *Sia f una funzione misurabile non negativa. Allora esiste una successione $\{s_n\}$ di funzioni semplici tali che*

1. $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f$
2. $s_n(x) \rightarrow f(x)$ per $n \rightarrow \infty$ per ogni x .

Quindi

Definizione 1.9.47. (Integrale di Lebesgue.) Se f è una funzione misurabile non negativa ed E è un insieme misurabile, l'integrale di f su E è definito da

$$\int_E f(x) dx = \sup \int_E s(x) dx$$

dove dx denota la misura di Lebesgue, e l'estremo superiore è preso su tutte le funzioni semplici tali che $0 \leq s \leq f$.

In questo modo abbiamo definito l'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile non negativa. Estendiamo la definizione al caso di funzioni a valori reali o complessi.

Se f è una qualsiasi funzione misurabile reale scriviamo $f = f_+ - f_-$ con $f_+ = \max\{f, 0\}$ e $f_- = -\min\{f, 0\}$. Quindi f_+ e f_- sono positive o nulle. Se f è misurabile complessa scriviamo $f = (u_+ - u_-) + i(v_+ - v_-)$, e quindi l'integrale di Lebesgue di f su un insieme misurabile E è definito come la seguente combinazione lineare dei corrispondenti integrali dei termini non negativi costituenti:

$$\int_E f(x) dx = \int_E u_+(x) dx - \int_E u_-(x) dx + i \int_E v_+(x) dx - i \int_E v_-(x) dx.$$

Una definizione analoga si pone per ogni misura m , e stabilisce la nozione di integrale rispetto a questa misura. La misura che utilizziamo comunemente in questo libro è quella che su ogni intervallo finito in \mathbb{R} ha per valore la sua lunghezza: ma ad esempio, se si considera la misura che conta m introdotta nell'Esempio 1.9.22, lo spazio L^p si identifica con lo spazio ℓ^p della Definizione 1.7.1, i cui elementi sono successioni (esercizio.)

Nota 1.9.48. (Paragone fra gli integrali di Lebesgue e di Riemann.)

Abbiamo già osservato che, per le funzioni a gradini (Definizione 1.18.1), che sono un caso particolare delle funzioni semplici, l'integrale di Lebesgue coincide con l'usuale integrale di Riemann (si veda la Definizione 1.9.44). Poiché quest'ultimo, per funzioni $f \geq 0$ più generali, è definito come l'estremo superiore delle funzioni a gradini minoranti f , segue che l'integrale di Lebesgue coincide con quello di Riemann per tutte le funzioni integrabili secondo Riemann, non negative e a supporto compatto (le funzioni a gradini sono nulle al di fuori di un intervallo limitato). Se invece f è a valori reali ma di segno non costante, la scindiamo come somma delle sue parti positiva e negativa come abbiamo fatto nella costruzione dell'integrale di Lebesgue (Definizione 1.9.47). In tal modo vediamo subito che, se f è a supporto compatto ed è

integrabile secondo Riemann, di nuovo l'integrale di Lebesgue coincide con quello di Riemann. Se invece $E = \text{supp } f$ non è compatto, allora l'integrale di Riemann è costruito diversamente, come integrale *improprio*, cioè come limite di integrali di troncamenti di f a intervalli limitati via via più grandi che invadono E . In questo caso può succedere che f sia misurabile ed integrabile secondo Riemann, ma non nel senso di Lebesgue. Infatti, per essere integrabile secondo Lebesgue, come abbiamo visto nella costruzione, devono essere separatamente integrabili la sua parte positiva e negativa. Quando questo non succede, può però accadere che le oscillazioni di segno producano cancellazioni di aree fra intervalli consecutivi tali da rendere finito l'integrale improprio di Riemann. Vedremo nel Lemma 5.19.3 che questo è il caso per la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x > 0$, che invece non è integrabile secondo Lebesgue perché le sue parti positive e negative decrescono in media con la velocità di $1/x$, e quindi il loro integrale non è finito (Sezione 1.1). Per funzioni non negative queste compensazioni dovute ai segni non ci sono, ed allora se esiste l'integrale di Riemann, proprio od improprio, esso coincide con l'integrale di Lebesgue (ma potrebbe esistere l'integrale di Lebesgue senza che esista quello di Riemann: ad esempio la funzione caratteristica dell'insieme dei numeri razionali ha integrale 0 secondo Lebesgue – si vedano gli Esempi 1.9.23 e 1.9.49 – ma lasciamo al lettore la facile verifica che essa non è integrabile secondo Riemann).

Osserviamo a questo proposito che, a differenza dalle funzioni a gradini, le funzioni semplici, pur avendo un numero finito di valori, non hanno necessariamente supporto compatto (i valori sono costanti su insiemi misurabili non necessariamente limitati, si veda la Definizione 1.9.42). Pertanto non si definisce un integrale improprio nel senso di Lebesgue: la costruzione dell'integrale di Lebesgue di una funzione è la stessa sia che il suo supporto sia limitato, sia che sia illimitato. \square

Esempio 1.9.49. Segue dall'Esempio 1.9.23 che, se i valori di f vengono cambiati in un insieme finito di punti, o più in generale in un insieme di misura nulla, l'integrale di Lebesgue di f non cambia. \square

Esercizio 1.9.50. Rivedere l'Esercizio 1.9.24 e mostrare che la funzione caratteristica χ dell'insieme E ivi definito (definita nella Definizione 1.1.3) ha integrale di Lebesgue $\frac{2}{9}$ (ovviamente: uguale alla misura di Lebesgue di E), ma non è integrabile secondo Riemann (basta mostrare che su ogni E_n la più piccola funzione a gradini maggiorante di χ è 1 e la più grande è 0). \square

Proposizione 1.9.51. *Sia $\{f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots\}$ una successione di funzioni misurabili secondo Lebesgue. Se esiste quasi ovunque il limite $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, o, nel caso le funzioni f_n siano a valori reali, l'estremo superiore $f(x) = \sup_n f_n(x)$ (oppure l'estremo inferiore $f(x) = \inf_n f_n(x)$), allora la funzione f è misurabile secondo Lebesgue.*

Dimostriamo ora tre teoremi, fra loro equivalenti, di fondamentale importanza per il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Enunciamo questi teoremi per l'integrale di Lebesgue, ma le dimostrazioni sono le stesse per integrali rispetto a qualsiasi misura positiva definita su una σ -algebra di insiemi, non necessariamente di Borel e non necessariamente in \mathbb{R} .

Teorema 1.9.52. (Lemma di Fatou.) *Sia $E \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme misurabile (ad esempio \mathbb{R} stesso) e $\{f_n : E \rightarrow \mathbb{R}^+, n = 1, 2, \dots\}$ una successione di funzioni misurabili a valori reali non negativi.*

Allora la funzione $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ è misurabile secondo Lebesgue, grazie alla Proposizione 1.9.51, e si ha:

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx$$

(gli integrali possono essere finiti o infiniti).

Dimostrazione. Sia $f = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$. Passando ad una sottosuccessione, possiamo assumere che $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per quasi ogni x . Per definizione di integrale (Definizione 1.9.47), basta dimostrare che, se ϕ è una funzione semplice non negativa con $\phi \leq f$, allora

$$\int_E \phi \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n. \quad (1.24)$$

Consideriamo dapprima il caso in cui $\int_E \phi = \infty$. Poiché le funzioni semplici assumono solo un numero finito di valori (Definizione 1.9.42), in questo caso un valore positivo, diciamo a , di ϕ deve essere assunto su un insieme misurabile A di misura infinita. Consideriamo la famiglia di insiemi

$$A_n = \{x \in E : f_k(x) > a \forall k \geq n\}.$$

Gli A_n sono misurabili perché le funzioni f_n lo sono (Definizione 1.9.39), e sono una famiglia crescente con n . Inoltre $\cup_n A_n \supset A$ dal momento che

$\phi \leq \lim_n f_n$, e quindi $\lim_n m(A_n) \geq m(A) = \infty$. Pertanto $\int_E f_n \geq \int_{A_n} f_n > am(A_n) \rightarrow \infty$, ed il teorema vale in questo caso particolare.

Allora assumiamo $\int_E \phi < \infty$. Allora, sempre per il fatto che le funzioni semplici assumono solo un numero finito di valori, $A = \{x \in E : \phi(x) > 0\}$ è un insieme misurabile di misura finita. Denotiamo con M il massimo valore di ϕ , scegliamo un $\varepsilon > 0$ arbitrario e consideriamo gli insiemi

$$A_n = \{x \in E : f_k(x) > (1 - \varepsilon)\phi(x) \forall k \geq n\}.$$

Per la stessa ragione di prima, l'unione della famiglia crescente di insiemi misurabili A_n contiene A . Perciò $\{A \setminus A_n\}$ è una famiglia decrescente con intersezione vuota, e quindi segue dal Corollario 1.9.12 che $\lim_n m(A \setminus A_n) = 0$. Osservando che $\phi \equiv 0$ su $E \setminus A$, e quindi $\int_E \phi - \int_{A \setminus A_k} \phi = \int_A \phi - \int_{A \setminus A_k} \phi = \int_{A_k} \phi$, ora possiamo scrivere che, per $k \geq n$,

$$\begin{aligned} \int_E f_k &\geq \int_{A_k} f_k \geq (1 - \varepsilon) \int_{A_k} \phi = (1 - \varepsilon) \left[\int_E \phi - \int_{A \setminus A_k} \phi \right] \\ &\geq (1 - \varepsilon) \int_E \phi - \int_{A \setminus A_k} \phi \geq \int_E \phi - \varepsilon \left(\int_E (\phi + M) \right). \end{aligned}$$

Poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, la precedente disuguaglianza vale anche quando si prende l'estremo inferiore rispetto a ε , in altre parole quando si pone $\varepsilon = 0$, da cui il risultato. \square

Teorema 1.9.53. (Teorema di convergenza monotona.)

Sia $E \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme misurabile (ad esempio \mathbb{R} stesso) e $\{f_n : E \rightarrow \mathbb{R}^+, n = 1, 2, \dots\}$ una successione monotona di funzioni misurabili a valori reali non negativi, cioè tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Sia $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (il limite esiste, finito o infinito, grazie alla condizione di monotonia (Sezione 1.1), ed è una funzione misurabile secondo Lebesgue grazie alla Proposizione 1.9.51).

Più in generale, abbandonando la condizione di monotonia che dà nome al teorema, supponiamo solo che f_n converga a f quasi ovunque e che $0 \leq f_n \leq f$.

Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$$

(gli integrali possono essere finiti o infiniti).

Dimostrazione. La condizione $f_n \leq f$ implica $\int_E f_n \leq \int_E f$, e pertanto, dal Lemma di Fatou (Teorema 1.9.52),

$$\int_E f \leq \liminf \int_E f_n \leq \limsup \int_E f_n \leq \int_E f,$$

e quindi il massimo e minimo limite coincidono (e quindi esiste il limite), e coincidono con $\int_E f$. \square

Teorema 1.9.54. (Teorema di convergenza dominata di Lebesgue.)

Sia $E \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme misurabile (ad esempio \mathbb{R} stesso) e g una funzione misurabile su E tale che $\int_E |g| < \infty$. Sia $\{f_n : E \rightarrow \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots\}$ una successione di funzioni misurabili con la proprietà di essere tutte simultaneamente maggiorate da g : cioè $|f_n(x)| \leq g(x)$ per ogni n e per quasi ogni $x \in E$. Se per quasi ogni x esiste, finita od infinita, la funzione limite $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$$

(gli integrali possono essere finiti o infiniti).

Dimostrazione. Spezzando gli integrali delle parti reale ed immaginaria di f_n e f , osserviamo che basta dimostrare il teorema per funzioni f_n a valori reali. Allora $g + f_n$ e $g - f_n$ sono entrambe non negative, e dal Lemma di Fatou (Teorema 1.9.52) segue $\int_E (g + f) \leq \liminf_n \int_E (g + f_n)$ e $\int_E (g - f) \leq \liminf_n \int_E (g - f_n)$, da cui

$$\int_E f \leq \liminf \int_E f_n \leq \limsup \int_E f_n \leq \int_E f.$$

Da questo il risultato segue come nella dimostrazione del Teorema di Convergenza Monotona (Teorema 1.9.53). \square

Esercizio 1.9.55. Calcolare $\int_0^1 s^{(k)}(x) dx$, dove k è un intero positivo e

$$s^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^k}$$

sono le serie di potenze introdotte nell'Esercizio 1.4.16.

Svolgimento. Abbiamo visto nell'Esercizio 1.4.16 che queste serie convergono

puntualmente ma non uniformemente in $(0, 1)$. Nondimeno, i loro termini sono positivi e quindi, per ogni $0 < x < 1$, le loro somme parziali $s_j^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^j x^{n^k}$ crescono al crescere di j . Pertanto possiamo integrare termine a termine in base al Teorema di Convergenza Monòtona (Teorema 1.9.53). Il risultato è

$$\int_0^1 s^{(k)}(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^{n^k} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k + 1},$$

che diverge per $k = 1$ ma converge se $k > 1$. □

Esercizio 1.9.56. (i) Nell'intervallo $\{-\pi/4 \leq x \leq \pi/4\}$ definiamo

$$f_n(x) = \frac{n \tan x}{1 + n^2 x^2}.$$

Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f_n(x) dx$.

(ii) Nell'intervallo $\{-\pi/4 \leq x \leq \pi/4\}$ definiamo

$$g_n(x) = \frac{(\sin x)^n}{1 + n^2 x^2}.$$

Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} g_n(x) dx$.

(iii) Nell'intervallo $\{-\pi/4 \leq x \leq \pi/4\}$ definiamo

$$h_n(x) = \frac{n(\sin x)^n}{1 + n^2 x^2}.$$

Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} h_n(x) dx$.

Suggerimento: non si provi a calcolare esplicitamente la primitiva; si usi invece il Teorema di Convergenza Dominata 1.9.54 oppure il Teorema di Convergenza monotòna 1.9.53, a seconda dei casi.

Svolgimento. Per la parte (i), osserviamo che, nell'intervallo $[0, \pi/4]$ la funzione tangente è crescente e convessa, e $\tan(\pi/4) = 1$. Quindi, per ogni $x \in [0, \pi/4]$, abbiamo $\tan x \leq 4x/\pi < 2x$, e per parità abbiamo $|\tan x| < 2|x|$ per ogni $x \in [-\pi/4, \pi/4]$. Quindi, nel nostro dominio di integrazione, $|f_n(x)| < 2n|x|/(1 + n^2 x^2)$. Poniamo $u(x) = 2|x|/(1 + x^2)$, ed

osserviamo che u è una funzione limitata ($0 \leq u(x) \leq 1$: il valore esatto di $\|u\|_{L^\infty[0, \frac{\pi}{4}]}$ è irrilevante). Abbiamo quindi

$$|f_n(x)| < n|x|/(1 + n^2x^2) = u(nx) < \|u\|_\infty < 1,$$

e quindi possiamo applicare il Teorema di Convergenza Dominata 1.9.54 nell'intervallo $[-\pi/4, \pi/4]$. Poiché $u(nx) = n/(1 + n^2x^2) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ per ogni $x \in I = [-\pi/4, \pi/4]$, anche $f_n(x) = u(nx) \tan x$ tende a 0 con n , ed il limite di $\int_I f_n dx$ vale 0.

Osserviamo che, a parte un numero finito di termini iniziali, la convergenza a 0 di $n/(1 + n^2x^2)$ è monotona decrescente, quindi avremmo più semplicemente potuto applicare il Teorema di Convergenza Monotona 1.9.53, e risparmiarci la stima uniforme, che abbiamo invece dato per completezza.

Per la parte (ii), il procedimento è identico. Questa volta maggioriamo $|\sin x| \leq \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$, e quindi $|g_n(x)| \leq c_n(x) := 1/(2^{\frac{n}{2}}(1 + n^2x^2))$, che tende a zero in maniera monotona. Quindi il limite di $\int_I |g_n| dx \leq \int_I c_n dx$ è di nuovo 0, per il Teorema di Convergenza monotona 1.9.53. Anche in questo caso, osserviamo che la disuguaglianza $|g_n| \leq c_n$ implica che le funzioni g_n sono tutte equilimitate da una costante: le c_n sono evidentemente minori di 1. Quindi lo stesso risultato segue anche dal teorema di Convergenza Dominata. In questo caso la maggiorazione uniforme è banale, ma il fatto che la convergenza sia anche monotona lo è altrettanto.

Per la parte (iii) usiamo l'ultima maggiorazione che abbiamo provato, $|\sin x| \leq 1/\sqrt{2}$, da cui

$$|h_n(x)| \leq \frac{n2^{-\frac{n}{2}}}{1 + n^2x^2}.$$

Poiché $n < 2^{n/4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$|h_n(x)| \leq d_n(x) := \frac{2^{-\frac{n}{4}}}{1 + n^2x^2},$$

e le funzioni d_n tendono a zero in maniera monotona, e sono anche equilimitate dalla costante 1. Quindi $\int_I |h_n| dx < \int_I d_n dx$ tende a zero, sia per il Teorema di Convergenza Dominata 1.9.54, sia per il Teorema di Convergenza monotona 1.9.53. \square

Esercizio 1.9.57. Siano $n \in \mathbb{N}$ e

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + e^n x}.$$

la successione di funzioni dell'Esercizio 1.3.23.

- (i) Da quell'Esercizio sappiamo che tale successione converge a zero uniformemente in $[0, \infty)$. Mostrare che da questo segue che $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b f_n(x) dx = 0$ per ogni $b > 0$, e ritrovare lo stesso risultato sia in base al Teorema di Convergenza Dominata 1.9.54, sia in base al Teorema di Convergenza monotona 1.9.53.

Suggerimento: per applicare il Teorema di Convergenza Dominata occorre maggiorare tutte le $f(n)$, simultaneamente al variare di $n \in \mathbb{N}$ (ossia uniformemente rispetto a n) con un'unica funzione in $L^1[0, b]$. A questo scopo si tenga presente che, per ogni $x \in [0, b]$,

$$\frac{x}{1 + e^n x} \leq \frac{x}{e^n x} = e^{-n} \leq 1.$$

- (ii) Si consideri ora la successione

$$g_n(x) = \frac{x e^{-x}}{1 + e^n x}$$

nella semiretta $\{x \geq 0\}$. Usando le disuguaglianze dell'Esercizio 1.3.23, od anche la disuguaglianza precedente, si osservi che f_n tende a zero uniformemente in $[0, \infty)$. Da questo fatto però non segue più che $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty g_n(x) dx = 0$, perché il dominio di integrazione ora è illimitato (si veda l'Esempio 1.3.18). Mostrare che invece questo risultato segue sia dal Teorema di Convergenza Dominata 1.9.54, sia dal Teorema di Convergenza monotona 1.9.53.

Suggerimento: per identificare una funzione $f \in L^1[0, \infty)$ che domina le g_n , si osservi che

$$\frac{x e^{-x}}{1 + e^n x} \leq x e^{-x}$$

per ogni $x \geq 0$.

□

1.10 *Topologie e proprietà di separazione

Definizione 1.10.1. (Topologia.) Una *topologia* τ su un insieme V è una famiglia di sottoinsiemi di V , detti *aperti*, che contiene l'insieme vuoto e l'insieme V ed è chiusa sotto le operazioni di unione (qualsiasi, non necessariamente finita o numerabile) e di intersezione finita. I complementi degli insiemi aperti si chiamano gli insiemi *chiusi*.

Data una famiglia \mathcal{T} di sottoinsiemi di V , la più piccola topologia che contiene tutti gli insiemi in \mathcal{T} si dice la topologia generata da \mathcal{T} . Ad esempio, la topologia su \mathbb{R} generata da tutti gli intervalli aperti è la consueta topologia che dà luogo alla nozione usuale di convergenza, basata su interni aperti.

Una base per la topologia è un sottoinsieme di aperti dai quali tutti gli altri si ottengono grazie all'operazione di unione (qualsiasi, non solo numerabile): in altre parole, una famiglia di aperti è una base se ogni aperto della topologia contiene qualche insieme di questa famiglia. Una *base locale* ad un punto x consiste di quegli aperti della base che contengono x , e le cui unioni quindi generano tutti gli interni aperti di x : ovvero, una famiglia di interni aperti di x è una base locale se ogni intorno aperto di x contiene un insieme di questa famiglia. Una *sottobase* è una famiglia di aperti le cui intersezioni finite formano una base.

Definizione 1.10.2. Si dice che uno spazio topologico X :

- (i) verifica la *proprietà di Hausdorff* (o T_2) se per ogni $x \neq y \in X$ esistono interni aperti O_x di x e O_y di y disgiunti;
- (ii) è *normale*, ovvero verifica la proprietà T_4 , se i punti sono insiemi chiusi e per ogni coppia di sottoinsiemi chiusi $C_1, C_2 \subset X$ disgiunti esistono aperti disgiunti O_1 e O_2 tali che $C_1 \subset O_1$ e $C_2 \subset O_2$

Corollario 1.10.3. *In uno spazio topologico di Hausdorff il limite è unico: se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ allora $x = y$.*

Dimostrazione. Ovvio: se $x \neq y$ allora esistono due interni aperti disgiunti O_x e O_y rispettivamente di x e y , e quindi, se i punti x_n appartengono definitivamente a O_x , non possono appartenere definitivamente anche a O_y . \square

Pertanto, la seguente nozione di continuità ha senso negli spazi di Hausdorff:

Definizione 1.10.4. Dati due spazi topologici di Hausdorff X e Y , una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice *continua per successioni* al punto x se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ quando $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

In seguito ci sarà utile la seguente osservazione:

Proposizione 1.10.5. *Se X e Y sono spazi topologici di Hausdorff, una funzione $f : X \rightarrow Y$ continua è continua per successioni, nel senso della precedente Definizione 1.10.4. Viceversa, se un punto x di X ha una base locale numerabile per la topologia, allora se f è continua a x è anche continua per successioni a x .*

Dimostrazione. È chiaro che una funzione f continua è anche continua per successioni, perché se $V \subset Y$ è un intorno aperto di $f(x)$ e denotiamo con U l'aperto $U = f^{-1}(V) \subset X$, allora ogni successione $x_n \rightarrow x$ appartiene definitivamente a U , e quindi $f(x_n)$ appartiene definitivamente a V , il che equivale a dire che $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

Viceversa, fissato x , sia U_n una base locale numerabile di aperti che contengono x . Se per assurdo f non fosse continua a x , esisterebbe un intorno $V \subset Y$ di $f(x)$ tale che $f^{-1}(V)$ non è un intorno di x , e quindi $f^{-1}(V)$ non conterrebbe qualcuno degli aperti U_n . Questo significa dire che per ogni n esiste un $x_n \in U_n$ tale che $x_n \notin f^{-1}(V)$. All'aumentare di n abbiamo allora $x_n \rightarrow x$ ma $f(x_n) \notin V$ e quindi $f(x_n) \not\rightarrow f(x)$. Allora f non è continua per successioni al punto x , e questo contraddice l'ipotesi. \square

Lemma 1.10.6. *Gli insiemi chiusi in uno spazio topologico compatto K sono compatti.*

Gli insiemi compatti in uno spazio di Hausdorff X sono chiusi.

Dimostrazione. Proviamo la prima asserzione. Sia $C \subset K$ chiuso. Si consideri un ricoprimento aperto U_x di C tale che $x \in U_x$ per ogni $x \in C$. Completiamo questo ricoprimento ad un ricoprimento aperto di tutto K aggiungendo un ulteriore aperto, ossia il complemento $\complement C = K \setminus C$, dal quale è possibile estrarre un sottoricoprimento finito per la Definizione 1.9.4 di compattezza (si osservi che questo sottoricoprimento finito contiene ancora l'aperto $\complement C$ a meno che $C = K$, nel qual caso non c'era bisogno di aggiungere al ricoprimento iniziale l'aperto $K \setminus C = \emptyset$). Ora che abbiamo estratto un sottoricoprimento finito di K , questo è anche un sottoricoprimento finito di $C \subset K$. Quindi abbiamo dimostrato che da ogni ricoprimento aperto di C si può estrarre un sottoricoprimento finito: questo significa che C è compatto.

Ora proviamo la seconda asserzione. Sia $K \subset X$ un compatto. Per ogni $x \in K$ e $y \notin K$ si scelgano due intorni aperti disgiunti U_x e U_y come nella Definizione 1.10.2. Allora la famiglia $U_x : x \in K$ forma un ricoprimento aperto di K , dal quale è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Sia $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$ questo sottoricoprimento finito. Allora l'insieme $W := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ è disgiunto da K perché $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ ed è aperto perché intersezione finita di aperti. Quindi ogni y nel complemento di K appartiene ad un aperto $W \subset \mathfrak{C}K$: in altre parole, il complemento di K è aperto.

□

Proposizione 1.10.7. *Un sottoinsieme chiuso G di uno spazio completo X è completo (ossia, le sue successioni di Cauchy a valori in G convergono a punti di G).*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy con $x_n \in G$. Poiché $G \subset X$ e X è completo, questa successione di Cauchy converge ad punto limite x_∞ in X . Poiché X è metrico, x_∞ è un punto di accumulazione di G . Ma G è chiuso, e quindi $x_\infty \in G$. □

Proposizione 1.10.8. *Siano K e Y spazi topologici con K compatto,*

(i) *Se $f : K \rightarrow Y$ è continua allora Y è compatto.*

(ii) *Se Y è di Hausdorff e la funzione continua f è biunivoca, allora f ha inversa continua.*

Dimostrazione. Sia \mathcal{Y} un ricoprimento aperto di Y , e \mathcal{K} la famiglia delle controimmagini $f^{-1}(A)$ per $A \in \mathcal{Y}$. Poiché f è continua, le controimmagini $O = f^{-1}(A)$ sono aperti in K , e ogni punto $k \in K$ appartiene a qualcuno di essi, perché $f(k)$ appartiene a qualche $A \in \mathcal{Y}$. Pertanto \mathcal{K} è un ricoprimento aperto di K , e dal momento che K è compatto esiste un sottoricoprimento finito. Le immagini sotto f di questo sottoricoprimento finito formano un sottoricoprimento finito di \mathcal{Y} . Quindi Y è compatto, e la parte (i) è provata. Ora supponiamo che Y sia uno spazio di Hausdorff e f sia biunivoca (basterebbe assumere che sia iniettiva, e restringere l'attenzione al sottoinsieme compatto di Y dato dalla sua immagine). Se $C \subset K$ è chiuso, allora esso è compatto in base alla prima parte del Lemma 1.10.6. Grazie alla parte precedente ne segue che $f(C)$ è compatto in Y , ed allora, per la seconda parte del

Lemma 1.10.6, $f(C)$ è chiuso in Y . Questo prova che $f(C)$ è chiuso per ogni chiuso C in K : scrivendo $C = (f^{-1})^{-1}(C)$ (perché f è biunivoca) vediamo che f^{-1} è continua (infatti una funzione è continua se la controimmagine di ogni aperto è aperta, e quindi se la controimmagine di ogni chiuso è chiusa). \square

Esercizio 1.10.9. Se uno spazio topologico X è di Hausdorff, esso rimane di Hausdorff in ogni topologia più forte. Se invece X è compatto, esso rimane compatto in ogni topologia più debole. Se X è compatto e di Hausdorff, la sua topologia τ è unica, nel senso che in ogni topologia strettamente più forte X non è compatto, ed in ogni topologia strettamente più debole non è di Hausdorff.

Svolgimento. Le prime due asserzioni sono ovvie. Per dimostrare la terza, consideriamo una topologia τ' più debole di τ e la mappa identica di X in sé. Questa mappa è ovviamente biunivoca e continua, e quindi ha inversa continua in base alla precedente Proposizione 1.10.8. Pertanto τ e τ' sono topologie equivalenti. Lo stesso argomento vale se si considera una topologia più forte di τ . \square

Proposizione 1.10.10. (i) *Uno spazio topologico X ha la proprietà che i punti sono insiemi chiusi se e solo se, per ogni $x, y \in X$, esiste un aperto O di ciascuno dei due che non contiene l'altro (questa proprietà di solito si indica come proprietà T_1).*

(ii) *Uno spazio topologico che verifica la proprietà di Hausdorff T_2 verifica anche la proprietà T_1 .*

(iii) *Uno spazio topologico che verifica la proprietà T_4 verifica anche la proprietà T_2 .*

(iv) *Uno spazio topologico di Hausdorff è normale, ossia verifica T_4 , se e solo se per ogni chiuso C ed aperto A tali che $C \subset A$ esiste un aperto V che li separa nel senso che $C \subset V \subset \overline{V} \subset A$.*

(v) *Se X è di Hausdorff, $K \subset X$ è compatto e $x \notin K$, allora esistono due aperti disgiunti U e V che separano x da K : ossia $x \in U$ e $K \subset V$.*

- (vi) Uno spazio compatto e di Hausdorff ha la proprietà T_4 (terminologia della Definizione 1.10.2): dati due chiusi disgiunti C e K esistono due aperti disgiunti che li contengono. Più in generale, dati un compatto K ed un chiuso C disgiunti in uno spazio di Hausdorff, esistono due aperti disgiunti O_K e O_C tali che $K \subset O_K$ e $C \subset O_C$ (se X è compatto questa forma dell'enunciato chiaramente si riduce a quella precedente, perché i compatti in uno spazio di Hausdorff sono chiusi, in base al Lemma 1.10.6).
- (vii) Se X è uno spazio localmente compatto di Hausdorff, U è un aperto in X e $K \subset U$ è compatto, esiste un aperto V a chiusura compatta che li separa, ossia tale che $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$.

Dimostrazione. L'insieme costituito dal solo punto x è chiuso se e solo se il suo complemento è aperto, ossia se e solo se esiste un intorno di ciascun $y \neq x$ che non contiene x . Questo prova (i), ed a questo punto (ii) e (iii) sono ovvie.

Per provare la parte (iv), consideriamo due chiusi C_1 e C_2 disgiunti e l'aperto $A := \complement C_2$. la disgiunzione $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ equivale a $C_1 \subsetneq A$. Analogamente, siano O_1 e O_2 i due aperti disgiunti della proprietà T_4 , tali che $C_1 \subset O_1$ e $C_2 \subset O_2$: di nuovo grazie alla disgiunzione, ponendo $G := \complement O_2$ otteniamo un chiuso tale che $O_1 \subsetneq G$. Allora anche la chiusura \bar{O}_1 deve essere contenuta in G , perché la chiusura di O_1 è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono O_1 . Pertanto abbiamo $C_1 \subset O_1$ e $\bar{O}_1 \subset A$, e che queste inclusioni sono equivalenti a $C_1 \subset O_1$ e $C_2 \subset O_2$. L'enunciato della parte (iv) coincide con questo se poniamo $C_1 = C$ e $O_1 = V$.

Veniamo alla parte (v). Per ogni $k \in K$ sappiamo che $k \neq x$. Poiché X è di Hausdorff, esistono intorni aperti disgiunti $U_k \ni x$ e $V_k \ni k$. Allora gli insiemi V_k , al variare di $k \in K$, formano un ricoprimento aperto del compatto K , dal quale possiamo estrarre un sottoricoprimento finito $\{V_1, \dots, V_n\}$. Allora l'unione finita $V := \cup_{i=1}^n V_i$ è un aperto che contiene K , ed è disgiunto dall'aperto dato dalla intersezione finita $U := \cap_{i=1}^n U_i$ che contiene x .

Un argomento simile a quello della parte (v) prova la parte (vi). Consideriamo $K, C \subset X$ disgiunti, con K compatto e C chiuso. Per ogni $x \in K$ e $y \in C$, sappiamo che $x \neq y$ perché K e C sono disgiunti. Poiché X è di Hausdorff, esistono aperti disgiunti $O_x \ni x$ e $V_y \ni y$. Poiché K è compatto, da questo ricoprimento aperto $\{O_x : x \in K\}$ si può estrarre un sottoricoprimento $\{O_1, \dots, O_n\}$ finito. Allora l'unione finita $O := \cup_{i=1}^n O_i$ e l'intersezione finita $V := \cap_{i=1}^n V_i$ sono due aperti disgiunti tali che $K \subset O$, $C \subset V$.

Infine, proviamo la parte (vii). X è localmente compatto se e solo se ogni punto x ha un intorno O_x a chiusura compatta. In tal caso, consideriamo di nuovo il ricoprimento aperto di K dato da $\{O_x : x \in K\}$ ed estraiamone un sottoricoprimento finito $\{O_1, \dots, O_n\}$. Allora l'unione finita $O := \cup_{i=1}^n O_i$ è un aperto a chiusura compatta (perché l'unione è finita) che contiene K . Se $O \subsetneq X$, consideriamo l'insieme chiuso $C := X \setminus O$. Dalla parte (vi) sappiamo che, per ogni $x \in C$, c'è un aperto $V_x \supset K$ tale che $x \notin \overline{V_x}$. Pertanto la famiglia degli insiemi $\{C \cap \overline{O} \cap \overline{V_x} : x \in C\}$ ha intersezione vuota. Ma poiché \overline{O} è compatto, questi insiemi, essendo intersezione di chiusi, sono chiusi e quindi sono compatti per la prima parte del Lemma 1.10.6. Allora, per la proprietà dell'intersezione finita (Nota 1.9.7), esiste una scelta di $x_1, \dots, x_n \in C$ che producono una intersezione finita vuota: ossia, esistono $x_1, \dots, x_n \in C$ tali che $\cap_{i=1}^n C \cap \overline{O} \cap \overline{V_{x_i}} = \emptyset$. Allora l'aperto $V = \cap_{i=1}^n O \cap V_{x_i}$ è contenuto nel compatto $\overline{V} = \cap_{i=1}^n \overline{O} \cap \overline{V_{x_i}}$ e questo compatto è disgiunto da C . \square

Nota 1.10.11. Le proprietà T_1 , T_2 e T_4 della Definizione 1.10.2 e della Proposizione 1.10.10 sono tre cosiddetti *assiomi di separazione* che fanno parte di una famiglia di cinque, ciascuno dei quali implica i precedenti. La proprietà T_0 si enuncia dicendo che, per ogni coppia di punti $x, y \in X$, esiste un aperto O di uno dei due che non contiene l'altro. La proprietà T_3 vale se i punti sono chiusi e per ogni chiuso $C \subset X$ e per ogni punto $x \in C$ esistono aperti disgiunti O_1 e O_2 tali che $x \in O_1$ e $C \subset O_2$. È ormai ovvio che $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

In questo libro, però, ci servono solo le proprietà T_2 e T_4 (ed anche T_1 ma solo per poter definire T_4). \square

Esercizio 1.10.12. Tutti gli spazi metrici hanno la proprietà T_4 , ed in particolare la proprietà di Hausdorff.

Suggerimento: basta porre, nella Definizione 1.10.2, $O_1 = \{z \in X : d(z, x) < d/2\}$, dove d è la distanza da C_1 e C_2 , ossia $d := \inf\{d(x, y) : x \in C_1, y \in C_2\}$. Gli insiemi O_1 e O_2 sono aperti perché in uno spazio metrico la distanza è una funzione continua (per definizione di spazio metrico), e sono necessariamente disgiunti a causa della disuguaglianza triangolare (Definizione 1.2.3). Si noti che la distanza d è finita, ed anzi l'estremo inferiore che la definisce è un minimo, perché dati due punti x e y a distanza assegnata k , nel calcolare l'estremo inferiore si può restringere l'attenzione alla sfera di raggio k intorno a x , e quindi ad un compatto. \square

Teorema 1.10.13. (Lemma di Urysohn.) *Siano A e B due insiemi chiusi disgiunti in uno spazio topologico X normale (ossia che verifica la proprietà di separazione T_4 della Definizione 1.10.2). Allora esiste una funzione f continua su X a valori reali compresi fra 0 e 1 tale che $f \equiv 0$ su A e $f \equiv 1$ su B .*

Dimostrazione. Fissiamo un intero $n > 0$ e consideriamo i razionali diadici $r_{m,n} = m/2^n$, $m = 1, 2, \dots, 2^n - 1$. Ripetendo iterativamente la costruzione della parte (iv) della Proposizione 1.10.10 otteniamo una famiglia crescente di aperti $V_{m,n}$, ossia $V_{m,n} \subsetneq V_{m+1,n}$, tali che $A \subset V_{m,n}$ e $\overline{V_{m,n}} \subset B$. Ora aumentiamo la risoluzione di scala passando all'intero $n+1$: i razionali diadici si raddoppiano, nel senso che $r_{k,n+1} = r_{m,n}$ se $k = 2m$ e $r_{k,n+1}$ è la media aritmetica di $r_{m,n}$ e $r_{m+1,n}$ se $k = 2nm + 1$. Allora possiamo di nuovo iterare la precedente costruzione ed estenderla ai razionali diadici di generazione $n + 1$. Pertanto, per induzione, abbiamo che, per tutti i razionali diadici in $r, s \in (0, 1)$, esistono aperti V_r tali che $A \subset V_r$, $\overline{V_r} \subset B$ e $V_r \subsetneq V_s$ se $r < s$. Ora definiamo una funzione $f : X \rightarrow [0, 1]$ nel modo seguente:

$$f(x) := \inf\{r : x \in V_r, r \text{ razionale diadico in } (0, 1)\}. \quad (1.25)$$

Allora $f \equiv 0$ su A e $f \equiv 1$ su B . Resta solo da dimostrare che la funzione f è continua.

Fissato $x \in X$, per mostrare che f è continua al punto x , per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo l'intervallo aperto $I := \{s \in (0, 1) : f(x) < s < f(x) + \varepsilon\}$. Per ogni $s \in I$ l'aperto V_s contiene x ; inoltre per $y \in O_x := V_s \setminus \overline{V_{f(x)-\varepsilon}}$ abbiamo $0 < |f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Quindi O_x è un intorno aperto di x tale che $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ per ogni $y \in O_x$. Pertanto f è continua al punto x .

□

Come conseguenza del Lemma di Urysohn 1.10.13 abbiamo:

Teorema 1.10.14. (Teorema di estensione di Tietze.) *Sia X uno spazio topologico normale, ossia che verifica la proprietà T_4 della Definizione 1.10.2 (ad esempio uno spazio metrico, come osservato nell'Esercizio 1.10.12). Sia $C \subset X$ un sottoinsieme chiuso, ed $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste una funzione continua su tutto X a valori reali che coincide con f su C .*

Dimostrazione. Normalizziamo f ponendo $h(x) = f(x)/(1 + |f(x)|)$. Allora h è continua a valori reali su C e $|h(x)| < 1$ per ogni $x \in C$. Consideriamo

gli insiemi chiusi $A := \{x \in C : h(x) \leq -1/3\}$ e $B := \{x \in C : h(x) \geq 1/3\}$. Per il Lemma di Urysohn (Teorema 1.10.13) esiste una funzione continua a valori reali $u : X \rightarrow [-1/3, 1/3]$ che vale $-1/3$ su A , $1/3$ su B e che verifica la disuguaglianza $|u(x)| \leq 1/3$ per ogni $x \in X$. Da queste disuguaglianze segue che $|h - u| < 2/3$ su tutto C (non su tutto X perché h è definita solo in C).

Riapplichiamo allora lo stesso ragionamento alla funzione $h - u$. Procedendo ricorsivamente in questo modo otteniamo una successione di funzioni u_n continue su X a valori reali tali che, per ogni $x \in X$,

$$|u_n(x)| < \frac{1}{2} \frac{2^n}{3^n} \quad (1.26)$$

per ogni $x \in C$

$$\left| h(x) - \sum_{i=1}^n u_i(x) \right| < \frac{2^n}{3^n}. \quad (1.27)$$

La disuguaglianza (1.26) implica che le somme $\sum_{i=1}^n u_i(x)$ convergono uniformemente su tutto X ad una funzione g tale che $|u| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{3^i} = 1$. La disuguaglianza (1.26) implica che in C queste somme convergono uniformemente alla funzione h .

D'altra parte, di nuovo per il Lemma di Urysohn 1.10.13 sappiamo che esiste una funzione continua $v : X \rightarrow [0, 1]$ che vale 1 su C e 0 su $B := \{x \in X : u(x) = 1\}$. Allora la funzione $g = uv/(1 - |uv|)$ è definita ovunque su X , perché il denominatore non si annulla in quanto $0 \leq u \leq 1$, $|v| \leq 1$ e $|uv| < 1$ dal momento che $v \equiv 0$ laddove $u = 1$. Da questo segue anche che g è continua a valori reali su tutto X . Infine, g estende f come richiesto nell'enunciato: infatti essa coincide con f su C , perché lì $v \equiv 1$, $u \equiv h$ e $h/(1 - h) \equiv f$ in base alla definizione $h = f/(1 + |f|)$. \square

Un'altra conseguenza interessante del lemma di Urysohn 1.10.13 è la seguente:

Lemma 1.10.15. (Partizione dell'unità.) *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto, $K \subset X$ un sottoinsieme compatto e $\{O_1, \dots, O_n\}$ un ricoprimento aperto finito di K , ossia $K \subset \cup_{i=1}^n O_i$. Allora esistono funzioni continue f_i con supporto in O_i tali che $\sum_{i=1}^n f_i \equiv 1$ su K .*

Dimostrazione. Dato $x \in K$ sia $i = i(x)$ l'indice tale che $x \in O_i$. Poiché X è localmente compatto, ogni $x \in K$ ha un intorno aperto U_x a chiusura

compatta, e considerando al posto di U_x l'intersezione $U_x \cap V_{i(x)}$ possiamo assumere $U_x \subset V_i = V_{i(x)}$. Restrungendo ulteriormente U_x se necessario, dalla parte (vii) della Proposizione 1.10.10 possiamo supporre anche che, per ogni $x \in K$, $\overline{U_x}$ sia un compatto contenuto in qualcuno dei V_i . Estraiamo un sottoricoprimento finito $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$ del compatto K . Fissato $i = 1, \dots, n$, sia $J_i = \cup_m \{\overline{U_{x_m}} : \overline{U_{x_m}} \subset V_i\}$. Chiaramente, $K \subset \cup_i J_i$. Inoltre, poiché J_i è unione finita di compatti, J_i è un compatto, quindi è un chiuso perché X è di Hausdorff (si rammenti la seconda parte del Lemma 1.10.6), ed inoltre $J_i \subset V_i$. Allora, in base al lemma di Urysohn 1.10.13, esistono funzioni continue g_i a valori reali ed a supporto compatto tali che $g_i \equiv 1$ su J_i ed il supporto di g_i è contenuto in V_i .

Poniamo infine $f_1 = g_1$, $f_2 = (1 - g_1)g_2, \dots, f_n = (1 - g_1) \dots (1 - g_{n-1})g_n$. Osserviamo che

$$f_1 + f_2 = g_1 + g_2 - g_1g_2 = 1 - (1 - g_1)(1 - g_2).$$

In maniera analoga, come si verifica immediatamente per induzione,

$$\sum_{i=1}^n f_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - g_i). \quad (1.28)$$

Poiché $K \subset \cup_i J_i$, ogni $x \in K$ appartiene ad almeno un J_i , per il cui indice i quindi si ha $g_i(x) = 1$. Allora il prodotto a secondo membro dell'identità (1.28) è identicamente nullo su K , e quindi $\sum_{i=1}^n f_i \equiv 1$ su K . \square

In \mathbb{R}^n vale una versione infinitamente differenziabile di questo stesso enunciato:

Corollario 1.10.16. (Partizione dell'unità C^∞ in \mathbb{R}^n .) *Sia $\{S_m\}$ una famiglia numerabile di palle aperte in \mathbb{R}^n che formano un ricoprimento di \mathbb{R}^n e tali che ogni compatto interseca solo un numero finito di queste palle. Allora esistono $f_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con supporto in $\overline{S_m}$ tali che $\sum_{m=1}^\infty f_m \equiv 1$ su tutto \mathbb{R}^n .*

Dimostrazione. È un facile esercizio per induzione, che utilizza le proprietà dei limiti di forme indeterminate date dal prodotto di esponenziali per polinomi (Sezione 1.1), il mostrare che la funzione h su \mathbb{R} definita da $h(t) = \exp(t^2/(t^2 - 1))$ se $|t| < 1$ e $h(t) = 0$ altrimenti è C^∞ , ha supporto in $[-1, 1]$ ed ha valori in $[0, 1]$. Chiamiamo r_m il raggio della palla S_m e x_m il suo centro, ed indichiamo con u_m la funzione con supporto in $\overline{S_m}$ definita da

$u_m(x) = h(\|x - x_m\|^2/r_m^2)$ (qui la norma è la norma Euclidea in \mathbb{R}^n). Per ogni x , la serie $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)$ è una somma finita perché x appartiene solo ad un numero finito delle palle S_m che formano i supporti dei termini della serie. Quindi la serie converge puntualmente ad una funzione C^∞ sempre strettamente positiva (il fatto che sia *strettamente* positiva è conseguenza immediata dell'ipotesi $\cup_m S_m = \mathbb{R}^n$).

La somma della serie, però, non è la costante 1. Pertanto normalizziamo, ponendo

$$f_m := \frac{u_m}{\sum_{m=1}^{\infty} u_m}.$$

Allora anche le f_m sono funzioni C^∞ non negative con supporto in $\overline{S_m}$, la serie $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$ ha, per ogni x , un numero finito di termini non nulli e quindi converge ovunque ad una funzione C^∞ , e grazie alla normalizzazione abbiamo $\sum_{m=1}^{\infty} f_m \equiv 1$ su tutto \mathbb{R}^n . \square

1.11 *Caratterizzazione della compattezza

A titolo di approfondimento, esaminiamo i legami fra varie nozioni collegate alla compattezza.

***Teorema 1.11.1. (Generalizzazione della proprietà di Bolzano–Weierstrass.)** *Dato un sottoinsieme chiuso K di uno spazio topologico X che soddisfa la proprietà di separazione di Hausdorff (parte (i) della Definizione 1.10.2), consideriamo le seguenti tre proprietà:*

- (a) K è compatto;
- (b) ogni successione a valori in K ha una sottosuccessione convergente (ovvero, ogni sottoinsieme infinito di K ha almeno un punto limite);
- (c) X è uno spazio metrico e K è totalmente limitato, nel senso che, per ogni $\varepsilon > 0$, K può essere ricoperto da una famiglia finita di palle di raggio ε (si noti che la nozione di palla, e quindi questa definizione di totale limitatezza, hanno senso solo in uno spazio metrico).

I legami fra queste proprietà sono i seguenti: (a) implica (b); se X è uno spazio metrico, (b) implica (c); se X è uno spazio metrico completo, (c) implica (a). In particolare, in uno spazio metrico completo le tre proprietà sono equivalenti.

Dimostrazione. Dimostriamo che (a) implica (b). Assumiamo, per assurdo, che esista una successione $\{x_n\}$ in K senza punti limite. Grazie alla proprietà di separazione di Hausdorff, per ogni n esistono aperti *disgiunti* O_1, \dots, O_n tali che x_j appartiene a O_j per $j = 1, \dots, n$. Infatti, questo è esattamente l'enunciato della proprietà di Hausdorff se $n = 2$. Invece, per $n > 2$ supponiamo per induzione che O_1, \dots, O_{n-1} si possano prendere disgiunti, e procediamo come segue. Prendiamo un aperto $O_{n,j} \ni x_n$ e un aperto $A_j \ni x_j$ disgiunti (esistono, di nuovo per la proprietà di Hausdorff), e rimpiazziamo O_1 con $B_1 := O_1 \cap A_1$, O_2 con $B_2 := O_2 \cap A_2$ e così via fino a rimpiazzare O_{n-1} con $B_{n-1} := O_{n-1} \cap A_{n-1}$ (si noti che queste intersezioni B_j sono ancora insieme aperti a due a due disgiunti, perché erano disgiunti gli O_j). Infine, rimpiazziamo O_n con $B_n := O_n \cap A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap \dots \cap A_{n,n-1}$: è ora chiaro che B_n è un aperto disgiunto da ciascuno dei B_j per $1 \leq j < n$.

Ma allora, si consideri la successione infinita di aperti a due a due disgiunti $B_n \ni x_n$, e gli si aggiunga l'aperto $B_0 := X \setminus \cup_n \{x_n\}$. La famiglia $\{B_n : n \geq 0\}$ è un ricoprimento di K , perché tutti i punti di K tranne gli x_n appartengono a B_0 , e ciascun x_n appartiene al rispettivo B_n . Ma se si esclude da questa famiglia anche un solo B_m , i restanti aperti smettono di ricoprire K (se $m > 0$ viene omesso x_m , se $m = 0$ vengono omessi tutti i punti di K tranne gli x_n). Quindi dal ricoprimento aperto $\{B_n : n \geq 0\}$ non si può estrarre un sottoricoprimento finito, e questo contraddice il fatto che K sia compatto. Pertanto (a) implica (b).

Ora assumiamo che X sia uno spazio metrico e proviamo che (b) implica (c). Cominciamo a scegliere una successione finita di punti $x_n \in K$ a distanza almeno ε : ossia, $d(x_i, x_j) > \varepsilon$ per ogni $1 \leq i, j \leq n$. Dall'ipotesi che ogni successione infinita abbia una sottosuccessione convergente segue che la successione $\{x_n\}$ debba terminare dopo un numero finito n di passi. Questo significa che non possiamo trovare un ulteriore punto x_{n+1} in K a distanza maggiore di ε dai precedenti x_1, \dots, x_n , e quindi che K viene ricoperto da n palle di raggio ε . Pertanto K è totalmente limitato, e (b) implica (c).

Infine, assumiamo che valga (c), ma per assurdo non a): in tal caso esiste un ricoprimento aperto \mathcal{C} di K senza sottoricoprimenti finiti. D'altra parte, in base all'ipotesi (c), K è coperto da un numero finito di palle chiuse K_1, \dots, K_m di diametro non superiore a 1 (le chiusure delle palle aperte di diametro minore di 1 prescritte da (c)), quindi almeno una di esse (chiamiamola B_1) non può essere ricoperta da un numero finito di aperti di \mathcal{C} . Ora, B_1 è un chiuso nel compatto K , e quindi è compatto (Lemma 1.10.6). Allora ripetiamo questa analisi per B_1 invece che K : il compatto B_1 , una

sfera chiusa di diametro minore o uguale a 1, è ricoperto da un numero finito di palle chiuse di diametro minore o uguale a $1/2$ almeno una delle quali (chiamiamola B_2) non può essere coperta da un numero finito di aperti di \mathcal{C} . Iterando il ragionamento costruiamo una successione di palle chiuse $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$ tali che B_n ha diametro minore o uguale a $1/2^n$ e non è ricopribile con un numero finito di aperti di \mathcal{C} . A causa della condizione sui diametri, i centri b_n delle palle B_n costituiscono una successione di Cauchy (esercizio per il lettore: la stessa asserzione rimane vera se si sceglie b_n arbitrariamente in B_n invece che al centro). Ma fra le ipotesi in (c) c'è la completezza di K : quindi la successione $\{b_n\}$ converge ad un punto b in $\bigcap_n B_n$. Questo punto b deve appartenere ad almeno uno degli aperti di \mathcal{C} , che chiamiamo O . D'altra parte, v appartiene a tutte le palle B_n le quali hanno diametro che tende a zero: ne segue che $B_n \subset V$ per n abbastanza grande. Ma allora tali B_n sono ricoperti da un numero finito di aperti di \mathcal{C} , anzi da uno solo di essi, V . Questo contraddice la precedente costruzione, e quindi nega l'ipotesi di assurdo che K non sia compatto. Pertanto (c) implica (a). \square

1.12 *Equicontinuità e teorema di Ascoli-Arzelà

***Definizione 1.12.1. (Equicontinuità.)** Sia K uno spazio topologico e \mathcal{F} una famiglia di funzioni $f : K \rightarrow \mathbb{C}$. La famiglia \mathcal{F} si dice *equicontinua* se per ogni $\varepsilon > 0$ e $x \in K$ esiste un intorno $V = V_x \subset K$ (indipendente da $f \in \mathcal{F}$) tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per ogni $y \in V$ e $f \in \mathcal{F}$.

Esercizio 1.12.2. Per ogni sottoinsieme connesso $K \subset \mathbb{R}$ e $M > 0$, consideriamo la famiglia delle funzioni f che verificano la seguente disuguaglianza di Lipschitz: esiste $M_f > 0$ tale che, per ogni $x, y \in K$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M_f |x - y|. \quad (1.29)$$

La costante M_f (indipendente da x e y) si chiama la *costante di Lipschitz*. Per $M > 0$ sia \mathcal{F}_M la famiglia delle funzioni Lipschitziane su K con costanti di Lipschitz $M_f < M$. Allora è banale verificare che \mathcal{F}_M è una famiglia equicontinua. \square

***Teorema 1.12.3. (Ascoli-Arzelà.)** Sia K un compatto in \mathbb{R} (o più in generale in uno spazio topologico) e \mathcal{F} una famiglia di funzioni continue

su K che sia equicontinua nel senso della precedente Definizione 1.12.1, e dominata da un'unica funzione a valori finiti, ossia

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)| < \infty \quad (1.30)$$

per ogni x . Allora \mathcal{F} è un sottoinsieme totalmente limitato in $C(K)$.

Dimostrazione. Per $x \in K$, sia V_x l'intorno dato dalla Definizione 1.12.1. Dal ricoprimento aperto $\{V_x\}$ estraiamo un sottoricoprimento finito $\{V_1 = V_{x_1}, \dots, V_n = V_{x_n}\}$. Pertanto, per ogni $x \in K$, abbiamo $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$ quando $f \in \mathcal{F}$ e i è l'indice (o un indice) per cui $x \in V_i$. Ora, in base alla disuguaglianza (1.30) applicata separatamente in tutti gli aperti V_i , vediamo che la famiglia \mathcal{F} è equilimitata, nel senso che esiste $C > 0$ tale che $\|f\|_\infty < C$ per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Il fatto che \mathcal{F} sia equilimitata ha questa conseguenza cruciale: se D è il disco complesso di centro l'origine e raggio M , la mappa $p(f) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$, $p : \mathcal{F} \rightarrow D^n$, ha valori nel polidisco $D^n \subset \mathbb{C}^n$, che è compatto, e quindi totalmente limitato, in virtù del Teorema 1.11.1). Ciò vuol dire che, per ogni $f \in \mathcal{F}$ e $\varepsilon > 0$, esistono $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}$ tali che la distanza euclidea da $p(f)$ ad uno dei punti $p(f_k) \in D^n$ ($k = 1, \dots, m$) è inferiore a ε . In particolare, esiste un indice k fra 1 e m tale che $|f(x_i) - f_k(x_i)| < \varepsilon$ per ogni i da 1 a n . Allora, consideriamo un qualsiasi punto $x \in K$ e sia $i = i(x)$ tale che $x \in V_i$. L'ipotesi di equicontinuità asserisce che $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$ e $|f_k(x) - f_k(x_i)| < \varepsilon$. Quindi, dato x in K , $f \in \mathcal{F}$ e $\varepsilon > 0$ arbitrari,

$$|f(x) - f_k(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_k(x_i)| + |f_k(x_i) - f_k(x)| < 3\varepsilon.$$

Questo significa che \mathcal{F} è un insieme totalmente limitato. \square

***Corollario 1.12.4.** *Per ogni compatto K in uno spazio topologico X che soddisfa la proprietà di separazione di Hausdorff, la chiusura uniforme di una famiglia equicontinua ed equilimitata $\mathcal{F} \subset C(K)$ è compatta, ed in particolare ogni successione in \mathcal{F} contiene una sottosuccessione uniformemente convergente.*

Dimostrazione. Poiché $C(K)$ è uno spazio metrico completo, i suoi sottoinsiemi totalmente limitati sono compatti (implicazione (c) \Rightarrow (a) del Teorema 1.11.1). L'ultima asserzione dell'enunciato segue dalla implicazione (a) \Rightarrow (b) dello stesso Teorema. \square

1.13 *Topologie deboli indotte da famiglie di funzioni

Definizione 1.13.1. Date due topologie τ_1 e τ_2 su uno spazio topologico X , si dice che τ_1 è più debole di τ_2 (o viceversa che la τ_2 è più forte di τ_1) se ogni aperto della prima topologia è contenuto anche nella seconda: $\tau_1 \subset \tau_2$.

Proposizione 1.13.2. Consideriamo due topologie $\tau_1 \subset \tau_2$ su uno spazio topologico X tali che τ_1 sia di Hausdorff e τ_2 sia compatta (ossia renda X uno spazio compatto). Allora $\tau_1 = \tau_2$. In altre parole, ogni topologia più debole di τ_1 non è più di Hausdorff, ed ogni topologia più forte di τ_2 non è più compatta: esiste un'unica topologia compatta e di Hausdorff.

Dimostrazione. Basta dimostrare che ogni insieme C chiuso rispetto a τ_2 è chiuso anche rispetto a τ_1 . Infatti, se è così, lo stesso vale per i loro complementi, ossia tutti gli aperti di τ_2 appartengono a τ_1 e quindi $\tau_2 \subset \tau_1$. D'altra parte, se $C \subset X$ è chiuso rispetto a τ_2 , allora è compatto, grazie alla prima asserzione del precedente Lemma 1.10.6, perché X è compatto nella topologia τ_2 . Allora C deve essere compatto anche nella topologia più debole τ_1 , perché ogni ricoprimento di C con aperti di τ_1 è anche un ricoprimento con aperti di τ_2 e quindi si può estrarne un sottoricoprimento finito, visto che X è τ_2 -compatto. Adesso segue dalla seconda asserzione del Lemma 1.10.6 che C , essendo compatto nella topologia di Hausdorff τ_1 , deve essere chiuso in τ_1 . Questo conclude la dimostrazione. \square

Rivolgiamo ora l'attenzione a famiglie di funzioni su X .

Definizione 1.13.3. Sia $\mathcal{F} := \{f : X \rightarrow Y_f\}$ una famiglia di funzioni su X , dove le immagini sono spazi topologici che possono essere differenti al variare di f . Sia $\tau_{\mathcal{F}}$ la topologia su X generata dagli insiemi $f^{-1}(V)$ al variare di f in questa famiglia e di V aperto in Y_f . La topologia $\tau_{\mathcal{F}}$ si chiama la *topologia debole* indotta dalla famiglia di funzioni \mathcal{F} . Nel seguito scriveremo spesso τ_w invece di $\tau_{\mathcal{F}}$.

Il seguente fatto è ovvio:

Esercizio 1.13.4. La topologia debole $\tau_{\mathcal{F}}$ indotta da $\mathcal{F} := \{f : X \rightarrow Y_f\}$ nel senso della precedente Definizione 1.13.3 è la più debole topologia su X che rende tutte le funzioni f continue (è perché avesse senso questa continuità che abbiamo dovuto assumere che le immagini Y_f fossero spazi muniti di una topologia!). \square

Definizione 1.13.5. Si dice che una famiglia \mathcal{F} di funzioni su un insieme X separa i punti di X se per ogni $x \neq y$ in X esiste una funzione $f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) \neq f(y)$.

Esercizio 1.13.6. Se una famiglia $\mathcal{F} := \{f : X \rightarrow Y_f\}$ di funzioni su un insieme X separa i punti nel senso della precedente Definizione 1.13.5 e tutti gli spazi immagine Y_f sono spazi topologici di Hausdorff (Definizione 1.10.2), allora la topologia debole indotta da \mathcal{F} su X nel senso della Definizione 1.13.3 è di Hausdorff.

Svolgimento. Dal momento che \mathcal{F} separa i punti, per ogni $x \neq y$ in X esiste almeno una funzione $f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) \neq f(y)$. Poiché la topologia di Y_f è di Hausdorff, esistono in Y_f due aperti disgiunti $V_x \ni f(x)$ e $V_y \ni f(y)$. Le controimmagini $U_x = f^{-1}(V_x)$ e $U_y = f^{-1}(V_y)$ devono quindi essere necessariamente disgiunte, ed appartengono alla topologia debole indotta da \mathcal{F} proprio per la sua definizione (Definizione 1.13.3). \square

Esercizio 1.13.7. Sia \mathcal{F} una famiglia di funzioni a valori reali su un insieme X . Si mostri quanto segue:

- (i) Una base per la topologia debole τ_w indotta da \mathcal{F} su X consiste degli insiemi $O_y = O_y(\varepsilon; f_1, \dots, f_n) := \{x : |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$ al variare di $y \in X$, $\varepsilon > 0$ e $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$.
- (ii) Questa topologia τ_w è di Hausdorff (ossia T_2 : Definizione 1.10.2) se e solo se la famiglia \mathcal{F} separa i punti di X , nel senso che per ogni $x \neq y$ esiste $f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) \neq f(y)$.
- (iii) Se \mathcal{F} è una famiglia di funzioni *continue* su uno spazio *topologico* X (la cui topologia indichiamo con τ), allora una base per la topologia debole τ_w generata dalla famiglia \mathcal{F} è più debole della topologia originale τ , e le due topologie coincidono se \mathcal{F} separa i punti, nel senso che, per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$, esiste $f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x) \neq f(y)$.
- (iv) Su uno spazio topologico che verifica la proprietà T_4 (o anche solo T_3) della Definizione 1.10.2 la topologia debole indotta dalla famiglia di tutte le funzioni continue coincide con la topologia originale.

Svolgimento. È chiaro che gli insiemi della parte (i) sono tutti contenuti in ogni topologia che rende continue le funzioni $f \in \mathcal{F}$, ed è banale verificare che

formano una base per una tale topologia, nel senso della Definizione 1.10.1 (questo è vero perché gli insiemi $O_y(\varepsilon; f_1, \dots, f_n)$ sono le intersezioni (finite) degli insiemi $O_y(\varepsilon; f_i)$: per questo tutti gli aperti della topologia si ottengono da unioni qualsiasi ed intersezioni finite di insiemi di questo tipo).

Questa topologia è T_2 se e solo se per ogni $x \neq y$ esistono due aperti di base $O_x \ni x$ e $O_y \ni y$ disgiunti. In particolare $y \notin O_x$, e quindi per qualche funzione $f \in \mathcal{F}$ si ha $f(y) \neq f(x)$. Viceversa, se $f(x) \neq f(y)$, allora la continuità di f assicura che, per qualche $\varepsilon > 0$, gli insiemi aperti di base $O_x(\varepsilon; f)$ e $O_y(\varepsilon; f)$ sono disgiunti. Questo prova la parte (i).

Veniamo alla parte (ii). La topologia debole τ_w è la più debole che rende tutte le $f \in \mathcal{F}$ continue. Ma poiché abbiamo assunto che queste funzioni siano già continue nella topologia originale τ , la topologia debole deve essere non più forte della topologia τ . Dobbiamo provare che ogni aperto della seconda è già contenuto nella prima purché per ogni chiuso e per ogni punto fuori di esso ci sia una funzione in \mathcal{F} che li separa.

Siano $x, y \in X$ con $x \neq y$. Poiché f è continua, esistono allora intorno aperti U_x di $f(x)$ e U_y di $f(y)$ disgiunti. Le loro controimmagini sotto f sono due intorni disgiunti O_x di x e O_y di y della topologia debole, che quindi è di Hausdorff.

Infine, se lo spazio topologico X verifica la proprietà T_3 , le funzioni continue separano i punti dai chiusi, e quindi la parte (iv) segue dalla parte (iii). \square

1.14 *Approssimazione di funzioni misurabili con funzioni continue e semicontinue

Le funzioni misurabili, ed in particolare quelle integrabili, si possono approssimare con funzioni continue o semicontinue.

Definizione 1.14.1. (Funzioni semicontinue.) Una funzione a valori reali (o $\pm\infty$) si dice *semicontinua superiormente* se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x : f(x) > \alpha\}$ è aperto, e *semicontinua inferiormente* se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x : f(x) < \alpha\}$ è aperto.

Nota 1.14.2. Una funzione a valori reali è continua se e solo se la controimmagine di ogni intervallo aperto è aperta, ossia se è allo stesso tempo semicontinua superiormente ed inferiormente. \square

Esercizio 1.14.3. (i) Le funzioni caratteristiche (Definizione 1.1.3) degli insiemi aperti sono semicontinue inferiormente, quelle dei chiusi sono semicontinue superiormente.

(ii) Le funzioni semicontinue sono misurabili (*Suggerimento:* si veda la Nota 1.9.40).

(iii) Se f è semicontinua superiormente, per ogni $\varepsilon > 0$ e x esiste un intorno aperto $I_x \ni x$ tale che, per ogni $t \in I_x$, si ha $f(t) - f(x) > \varepsilon$.

(iii) Come conseguenza della parte (iii), se f è semicontinua superiormente allora la funzione $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ verifica $|F(x) - F(y)| > \varepsilon |x - y|$ per ogni y in un intorno aperto sufficientemente piccolo di x .

(iv) Se f è semicontinua inferiormente, per ogni $\varepsilon > 0$ e x esiste un intorno aperto $I_x \ni x$ tale che, per ogni $t \in I_x$, si ha $f(t) - f(x) < \varepsilon$.

(v) Come conseguenza della parte (iv), se f è semicontinua inferiormente allora la funzione $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ verifica $|F(x) - F(y)| < \varepsilon |x - y|$ per ogni y in un intorno aperto sufficientemente piccolo di x .

(vi) L'estremo superiore di una famiglia di funzioni semicontinue inferiormente è una funzione semicontinua inferiormente; l'estremo inferiore di una famiglia di funzioni semicontinue superiormente è semicontinuo superiormente.

□

Ecco la proprietà di approssimazione con funzioni semicontinue:

Teorema 1.14.4. (Vitali–Carathéodory.) *Sia X uno spazio di misura munito di una misura di Borel regolare μ , ad esempio la retta reale con la misura di Lebesgue. Per ogni $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ esistono funzioni u e v semicontinue su X rispettivamente superiormente ed inferiormente tali che $u \leq f \leq v$, u è limitata superiormente, v è limitata inferiormente e $\int_X (v - u) d\mu < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Basta dimostrare l'enunciato per $f \geq 0$, perché, una volta trattato questo caso particolare, ogni funzione a valori reali f si spezza come somma $f = f^+ - f^-$ delle sue parti positiva e negativa, dal caso particolare si ricavano per queste due funzioni non negative gli approssimanti semicontinui inferiore e superiore $u^+ \leq f^+ \leq v^+$ e $u^- \leq f^- \leq v^-$, e si ottengono gli

approssimanti semicontinui di f come $u^+ - v^- \leq f = f^+ - f^- \leq v^+ - u^-$. Assumiamo quindi $f \geq 0$. Sappiamo dal Teorema 1.9.46 che esiste una successione crescente di funzioni semplici $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq \dots$ tale che $f(x) = \lim s_n(x)$ per ogni x . Ponendo $s_0 = 0$ e considerando le differenze consecutive $d_n = s_n - s_{n-1}$ otteniamo $f = \sum_{n=1}^{\infty} d_n$. Le funzioni d_n sono semplici, e quindi sono combinazioni lineari di funzioni caratteristiche (Definizione 1.1.3). Questo significa che esistono costanti $c_i \geq 0$ ed insiemi misurabili $E_i \subset X$ (*non necessariamente disgiunti, visto che f non è necessariamente una funzione semplice*) tali che $f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}$. Poiché i termini di questa serie sono positivi, le somme parziali sono non decrescenti. Allora, dal Teorema di Convergenza Monotona (Teorema 1.9.53) segue

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(E_i). \quad (1.31)$$

L'ipotesi $f \in L^1(X, \mu)$ implica quindi che la serie a secondo membro converga. Ora, in base alla Definizione 1.9.11 di misura regolare ed al Lemma 1.9.33, per ogni i possiamo scegliere un compatto K_i ed un aperto V_i tali che $K_i \subset E_i \subset V_i$ e $c_i \mu(V_i \setminus K_i) < \varepsilon/2^{i+1}$. Osserviamo che con questa scelta si ha

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(V_i \setminus K_i) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.32)$$

Allora le funzioni $v := \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{V_i}$ e, per ogni intero N fissato, $u := \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{K_i}$ sono semicontinue rispettivamente inferiormente e superiormente, in base all'Esercizio 1.14.3, e $u \leq f \leq v$. Osserviamo che

$$v - u = \sum_{i=1}^N c_i (\chi_{V_i} - \chi_{K_i}) + \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i \chi_{V_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} c_i (\chi_{V_i} - \chi_{K_i}) + \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}.$$

Allora scegliamo N così grande che si abbia $\sum_{i=N+1}^{\infty} c_i \mu(E_i) < \varepsilon/2$ (questo è possibile perché la serie a secondo membro di (1.31) converge). Da questo fatto e dalla disuguaglianza 1.32 segue

$$\int_X (v - u) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i (\mu_{V_i} - \mu_{K_i}) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(E_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Il prossimo enunciato mostra che le funzioni misurabili si approssimano *in misura* con funzioni semplici e con funzioni continue.

Proposizione 1.14.5. *Sia f una funzione misurabile su $[a, b]$ finita quasi ovunque. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una funzione continua g tale che $|f - g| < \varepsilon$ tranne che su un insieme di misura minore di ε . Inoltre, se $m \leq f \leq M$, si può scegliere g tale che $m \leq g \leq M$.*

Dimostrazione. Anzitutto, mostriamo che, dato $\varepsilon > 0$, esiste M tale che $|f| < M$ tranne che su un insieme di misura minore di $\varepsilon/3$: in effetti, questo equivale all'ipotesi che la misura a_M dell'insieme $\{x : |f(x)| > M\}$ tenda a zero per $M \rightarrow \infty$.

Ora mostriamo che, dati questi M e ε , sull'insieme $\{x : |f(x)| \leq M\}$ esiste una funzione semplice h tale che $|f - h| < \varepsilon$. Infatti, basta scegliere una successione equispaziata di passo minore di ε di punti $y_0 = -M < y_1 < \dots < y_N = M$, porre $E_i := \{x \in [a, b] : y_i \leq f(x) < y_{i+1}\}$ e scegliere come h la combinazione lineare delle funzioni caratteristiche degli insiemi (disgiunti!) E_i data da $h = \sum_i y_i \chi_{E_i}$. Poiché f è misurabile (Definizione 1.9.39), gli E_i sono insiemi misurabili e quindi h è una funzione semplice, ed è ovvio dalla sua costruzione che verifica la disuguaglianza $|f - h| < \varepsilon$ laddove $|f| \leq M$, e $m \leq h \leq M$ se $m \leq f \leq M$.

D'altra parte, la misura di Lebesgue è regolare (Proposizione 1.18.6, e quindi gli insiemi E_i sono approssimabili con unioni finite A_i di intervalli aperti a meno di misura $\varepsilon/3$ (Lemma 1.9.33). Pertanto le corrispondenti combinazioni lineari delle funzioni caratteristiche di questi intervalli aperti formano una funzione a gradini k tale che $|h - k| < \varepsilon$ e $m \leq k \leq M$ se $m \leq h \leq M$.

Ora, ogni funzione a gradini k si approssima con una funzione continua g tale che $g(x) = k(x)$ eccetto che in un insieme di misura minore di $\varepsilon/3$, e se $m \leq k \leq M$ possiamo scegliere $m \leq g \leq M$: infatti, basta rendere continua la funzione a gradini rimpiazzandola con raccordi lineari negli intervalli di ampiezza $\varepsilon/3K$ centrati ai suoi K punti di salto.

Combinando queste tre approssimazioni si ottiene l'enunciato. \square

Anche se è già contenuto nella dimostrazione della precedente Proposizione 1.14.5, rinunciando (e ridimostriamo) il seguente fatto come conseguenza a sé stante:

Esercizio 1.14.6. Sia f una funzione misurabile su $[a, b]$ finita quasi ovunque. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una funzione a gradini t tale che $|f - t| < \varepsilon$ tranne che su un insieme di misura minore di ε . Inoltre, se $m \leq f \leq M$, per ogni $\delta > 0$ si può scegliere t tale che $m - \delta \leq t \leq M + \delta$.

Svolgimento. In base alla Proposizione 1.14.5, esiste una funzione continua g che approssima uniformemente f a meno di $\varepsilon/2$ tranne che su un insieme di

misura inferiore a ε , e se i valori di f sono compresi fra m e M si può scegliere g entro gli stessi limiti. D'altra parte, per il Teorema di Heine sulla uniforme continuità (Sezione 1.1), g è uniformemente continua in $[a, b]$ o equivalentemente esiste una funzione a gradini t che approssima g uniformemente ovunque a meno di $\varepsilon/2$ (per maggiori dettagli si consulti la dimostrazione della parte (i) del Lemma 5.13.4 nel seguito). Ora il risultato segue dalla disuguaglianza triangolare. \square

Nota 1.14.7. L'argomento che permette di passare da funzioni a gradini a funzioni continue alla fine della dimostrazione della Proposizione 1.14.5 e che è riformulato in maniera diversa nel precedente Esercizio 1.14.6 verrà riutilizzato per dimostrare che le funzioni $C^1[a, b]$ sono uniformemente dense nelle funzioni continue su $[a, b]$ (Lemma 5.13.4). \square

Ora veniamo al cosiddetto *terzo principio di Littlewood*, il cui senso è che ogni successione puntualmente convergente di funzioni misurabili è quasi uniformemente convergente. Cominciamo con una variante più debole della versione generale. Questa variante asserisce che le successioni $\{f_n\}$ di funzioni misurabili che convergono puntualmente quasi ovunque su un insieme di misura finita si avvicinano al loro limite anche uniformemente a meno di insiemi di misura arbitrariamente piccola purché l'indice n sia abbastanza grande, ma per ora l'indice al quale l'approssimazione uniforme diventa vera dipende dalla misura dell'insieme eccezionale.

Lemma 1.14.8. *Sia $m(E) < \infty$ e f_n una successione di funzioni misurabili su E tale che, per quasi ogni $x \in E$, esiste $f(x)$ tale che $\lim_n f_n(x) = f(x)$. Per ogni $\varepsilon, \delta > 0$ esistono un sottoinsieme misurabile $A \subset E$ con $m(E \setminus A) < \delta$ e $N > 0$ tali che $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in E \setminus A$.*

Dimostrazione. Sappiamo che il limite puntuale f è ancora una funzione misurabile (Esercizio 1.9.41). Pertanto l'insieme $B_n := \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ è misurabile, e lo è anche

$$E_N := \bigcup_{n=N}^{\infty} B_n = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ per qualche } n \geq N\}.$$

La famiglia di insiemi E_N è decrescente, e per quasi ogni $x \in E$ esiste N tale che $x \notin E_N$, perché $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quasi ovunque. Quindi l'intersezione $\bigcap_N E_N$ ha misura zero, e, visto che $E_{N+1} \subset E_N$ e $m(E) < \infty$, possiamo

invocare il Corollario 1.9.12 per concludere che $\lim_N E_N = 0$. Questo significa che, per ogni $\delta > 0$, esiste N tale che $m(E_N) < \delta$. Abbiamo provato che

$$m(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ per qualche } n \geq N\}) < \delta.$$

Questo insieme E_N è quindi l'insieme A dell'enunciato. \square

Più in generale:

Corollario 1.14.9. (Teorema di Egoroff.) *Sia $m(E) < \infty$ e f_n una successione di funzioni misurabili su E tale che converge a f puntualmente quasi ovunque. Allora per ogni $\eta > 0$ esiste $A \subset E$ misurabile tale che $m(A) < \eta$ e f_n converge a f uniformemente su $E \setminus A$.*

Dimostrazione. Applichiamo il Lemma 1.14.8 con ε tendente a zero, diciamo $\varepsilon = 1/n$, e $\delta = 2^{-n}\eta$, per ottenere un sottoinsieme misurabile $A_n \subset E$ con $m(E \setminus A_n) < 2^{-n}\eta$ e $N > 0$ tali che $|f_n(x) - f(x)| < 1/n$ per ogni $x \in E \setminus A_n$. Si osservi che, per $x \in E \setminus \bigcap_{n \geq N} A_n = \bigcup_{n \geq N} A_n := B_N$, tutte le funzioni f_n con $n \geq N$ si avvicinano a f a meno di $1/N$. La famiglia B_N è crescente: $B_N \subset B_{N+1}$. Grazie alla additività numerabile della misura, $m(B_N) \leq \sum_{n \geq N} 2^{-n}\eta \nearrow \eta$. Quindi, ponendo $A := \bigcup_N B_N$, abbiamo $m(A) = \eta$, e su $E \setminus A$ le funzioni f_n convergono uniformemente a f . \square

Infine, il prossimo risultato, talora chiamato *secondo principio di Littlewood*, illustra l'approssimabilità di funzioni misurabili con funzioni continue.

Teorema 1.14.10. (Lusin.) *Sia X uno spazio di misura munito di una misura di Borel regolare μ , e $A \subset X$ un insieme misurabile di misura finita: $\mu(A) < \infty$ (ad esempio un compatto in \mathbb{R} con la misura di Lebesgue). Per ogni $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ misurabile (o meglio, in $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$) con supporto in A , e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una funzione g continua a supporto compatto su X che approssima f in misura, nel senso che $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$. Inoltre si può scegliere g in modo che $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.*

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che si può restringere l'attenzione al caso in cui A sia compatto, perché la misura è regolare, ovvero (Proposizione 1.18.6) ogni insieme di misura finita contiene un sottoinsieme compatto di misura arbitrariamente vicina. Fissato $\eta > 0$, sappiamo dal Teorema di Egoroff (Corollario 1.14.9) che esiste un sottoinsieme misurabile $B \subset A$ con misura $m(B) < \eta/2$ ed una successione di funzioni misurabili $\{f_n : n = 1, 2, \dots\}$ su

A che convergono uniformemente a f in $A \setminus B$: ad esempio possiamo scegliere f_n in modo che $\sup_{A \setminus B} |f_n - f| < 1/n$.

Ora, in base alla Proposizione 1.14.5, ciascuna funzione f_n si può approssimare a meno di $1/n$ con una funzione continua g_n tranne che su un insieme E_n di misura minore di $\eta/2^{n+1}$. Allora l'insieme $E := \cup_{n \geq 1} E_n$ ha misura

$$m(E) \leq \sum_n m(E_n) < \sum_{n \geq 1} \frac{\eta}{2^{n+1}} = \frac{\eta}{2},$$

l'insieme $B \cup E$ ha misura minore di η ed in $A \setminus (B \cup E)$ si ha

$$\sup_n |g_n - f| \leq \sup_n |g_n - f_n| + \sup_n |f_n - f| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}.$$

Quindi le funzioni g_n sono continue in $A \setminus (B \cup E)$ ed ivi convergono uniformemente a f . Pertanto f è continua in $D := A \setminus (B \cup E)$ (Teorema 1.3.16) e $m(A \setminus D) = m(B \cup E) < \eta$. Però a noi serve un approssimante di f che sia continuo *in tutto* A .

Di nuovo perché la misura è regolare (Lemma 1.9.33), l'insieme $D \subset A$ di misura finita contiene un sottoinsieme compatto C di misura arbitrariamente vicina, diciamo $m(D \setminus C) < \eta$. In particolare, $A \setminus C = (A \setminus D) \cup (D \setminus C)$ e $m(A \setminus C) = m(A \setminus D) + m(D \setminus C) < 2\eta$. Inoltre, per il Teorema 1.10.14 di estensione di Tietze, esiste una funzione continua g su tutto A che coincide con f sull'insieme chiuso C . Questa funzione g verifica quindi la condizione dell'enunciato se si pone $\eta = \varepsilon/2$. \square

1.15 Funzioni convesse e disuguaglianza di Jensen

Le proprietà elementari delle funzioni convessa di una variabile sono oggetto di studio nei corsi di base di Analisi Matematica. Le presentiamo qui in maniera più completa.

Definizione 1.15.1. (Convessità) Una funzione ϕ definita su un intervallo aperto (a, b) è convessa se per ogni α , $0 \leq \alpha \leq 1$, e per ogni x, y in (a, b) vale la disuguaglianza

$$\phi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha\phi(x) + (1 - \alpha)\phi(y)$$

Nota 1.15.2. Geometricamente, la proprietà di convessità si esprime dicendo che la corda che unisce ogni coppia di punti del grafico di ϕ in (a, b) (di ascisse, diciamo, x e y) sta al di sopra del grafico di ϕ in (x, y) . La proprietà opposta si chiama *concavità*. Le funzioni lineari sono simultaneamente concave e convesse, e sono le uniche funzioni con questa proprietà. \square

Definizione 1.15.3. Dati due intervalli (x, y) e (x', y') in \mathbb{R} , diciamo che il secondo comincia a destra del primo se $x \leq x'$, e finisce a destra del primo se $y \leq y'$.

Con questa notazione si ha:

Lemma 1.15.4. Se ϕ è convessa in (a, b) e $x, y, x', y' \in (a, b)$ sono tali che $x < y$, $x' < y'$ e l'intervallo $I_+ \equiv (x', y')$ comincia a destra e finisce a destra di $I_- \equiv (x, y)$, allora la pendenza della corda sottesa dai punti estremi del grafico di ϕ in I_- è non superiore a quella della corda sottesa da ϕ in I_+ (Figura 1.12):

$$\frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x} \leq \frac{\phi(y') - \phi(x')}{y' - x'}.$$

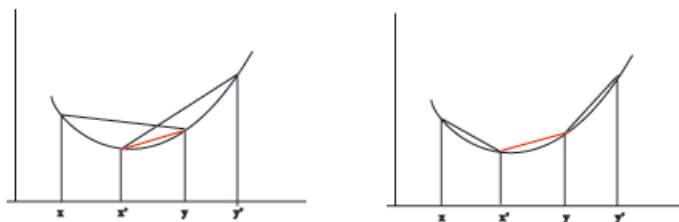


Figura 1.12: La pendenza della corda dell'intervallo di destra è maggiore di quello di sinistra

Dimostrazione. Per comodità consideriamo solo il caso in cui i quattro punti sono distinti: il caso generale si dimostra allo stesso modo (le disuguaglianze possono essere uguaglianze).

Supponiamo dapprima che i due intervalli si intersechino, cioè che si abbia $x < x' < y < y'$. In tal caso, in conseguenza della interpretazione geometrica

della convessità enunciata nella Nota 1.15.2, il punto $(x', \phi(x'))$ del grafico di ϕ sta al di sotto (o meglio, non strettamente al di sopra) della corda che congiunge i punti $(x, \phi(x))$ e $(y, \phi(y))$, e quindi della retta che contiene tale corda. Viceversa il punto $(y', \phi(y'))$ sta al di sopra di tale retta, perché altrimenti la corda da $(x', \phi(x'))$ a $(y', \phi(y'))$ passerebbe al di sopra del punto $(y, \phi(y))$. Questi fatti equivalgono all'enunciato in questo caso.

Se invece $x < y < x' < y'$, allora il punto $(y, \phi(y))$ sta al di sotto (cioè non al di sopra) della retta che congiunge i punti $(x, \phi(x))$ e $(x', \phi(x'))$, e quindi la pendenza della corda fra $(x, \phi(x))$ e $(y, \phi(y))$ è non superiore a quella della corda fra $(x, \phi(x))$ e $(x', \phi(x'))$. D'altra parte, per lo stesso ragionamento, tale pendenza è non superiore a quella della corda sottesa da $(y, \phi(y))$ e $(x', \phi(x'))$, la quale a sua volta è non superiore alla pendenza della corda fra $(y, \phi(y))$ e $(y', \phi(y'))$, che infine è non superiore a quella della corda fra $(x', \phi(x'))$ e $(y', \phi(y'))$. Questo completa la dimostrazione. \square

Definizione 1.15.5. Siano ϕ convessa in (a, b) e $x_0 \in (a, b)$ un punto in cui esistono finite le derivate destra e sinistra di ϕ . Consideriamo una retta generica che tocca il grafico di ϕ in $x_0 \in (a, b)$ (ossia di equazione $y = \phi(x_0) + m(x - x_0)$). Diciamo che una tale retta è *subordinata* a ϕ al punto x_0 se giace al di sotto del suo grafico, cioè se $\phi(x_0) + m(x - x_0) \leq \phi(x)$ per ogni $x \in (a, b)$.

Corollario 1.15.6. *Nella terminologia della precedente Definizione 1.15.5, una retta è subordinata a ϕ al punto x_0 se e solo se $D_-\phi(x_0) \leq m \leq D_+\phi(x_0)$. Se le due derivate coincidono, esiste un'unica retta subordinata al punto x_0 ed è la retta tangente al grafico.*

La geometria delle corde sottese o subordinate al grafico di una funzione convessa è illustrata anche nelle Figure 1.13 e 1.14.

Proposizione 1.15.7. *Se ϕ è convessa in (a, b) , allora ϕ è continua in ogni sottointervallo chiuso di (a, b) . Inoltre le derivate destra $D_+\phi$ e sinistra $D_-\phi$ esistono ovunque e coincidono tranne che su un insieme al più numerabile. $D_+\phi$ e $D_-\phi$ sono due funzioni monotone non decrescenti tali che, per ogni x in (a, b) , si ha $D_-\phi(x) \leq D_+\phi(x)$.*

Dimostrazione. Fissiamo $a < c < d < b$. Per ogni x, y nell'intervallo chiuso $[c, d]$ segue dal Lemma 1.15.4 che

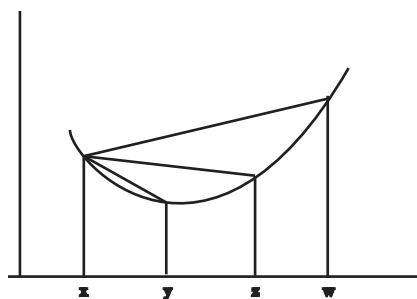


Figura 1.13: La pendenza delle corde cresce se il punto finale si sposta a destra

$$\frac{\phi(c) - \phi(a)}{c - a} \leq \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x} \leq \frac{\phi(b) - \phi(d)}{b - d}.$$

Sia $M = \max \left\{ \frac{\phi(c) - \phi(a)}{c - a}, \frac{\phi(b) - \phi(d)}{b - d} \right\}$. Allora per ogni x, y in $[c, d]$

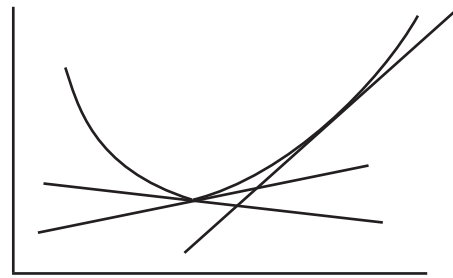


Figura 1.14: Varie rette subordinate: ai punti di derivabilità c'è solo la tangente

$$|\phi(y) - \phi(x)| \leq |M||y - x|$$

e quindi ϕ è continua in $[c, d]$.

Ancora per il Lemma 1.15.4, per ogni x_0 in (a, b) la funzione rapporto incrementale

$$x \mapsto \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0}$$

è monotona non decrescente, e quindi, a causa dell'esistenza dei limiti di funzioni monotone, ha limiti destro e sinistro finiti per $x \rightarrow x_0$: quindi $D_+\phi(x_0)$ e $D_-\phi(x_0)$ esistono finiti per ogni x_0 in (a, b) , e $D_-\phi(x_0) \leq D_+\phi(x_0)$.

Ora prendiamo $a < x_0 < y_0 < b$, e $|h| < y_0 - x_0$. Sia $x = x_0 + h$, $y = y_0 + h$: allora $x < y_0$ e $x_0 < y$, quindi l'intervallo (y_0, y) comincia e finisce a destra di (x_0, x) (la terminologia è quella della Definizione 1.15.3). Ancora dal Lemma 1.15.4 segue che

$$\frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h} = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{\phi(y) - \phi(y_0)}{y - y_0} = \frac{\phi(y_0 + h) - \phi(y_0)}{h},$$

e pertanto ciascuna delle due derivate al punto x_0 è non superiore a ciascuna di esse a y_0 : più precisamente,

$$D_-\phi(x_0) \leq D_+\phi(x_0) \leq D_-\phi(y_0) \leq D_+\phi(y_0). \quad (1.33)$$

Quindi entrambe le derivate sono monotone, e sono uguali in ogni punto in cui una di esse è continua (perché se $\lim_{x_0 \rightarrow y_0} D_-\phi(x_0) = D_-\phi(y_0)$, allora 1.33 implica che anche

$$\lim_{x_0 \rightarrow y_0} D_+\phi(x_0) = D_-\phi(y_0) \quad (1.34)$$

e quindi anche l'altra derivata ha lo stesso limite a x_0 , ed allora nessuna delle due può avere salti e, grazie a (1.34), devono essere uguali.

Infine, una funzione monotona può avere solo un insieme numerabile di salti, perché la serie dei salti non può superare l'escursione dei valori della funzione. Quindi le due derivate devono essere continue ovunque tranne che in un insieme al più numerabile. \square

Abbiamo così provato che la convessità implica la monotonia delle derivate. Viceversa:

Proposizione 1.15.8. *Se ϕ è continua su (a, b) ed ammette derivata sinistra (oppure destra) non decrescente, allora ϕ è convessa.*

Dimostrazione. Supponiamo che la derivata destra di ϕ sia non decrescente. In questa dimostrazione, per semplicità, scriviamo *crescente* invece che *non decrescente*, e se necessario denoteremo come *strettamente crescente* le funzioni che finora abbiamo chiamato *crescenti*; analogamente per le funzioni decrescenti.

Dire che ϕ è convessa in (a, b) equivale a dire che per ogni $a < x < y < b$ la funzione differenza

$$\psi(t) = \phi[ty + (1-t)x] - t\phi(y) - (1-t)\phi(x)$$

è negativa o nulla nell'intervallo $[0, 1]$. Osserviamo che $\psi(0) = 0 = \psi(1)$, e $t \mapsto D_+\psi(t) = (y-x)D_+\phi[ty + (1-t)x] - \phi(y) + \phi(x)$ è anch'essa una funzione crescente di t in $[0, 1]$.

Poiché ψ è continua ha un punto di massimo. Sia t_0 tale punto. Se $t_0 = 1$ allora il valore massimo di ψ è $\psi(1) = 0$, e quindi ψ è negativa o nulla ed il risultato è dimostrato. Se invece $t_0 < 1$ allora $D_+\psi(t_0) = 0$. D'altra parte, poiché $D_+\psi$ è crescente, questo implica $D_+\psi \leq 0$ in $[0, t_0]$. Allora $\psi(t_0) \leq \psi(0) = 0$, e quindi il massimo valore di ψ è negativo o nullo. \square

Una conseguenza immediata di questi due risultati è continuamente usata nello studio del grafico delle funzioni:

Corollario 1.15.9. *Una funzione derivabile due volte è convessa in un intervallo aperto se e solo se ha derivata seconda non negativa in tutto l'intervallo*

Proposizione 1.15.10. (Disuguaglianza di Jensen.) *Se ϕ è una funzione convessa su \mathbb{R} e f una funzione integrabile definita in $[0, 1]$,*

$$\phi\left(\int_0^1 f(t) dt\right) \leq \int_0^1 \phi(f(t)) dt. \quad (1.35)$$

Se invece f è definita in un intervallo $[a, b]$ la disuguaglianza diventa

$$\phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(f(t)) dt. \quad (1.36)$$

Dimostrazione. Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[0, 1]$ e $I = \int_0^1 f(t) dt$ e consideriamo una retta subordinata a ϕ al punto I , nel senso del Corollario 1.15.6. Scriviamo l'equazione di questa retta $y = \phi(I) + m(x - I)$. Dalla definizione di retta subordinata segue che

$$\phi(f(t)) \geq \phi(I) + m(f(t) - I)$$

per ogni $0 \leq t \leq 1$. Poiché $I = \int_0^1 f(t) dt$, integrando entrambi i termini di questa equazione sull'intervallo $[0, 1]$ si ottiene la disuguaglianza (1.35). Se invece f ha supporto in $[a, b]$ poniamo $I = \int_a^b f(t) dt$ ed otteniamo (1.36) dallo stesso argomento. □

La disuguaglianza di Jensen asserisce che il valore di una funzione convessa ϕ al baricentro di una distribuzione di massa f non è più grande del baricentro dei valori. La definizione di convessità 1.15.1 afferma la stessa cosa nel caso in cui la distribuzione consista di due soli punti materiali di massa rispettivamente x e y . Si noti che, iterando questa definizione, si ottiene che, se $\sum_{n=0}^N a_n = 1$,

$$\phi\left(\sum_{n=0}^N a_n x_n\right) \leq \sum_{n=0}^N a_n \phi(x_n),$$

che è una versione discreta della forma integrale della disuguaglianza di Jensen (1.35).

1.16 Spazi L^p

Un altro esempio di spazi vettoriali di dimensione infinita è si ottiene, per $1 \leq p < \infty$, nel modo seguente:

Definizione 1.16.1.

$$L^p = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ misurabile} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty \right\} \quad (1.37)$$

Se le funzioni sono definite non su tutto \mathbb{R} ma solo su un sottoinsieme misurabile secondo Lebesgue $I \subset \mathbb{R}$, l'integrale in (1.37) ovviamente si effettua solo su I , e la sua finitezza individua le funzioni nello spazio $L^p(I)$.

Quando abbiamo bisogno di utilizzare l'integrale rispetto ad una specifica misura m diversa da quella che ad un intervallo associa la sua lunghezza, allora scriviamo $L^p(m)$, oppure $L^p(I, m)$.

Consideriamo la seguente espressione, tramite la quale definiremo una norma per L^p :

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.38)$$

Sia ora $p = \infty$. Vogliamo definire uno spazio $L^\infty(\mathbb{R})$ (o $L^\infty(I)$). Per fare ciò occorre definire l'estremo superiore essenziale di una funzione f .

Definizione 1.16.2. (Estremo superiore essenziale e norma L^∞ .)

Sia g una funzione definita su \mathbb{R} a valori non negativi. Sia S l'insieme di tutti i numeri reali α tali che

$$m(g^{-1}(\alpha, \infty]) \equiv m(\{x : \alpha < g(x) \leq \infty\}) = 0.$$

Se $S = \emptyset$, poniamo $\beta = +\infty$.

Se $S \neq \emptyset$, poniamo $\beta = \inf S$.

Allora β si dice *estremo superiore essenziale* di g , e si scrive $\beta = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} g(x)$.

Poniamo

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_x |f(x)|. \quad (1.39)$$

Esercizio 1.16.3. Si mostri che $\text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \inf\{\sup_{t \in \mathbb{R}} g(t)\}$ dove l'estremo inferiore è preso sull'insieme delle funzioni g che coincidono con f quasi ovunque.

Equivalentemente, si mostri che $\text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \inf\{\beta : m\{t : f(t) > \beta\} = 0\}$. \square

Il primo passo per mostrare che, per $p \geq 1$, (1.38) è una norma è provare la disuguaglianza triangolare, che nel caso della norma in L^p si chiama *disuguaglianza di Minkowski*. Potremmo darne una dimostrazione diretta (si veda ad esempio [22, Cap. 6, Sezione 2], ma preferiamo ottenerla in modo più elegante come conseguenza di un'altra disuguaglianza, la *disuguaglianza di Hölder*, la quale a sua volta richiede un breve calcolo che presenteremo come lemma separato.

Definizione 1.16.4. (Indici coniugati.) Siano $1 \leq p, q \leq \infty$. Diciamo che p e q sono indici coniugati se

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

dove si intende $\frac{1}{\infty} = 0$.

Lemma 1.16.5. Siano $1 \leq p, q < \infty$ due indici coniugati ($1/p + 1/q = 1$), e $a, b \geq 0$. Allora

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo assumere $1 < p \leq q < \infty$. Poiché $1/p + 1/q = 1$ questo implica $p \leq 2 \leq q$. Perciò la funzione $\phi(x) = x^{q-1}$ è convessa per $x \geq 0$ (si riveda l'Esercizio 1.7.3, oppure, se non si è svolto quell'esercizio, si applichi il Corollario 1.15.9). Osserviamo anche che la condizione $1/p + 1/q = 1$ equivale a $p + q = pq$, e quindi

$$(p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = 1. \quad (1.40)$$

Perciò la funzione inversa ϕ^{-1} è data da $\phi^{-1}(y) = y^{p-1}$.

Si consideri il grafico di ϕ , illustrato nella figura seguente:

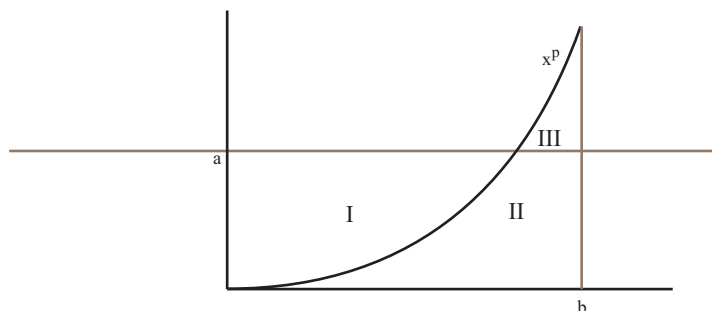


Figura 1.15: Grafico di $a = b^{q-1}$

La regione I ha area $\int_0^a a^{p-1} da = a^p/p$. La somma delle aree delle regioni II e III è $\int_0^b b^{q-1} db = b^q/q$. Quindi il rettangolo di base b ed altezza a

costituito dall'unione di I e II ha area inferiore a $a^p/p + b^q/q$. Questo prova la disuguaglianza. \square

Teorema 1.16.6. (Disuguaglianza di Hölder.) *Se p e q sono indici coniugati (nel senso della precedente Definizione 1.16.4) e $f \in L^p$, $g \in L^q$, allora*

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.41)$$

Vale l'uguaglianza se e soltanto se una fra f e g è nulla quasi ovunque (cioè se f o g è la funzione nulla nella classe di equivalenza di Lebesgue), oppure se $|f|^p$ è un multiplo di $|g|^q$.

Dimostrazione. Il caso $p = 1$, $q = \infty$ (o viceversa) è ovvio, perciò assumiamo $1 < p, q < \infty$. La disuguaglianza è ovvia se f o g è nulla quasi ovunque, perché allora lo è anche il prodotto $|fg|$. Se entrambe le funzioni non sono quasi ovunque nulle le loro norme rispettivamente in L^p e L^q sono positive. Normalizziamo in maniera da avere $\|f\|_p = 1 = \|g\|_q$, ed applichiamo il Lemma 1.16.5 al prodotto $f(x)g(x)$, ottenendo

$$\int |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p} \int |f(x)|^p dx + \frac{1}{q} \int |g(x)|^q dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (1.42)$$

Abbiamo già notato che si ha $pq = p + q$. Perciò $p = p + q - q = pq - q = q(p - 1)$. Quindi, se $|f|^p$ è un multiplo di $|g|^q$, allora $|g| = M|f|^{p/q} = M|f|^{p-1}$. In questo caso è ovvio che nella disuguaglianza di Hölder vale l'uguaglianza. Viceversa, se vale l'uguaglianza, allora applicando il Lemma 1.16.5 al prodotto di $a = |f(x)|$ e $b = |g(x)|$ si deve avere l'uguaglianza per quasi ogni x . Questo significa che la regione III nella figura si restringe ad un solo punto per quasi ogni x , e cioè che $a = |f(x)| = \phi(b) = b^{q-1} = |g(x)|^{q-1}$ quasi ovunque. Poiché abbiamo mostrato che $q - 1 = 1/(p - 1)$, questo equivale a dire che $|f|^p = |g|^q$ a meno di normalizzazione (per ottenere (1.42) abbiamo normalizzato f e g).

Corollario 1.16.7. (Calcolo della norma L^p per dualità sulla sfera unitaria di L^q .) *Per ogni $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$,*

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \left| \int fg \right| : \|g\|_q = 1 \right\} = \sup \{ \|fg\|_1 : \|g\|_q = 1 \}. \quad (1.43)$$

Dimostrazione. Segue dalla disuguaglianza di Hölder (1.41) che $\|f\|_p$ è maggiore o uguale dell'estremo superiore sul lato destro dell'uguaglianza. Abbiamo visto alla fine della dimostrazione del Teorema 1.16.6 che vale l'uguaglianza se scegliamo $|g(x)|$ multiplo di $|f(x)|^{p-1}$ quasi ovunque. \square

Gli stessi argomenti che provano la disuguaglianza di Hölder per gli spazi L^p si applicano parola per parola alle successioni invece che alle funzioni (dopo aver rimpiazzato gli integrali con serie), e cioè agli spazi ℓ^p della Definizione 1.7.1 (più in generale, si applicano agli spazi $L^p(\mu)$ dove μ è una qualsiasi misura di Borel, inclusa la misura discreta nella quale $L^p(\mu) = \ell^p$: si vedano nel seguito la Definizione 1.9.11, l'Esempio 1.9.22 e la fine della Definizione 1.9.47).

Si ha quindi:

Corollario 1.16.8. (i) *Se p e q sono indici coniugati (Definizione 1.16.4) e $f \in \ell^p$, $g \in \ell^q$, allora*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n g_n| \leq \|f\|_{\ell^p} \|g\|_{\ell^q}.$$

Vale l'uguaglianza se e soltanto se una fra f e g è la successione nulla oppure se $|f|^p$ è un multiplo di $|g|^q$.

(ii) *Per ogni $f \in \ell^p$, $1 \leq p \leq \infty$,*

$$\|f\|_{\ell^p} = \sup \left\{ \left| \sum f g \right| : \|g\|_{\ell^q} = 1 \right\} = \sup \{ \|fg\|_{\ell^1} : \|g\|_{\ell^q} = 1 \}.$$

Nota 1.16.9. Il fatto che con la stessa dimostrazione si provi la disuguaglianza di Hölder in forma integrale per gli spazi L^p ed in forma discreta (di serie) per gli spazi ℓ^p non è una coincidenza fortuita. Infatti, in entrambi i casi in realtà abbiamo usato le stesse stime per integrali, ma nel caso discreto questi integrali non sono stati definiti in termini della misura di Lebesgue, bensì di una misura discreta, la misura che conta, introdotta nell'Esempio 1.9.22. Gli integrali rispetto a questa misura sugli interi sono serie. \square

Teorema 1.16.10. (Disuguaglianza di Minkowski.) *Per ogni coppia di funzioni misurabili f e g , per ogni p tale che $1 \leq p \leq \infty$, vale la disuguaglianza*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Vale l'uguaglianza se e solo se una delle due funzioni è identicamente nulla oppure è un multiplo dell'altra con un fattore di proporzionalità positivo.

Dimostrazione. La disuguaglianza è chiara se $p = 1$ (e $p = \infty$). In generale, da questo fatto e dall'identità

1.43 segue:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p &= \sup \{ \|(f + g)h\|_1 : \|h\|_q = 1 \} \\ &\leq \sup \{ \|fh\|_1 : \|h\|_q = 1 \} + \sup \{ \|gh\|_1 : \|h\|_q = 1 \} \\ &= \|f\|_p + \|g\|_p. \end{aligned}$$

□

Esercizio 1.16.11. Nell'Appendice 1.31 diamo una dimostrazione diretta della disuguaglianza di Minkowski che permette di considerare anche il caso $0 < p < 1$, e che mostra che per questi valori di p la disuguaglianza vale nel verso opposto (Nota 1.31.1), e quindi l'espressione $\|f\|_p$ non è più una norma perché non verifica la disuguaglianza triangolare. Rivedendo per analogia la forma delle sfere negli spazi ℓ^p (Nota 1.7.10), si determini la forma di queste sfere per $0 < p < 1$ e si osservi che smette di essere convessa. Si deduca questo fatto dal fatto che non vale la disuguaglianza triangolare. Per ulteriori approfondimenti si veda la Nota ??, che il presente esercizio anticipa.

□

Nota 1.16.12. Ad essere precisi, l'espressione $\|\cdot\|_p$ così definita non è una norma. Infatti esistono funzioni f non identicamente nulle con $\|f\|_p = 0$. Un esempio è dato dalla funzione caratteristica dei numeri razionali, o più in generale dalla funzione caratteristica di un insieme di misura nulla (Esempi 1.9.49 e 1.9.23).

Per ovviare a questo problema e far sì che $\|\cdot\|_p$ sopra definita sia una norma, si ridefinisce lo spazio $L^p(\mathbb{R})$ come uno spazio costituito non da funzioni, bensì da classi di equivalenza di funzioni. □

La nozione di relazione di equivalenza è stata già rammentata nella Definizione 1.2.13. Una relazione di equivalenza su un insieme determina una partizione in *classi di equivalenza*:

Definizione 1.16.13. Sia $a \in I$. La classe di equivalenza di a è costituita da tutti gli elementi $b \in I$ tali che $b \approx a$ e si indica con $[a]$. Quindi

$$[a] = \{b \in I : b \approx a\}.$$

Definizione 1.16.14. (Equivalenza quasi ovunque.) Sull'insieme delle funzioni misurabili introduciamo la seguente relazione di equivalenza:

$f \approx g$ se e solo se $f = g$ quasi ovunque (nel senso stabilito nella Definizione 1.9.16).

Esercizio 1.16.15. Verificare che tale relazione è una relazione di equivalenza. \square

Ridefiniamo quindi correttamente gli spazi L^p :

Definizione 1.16.16. (Definizione precisa degli spazi L^p .) Gli elementi di $L^p(\mathbb{R})$ sono classi di equivalenza di funzioni misurabili (secondo la relazione di equivalenza quasi ovunque definita sopra).

Nota 1.16.17. Se una classe di equivalenza L^p contiene una funzione continua, questa è l'unico rappresentante continuo della classe. Infatti, se ci fossero due rappresentanti continui diversi f e g , allora $f - g$ sarebbe una funzione continua non nulla. Prendiamo un punto x in cui $f(x) \neq g(x)$. Per il teorema degli zeri per le funzioni continue (o teorema di permanenza del segno: Sezione 1.1) esiste un intorno di aperto O di x tale che $f(t) \neq g(t)$ per ogni $t \in O$. Poiché O contiene un intervallo aperto, ha misura strettamente positiva. Pertanto $\int_{\mathbb{R}} |f - g|^p \geq \int_O |f - g|^p > 0$, e questo contraddice l'assunzione che f e g fossero nella stessa classe di equivalenza L^p . Il ragionamento è analogo per le classi di equivalenza L^∞ : visto che f e g non coincidono su un insieme O di misura positiva, $\text{ess sup } |f - g|$ deve essere strettamente positivo (esercizio). \square

Sugli elementi degli spazi $L^p(\mathbb{R})$ così definiti l'espressione

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

risulta essere una norma.

Esercizio 1.16.18. (i) Si controlli che $\|\cdot\|_p$ verifica le tre proprietà della definizione di norma (Definizione 1.2.8).

(*ii) Invece, per $0 < p < 1$, questa quantità non verifica la disuguaglianza triangolare, e quindi non è una norma.

Suggerimento: la dimostrazione si basa sul Lemma 1.7.5 (in caso di difficoltà la si può trovare nella Sottosezione 3.23.1).

□

Nota 1.16.19. Se $I = [a, b]$ è un intervallo reale, o più in generale un sottoinsieme di \mathbb{R} di misura di Lebesgue positiva, possiamo ora definire $L^p(I)$ come l'insieme delle classi di equivalenza di funzioni misurabili su $[a, b]$ tali che

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty.$$

Nel caso $p = \infty$, lo spazio $L^\infty(I)$ è l'insieme delle classi di equivalenza di funzioni misurabili su I tali che $\text{ess sup}_I f(x) < \infty$. Si noti che è indispensabile far ricorso all'estremo superiore essenziale, che è per sua definizione identico per tutti i rappresentanti della stessa classe di Lebesgue (Definizione 1.16.2 ed Esercizio 1.16.3). L'estremo superiore ordinario non sarebbe invece ben definito sulla classe di Lebesgue, perché cambia da rappresentante a rappresentante: infatti esso dipende dai singoli valori $f(x)$ a ciascun punto, e non solo a meno di insiemi di x di misura zero.

□

Esercizio 1.16.20. Se la classe di equivalenza quasi ovunque di $f \in L^\infty$ contiene una funzione continua g , allora $\text{ess sup } |f| = \sup_x |g(x)|$. (Si noti che questa proprietà ha senso grazie all'unicità del rappresentante continuo (Nota 1.16.17).

□

Notazione 1.16.21. In analogia a quanto osservato nel precedente Esercizio 1.16.20, spesso nel seguito, con abuso di notazione, scriveremo la norma L^∞ come $\sup_x |f(x)|$ invece che, correttamente, come $\text{ess sup}_x |f(x)|$.

Esempio 1.16.22. Presentiamo una semplice proprietà delle classi di equivalenza L^p la cui dimostrazione ci è stata suggerita da E. Valdinoci (comunicazione personale): per ogni intervallo J esistono funzioni $f \in L^p(J)$ tali che nella classe di equivalenza L^p di f non esiste alcun rappresentante g che sia

una funzione continua quasi ovunque. A maggior ragione lo stesso enunciato vale per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$. Senza perdita di generalità, a meno di cambiamenti di scala, possiamo assumere $J = [0, 1]$.

Per mostrare questa asserzione, consideriamo un aperto denso in $A \subset [0, 1]$ con misura di Lebesgue $0 < m(A) < 1$. Un tale insieme A si può costruire ad esempio nel modo seguente. Si consideri un insieme numerabile denso $Q \subset [0, 1]$, ad esempio i razionali, ed indicizziamolo nel modo ovvio: $A = \{x_0, x_1, \dots\}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia I_n un intervallo aperto di lunghezza 3^{-n} che contiene x_n . Ora poniamo $A = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ ed abbiamo $m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} < 1$, ma $m(A) > m(I_1) > 0$ e $A \supset Q$, quindi A è denso in $[0, 1]$.

Sia f la funzione caratteristica di A . Se nella sua classe di equivalenza esistesse una funzione g continua quasi ovunque, allora osserviamo che l'insieme G dei punti in cui g non assume i valori 0 oppure 1 avrebbe misura zero: infatti, se G avesse misura positiva, dovrebbe contenere qualche punto di continuità x_0 di g (perché i punti di discontinuità hanno misura 0) con $g(x_0) \neq 0$ e $g(x_0) \neq 1$. Per il Teorema di permanenza del segno (vedere Sezione 1.1) esisterebbe un intervallo aperto K con $x \in K$ e $g(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 1$ in K . Pertanto $f \neq g$ su tutto K , e poiché l'intervallo aperto K ha misura positiva questo contraddice il fatto che f e g siano uguali quasi ovunque.

Ma d'altra parte, l'insieme $Z := \{x : g(x) = 0\}$ deve avere misura zero, perché altrimenti, per lo stesso argomento di prima, Z dovrebbe contenere un punto di continuità x_0 di g in cui $g(x_0) = 0$. Di nuovo per il Teorema di permanenza del segno esisterebbe un intervallo aperto $X \ni x_0$ tale che $g < \frac{1}{2}$ su X . Poiché A è un aperto denso esisterebbe allora un intervallo aperto $J \subset X \cap A$. Evidentemente su J avremmo $g < \frac{1}{2}$ ma $f = 1$, perché per costruzione $f = 1$ su A . Quindi, di nuovo, f e g non sarebbero uguali quasi ovunque.

A questo punto sappiamo che, se nella classe di equivalenza di f esiste una funzione g continua quasi ovunque, allora $g = 1$ quasi ovunque. Ma in tal caso, $1 = \int_0^1 g = \int_0^1 f = m(A) < 1$, una contraddizione. \square

Nota 1.16.23. Come ℓ^p (Nota 1.7.10), anche $L^p(\mathbb{R})$ contiene un sottospazio V isomorfo a \mathbb{C}^2 (o anche \mathbb{R}^2). Infatti sia V il sottospazio di $L^p(\mathbb{R})$ costituito da tutte le funzioni tali che

$$f(x) = \begin{cases} t_1 & \text{se } x \in [0, 1] \\ t_2 & \text{se } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$.

Al variare di t_1, t_2 in \mathbb{C} l'insieme di tali funzioni costituisce uno spazio vettoriale isomorfo a \mathbb{C}^2 .

È interessante osservare che questo sottospazio è *isometricamente* isomorfo al sottospazio analogo di ℓ^p costruito nella Nota 1.7.10: in altre parole, la norma L^p ristretta a V coincide con la norma ℓ^p sullo spazio complesso di dimensione 2. Se $p = 2$, allora la norma L^2 ristretta a V coincide con la norma euclidea (così come la norma ℓ^2 : si riveda la Nota 1.7.11). \square

Nota 1.16.24. Come nel caso di ℓ^2 , anche la norma di $L^2(\mathbb{R})$ proviene da un prodotto scalare, nel senso della Nota 1.7. Infatti, su $L^2(\mathbb{R})$ il questo prodotto scalare è

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

\square

Esercizio 1.16.25. Verificare che si tratta di un prodotto scalare, come introdotto nella Definizione 1.2.7.

\square

La norma $\|\cdot\|$ proviene da tale prodotto scalare, infatti:

$$\langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{f(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2.$$

Teorema 1.16.26. (Teorema di Riesz-Fischer.) *Sia $1 \leq p \leq \infty$. Allora $L^p(\mathbb{R})$ è uno spazio normato completo. La stessa cosa vale per $L^p(I)$, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un insieme misurabile di misura di Lebesgue positiva, ad esempio un intervallo.*

Dimostrazione. Il caso $p = \infty$ è ben noto e facile: le successioni di Cauchy (nella norma uniforme) di funzioni limitate sono limitate (si veda il Teorema 1.3.13 in seguito).

Assumiamo quindi $1 \leq p < \infty$, ed utilizziamo il criterio della convergenza di serie assolutamente sommabili (Lemma 1.2.21). Sia $\sum f_n$ una serie

assolutamente sommabile: le somme parziali $\sum_{n=1}^N \|f_n\|_p$ sono tutte simultaneamente limitate da qualche costante $M > 0$. Poniamo $g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k|$. La disuguaglianza di Minkowski (1.16.10) implica $\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p \leq M$. D'altra parte, per ogni x , $g_n(x)$ è una successione non decrescente di numeri reali (positivi!), e quindi converge oppure tende a $+\infty$. La funzione limite g è misurabile (Proposizione 1.9.51), e grazie al Lemma di Fatou (Teorema 1.9.52) si ha $|g|^p \leq M$. In particolare, g è finita quasi ovunque.

Perciò, per quasi ogni x , la serie $\sum f_n(x)$ è una serie assolutamente sommabile di numeri reali, e quindi convergente ad una somma $s(x)$. Per comodità, nei punti x in cui la serie è divergente poniamo $s(x) = 0$. In tal modo, quasi ovunque, la funzione s è il limite puntuale delle somme parziali $s_n = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, e quindi è una funzione misurabile. Inoltre $|s(x)| \leq g(x)$ perché $|s_n(x)| \leq \sum_{k=1}^n |f_k(x)| = g_n(x) \leq g(x)$. Quindi la funzione s appartiene a L^p e $|s_n(x) - s(x)| \leq 2g(x)$. Ora dal Teorema di Convergenza Dominata (Teorema 1.9.54), applicato alle funzioni $|s_n(x) - s(x)|^p$, segue che s_n converge a s nella norma di L^p , e quindi la serie $\sum_n f_n$ converge ad una funzione somma in L^p . \square

*Nota 1.16.27. Per $0 < p < 1$, lo spazio L^p non è uno spazio normato (parte (ii) dell'Esercizio 1.16.18). Però la dimostrazione del precedente Teorema di Riesz–Fischer 1.16.26 vale riga per riga anche in questo caso, e prova la completezza di L^p per tutti i $p > 0$ rispetto alla distanza $d(f, g) = \int |f - g|^p$ (per maggiori dettagli si veda la Sottosezione 3.23.1). \square

Esercizio 1.16.28. La dimostrazione che abbiamo dato del Teorema di Riesz–Fischer 1.16.26, basata sul criterio della convergenza di serie assolutamente sommabili (Lemma 1.2.21), è un po' astratta. Il lettore trovi una dimostrazione più diretta basata sul prossimo Corollario 1.16.29, che è di interesse intrinseco. \square

Corollario 1.16.29. *Da ogni successione f_n di Cauchy in L^p si può estrarre una sottosuccessione che converge puntualmente quasi ovunque.*

Dimostrazione. Il caso $p = \infty$ è relativamente facile e viene lasciato per esercizio al lettore. Prendiamo $0 \leq p < \infty$. Poiché $\{f_n\}$ è di Cauchy, esiste una sottosuccessione di indici n_j tale che

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < 2^{-j}. \quad (1.44)$$

Poniamo allora $g_k = \sum_{i=1}^k |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$ e $g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$. La disuguaglianza di Minkowski (1.16.10) e la precedente disuguaglianza (1.44) implicano che $\|g_k\|_p < 1$ per ogni k , ed a questo punto dal Lemma di Fatou (Teorema 1.9.52) segue $\|g\|_p < 1$. Pertanto $g(x) < \infty$ quasi ovunque, e quindi la serie

$$f(x) := f_{n_i} + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) \quad (1.45)$$

converge assolutamente per quasi ogni x (si rammenti la definizione di convergenza assoluta di una serie data nella Sezione 1.1). Per comodità, nell'insieme di misura nulla dove la serie non converge poniamo $f = 0$, in modo che f sia definita ovunque. Ora è chiaro che le somme parziali

$$f_{n_i} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_k}$$

convergono alla somma $f(x)$ in (1.45) per quasi ogni x . \square

Se rimpiazziamo le funzioni con successioni e gli integrali con serie numeriche, lo stesso argomento dimostra il risultato analogo per gli spazi ℓ^p , che era stato annunciato nella Nota 1.7.9:

Corollario 1.16.30. *Per $0 \leq p \leq \infty$, gli spazi ℓ^p sono completi.*

Nota 1.16.31. Per $p \geq 1$ gli spazi L^p sono completi rispetto alla distanza indotta dalla norma

$$N_p(f) = \|f\|_p := \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

in seguito al fatto che tale norma è definita tramite l'integrale di Lebesgue: infatti nella dimostrazione della completezza abbiamo usato il Lemma di Fatou (Teorema 1.9.52), che vale per l'integrale di Lebesgue (è stato usato per dimostrare il Corollario 1.16.29). Invece, se si fosse definita la norma usando l'integrale di Riemann, il Lemma di Fatou non sarebbe stato vero e non avremmo avuto la completezza. Ad esempio, se intorno a ciascun razionale q_k si considera l'intervallo di diametro $2^{-k}/n$ centrato in q_k , allora la funzione caratteristica χ_n dell'unione di questi intervalli ha norma finita in L^p e la norma tende a zero se $n \rightarrow \infty$: in effetti χ_n tende alla funzione caratteristica dei razionali, che equivale alla funzione zero in L^p di Lebesgue,

ma non è integrabile secondo Riemann. La successione χ_n è di Cauchy in L^p (secondo Lebesgue e secondo Riemann), ma non converge in L^p di Riemann. (Cautela: per $0 < p < 1$, la quantità $N_p = \|\cdot\|_p$ non è una norma (Esercizio 1.16.18), ma N_p^p è una distanza nella quale L^p è completo: si veda la Nota 1.16.27). \square

Esercizio 1.16.32. Siano $f \in L^p$ e $g \in L^\infty$. Il prodotto puntuale fg appartiene a L^p .

Svolgimento. L'enunciato è banale se $p = \infty$, quindi assumiamo $p < \infty$. È sufficiente dimostrare il risultato per f a valori non negativi, perché altrimenti si applica il ragionamento separatamente alle parti positiva e negativa di f : quindi assumiamo $f \geq 0$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono una funzione semplice u minorante f ed una funzione semplice v maggiorante f tali che $\int (v - u)^p < \varepsilon \|g\|_\infty^p$. Ora poniamo $U = -\|g\|_\infty u$ e $V = \|g\|_\infty v$. Allora $U(x) \leq f(x)g(x) < V(x)$, ed inoltre $\int (V - U)^p < \varepsilon$: quindi $fg \in L^p$. \square

1.17 Inclusioni fra spazi L^p e fra spazi ℓ^p

Proposizione 1.17.1. (Inclusioni fra spazi L^p .) Se $I = [a, b]$ è un intervallo di lunghezza finita e $p < q \leq \infty$, allora $L^q(I) \subset L^p(I)$.

Dimostrazione. Si tratta di dimostrare che per ogni $p < q$ esiste una costante $C = C_{p,q}$ tale che, per ogni $f \in L^q(I)$, si abbia

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_q. \quad (1.46)$$

Per maggiore chiarezza consideriamo dapprima il caso $p = 1$. In tal caso la disuguaglianza da provare è

$$\left(\int_I |f(t)| dt \right)^q \leq M \int_I |f(t)|^q dt \quad (1.47)$$

dove $M = C^q$. Ma questa è una conseguenza diretta della disuguaglianza di Jensen (1.36) per funzioni sull'intervallo $[a, b]$, applicata alla funzione convessa $t \mapsto |t|^q$ (Esercizio 1.7.3); anzi di più, da quella disuguaglianza vediamo che $1/M$ è la misura dell'intervallo I .

Ora consideriamo il caso generale $p < q$. Il modo più semplice di procedere è quello di ridursi al caso precedente, ponendo $g \equiv |f|^p$. Applicando la disuguaglianza precedente alle norme di g in $L^1(I)$ e $L^{q/p}(I)$ si ottiene

$$\|f\|_p^p = \|g\|_1^p \leq M \|g\|_{q/p}^p = \left(\int_I (|f|^p)^{q/p} \right)^p = \|f\|_q^p \quad (1.48)$$

da cui, se si estraie la radice p -esima di entrambi i lati, segue (1.46). \square

Nota 1.17.2. Osserviamo che la famiglia di inclusioni dimostrata per gli spazi $L^p[a, b]$ (cioè che questi spazi diventano più piccoli al crescere di p) è l'inversa di quella provata per gli spazi ℓ^p (Proposizione 1.7.7).

Generalizzando quanto abbiamo fatto nella Nota 1.7.11, possiamo immergere lo spazio ℓ^p di successioni nello spazio $L^p(\mathbb{R})$ di funzioni, nel modo seguente. Sia χ_n la *funzione caratteristica* dell'intervallo $[n, n+1)$ (Definizione 1.1.3). Allora l'immersione è:

$$\{x_1, x_2, \dots\} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_n.$$

Poiché la norma L^p di ciascuna delle funzioni caratteristiche χ_n di ampiezza 1 vale 1, l'immersione è una isometria. In particolare, quindi, negli spazi $L^p(\mathbb{R})$ non può valere l'inclusione $L^p(\mathbb{R}) \subset L^r(\mathbb{R})$ per $r < p$, che vale negli spazi $L^p[a, b]$, perché gli spazi $L^p(\mathbb{R})$ contengono isometricamente gli spazi ℓ^p per cui vale l'inclusione opposta; ma in essi non può neppure valere l'inclusione opposta, perché contengono isometricamente $L^p[a, b]$ (basta prendere una funzione L^p definita in $[a, b]$ e prolungarla a tutto \mathbb{R} ponendola zero al di fuori di questo intervallo).

A titolo di esempio, osserviamo che la funzione $f(x) = \sqrt{1/x}$ se $x \in (0, 1]$ e zero altrove appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ ma non appartiene a $L^2(\mathbb{R})$, mentre la funzione $g(x) = 1/x$ se $x \geq 1$ e zero altrove appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ ma non a $L^1(\mathbb{R})$ (esercizio!). \square

1.18 Le funzioni continue e le funzioni semplici sono dense in L^p

Definizione 1.18.1. (Funzioni a gradini.) Sia $\mathbf{x} = \{x_0 < x_1 < \dots < x_N\}$ una successione finita, e denotiamo con I_n gli intervalli da essa generati: $I_n = [x_n, x_{n+1})$. Sia χ_n la funzione caratteristica di I_n (Definizione 1.1.3). La funzione $\phi = \sum_{n=0}^{N-1} \chi_n$ si chiama la *funzione a gradini*, o *funzione a scala*

generata dalla successione \mathbf{x} ; essa è definita nell'intervallo $[x_0, x_N]$. Denotiamo allo stesso modo la funzione definita su tutto \mathbb{R} prolungando ϕ in modo che valga 0 fuori di tale intervallo.

Analogamente, si definisce *funzione a gradini a supporto non compatto* la funzione costruita allo stesso modo ma a partire da una successione bilatera $\{\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots\}$, ossia da una partizione di \mathbb{R} in un numero infinito di intervalli.

Lemma 1.18.2. *Sia I un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R} . Per ogni funzione $f \in L^\infty(I)$ (limitata e misurabile secondo Lebesgue) e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione semplice θ (Definizione 1.9.42) tale che*

$$|\theta(x)| \leq |f(x)| \quad (1.49)$$

$$|f(x) - \theta(x)| \leq \varepsilon. \quad (1.50)$$

Inoltre, per ogni $\varepsilon, \delta > 0$ esistono una funzione a gradini ϕ ed un insieme misurabile E con misura di Lebesgue minore di δ tali che, per ogni $x \notin E$, si ha

$$|\phi(x)| \leq |f(x)|$$

$$|f(x) - \phi(x)| \leq \varepsilon.$$

Se f è a valori reali allora si possono scegliere θ e ϕ a valori reali, e quindi $0 \leq \phi(x) \leq f(x)$ dove $f(x) \geq 0$ e $f(x) \leq \phi(x) \leq 0$ dove $f(x) \leq 0$, ed analogamente per θ .

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Sia $I_n = [\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k})$. Gli I_n formano una famiglia di intervalli disgiunti la cui unione è tutto \mathbb{R} . Poiché f è limitata, la sua immagine è contenuta nell'unione di un sottoinsieme finito degli I_n . Scriviamo, ad esempio, $\text{Im}(f)$ per l'immagine di f (cioè l'insieme $\text{Im}(f) = \{y : y = f(x) \text{ per qualche } x \in \mathbb{R}\}$), e poniamo $\|f\|_\infty < M$ e $N = kM$: allora abbiamo $\text{Im}(f) \subset \cup_{n=-N-1}^N I_n$. Per questi valori di n poniamo $J_n = f^{-1}(I_n)$. Allora $\{J_n : n = -N-1, \dots, N\}$ è una famiglia finita di insiemi misurabili disgiunti tali che $\cup_{n=-N-1}^N J_n = \mathbb{R}$, i quali sono misurabili in seguito alla Definizione 1.9.39.

Ora costruiamo una funzione semplice che approssima f uniformemente. Il modo più facile di procedere, che però non verifica il requisito dell'approssimazione per difetto, è il seguente. Per comodità scriviamo la funzione

caratteristica di J_n come χ_n invece che con la notazione χ_{J_n} che abbiamo usato nella Definizione 1.1.3, e consideriamo la funzione $\rho = \sum_{n=-N-1}^N f_n \chi_n$, dove $f_n = f(x_n)$ per qualche $x_n \in J_n$. In realtà è necessaria una scelta più precisa: per definizione, i valori di f nell'intervallo J_n appartengono a I_n , ma rammentiamo che i valori di $f \in L^\infty$ sono fissati solo quasi ovunque, possono essere modificati su un insieme di misura zero. Ora, rammentiamo che l'estremo inferiore *essenziale* di una funzione f su un insieme A è definito come

$$\text{ess inf}_A f = \sup \left\{ \inf_{x \in A \setminus O} f(x) : O \subset A, m(O) = 0 \right\} \quad (1.51)$$

ed in maniera simmetrica si definisce l'estremo superiore essenziale. Allora $I_n = [\text{ess inf}_{x \in A_{nj}} f(x), \text{ess sup}_{x \in A_{nj}} f(x)]$ è l'intervallo compreso fra gli estremi inferiore e superiore essenziali dei valori di f . In J_n ci può essere un sottoinsieme Z_n di J_n di misura nulla al quale i valori di f non appartengono. D'altra parte, i valori di f non sono neppure definiti su un insieme di misura nulla finché non fissiamo una scelta di f nella sua classe di equivalenza di Lebesgue i cui valori siano definiti ovunque: allora, se facciamo questa scelta, bisogna scegliere $x_n \in J_n \setminus Z_n$. Con questa clausola, la funzione ρ è una funzione semplice tale che $\|f - \rho\|_\infty < \varepsilon$ quasi ovunque: infatti, se $x \in J_n$, allora $f(x)$ e $f_n = f(x_n)$ appartengono entrambi all'intervallo I_n di lunghezza $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Questo dimostra la parte dell'enunciato che riguarda l'approssimazione con funzioni semplici (le disuguaglianze (1.49) e (1.50)).

Consideriamo ora l'approssimazione con funzioni a gradini, che è solo leggermente più complicata. Per la Nota 1.9.33, per ogni $\delta > 0$ fissato e per ogni $n = -N-1, \dots, N$ esiste un insieme aperto $O_n \supset J_n$ tale che $m(O_n \setminus J_n) < \delta/(2N+2)$. Sia $E = \cup_{n=-N-1}^N O_n \setminus J_n$. Allora $m(E) < \delta$. Inoltre, per il Lemma 1.9.3 (i), per ogni n esiste una famiglia numerabile di intervalli aperti disgiunti A_{nj} , $j = 1, 2, \dots$, tale che $O_n = \cup_{j=1}^\infty A_{nj}$. Anche se gli A_{nj} sono disgiunti per un dato n , è possibile che un intervallo $A_{n_0 j_0}$ intersechi un intervallo $A_{n_1 j_1}$ con n_0 diverso da n_1 , perché gli aperti O_n si sovrappongono parzialmente: ma questo può accadere solo su $O_{n_0} \cap O_{n_1}$ che è un insieme di misura minore di δ (anzi in realtà minore di $\delta/(N+1)$, perché

$$O_{n_0} \cap O_{n_1} = (O_{n_0} \cap O_{n_1}) \setminus (J_{n_0} \cap J_{n_1}) = (O_{n_0} \setminus J_{n_0}) \cap (O_{n_1} \setminus J_{n_1}),$$

dove la prima identità vale dal momento che gli insiemi J_n sono disgiunti. Ora costruiamo una funzione a gradini che approssima f uniformemente a meno di un insieme di misura minore di δ . Come prima, se non ci interessasse il requisito dell'approssimazione per difetto, il modo più semplice sarebbe il

seguinte. Scriviamo la funzione caratteristica di A_{nj} come χ_{nj} , e consideriamo la funzione a gradini $\psi = \sum_{n=-N}^N \sum_{j=1}^{\infty} f_{nj} \chi_{nj}$, dove $f_{nj} = f(x_{nj})$ per qualche $x_{nj} \in J_n$ (di nuovo, più precisamente scegliamo $x_{nj} \in J_n \setminus Z_n$). Di nuovo, per quasi ogni $x \in A_{nj} \cap J_n = A_{nj} \setminus E$, entrambi $f(x)$ e $f_{nj} = f(x_{nj})$ appartengono all'intervallo I_n di lunghezza $\frac{1}{k} < \varepsilon$: quindi

$$|f(x) - f_{nj}| < \varepsilon \quad (1.52)$$

se $x \in A_{nj} \setminus E$. Perciò la funzione a gradini (un insieme numerabile di gradini) ψ approssima uniformemente f a meno di ε al di fuori dell'insieme E di misura minore di δ .

Per provare l'enunciato sulla approssimazione dal di sotto, $|\phi| < |f|$ (rispettivamente $|\theta| < |f|$), occorre scegliere funzioni a gradini ϕ (rispettivamente, funzioni semplici θ) tali che, rispettivamente in J_n ed in $A_{nj} \setminus E$, i loro valori siano quasi ovunque di modulo inferiore a quelli di f . A questo fine è sufficiente scegliere $c_{nj} = \text{ess inf}_{I_n} |f(x)|$ (definito di nuovo come in (1.51): in tal modo c_{nj} verifica la stessa disuguaglianza (1.52), ed inoltre $c_{nj} \leq |f(x)|$ se $x \in A_{nj} \setminus E \subset J_n$. Perciò la funzione a (infiniti) gradini $\phi = \sum_{n=-N}^N \sum_{j=1}^{\infty} c_{nj} \chi_{nj}$ soddisfa le disuguaglianze richieste. Analogamente, la funzione semplice dell'enunciato si costruisce come $\theta = \sum_{n=-N}^N \sum_{j=1}^{\infty} t_{nj} \chi_{nj}$, con $t_{nj} = \text{ess inf}_{x \in J_n} |f(x)|$. È ovvio dalla costruzione che ϕ è a valori reali se lo è f . \square

Lemma 1.18.3. (*$L^\infty \cap L^p$ è denso in L^p per ogni p .)* Se $\varepsilon > 0$, $K > 0$ e $f \in L^p$ con $p < \infty$, esiste una funzione misurabile f_K a supporto compatto tale che $|f_K| \leq K$ e $\|f - f_K\|_p < \varepsilon$.

Dimostrazione. Poiché $f \in L^p$, esiste un insieme $E \subset \mathbb{R}$ al di fuori del quale si ha $\int_{\mathbb{R} \setminus E} |f|^p < \varepsilon^p/2$. Poniamo f_K uguale a zero fuori di E .

Supponiamo dapprima che f sia a valori reali. Per ogni $n > 0$ poniamo $f_n(x) = f(x)$ se $|f(x)| \leq n$, e $f_n(x) = n$ (rispettivamente, $-n$) se $f(x) > n$ (rispettivamente, $f(x) < -n$). Allora $|f_n| \leq n$ e per quasi ogni x si ha $f_n(x) \rightarrow f(x)$ se $n \rightarrow \infty$. Inoltre $|f - f_n| \leq |f|$, e quindi, dal momento che la funzione $t \mapsto t^p$ ($t \geq 0$) è crescente, ne segue che $|f - f_n|^p \leq |f|^p$. Per il Teorema di Convergenza Dominata (Teorema 1.9.54) si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n|^p = 0.$$

Pertanto, per qualche K abbastanza grande, $\int_E |f - f_K|^p < \varepsilon^p/2$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} |f - f_K|^p = \int_E |f - f_K|^p + \int_{\mathbb{R} \setminus E} |f - f_K|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p, \quad (1.53)$$

da cui l'enunciato: $\|f - f_K\|_p < \varepsilon$.

Se f è a valori complessi si applica questo argomento separatamente alla parte reale ed immaginaria: le due funzioni a gradini α e β così generate formano la parte reale ed immaginaria della funzione a gradini richiesta. L'approssimazione rimane valida perché, scrivendo $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$, abbiamo $\|f - (\alpha + i\beta)\|_p \leq \|u - \alpha\|_p + \|v - \beta\|_p$, grazie alla disuguaglianza triangolare per la norma. \square

Proposizione 1.18.4. *(Le funzioni a gradini sono dense in L^p .)* Se $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione a gradini ϕ tale che $\|f - \phi\|_p \leq \varepsilon$.

Lo stesso enunciato vale per $p = \infty$ pur di prendere una funzione a gradini non a supporto compatto, cioè associata ad una partizione infinita di \mathbb{R} (Definizione 1.18.1).

Dimostrazione. Nel caso $p = \infty$ l'enunciato segue direttamente dal Lemma 1.18.2. Prendiamo quindi $1 \leq p < \infty$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Anzitutto osserviamo che, senza perdita di generalità, possiamo assumere che f abbia supporto K compatto. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un compatto K tale che $\int_K |f(x)|^p dx < \varepsilon^p/2$. Allora, se l'enunciato del teorema vale sui compatti, la funzione f è approssimabile in K con una funzione a gradini ψ in K nel senso che $\int_K |f - \psi|^p dx < \varepsilon^p/2$: pertanto, la funzione a gradini ϕ ottenuta quando si prolunga ψ a tutto \mathbb{R} ponendola zero al di fuori di K approssima f in norma L^p a meno di ε , per lo stesso argomento visto nella disuguaglianza (1.53).

Assumiamo quindi $p < \infty$ e $f \in L^p$ a supporto compatto K . Per il Lemma 1.18.3 esiste una funzione $f_M \in L^\infty$ tale che $|f_M| \leq M$ e $\|f - f_M\|_p < \varepsilon$: la costruzione di questa funzione mostra che $|f_M| \leq |f|$ ovunque, e quindi anche f_M ha supporto in K . Poniamo $\delta = \varepsilon^p$. Per il Lemma 1.18.2 esiste una funzione a gradini ϕ tale che $|\phi| \leq |f_M| \leq M$ ovunque e $|f_M - \phi| \leq \varepsilon/m(K)^{1/p}$ tranne che su un insieme E di misura minore di δ , dove peraltro $|f_M - \phi| \leq |f_M| + |\phi| \leq 2M$.

Allora

$$\begin{aligned} \|f_M - \phi\|_p^p &= \int_E |f_M - \phi|^p + \int_{K \setminus E} |f_M - \phi|^p \\ &\leq \int_E |f_M - \phi|^p + \int_K |f_M - \phi|^p < (2M)^p \delta + \varepsilon^p = (1 + 2^p M^p) \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Da questo segue che $\|f_M - \phi\|_p \leq C\varepsilon$, dove $C = (1 + 2^p M^p)^{1/p}$. Quindi

$$\|f - \phi\|_p \leq \|f - f_M\|_p + \|f_M - \phi\|_p \leq (1 + C)\varepsilon.$$

Questo conclude la dimostrazione per $p < \infty$ (se si preferisce avere ε invece che $(1+C)\varepsilon$ nell'ultimo membro della precedente disuguaglianza basta rimpiazzare ovunque ε con $\varepsilon/(1+C)$). \square

Lo stesso argomento dimostra che le funzioni a gradini e le funzioni semplici approssimano le funzioni non negative, sia nella norma di L^p sia puntualmente in maniera monotona, e quindi estende il Lemma 1.18.2. Diamo la dimostrazione per le funzioni semplici:

Corollario 1.18.5. *Per ogni $f \in L^p(I)$, $f \geq 0$, esiste una successione di funzioni semplici s_1, s_2, \dots su I tale che $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ per ogni n e x e $\lim_n s_n(x) = f(x)$ per quasi ogni x e nel senso di L^p .*

Dimostrazione. La dimostrazione ricalca quella del Lemma 1.18.2 e della Proposizione 1.18.4 (si veda anche quella del Lemma 1.18.3): pertanto è sufficiente accennarla. Fissato $M > 0$ approssimiamo f con la funzione $f_M(x) = \min\{f(x), M\}$: come nel caso della dimostrazione della Proposizione 1.18.4, è sufficiente dimostrare che le funzioni semplici approssimano ogni f_M nella norma di L^p e puntualmente quasi ovunque in maniera monotona. Per ogni $\varepsilon > 0$ sia N tale che $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Per ogni n poniamo

$$J_n = \left\{ x : \frac{n}{N} \leq f(x) < \frac{n+1}{N} \right\}$$

e sia χ_n la funzione caratteristica di J_n (Definizione 1.1.3). Osserviamo che $\frac{n}{N} < M$ se e solo se $n < NM$. Allora la funzione semplice $s_n = \sum_{n=0}^{NM} \frac{n}{N} \chi_n$ verifica, per ogni n e x ,

$$0 \leq s_n(x) \leq f_M(x) \quad e \quad f_M(x) - s_n(x) \leq \frac{n+1}{N} - \frac{n}{N} = \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Questo prova la convergenza puntuale monotona; la convergenza in L^p segue dal Teorema di Convergenza Dominata 1.9.54, come nella Proposizione 1.18.4. \square

Dimostriamo ora l'approssimabilità delle funzioni in L^p con funzioni continue.

Indichiamo con $C_{oo}(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto su \mathbb{R} . Vogliamo dimostrare il risultato seguente:

Proposizione 1.18.6. (Le funzioni continue a supporto compatto sono dense in L^p .) *Se $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $g \in C_{oo}$ tale che $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. (Quindi anche il sottospazio di L^p costituito da funzioni continue che tendono a zero all'infinito, che contiene quello delle funzioni continue a supporto compatto, è denso in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $1 \leq p < \infty$).*

Dimostrazione. Di questo enunciato si possono dare due diverse dimostrazioni, una elegante e trasparente ma sofisticata, l'altra artigianale e legata ad un fatto elementare della teoria della misura che abbiamo appena accennato (l'ultima asserzione del Lemma 1.9.33, utilizzata in effetti nel prossimo Lemma 1.18.8).

La dimostrazione elegante si basa sul Teorema di Lusin 1.14.10, in base al quale ogni funzione misurabile su un insieme finito differisce da una funzione continua solo su un insieme di misura arbitrariamente piccola. Allora, se si considera lo spazio L^p su un insieme compatto, questo rende ovvio che, data $f \in L^p$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C_{oo}$ tale che $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Nel caso generale, invece, occorre prima osservare che, data f , esiste un compatto K tale che $\|f\|_{L^p(\mathbb{C}_K)} < \varepsilon/2$, e poi approssimare la funzione f in norma L^p , a meno di $\varepsilon/2$, su un intorno U di K a chiusura compatta con una funzione g continua ovunque ed a supporto in U (non basta approssimare f con g in K perché la funzione g sarebbe continua in K , ma potrebbe avere discontinuità sulla frontiera di K : ma se si prende per g una funzione continua ovunque a supporto compatto che approssima f in K il problema scompare.

La dimostrazione artigianale ma elementare, invece, è un corollario diretto ed ovvio dei prossimi Lemmi 1.18.7 e 1.18.8. \square

Lemma 1.18.7. *Per ogni $1 \leq p < \infty$, per ogni funzione a gradini ϕ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione continua h tale che $\|\phi - h\|_p < \varepsilon$. Se la funzione a gradini è a supporto compatto (cioè nulla al di fuori di un intervallo di lunghezza finita) si può prendere anche h a supporto compatto.*

Dimostrazione. La funzione a gradini è costruita su una partizione finita (se è a supporto compatto) o numerabile, cioè ha una successione finita o numerabile di punti di salto x_n , ($n = 0, 1, 2, \dots$). Sia s_n il corrispondente valore del salto di ϕ .

Sia dapprima $p < \infty$. Consideriamo l'intervallo chiuso J_n di ampiezza $2^{-n}\varepsilon^p/s_n$ centrato in x_n . Costruiamo una funzione continua h in modo che coincida con ϕ al di fuori dei J_n (cioè nelle zone dove ϕ è costante), ed in J_n interpoli linearmente i valori destro e sinistro di ϕ : in altre parole, in maniera che ivi il suo grafico costituisca un raccordo rettilineo che congiunge i tratti costanti del grafico di ϕ . Chiaramente h è continua, ed in J_n si ha $|\phi - h| \leq \frac{1}{2}s_n$. È anche chiaro che h è a supporto compatto se lo è ϕ .

Ora,

$$\begin{aligned} \|\phi - h\|_p^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\phi - h\|_{L^p(J_n)}^p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{2} m(J_n) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon^p = \varepsilon^p. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.18.8. *Per ogni $1 \leq p < \infty$, per ogni funzione semplice s e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione a gradini ϕ tale che $\|s - \phi\|_p < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Questo risultato è conseguenza diretta dell'ultima asserzione del Lemma 1.9.33 (approssimazione in misura di insiemi misurabili con unioni finite di intervalli). □

1.19 Dualità fra spazi L^p

Anticipiamo qui le definizioni ed i risultati essenziali della teoria dei funzionali lineari continui su spazi normati, che sarà trattata estesamente nelle Sezioni 3.12 e 4.6, e vastamente ampliata nel Capitolo 3. Le definizioni ed i risultati della presente Sezione saranno poi brevemente ripresi ed estesi in Sezione 11.2, e molto approfonditi e generalizzati nel Capitolo 3.

Se V è uno spazio normato, dire che T è continuo significa dire che

$$\lim_{v \rightarrow v_0} T(v) = T(v_0)$$

(spesso scriviamo Tv invece che $T(v)$).

Proposizione 1.19.1. *Se V, W sono spazi normati e $T : V \rightarrow W$ è un operatore lineare, allora T è continuo se e solo se esiste $C > 0$ tale che, per ogni $v \in V$*

$$\|Tv\|_W \leq C\|v\|_V.$$

Dimostrazione: viene lasciata come esercizio al lettore, il quale, in caso di difficoltà, può trovare la stessa dimostrazione formulata in un ambito più generale nella Proposizione 4.6.3 nel seguito.

Definizione 1.19.2. Se V, W sono spazi normati e $T : V \rightarrow W$ è un operatore lineare continuo, allora si chiama *norma di T* il numero

$$\|T\| = \inf \{C > 0 : \|Tv\|_W \leq C\|v\|_V \forall v \in V\}$$

Definizione 1.19.3. (Spazio duale.) Sia X uno spazio normato. Lo spazio normato di tutti i funzionali continui su X si chiama *spazio duale* di X , e si indica con X' .

Definizione 1.19.4. (Funzionali reali e funzionali positivi.) Un funzionale lineare T su L^p si dice *reale* se $T(f) \in \mathbb{R}$ per ogni $f \in L^p$ a valori reali; si dice *positivo* se $T(f) \geq 0$ per ogni $f \in L^p$ a valori non negativi (si noti che ogni funzionale positivo è anche reale).

Lemma 1.19.5. (i) *Ogni funzionale lineare T su L^p si spezza in modo unico come $T = \operatorname{Re} T + i \operatorname{Im} T$, con $\operatorname{Re} T$ e $\operatorname{Im} T$ reali. Se T è continuo, lo sono anche $\operatorname{Re} T$ e $\operatorname{Im} T$.*

(ii) *Ogni funzionale lineare reale T su L^p si spezza in modo unico come $T = T_+ - T_-$, con T_+ e T_- positivi. Se T è continuo, lo sono anche T_+ e T_- .*

Dimostrazione. Per ogni funzionale lineare T definiamo $(\operatorname{Re} T)(f) = \operatorname{Re} T(f)$ per tutte le funzioni f a valori reali. È ovvio che $\operatorname{Re} T$ è un funzionale lineare, e $|(\operatorname{Re} T)(f)| \leq |T(f)| \leq \|T\| \|f\|_p$, da cui la continuità di $\operatorname{Re} T$; analoga dimostrazione vale per $\operatorname{Im} T$. Infine, se f non è a valori reali, $T(f) = T(\operatorname{Re} f) + iT(\operatorname{Im} f) = (\operatorname{Re} T)f + i(\operatorname{Im} T)f$, perciò T coincide con $\operatorname{Re} T + i \operatorname{Im} T$ sulle funzioni a valori reali; poiché ogni $f \in L^p$ è combinazione lineare di due funzioni reali, $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, si ha $T = \operatorname{Re} T + i \operatorname{Im} T$. Questo prova (i).

Per ogni funzionale reale T e per ogni f a valori reali definiamo $T_+(f) = \sup \{T(h) : 0 \leq h \leq f\}$. T_+ è un funzionale positivo: infatti, se $f \leq 0$, si ha $T_+(f) \geq T_+(0) = 0$. Osserviamo anche che, se $f \geq 0$, allora $T(f) = T_+(f)$. Inoltre, per ogni f a valori reali, esprimiamo f come differenza delle sue parti positiva e negativa, $f = f_+ - f_-$ con $f_+ = \max f, 0$ e $f_- = -\min f, 0$. Ora $0 \leq f_+ \leq |f|$, e analogamente per f_- . Quindi $|T_+(f)| \leq |T_+(f_+)| + |T_+(f_-)| = |T(f_+)| + |T(f_-)| \leq 2|T(f)|$, pertanto $\|T_+\| \leq 2\|T\|$. Infine, per ogni f a valori reali, $T(f) = T(f_+) - T(f_-) = T_+(f) - T_-(f)$, da cui $T = T_+ - T_-$. Questo prova (ii). \square

Il prossimo teorema è il risultato principale di questa Sezione. Esso asserisce che il duale di L^p coincide con L^q , dove $1 \leq p < \infty$ e q è l'indice coniugato a p . Nel caso $p = 2$ si ottiene che il duale dello spazio di Hilbert L^2 è lo stesso spazio L^2 , un fatto che verrà esteso a tutti gli spazi di Hilbert nel Teorema di rappresentazione di Riesz 4.6.4.

Teorema 1.19.6. (Dualità fra L^p e L^q .) *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un insieme di misura di Lebesgue positiva, $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p(I)$. Sia q l'indice coniugato, ossia tale che $1/p + 1/q = 1$ (Definizione 1.16.4). Allora f genera un funzionale lineare continuo T_f su $L^q(I)$, con $\|T_f\| = \|f\|_p$, nel modo seguente:*

$$T_f(g) = \int f(x) g(x) dx.$$

Viceversa, per ogni funzionale lineare continuo su $L^q(I)$ esiste una tale g .

Quindi il duale di $L^p(I)$ è isometricamente isomorfo a $L^q(I)$.

Più in generale, l'enunciato vale, oltre che per $L^p(I, m)$ dove m è la misura di Lebesgue, anche per qualunque altro spazio di misura di Borel, ad esempio per la misura discreta equidistribuita su \mathbb{Z} (misura che conta), ossia per gli spazi ℓ^p .

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Hölder 1.16.6, T_f è un funzionale lineare continuo su L^p con norma non superiore a $\|f\|_p$. Inoltre, grazie al Corollario 1.16.7, si ha l'isometria: $\|T_f\| = \|f\|_p$. Pertanto, quello che rimane da provare è che, dato un funzionale continuo T su L^p , esiste una funzione $f \in L^q$ tale che $T = T_f$.

Grazie al Lemma 1.19.5, T è combinazione lineare di quattro funzionali continui positivi nel senso della Definizione 1.19.4, perciò basta provare il risultato per tali funzionali. Supponiamo quindi che T sia positivo. Poiché \mathbb{R}

si può invadere con sottoinsiemi misurabili I di misura finita, si può assumere che I sia di misura finita.

Ora costruiamo una misura positiva associata a T , nel modo seguente. Per ogni insieme misurabile $A \subset I$ definiamo $\mu(A) = T(\chi_A)$ dove χ_A è la funzione caratteristica di A (Definizione 1.1.3). Poiché $\chi_A \geq 0$ si ha $\mu(A) \geq 0$. Se $\{A_n, n = 1, 2, \dots\}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili disgiunti e $A = \cup_n A_n$, allora $\lim_k \sum_{n=1}^k \chi_{A_n} = \chi_A$ nella norma di L^p , per il Teorema di Convergenza Monotona 1.9.53. Poiché T è continuo, ne segue che $\mu(A) = \sum_n \mu(A_n)$, e quindi μ è una misura positiva (Definizione 1.9.11). Come sempre, denotiamo la misura di Lebesgue con m ; osserviamo che, se $m(A) = 0$, allora χ_A è la funzione nulla in L^p , e quindi $\mu(A) = 0$. Possiamo quindi applicare il Teorema di Radon-Nikodym 1.9.27: esiste una funzione $g \in L^1(I)$, $g \geq 0$, tale che

$$T(\chi_A) = \int g(x)\chi_A(x) dx$$

per ogni insieme misurabile A .

Sia ora $h \in L^\infty(I)$ una funzione non negativa. Poiché $m(I) < \infty$, $h \in L^p(I)$. Per il Lemma 1.18.2, esiste una successione di funzioni semplici $h_n \geq 0$ tali che, per ogni $x \in I$, $h_n(x) \nearrow h(x)$ (la convergenza è monotona per ogni x quando $n \rightarrow \infty$), ed ogni h_n , essendo una funzione semplice (Definizione 1.9.42), è una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di intervalli A_n disgiunti. Di nuovo per il Teorema di Convergenza monotona 1.9.53, $\lim_n \|h_n - h\|_p = 0$, e poiché g è limitata anche $\|gh_n - gh\|_p \leq \|g\|_\infty \|h_n - h\|_p \rightarrow 0$. Poiché T è continuo,

$$T(h) = \int g(x)h(x) dx.$$

Per ogni $K > 0$, poniamo $I_K = \{x : g(x) \leq K\}$, e $h = g^{q-1}\chi_{I_K}$. Poiché p e q sono indici coniugati (Definizione 1.16.4), grazie a (1.40) si ha

$$p(q-1) = p/(p-1) = \frac{1}{(p-1)/p} = \frac{1}{1/q} = q.$$

Perciò si ha

$$\begin{aligned} \int_{I_K} g(x)^q &= T(h) \leq \|T\| \left(\int_{I_K} g^{(q-1)p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|T\| \left(\int_{I_K} g^q dx \right)^{1-\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Dividendo a sinistra e a destra per $\int_{I_K} g(x)^q$ si ottiene

$$\left(\int_{I_K} g(x)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|T\|.$$

Poiché g è limitato, al crescere di K la famiglia $I_K = \{x : g(x) \leq K\}$ invade I , e quindi $\left(\int_{I_K} g(x)^q \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow \|g\|_q \leq \|T\|$. Quindi $g \in L^q(I)$. Questo completa la dimostrazione per $L^p(I, m)$ quando m è la misura di Lebesgue. La dimostrazione per qualunque altra misura di Borel è identica. \square

Definizione 1.19.7. (Biduale.) Dato uno spazio normato X , il duale del suo spazio duale (lo spazio normato X') si chiama il *biduale* di X , e si indica con X'' .

Notazione 1.19.8. Per indicare l'azione di un elemento g di X' sugli elementi f dello spazio X , scriveremo $\langle g, f \rangle$ invece che $T_g(f)$.

Nota 1.19.9. Prendiamo in esame lo spazio normato completo $X = L^p$. X si immerge isometricamente nel proprio biduale. Infatti, se $f \in X$ e $g \in X''$, la applicazione lineare

$$f \mapsto \langle g, f \rangle$$

identifica f con un funzionale continuo su X' di norma uguale alla norma di f , per il Teorema di Dualità 1.19.6.

Più in generale, lo stesso risultato è vero per tutti gli spazi normati completi: si veda [25, Cap. 4, Sezione 5]. \square

Definizione 1.19.10. (Spazi riflessivi.) Uno spazio normato completo si chiama *riflessivo* se è isometricamente isomorfo al proprio biduale.

Nota 1.19.11. Dal Teorema di Dualità L^p 1.19.6 segue che, se $1 \leq p < \infty$, L^p è riflessivo. Invece L^∞ non è riflessivo: il suo duale contiene L^1 ma è strettamente più grande, ed il suo biduale è strettamente più grande di L^∞ stesso. Si vedano maggiori commenti in Sezione 11.2. \square

1.20 Integrali multipli e scambio dell'ordine di integrazione

Definizione 1.20.1. (Misura prodotto.) Siano m_1 una misura sullo spazio X e m_2 una misura su Y . La loro *misura prodotto* $m_1 \times m_2$ sul prodotto cartesiano $X \times Y$ è la misura che, sugli insiemi dati dal prodotto cartesiano $E_1 \times E_2$ (dove E_i è un qualsiasi insieme misurabile rispetto a m_i , $i = 1, 2$) vale

$$m_1 \times m_2(E_1 \times E_2) = m_1(E_1)m_2(E_2).$$

Notazione 1.20.2. Dato un insieme E nel prodotto cartesiano $X \times Y$, per ogni $x \in X$ e $y \in Y$ scriviamo $E_x = \{y : (x, y) \in E\}$ e $E^y = \{x : (x, y) \in E\}$. Gli insiemi E_x e E^y si chiamano le *sezioni* di E . Analogamente, se f è una funzione su $X \times Y$, denotiamo le sue sezioni $f_x(y) = f(x, y)$ e $f^y(x) = f(x, y)$ con $f_x : Y \rightarrow \mathbb{C}$ e $f^y : X \rightarrow \mathbb{C}$, rispettivamente.

Il prossimo risultato è una semplice verifica che non dimostriamo (si veda [23, Cap. 7, Teoremi 5 e 6]).

Lemma 1.20.3. *Se f è misurabile in $X \times Y$ rispetto a $m_1 \times m_2$, allora le sue sezioni f_x e f^y sono misurabili rispetto a m_1 e m_2 , rispettivamente. Inoltre, per ogni $E \subset X \times Y$ misurabile rispetto alla misura prodotto, le funzioni $\phi(x) = m_2(E_x)$ e $\psi(y) = m_1(E^y)$ sono misurabili rispetto a m_1 e m_2 , rispettivamente, e $\int_X \phi dm_1 = \int_Y \psi dm_2$. Infine, se g è misurabile su \mathbb{R} , la funzione $(x, y) \mapsto g(x - y)$ è misurabile su \mathbb{R}^2 .*

Suggerimento: sebbene non dimostriamo questo lemma tecnico, vogliamo suggerire almeno come dimostrare l'ultima asserzione. In base alla Definizione 1.9.39, si tratta di dimostrare che, per ogni $\alpha > 0$, l'insieme $E_\alpha := \{(x, y) : g(x, y) > \alpha\}$ è misurabile. Poniamo $B_\alpha := \{t \in \mathbb{R} : g(t) > \alpha\}$. Questo insieme è misurabile per ogni α perché g è una funzione misurabile (si veda nuovamente la Definizione 1.9.39). Ora, $E_\alpha = \{(x, y) : x + y \in B_\alpha\}$. Si tratta di dimostrare che questo insieme è misurabile usando il fatto che è la controimmagine sotto la addizione (una funzione continua) di un insieme misurabile (B_α). **Cautela:** questo fatto non è automatico, richiede una dimostrazione accurata, che lasciamo come esercizio. \square

Grazie al precedente Lemma 1.20.3, ha senso il prossimo enunciato:

Teorema 1.20.4. (Fubini.)

(i) **(Teorema di Tonelli.)** Sia m_1 una misura su uno spazio X , m_2 una misura su uno spazio Y , e $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione non negativa misurabile rispetto a $m_1 \times m_2$. Consideriamo gli integrali delle sezioni, $\phi(x) = \int_Y f_x dm_2$ e $\psi(y) = \int_X f_y dm_1$ (che hanno senso grazie al Lemma 1.20.3, e che per brevità denotiamo integrali sezionali).

Se $f \geq 0$, allora ϕ è misurabile rispetto a m_1 , ψ è misurabile rispetto a m_2 e valgono le seguenti formule di riduzione (o formule di integrazione iterata):

$$\int_X \phi dm_1 = \int_{X \times Y} f d(m_1 \times m_2) = \int_Y \psi dm_2. \quad (1.54)$$

(ii) **(Teorema di Fubini.)** Se $f \in L^1(m_1 \times m_2)$, allora $f_x \in L^1(m_2)$ per quasi ogni $x \in X$ (rispetto a m_1), $f_y \in L^1(m_1)$ per (m_2-) quasi ogni $y \in Y$, $\phi \in L^1(m_1)$, $\psi \in L^1(m_2)$ e valgono le formule di riduzione 1.54.

Dimostrazione.

(i) Consideriamo dapprima il caso elementare delle funzioni caratteristiche degli insiemi $S \times T$ con S nella σ -algebra della misura m_1 e T in quella di m_2 . In questo caso il risultato desiderato è contenuto nel Lemma 1.20.3. Pertanto, prendendo combinazioni lineari, il risultato vale per tutte le funzioni semplici $m_1 \times m_2$ -misurabili.

Passiamo allora al caso generale: $f \geq 0$ è una funzione $m_1 \times m_2$ -misurabile. Per il Corollario 1.18.5, esiste una successione s_n di funzioni semplici su $X \times Y$ e $m_1 \times m_2$ -misurabili che approssimano f puntualmente in maniera monotona: $0 \leq s_1(x, y) \leq s_2(x, y) \leq \dots$ e $\lim_n s_n(x, y) = f(x, y)$ per ogni x, y . Denotiamo con ϕ_n e ψ_n gli integrali sezionali ϕ e ψ dell'enunciato associati a s_n . Allora sappiamo che $\int_X \phi_n(x) dm_1(x) = \int_{X \times Y} s_n(x, y) d(m_1 \times m_2) = \int_Y \psi_n(y) dm_2(y)$. Per ogni x , le funzioni ϕ_n e ψ_n convergono rispettivamente a ϕ e ψ (per il Teorema di Convergenza Monòtona 1.9.53) in maniera non decrescente, e quindi (1.54) segue da una seconda applicazione del Teorema di Convergenza Monòtona.

(ii) Per linearità basta provare il teorema per funzioni a valori reali, dal momento che quelle a valori complessi sono combinazioni lineari dei

due funzioni reali (la loro parte reale ed immaginaria). D'altra parte, ogni funzione a valori reali f è la differenza di due funzioni non negative, la parte positiva f_+ e la parte negativa f_- (definite nella dimostrazione del Lemma 1.19.5), e $f_+, f_- \leq |f|$. Siano ϕ_+, ϕ_- gli integrali sezionali ϕ associati a f_+, f_- . Ora dalla parte (i) segue che $\phi_+, \phi_- \in L^1(m_1)$. Osserviamo che $f_x = (f_+)_x - (f_-)_x$, e dalla parte (i) le funzioni $(f_+)_x$ e $(f_-)_x$ hanno integrale finito per ogni x tale che ϕ_+, ϕ_- sono finite (rispettivamente). Poiché $\phi_+, \phi_- \in L^1(m_1)$, questo accade m_1 -quasi ovunque. Per questi x , si ha $\phi(x) = \phi_+(x) - \phi_-(x)$, ed quindi $\phi \in L^1(m_1)$. Perciò le formule di riduzione (1.54) valgono separatamente per f_+ e ϕ_+ e per f_- e ϕ_- : per sottrazione esse valgono per f e ϕ . La dimostrazione della formula analoga per ψ è identica.

□

Corollario 1.20.5. *Sia in generale f a valori complessi e poniamo $\phi_*(x) = \int_Y |f|_x dm_2$. Se ϕ_* è integrabile, cioè se $\int_X \phi_* dm_1 < \infty$, allora $f \in L^1(m_1 \times m_2)$.*

Dimostrazione. Basta applicare il precedente Teorema 1.20.4 (i) alla funzione $|f|$. □

Definizione 1.20.6. (Misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n e variazione totale). Definiamo la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n nel modo seguente, a partire dalla famiglia dei pluriintervalli (detti anche plurirettangoli) aperti $(a, b) = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ (che genera la σ -algebra dei Boreliani di \mathbb{R}^n):

$$m(a, b) = m(a_1, b_1) m(a_2, b_2) \cdots m(a_n, b_n).$$

Esempio 1.20.7. Scriviamo $\int f(x, y) dx dy$ per gli integrali rispetto alla misura di Lebesgue su \mathbb{R}^2 . Dalle formule di riduzione (1.54) si ha quindi:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy$$

e per ogni rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

□

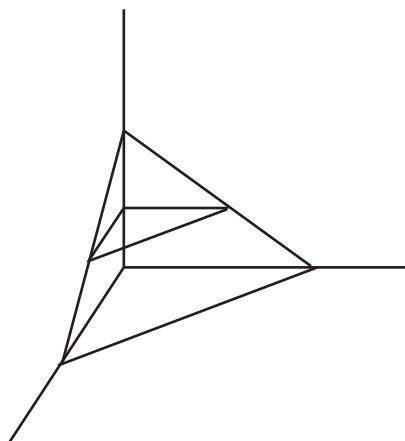
Naturalmente, le formule per la riduzione di integrali multipli ad integrali unidimensionali iterati sono uno strumento fondamentale anche per il calcolo di integrali multipli nel senso di Riemann. Vediamo esempi di integrali doppi in due o tre coordinate, come richiamo di argomenti che il lettore ha probabilmente già studiato in corsi precedenti.

Esercizio 1.20.8. Sia T il triangolo sotteso dall'origine e dai punti $(0, 1)$ e $(1, 0)$. Osserviamo che i lati di T giacciono sulle tre rette $x = 0$, $y = 0$ e $x + y = 1$. Quindi dalle formule di riduzione si ottiene

$$\int_T f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x, y) dx \right) dy.$$

□

Esercizio 1.20.9. Sia V il tetraedro sotteso dall'origine e dai punti $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$. Osserviamo che le facce di V giacciono sui piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$. Fissato $z = z_0$ fra 0 e 1, la Sezione del tetraedro con il piano $z = z_0$ è il triangolo $z = z_0$, $0 \leq y \leq 1 - z_0$, $0 \leq x \leq 1 - y - z_0$.



Quindi dalle formule di riduzione si ottiene

$$\int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-y-z} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz; .$$

Scrivere le formule di riduzione nell'ordine opposto di integrazione (prima z , poi y , poi x). Calcolare l'integrale su V della funzione $1/(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$, dove

$\alpha \in \mathbb{R}$. Per quali valori di α l'integrale è finito? Come cambia la risposta se l'integrando invece è $1/(x + y + z)^\alpha$? \square

Esercizio 1.20.10. Risolvere l'esercizio precedente rimpiazzando il tetraedro V con il cono C con base il disco nel piano $z = 0$ centrato nell'origine e di raggio 1, e con vertice nel punto $(0, 0, 1)$. Dimostrare che si ottengono le formule di riduzione

$$\int_C f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz; .$$

\square

Esercizio 1.20.11. Risolvere l'esercizio precedente rimpiazzando il cono con la sfera S con centro l'origine e raggio 1. Dimostrare che si ottengono le formule di riduzione

$$\int_S f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz; .$$

\square

1.21 Limiti e continuità in più variabili

Sebbene sia difficilmente concepibile che chi si accinge a leggere un trattato come questo non conosca già alla perfezione il contenuto della presente Sezione, innumerevoli esempi contrari fra gli studenti universitari ci inducono ad includerla qui.

Siccome \mathbb{R}^n è uno spazio normato, la nozione di limite è la stessa della Sezione 1.2, ma ora la vediamo più in dettaglio. La definizione di limite e di continuità è arcinota.

Definizione 1.21.1. Sia x^0 un punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ (se il lettore non vuole rammentare la nozione di punto di accumulazione, può semplificarsi la vita restringendo l'attenzione ad un punto interno ad A). Si dice che una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ha limite ℓ per $x \rightarrow x^0$ se per ogni intorno aperto $V \subset \mathbb{C}$ di ℓ esiste un intorno aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ di x^0 tale che $f(U \cap A) \setminus \{x^0\} \subset V$. Più esplicitamente, $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = \ell$ se e solo se, per

ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in A$ con $0 < \|x - x^0\| < \delta$, si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Se $x^0 \in A$ (e quindi f è definita al punto x^0 , si dice che f è continua a x_0 se $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0)$.

Per semplicità, limitiamo l'attenzione a $n = 2$. Il seguente enunciato è ovvio:

Corollario 1.21.2. *Sia f una funzione definita in un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$, $(x^0, y^0) \in A$. Se f ha limite ℓ per $(x, y) \rightarrow (x^0, y^0)$, allora la restrizione $g(t) = f(x(t), y(t))$ di f a qualsiasi curva $(x(t), y(t))$ (con $0 \leq t \leq 1$) che tende a (x^0, y^0) (nel senso che $x(t) \rightarrow x^0$ e $y(t) \rightarrow y^0$ per $t \rightarrow 1^-$) verifica $\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = \ell$.*

Un enunciato analogo vale per funzioni su \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dal fatto che, visto che $(x(t), y(t))$ tende a (x^0, y^0) per $t \rightarrow 1^-$, abbiamo che, comunque si scelga un intorno aperto U di (x^0, y^0) , per t sufficientemente vicino a 1, i punti $(x(t), y(t))$ giacciono in U . Lasciamo ulteriori dettagli al lettore. \square

Esempio 1.21.3. Il precedente Corollario permette di trovare condizioni necessarie all'esistenza del limite in più dimensioni a partire da opportuni limiti unidimensionali (lungo curve che tendono al punto limite (x^0, y^0)). Limitiamo anche qui l'attenzione al caso bidimensionale e ad alcuni esempi tipici. Sia f una funzione definita in un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$, $(x^0, y^0) \in A$.

(i)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x^0,y^0)} f(x) = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x^0} (\lim_{y \rightarrow y^0} f(x, y)) = \ell,$$

e lo stesso enunciato vale se a destra scambiamo l'ordine dei due limiti iterati.

Questo enunciato vale in base al precedente Corollario, perché il limite iterato corrisponde al limite lungo la curva poligonale consistente di due segmenti, il primo dei quali è quello *verticale* da (x, y) a (x, y^0) , ed il secondo da (x, y^0) a (x^0, y^0) .

(ii)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x^0,y^0)} f(x) = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(x^0 + ta, y^0 + tb) = \ell$$

per ogni a, b non simultaneamente nulli (il caso $a = b = 0$ non parametrizza una retta che passa per (x^0, y^0) , bensì il punto costante (x^0, y^0)). Questo enunciato vale in base al precedente Corollario, perché il limite unidimensionale corrisponde al limite lungo la retta da (x, y) a (x^0, y^0) .

- (iii) Per meglio chiarire il punto precedente, si scelga $x^0 = y^0 = 0$. Allora, se $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x) = \ell$, si ha $\lim_{t \rightarrow 0} f(at, bt) = \ell$ per ogni a, b non simultaneamente nulli.
- (iv) Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x) = \ell$, allora $\lim_{t \rightarrow 0} f(at, bt^2) = \ell$ per ogni a, b non simultaneamente nulli: infatti, il limite unidimensionale corrisponde a muoversi verso l'origine lungo la parabola (at, bt^2) .
- (v) Lasciamo al lettore il compito di scrivere analoghe relazioni per curve che tendono all'origine polinomialmente con grado maggiore di 2.

Ne segue che, se il limite unidimensionale non esiste lungo una delle curve in \mathbb{R}^2 sopra utilizzate, oppure se esiste ma dipende dalla scelta della curva (ad esempio, cambia al cambiare dei parametri a e b), allora il limite bidimensionale non esiste. \square

Nota 1.21.4. Cautela: purtroppo, l'esistenza dei limiti unidimensionali al lato di destra delle precedenti identità è solo una condizione necessaria per l'esistenza del limite multidimensionale, come vedremo nel successivo Esempio 1.21.7. \square

Per chiarire meglio la situazione, riscriviamo la nozione di limite bidimensionale della precedente Definizione in termini di un limite unidimensionale, ma questa volta con una condizione *necessaria e sufficiente* per l'esistenza del limite bidimensionale. Senza perdita di generalità, ma sicuri di facilitare il lettore, consideriamo solo il caso $x^0 = y^0 = 0$, dal quale si passa al caso generale con una semplice traslazione nel piano.

Corollario 1.21.5. *Sia f una funzione definita in un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$, $(0, 0) \in A$, e consideriamo la funzione trasformata in coordinate polari:*

$$\tilde{f}(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

La funzione f ha limite ℓ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ se e solo se

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} |\tilde{f}(r, \theta) - \ell| = 0. \quad (1.55)$$

Dimostrazione. La funzione f ha limite ℓ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, quando la distanza r di (x, y) da $(0, 0)$ è minore di δ , allora il valore $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ dista da ℓ meno di ε , qualunque sia θ . Questo equivale a dire che $\lim_{r \rightarrow 0^+} \sup_{\theta} |f(r \cos \theta, r \sin \theta) - \ell| = 0$. \square

Nota 1.21.6. Si noti che sarebbe scorretto enunciare la condizione della dimostrazione precedente dicendo che il limite per $r \rightarrow 0^+$ di $f(r \cos \theta, r \sin \theta) - \ell$ deve valere 0 *indipendentemente* da θ : l'enunciato giusto è che tale limite vale 0 *uniformemente* rispetto a θ . Se dicessimo *indipendentemente* da θ , ciò significherebbe che il limite è sempre lo stesso (ossia zero) *per qualunque fissato* θ , ossia quando ci si muove in linea retta verso l'origine ad angolo θ (rispetto al semiasse x positivo), il che è la stessa condizione soltanto necessaria della parte (iii) dell'Esempio 1.21.3. \square

Esempio 1.21.7. (i) Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$$

Allora f non è continua in $(0, 0)$. Infatti, lungo le semirette $(x_t, y_t) = (at, bt)$, con a, b non simultaneamente nulli e $t > 0$, si ha $f(x_t, y_t) = ab/(a^2 + b^2)$, quindi f su ciascuna di queste semirette è costante, ma la costante dipende dalla scelta di a e b , ovvero della semiretta.

Alcuni lettori preferiscono scrivere le semirette con l'equazione cartesiana invece che parametrica. Qui, ad esempio, se scegliamo $y = mx$ con $m \in \mathbb{R}$, troviamo $f(x, mx) = m/(1 + m^2)$, un valore costante che però dipende dalla semiretta (dipende dalla sua pendenza m). Nelle prossime parti di questo esempio utilizzeremo semirette e parabole in forma cartesiana, ma occorre stare attenti al fatto che in tal modo si può perdere qualche semiretta o curva: ad esempio, la retta verticale $x = 0$ non si scrive come $y = mx$ perché la sua pendenza è infinita rispetto all'asse x : occorre invece scriverla nella forma $x = ky$, in tal caso con $k = 0$.

(ii) Sia

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$$

La funzione g non è continua in $(0, 0)$. In questo caso, per ogni semiretta $(x_t, y_t) = (at, bt)$, con a, b non simultaneamente nulli e $t > 0$, si ha $g(x_t, y_t) = ab^2t/(a^2 + b^2t^2)$, ed il limite per $t \rightarrow 0$ lungo ogni tale semiretta vale 0: infatti, se $a \neq 0$, allora il denominatore non è infinitesimo ma il numeratore sì, mentre per $a = 0$ il numeratore è identicamente nullo ma il denominatore è positivo perché $b \neq 0$ (rammentiamo che non è lecito scegliere sia a sia b uguali a 0). Quest'ultima retta è quindi eccezionale: qui il valore limite 0 non proviene dal fatto che il denominatore non si avvicina a 0, bensì dal fatto che il numeratore ci si avvicina troppo: è identicamente nullo! Si ottiene ovviamente lo stesso risultato dalla rappresentazione cartesiana $y = mx$ oppure $x = my$.

Nondimeno, la funzione non è continua: la condizione era solo necessaria. Sappiamo che la funzione g non è continua in $(0, 0)$ perché $g(x, y) = f(x, y^2)$, dove f è la funzione discontinua della precedente parte (i): ossia, g si ottiene da f grazie ad un cambiamento (quadratico) di variabili, $y \mapsto y^2$: quindi basta considerare quelle curve le cui controimmagini sotto questo cambiamento di variabili sono le semirette che evidenziano la discontinuità di f . A questo fine si devono considerare gli archi di parabola $x = ky^2$, e si ottiene, come prima per f , il seguente risultato: $g(ky^2, y) = k/(k^2 + 1)$, una costante che dipende dalla scelta di k . Si osservi che le parabole (ky^2, y) si avvicinano all'origine tangenzialmente all'asse y , ovvero la retta verticale che costituisce la direzione eccezionale considerata prima).

Si noti che la scelta giusta delle curve è data da una espressione monomiale di grado tale da simmetrizzare i gradi risultanti nelle variabili x e y .

- (iii) Nella parte precedente di questo esempio abbiamo studiato una funzione discontinua nell'origine il cui limite lungo ogni semiretta verso l'origine è 0. Dimostriamo che questa funzione è discontinua col metodo difficile: passando in coordinate polari ed utilizzando la proprietà equivalente (1.55) (nota: di solito questo metodo è quello più facile quando invece la funzione è continua!)

Allora abbiamo

$$\tilde{g}(r, \theta) = g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r \cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta}.$$

Ancora una volta, dobbiamo mettere in guardia il lettore e prevenirlo da calcolare semplicemente il limite per $r \rightarrow 0^+$ ignorando θ : in

tal modo si calcolerebbe semplicemente il limite di \tilde{g} sulle semirette $\theta = \text{costante}$, che sappiamo essere 0. Invece occorre calcolare prima l'estremo superiore rispetto a θ :

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} \frac{r \cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta}$$

(qui non serve prendere il valore assoluto perché il limite è 0 e $|0| = 0$). Al fine di stimare $\sup_{\theta} \{r \cos \theta \sin^2 \theta / (\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta)\}$ è opportuno prima chiedersi, per ogni r fissato, quale sia il valore di θ che rende il più grande possibile la frazione. Chiamiamo questo valore θ_r . Il fattore r^2 al denominatore induce a pensare che il secondo addendo, $r^2 \sin^4 \theta$, conti meno del primo, $\cos^2 \theta$, per piccoli valori di r , ma così non è nel caso θ_r si avvicini al valore $\theta = \pi/2$ per il quale $\cos \theta = 0$: però sappiamo che questo caso (corrispondente alla retta verticale) comporta che il numeratore sia identicamente nullo. Nell'incertezza su come bilanciare l'importanza dei due addendi al denominatore, è opportuno in primo luogo verificare cosa succede quando essi sono ugualmente grandi, ossia per θ_r tale che

$$\cos^2 \theta_r = r^2 \sin^4 \theta_r. \quad (1.56)$$

Poiché $\cos^2 \theta_r = 1 - \sin^2 \theta_r$, l'ultima identità è un'equazione biquadratica in $\sin \theta_r$, risolvibile algebricamente (dopo occorre applicare l'arco-seno per trovare θ_r), ma è più comodo risolverla trigonometricamente. Prima però chiediamoci se esiste una soluzione θ_r per tutti i valori piccoli di r . Per ogni $r > 0$, al variare di θ fra 0 e $\pi/2$, la funzione $\theta \mapsto r^2 \sin^4 \theta$ cresce da 0 a r^2 , mentre $\cos^2 \theta$ decresce da 1 a 0: quindi, per il Teorema dei valori intermedi per le funzioni continue (si veda la solita Sezione 1.1) esiste una soluzione θ_r per ogni r , e, per la monotonia, una sola. Quando r è piccolo, la funzione $\theta \mapsto r^2 \sin^4 \theta$ è uniformemente piccola, e quindi θ_r è tale che anche $\cos^2 \theta_r$ sia vicino a 0: pertanto θ_r deve avvicinarsi a $\pi/2$. Possiamo scegliere θ_r indifferentemente minore o maggiore di $\pi/2$, dal momento che le due funzioni $\cos^2 \theta$ e $r^2 \sin^4 \theta$ sono simmetriche intorno a $\theta = \pi/2$. Facciamo una scelta, ad esempio $\theta_r < \pi/2$, ma $\theta_r \rightarrow \pi/2$ per $r \rightarrow 0^+$.

Quindi, non sorprendentemente, la curva $r \mapsto \theta_r$, sulla quale vogliamo mostrare che la frazione si mantiene grande per $r \rightarrow 0^+$, è asintotica a $\theta = \pi/2$, ossia alla semiretta verticale $\{x = 0, y > 0\}$ (in realtà, visto che i termini del denominatore sono elevati al quadrato, anche la

semiretta $\{x = 0, y > 0\}$ va ugualmente bene).

Rammentiamo che volevamo trovare θ_r tale che valga l'equazione (1.56). Ma ora non serve più! Infatti, ora sappiamo che θ_r esiste, e, da (1.56), $\cos \theta_r = r \sin^2 \theta_r$ (poiché abbiamo scelto $0 < \theta_r < \pi/2$, il coseno è positivo) ed il segno a primo membro nell'estrazione della radice è positivo). Pertanto

$$\tilde{g}(r, \theta_r) = \frac{r \cos \theta_r \sin^2 \theta_r}{\cos^2 \theta_r + r^2 \sin^4 \theta_r} = \frac{r^2 \sin^4 \theta_r}{2r^2 \sin^4 \theta_r} = \frac{1}{2}$$

e quindi, su questa curva $r \mapsto \theta_r$, la funzione è costantemente uguale a $1/2$, l'estremo superiore su θ non tende a zero con r e la funzione è discontinua.

□

1.22 Calcolo differenziale in più variabili e cambiamento di variabili negli integrali multipli

Vogliamo considerare alcuni esempi più complessi di calcolo di integrali multipli. Questi esempi presumibilmente sono già noti da precedenti corsi di Analisi Matematica: pertanto l'esposizione è sintetica, per maggiori dettagli si veda un qualunque libro di Analisi Matematica (ad esempio [1] e [5], che hanno ispirato questa presentazione). Essi sono basati sul cambiamento di variabili, analogamente al Teorema di Integrazione di Sostituzione per integrali unidimensionali (Sezione 1.1). Questo teorema asserisce che, se ϕ è una mappa biunivoca da $[a, b]$ a $[c, d]$ e di classe C^1 (cioè derivabile con derivata continua), allora per ogni funzione integrabile su $[c, d]$ la funzione composta $f \circ \phi$ è integrabile su $[a, b]$ e

$$\int_c^d f(t) dt = \int_{\phi^{-1}(c)}^{\phi^{-1}(d)} f(\phi(x)) \phi'(x) dx.$$

Poiché ϕ è biunivoca e di classe C^1 , è facile vedere che essa è monotona (non decrescente oppure non crescente). Nel primo caso $\phi^{-1}(c) = a$ e $\phi^{-1}(d) = b$, nel secondo avviene il viceversa. Spesso, per semplicità e senza perdita di

generalità, questo teorema viene enunciato nel caso in cui ϕ sia non decrescente. Il caso non crescente è identico, ma porta ad un rovesciamento dell'ordine di integrazione, e quindi ad un cambiamento di segno dell'integrale. Di conseguenza, se si rinuncia ad assumere che ϕ sia biunivoca, il teorema diventa

Teorema 1.22.1. (Integrazione per sostituzione in una variabile.)

Nelle condizioni e con la notazione suesposte,

$$\int_c^d f(t) dt = \int_a^b f(\phi(x)) |\phi'(x)| dx.$$

1.22.1 Derivate parziali e differenziale

Per estendere a più dimensioni il precedente Teorema 1.22.1 dobbiamo introdurre l'analogo multidimensionale della funzione ϕ' . Cominciamo col richiamare la ben nota definizione di derivata parziale:

Definizione 1.22.2. (Derivate parziali e direzionali.) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Per $i = 1, \dots, n$ si dice che f è derivabile in senso parziale rispetto a x_i al punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$ se la funzione $F(t) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + t, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$ è derivabile al punto $t = 0$. La *derivata parziale* si denota con $D_i f(x^0)$ oppure con $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$, e vale $D_i f(x^0) = F'(0)$. Il vettore le cui componenti sono le derivate parziali al punto x^0 si chiama il *gradiente* di f a x^0 e si indica con $\nabla f(x^0)$ oppure con $\text{grad } f(x^0)$. Se n è un versore in \mathbb{R}^n , scriviamo ora $F(t) = f(x^0 + tn)$, e definiamo la derivata direzionale di f in direzione n come $\frac{\partial f}{\partial n}(x^0) = F'(0)$ (la definizione precedente di derivata parziale i -sima è il caso particolare di questa che corrisponde a scegliere al posto di n l' i -simo vettore della base canonica).

Vale il seguente lemma sullo scambio dell'ordine di derivazione, la cui dimostrazione, basata sul teorema del valor medio di Lagrange (Sezione 1.1) lasciamo per esercizio al lettore, che può trovarla in qualunque libro di Calcolo in più variabili (ad esempio, [5, 2^{nda} parte, Cap. II, Sez. 7]):

Lemma 1.22.3. (Schwarz.) Se $E \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2 , allora per ogni $i, j = 1, \dots, n$ e per ogni $x \in E$ si può scambiare l'ordine delle derivate parziali: $D_i D_j f(x) = D_j D_i f(x)$.

In più dimensioni la derivabilità in senso parziale non implica la continuità (ad esempio, la funzione che vale 1 sugli assi coordinati e zero altrove nell'origine ha derivate parziali nulle ma non è continua). La nozione di differenziabilità che assicura la continuità è la seguente.

Definizione 1.22.4. (Differenziale.) Sia A un aperto in \mathbb{R}^n e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Si dice che f è *differenziabile* in $x^0 \in A$ se esiste un funzionale lineare $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (Definizione 3.3.14) che approssima f a meno di infinitesimi, nel senso che la differenza fra $f(x)$ e l'approssimazione lineare $f(x^0) + \phi(x - x^0)$ è infinitesima, per $x \rightarrow x^0$, di ordine superiore al primo:

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - \phi(x - x^0)}{\|x - x^0\|} = 0.$$

In altre parole,

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x - x^0) + \epsilon(x)$$

dove ϵ è un infinitesimo per $x \rightarrow 0$ (ossia una funzione di x con limite 0 se x tende a zero).

Il funzionale lineare ϕ si chiama il *differenziale* di f al punto x^0 , e si indica con df_{x^0} .

Nota 1.22.5. (Interpretazione geometrica del differenziale.) Si osservi che, se $n = 1$, ovvero in una dimensione, la nozione di differenziabilità e di derivabilità coincidono, e (per funzioni di variabile reale a valori reali) coincidono entrambe con l'esistenza della retta tangente al grafico. Per funzioni di variabile complessa a valori complessi questa visualizzazione geometrica è ancora vera in un senso opportuno, ma bisogna considerare rette complesse: il grafico è in \mathbb{C}^2 anziché \mathbb{R}^2 , e si devono considerare rette in questo spazio bidimensionale complesso (per questioni correlate si veda nel seguito la nozione di derivata complessa (Definizione 1.22.13)).

Invece in più dimensioni non è così. Poiché il grafico di una applicazione lineare su \mathbb{R}^n è un piano a dimensione n in \mathbb{R}^{n+1} , una funzione f è differenziabile in x^0 se e solo se il suo grafico ammette piano tangente al punto x^0 : questo piano ha per equazione $y = f(x^0) + \phi(x - x^0)$, dove ora y , x e x^0 sono punti in \mathbb{R}^n . \square

Si dimostra facilmente il seguente teorema di derivazione:

Teorema 1.22.6. *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile al punto x^0 con differenziale ϕ . Allora per ogni versore n esiste la derivata direzionale di f nella direzione n , e vale $\frac{\partial f}{\partial n}(x^0) = \langle \nabla f(x^0), n \rangle$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota il prodotto scalare.*

Viceversa:

Teorema 1.22.7. *Sia f una funzione di classe C^1 ad un punto x (cioè, le derivate parziali di f esistono in un intorno di x e sono continue in x). Allora f è differenziabile in x .*

Il Teorema 1.22.6 è un caso particolare della regola di derivazione di funzione composta, detta regola della catena (Corollario 1.22.17), per illustrare la quale occorre estendere la definizione di differenziale a funzioni $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definizione 1.22.8. (Differenziale in più variabili e matrice Jacobiana.) Sia A un aperto in \mathbb{R}^n e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si dice che f è *differenziabile* in $x^0 \in A$ se esiste una applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (Definizione 3.3.14) che approssima f a meno di infinitesimi:

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - \phi(x - x^0)}{\|x - x^0\|} = 0.$$

L'operatore lineare ϕ si chiama il *differenziale* di f al punto x^0 , e si indica con $df(x^0)$. La matrice che rappresenta ϕ nelle basi canoniche di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m si chiama la *matrice Jacobiana* di f in x^0 , e si indica con J : se $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è la i -sima componente di f , allora la matrice J è data da $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) = D_j f_i(x^0)$.

Nota 1.22.9. È immediato vedere che f è differenziabile se e solo se lo sono tutte le sue componenti. \square

Esempio 1.22.10. La condizione sufficiente per la differenziabilità enunciata nel Teorema 1.22.7 è spesso scomoda da verificare, e non deve mascherare il fatto che la nozione di differenziabilità è nient'altro che una condizione di sviluppabilità al primo ordine di Taylor (Definizione 1.22.4). Ad esempio, sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \sin(\sqrt{x^2+y^2})}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 0 = y \end{cases}$$

Non occorre calcolare derivate per mostrare che f è differenziabile nell'origine. Basta mostrare che f è sviluppabile secondo Taylor al primo ordine: in particolare, mostriamo che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Infatti, questo equivale a dire che f è differenziabile nell'origine con differenziale nullo. Per calcolare il limite nell'ultima espressione, osserviamo che essa equivale a

$$\frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2} - \sin(\sqrt{x^2+y^2})}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} - \frac{1}{6}}{\sqrt{x^2+y^2}} = o(1),$$

ossia

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2} - \sin(\sqrt{x^2+y^2})}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} - \frac{1}{6} = o(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Questo equivale a dire che

$$\frac{\rho - \sin \rho}{\rho^3} - \frac{1}{6} = o(\rho),$$

ossia

$$\rho - \frac{\rho^3}{6} - \sin \rho = o(\rho^4),$$

e quest'ultima relazione equivale al ben noto sviluppo di Taylor della funzione seno (in una sola variabile) al terzo ordine.

Si osservi che, se avessimo invece considerato

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } x = 0 = y \end{cases}$$

ossia

$$g(x, y) = h(\rho) := \frac{e^\rho - 1}{\rho},$$

la funzione g sarebbe stata continua nell'origine, ma il differenziale non sarebbe stato nullo, perché $e^\rho = 1 + \rho + \frac{1}{2}\rho^2 + o(\rho^2)$, e quindi $h(\rho) = 1 + \frac{1}{2}\rho + o(\rho)$. In altre parole, $\frac{h(\rho) - h(0)}{\rho} \neq o(1)$. Questo equivale a dire che la funzione g non ha differenziale nullo nell'origine, ossia non ha piano tangente orizzontale. In effetti, non è differenziabile, perché non ha derivate parziali nell'origine. Infatti, la funzione g è a simmetria radiale, e quindi tutte le derivate direzionali coincidono. Calcoliamo allora la derivata parziale $D_x^+ g(0, 0)$ nell'origine nella direzione del semiasse x positivo:

$$D_x^+ g(0, 0) := \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x, 0) - g(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

di nuovo dallo sviluppo di Taylor, questa volta dell'esponenziale, al primo ordine. Ora, se calcoliamo la derivata nella direzione del semiasse x negativo, otteniamo di nuovo

$$\begin{aligned} D_x^- g(0, 0) &:= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x, 0) - g(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{e^{|x|}-1}{|x|} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{|x|} - 1 - |x|}{x|x|} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi, nell'origine, le derivate parziali sinistra e destra rispetto a x non coincidono, e quindi non esiste la derivata parziale. Pertanto f non è differenziabile, in base alla condizione necessaria del Teorema 1.22.6.

□

Nota 1.22.11. Possiamo generalizzare quanto osservato per la funzione g nella seconda parte del precedente Esempio 1.22.10. A questo scopo, rammentiamo che, per funzioni di una variabile derivabili e pari, la derivata è dispari (Sezione 1.1), e quindi la derivata nell'origine deve essere nulla. Analogamente, se una funzione g in più variabili è differenziabile nell'origine ed ha simmetria radiale (e quindi è tale che tutte le sue sezioni lungo rette passanti per l'origine sono funzioni pari di una variabile), allora g deve avere derivate direzionali tutte nulle nell'origine. Se per semplicità limitiamo l'attenzione a due sole variabili (ma il caso generale è analogo) e scriviamo di nuovo $h(\rho) = h(\sqrt{x^2 + y^2}) = g(x, y)$, allora questo significa che g non è differenziabile nell'origine a meno che si abbia

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{h(\rho) - h(0)}{\rho} = 0,$$

ossia $h(\rho) = h(0) + o(\rho)$. In particolare, h deve avere derivata nulla in 0.

□

Nota 1.22.12. (Il significato della notazione sul differenziale: forme differenziali esatte.) In questa Nota, poiché dovremo trattare fianco a fianco vettori in \mathbb{R}^n e coordinate, per evitare ambiguità indichiamo in grassetto i vettori in \mathbb{R}^n .

Nel caso particolare di dimensione 1, la notazione che abbiamo introdotto per il differenziale di una funzione nella Definizione 1.22.4 sembra portare, apparentemente, ad una certa ambiguità. Prendiamo ad esempio la funzione

$f(x) = x$: allora il suo differenziale df_{x^0} viene indicato con lo stesso simbolo dx che appare nella notazione per gli integrali. Sappiamo che, in entrambi i casi, questo simbolo trae le sue radici storiche dalla nozione di incremento lineare $x - x^0$: ma abbiamo la capacità di chiarirne la natura formale? Nel caso dell'integrale, il simbolo dx fu introdotto senza una definizione esplicita, più o meno come la parentesi destra di una coppia di parentesi (la parentesi di sinistra essendo il simbolo \int di integrale). Però, nel contesto dell'integrale, al simbolo dx è stata associata una regola di calcolo formale, quella del teorema di cambiamento di variabile, che nel calcolo formale si traduce nella regola simbolica $df(x) = f'(x) dx$, dove f è un cambiamento di variabili di classe C^1 (rimandiamo il lettore al teorema di integrazione per sostituzione nella Sezione 1.1, anche nella forma del successivo Teorema 1.22.1). Nell'ambito di n variabili x_1, \dots, x_n , è possibile introdurre una analoga regola di calcolo formale per una espressione del tipo $f_1(x) dx_1 + \dots + f_n(x) dx_n$, dove f_1, \dots, f_n sono funzioni continue a valori scalari su \mathbb{R}^n , e lo faremo in seguito, parlando di forme differenziali nella Sottosezione 1.29.5 sugli integrali a valori scalari di campi vettoriali lungo curve. Qui, invece, vogliamo concentrarci in via preliminare sulla natura formale di questo concetto (e quindi, in particolare, anche del consueto simbolo dx per l'integrale in una dimensione).

Ritorniamo quindi all'ambiente di \mathbb{R}^n . Dal Teorema 1.22.6 sappiamo che $df_{\mathbf{x}^0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle$. Questo equivale a scrivere $df_{\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} \rangle$ ed a considerare il differenziale al punto \mathbf{x}^0 come il funzionale lineare su \mathbb{R}^n associato al prodotto scalare con il vettore $\nabla f(\mathbf{x}^0)$. Per essere più precisi, qui stiamo applicando il funzionale associato a $\nabla f(\mathbf{x}^0)$ ai vettori dello spazio tangente al grafico di f al punto \mathbf{x}^0 , ma tutti questi spazi tangenti coincidono con l'unico spazio duale $(\mathbb{R}^n)^* \sim \mathbb{R}^n$. Senza addentrarci qui nella terminologia degli spazi affini, possiamo far ricorso ad una terminologia cara ai fisici, che sono interessati a questi concetti perché da essi dipende la modellizzazione del lavoro fatto da un campo di forze su un corpo che si muove lungo una curva (si veda il successivo Esercizio 1.29.40), e pensare come ai vettori in questo spazio tangente al punto \mathbf{x}^0 come vettori *applicati* a \mathbf{x}^0 . Denotiamo con \mathbf{e}_i i vettori della base canonica di \mathbb{R}^n , e con \mathbf{e}_i^* i vettori della base duale in $(\mathbb{R}^n)^*$: ovvero, $\langle \mathbf{e}_j^*, \mathbf{e}_i \rangle = 1$ se $i = j$ e 0 se $i \neq j$. I funzionali \mathbf{e}_i^* sono nient'altro che le proiezioni canoniche sugli assi, nel senso che $\langle \mathbf{e}_i^*, \mathbf{x} \rangle = x_i$ per ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $i = 1, \dots, n$. Con diversa notazione (quella per le funzioni, senza usare prodotti scalari), $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{x}) = x_i$. Qui stiamo ora pensando a \mathbf{e}_i^* come una funzione da \mathbb{R}^n a \mathbb{R} (lineare!), la *funzione coordinata i -esima*: spesso, per semplicità, questa funzione si indi-

ca con x_i . Poiché questa funzione è lineare ed omogenea, essa coincide con il proprio differenziale, ma è naturale indicarne il differenziale con dx_i . Se utilizziamo questa ulteriore notazione, abbiamo

$$df_{\mathbf{x}^0} = \sum_{i=1}^n D_i f(\mathbf{x}^0) \mathbf{e}_i^* = \sum_{i=1}^n D_i f(\mathbf{x}^0) dx_i. \quad (1.57)$$

Al variare di \mathbf{x}^0 la funzione lineare $\mathbf{x}^0 \mapsto df_{\mathbf{x}^0} = \sum_{i=1}^n D_i f(\mathbf{x}^0) dx_i$, da \mathbb{R}^n a $(\mathbb{R}^n)^* \sim \mathbb{R}^n$, si chiama un *forma differenziale esatta*. Più in generale, con questa stessa notazione, data una n -pla di funzioni continue a_1, \dots, a_n su \mathbb{R}^n , la funzione lineare $\mathbf{x}^0 \mapsto \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}^0) dx_i$, da \mathbb{R}^n a $(\mathbb{R}^n)^* \sim \mathbb{R}^n$, si chiama una *forma differenziale lineare*. Per uno studio di questi concetti rinviamo il lettore alla Definizione 1.29.41 ed alle corrispondenti Sottosezioni 1.29.5, 1.29.7, 1.29.8. \square

1.22.2 *Derivata in senso complesso, differenziabilità ed equazioni di Cauchy–Riemann

Anticipiamo qui la definizione di derivata in senso complesso, che verrà studiata in profondità nella Sezione 2.1.

Consideriamo funzioni di variabile complessa e a valori complessi, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Per queste funzioni, la nozione di derivata è quella naturale (essa verrà ripetuta nella Definizione 2.1.1, in un contesto in cui si studieranno le sue proprietà peculiari, che qui non servono).

Definizione 1.22.13. (Derivata in senso complesso.) . Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, e sia z_0 un punto interno al dominio di definizione di f . Si dice che f è derivabile (in senso complesso) al punto z_0 se esiste finito il limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

che in tal caso si chiama la *derivata* di f a z_0 .

1.22.3 Regola della catena, invertibilità locale

Teorema 1.22.14. (Differenziale di funzione composta.) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $x^0 \in A \subset \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ è differenziabile in

$f(x^0) \in B \subset \mathbb{R}^m$, allora la funzione composta $h = g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ è differenziabile in x^0 ed il suo differenziale è la composizione dei differenziali di f e g :

$$dh(x^0) = dg(f(x^0)) df(x^0).$$

Nota 1.22.15. In termini matriciali, la matrice Jacobiana di $f \circ g$ è il prodotto righe per colonne delle matrici Jacobiane di g e f (in questo ordine).

□

Nota 1.22.16. Ovviamente il precedente Teorema 1.22.14 sul differenziale di funzione composta vale anche nel caso di funzioni da $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dove i differenziali sono le applicazioni lineari banali su \mathbb{R} date dalla moltiplicazione per un numero (la derivata di f : in questo caso la regola di derivazione di funzione composta si traduce nel fatto che la derivata di tale funzione è il prodotto delle derivate dei due fattori nei punti corrispondenti: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$). La stessa regola vale per funzioni $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ derivabili in senso complesso (si veda anche la Proposizione ??). □

Corollario 1.22.17. (Regola della catena.) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $B \subset \mathbb{R}^k$ un aperto e $\phi : B \rightarrow A$. Se ϕ è differenziabile in $x^0 \in A$ e f è differenziabile in $y_0 = \phi(x^0) \in A$, la funzione composta $h = f \circ \phi$ ammette tutte le derivate parziali al punto x^0 e per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha

$$D_i h(x^0) = \sum_{k=1}^n D_k f(y^0) D_i \phi_k(x^0).$$

Definizione 1.22.18. (Jacobiano.) Se una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è differenziabile, il determinante della sua matrice Jacobiana $j(x) = \det J(x)$ (Definizione 1.22.8) si chiama la funzione jacobiana, o più brevemente lo *Jacobiano* di f .

Definizione 1.22.19. (Funzioni localmente invertibili.) Siano A e B due aperti in \mathbb{R}^n e f una funzione da A a B . Si dice che f è localmente invertibile in $x \in A$ se esistono un aperto $U \subset A$ contenente x ed un aperto $V \subset B$ contenente $f(x)$ tali che $f : U \rightarrow V$ sia biunivoca. La funzione f è localmente invertibile in A se è localmente invertibile in tutti i punti di A .

Ad esempio, la trasformazione delle coordinate polari, $f_1(r, \theta) = r \cos \theta$, $f_2(r, \theta) = r \sin \theta$, $0 \leq r < \infty$, $\theta \in \mathbb{R}$, non è invertibile perché non è iniettiva

per $r = 0$ (quando $r = 0$, $f_1(r, \theta) = f_2(r, \theta) = 0$ qualunque sia θ). Se si limita il dominio di f all'aperto $r > 0$, di nuovo f non è invertibile perché non è iniettiva: $f(r, \theta + 2\pi) = f(r, \theta)$. Però ora f è localmente invertibile: basta limitare l'attenzione all'aperto $A = \{r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$.

Rinviamo il lettore a [5, 2^{nda} parte, Cap. VII, Sez. 5] per una dimostrazione del risultato seguente:

Teorema 1.22.20. (Invertibilità locale di funzioni differenziabili.)
Siano A e B due aperti in \mathbb{R}^n e f una funzione da A a B di classe $C^1(A)$. Se il determinante jacobiano $j(x)$ è non nullo per un $x \in A$, allora f è localmente invertibile in x e l'inversa è differenziabile e di classe C^1 in un intorno del punto $f(x)$.

Esempio 1.22.21. Nel caso di una funzione da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 , il Teorema di invertibilità locale 1.22.20 ha una visualizzazione geometrica interessante. Fissiamo una delle tre coordinate nel dominio di definizione: allora la mappa f , al variare delle altre due coordinate, descrive una superficie bidimensionale in \mathbb{R}^3 (si tratta di una sezione bidimensionale dell'immagine di f). Ad esempio, consideriamo le coordinate sferiche in \mathbb{R}^3 , che saranno studiate per gli scopi dell'integrazione nel successivo Esercizio 1.22.25, e che sono definite dalla seguente mappa $f : (\rho, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta \sin \varphi \\y &= \rho \sin \theta \sin \varphi \\z &= \rho \cos \varphi,\end{aligned}$$

con $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Fissiamo un valore del parametro $\rho > 0$, che rappresenta la distanza dall'origine. Allora, al variare degli angoli di longitudine θ e di latitudine ϕ , l'immagine di f è la superficie sferica di raggio ρ . Fissiamo $\rho = 1$ per semplicità. Consideriamo le *curve di livello* $\theta = \text{costante}$ o $\varphi = \text{costante}$, ovvero i paralleli

$$\mathbf{p}_\varphi(\theta) = \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \cos \varphi \mathbf{e}_3$$

ed i meridiani

$$\mathbf{m}_\theta(\varphi) = \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \cos \varphi \mathbf{e}_3.$$

Siamo interessati ai vettori tangenti a queste curve, ossia a

$$\mathbf{p}'_\varphi(\theta) = D_\theta \mathbf{m}'_\varphi(\theta) = -\sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2$$

e

$$\mathbf{m}'_{\theta}(\varphi) = D_{\varphi}\mathbf{m}'_{\theta}(\varphi) = \cos\theta \cos\varphi \mathbf{e}_1 + \sin\theta \cos\varphi \mathbf{e}_2 - \sin\varphi \mathbf{e}_3.$$

Se non avessimo posto $\rho = 1$ ora avremmo avuto meridiani e paralleli denotati da $\mathbf{m}_{\rho,\theta}(\varphi)$ e $\mathbf{p}_{\rho,\varphi}(\theta)$, ed i loro vettori tangenti denotati da $\mathbf{m}'_{\rho,\theta}(\varphi)$ e $\mathbf{p}'_{\rho,\varphi}(\theta)$, ma l'unica differenza nelle formule sarebbe solo la moltiplicazione per un fattore ρ .

È facile verificare, e geometricamente ovvio, che questi vettori tangenti, allo stesso punto (θ, φ) della superficie sferica, sono perpendicolari. È anche chiaro che i paralleli per $\varphi = 0$ (polo Nord) e $\varphi = \pi$ (polo Sud) sono curve costanti (i due poli), ed i vettori tangenti sono nulli, come immediatamente verificato visto che $\sin\varphi = 0$ in questi due casi. Quindi, ai due poli, la mappa f non è iniettiva, e quindi non è localmente invertibile.

Per verificare a questi due punti la perdita di invertibilità locale in base all'enunciato del Teorema 1.22.20 occorre calcolare il determinante jacobiano $j(\rho, \theta, \varphi)$ di f .

Lasciamo al lettore la verifica del fatto seguente: $j(\rho, \theta, \varphi)$ è la norma del prodotto vettoriale dei vettori tangenti $\mathbf{m}'_{\rho,\theta}$ e $\mathbf{p}'_{\rho,\varphi}$. Il prodotto vettoriale di questi due vettori tangenti è necessariamente un vettore radiale, ossia perpendicolare alla superficie sferica $\rho = \text{costante}$. lasciamo la lettore il calcolo della sua norma, che risulta essere $\rho^2 \sin\varphi$. Osserviamo che la norma, e quindi il determinante jacobiano, si annullano ai due poli, dove si perde l'invertibilità locale.

In questo esempio, la perdita dell'invertibilità locale è dovuta al fatto che, ai due poli, uno dei due vettori tangenti alle curve di livello diventa nullo. C'è, in generale, un altro modo di perdere l'invertibilità locale. Immaginiamo una superficie di livello che, a differenza della sfera, sia fatta come un nastro che si stringa ad un punto come quando un foglio di carta viene stretto fra due dita. In tal caso i vettori tangenti possono non annullarsi, ma allora devono diventare paralleli, ed il loro prodotto vettore quindi si annulla. \square

1.22.4 Integrazione per cambiamento di variabile

Enunciamo infine il teorema di cambiamento di variabili per l'integrale di Lebesgue in \mathbb{R}^n (denotando con dx la misura di Lebesgue). Questo teorema estende a più dimensioni il Teorema di Integrazione per Sostituzione in una dimensione (Teorema 1.22.1). Nel caso dell'integrale di Riemann, in cui c'è

differenza fra integrali propri ed impropri, il teorema dovrebbe essere enunciato per funzioni su aperti limitati. Per la dimostrazione, assai complessa, rimandiamo a [1, Cap. 15].

Teorema 1.22.22. (Cambiamento di variabili negli integrali multipli.) *Sia A un aperto in \mathbb{R}^n e $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe $C^1(A)$ e tale che il suo determinante jacobiano $j(x)$ sia non nullo per ogni $x \in A$. Se $f \in L^1(\phi(A))$, allora*

$$\int_{\phi(A)} f(x) dx = \int_A f(\phi(t)) |j(t)| dt.$$

Esercizio 1.22.23. (Integrazione in coordinate polari.) Come già visto, la trasformazione è definita sul dominio $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ dalla regola

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta, \end{aligned}$$

e non è invertibile (e neppure localmente invertibile) perché non è iniettiva a $\rho = 0$ (altrove è non solo localmente invertibile, ma anche invertibile. Il dominio dove si perde l'invertibilità ha misura di Lebesgue zero, e quindi il Teorema 1.22.22 continua a valere.

Si calcoli il determinante jacobiano e si provi che vale r . Da qui segue la formula di integrazione in coordinate polari:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \tilde{f}(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta,$$

dove \tilde{f} è la funzione composta $\tilde{f}(\rho, \theta) = f(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))$. □

È immediato trasportare questo esercizio a tre dimensioni:

Esercizio 1.22.24. (Integrazione in coordinate cilindriche.) La trasformazione in coordinate cilindriche con asse z è

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \\ (z &= z). \end{aligned}$$

Provare, come prima, che lo jacobiano vale ρ , e che quindi vale la formula di cambiamento di variabili

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\rho, \theta, z) \rho d\rho d\theta dz .$$

□

Esercizio 1.22.25. (Integrazione in coordinate sferiche.) La trasformazione in coordinate sferiche in tre dimensioni è espressa in termini degli angoli ϕ di latitudine e θ di longitudine (detti *angoli di Eulero*) già introdotti nelle identità (??) come segue:

$$x = \rho \cos \theta \sin \varphi$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = \rho \cos \varphi ,$$

con $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

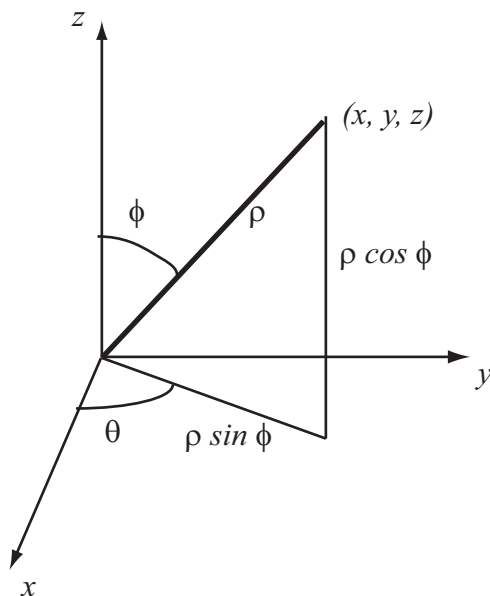


Figura 1.16: Angoli di Eulero e coordinate sferiche

Di nuovo, si perde l'invertibilità, anche locale, nei domini $\varphi = 0$ (polo Nord) e $\varphi = \pi$ (polo Sud), ma questi domini hanno misura nulla e quindi il Teorema di cambiamento di Variabili 1.22.22 continua a valere. Si calcoli lo Jacobiano della trasformazione, che risulta uguale a $\rho^2 \sin \varphi$. Pertanto dal Teorema di Cambiamento di Variabili segue

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \tilde{f}(\rho, \theta, z) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi.$$

Si ottenga lo stesso risultato scomponendo la trasformazione in coordinate sferiche come composizione di trasformazioni in coordinate cilindriche, ed applicando il teorema di composizione per i differenziali, Teorema 1.22.14. \square

1.23 Integrali dipendenti da un parametro

1.23.1 Derivazione sotto il segno di integrale

Cominciamo con il dimostrare una proprietà di derivazione sotto il segno di integrale su un compatto, che in seguito estenderemo a integrali su domini non compatti (quindi impropri, per l'integrale di Riemann).

Teorema 1.23.1. (Derivazione sotto il segno di integrale su un compatto.) Sia R il rettangolo $R = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, e sia f una funzione definita su R tale che, per ogni $c \leq y \leq d$, l'integrale $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ esista finito, e la derivata rispetto a y , $D_2 f$, sia continua su R . Allora F è derivabile per ogni $y \in [c, d]$ e

$$F'(y) = \int_a^b D_2 f(x, y) dx.$$

Dimostrazione. Dal momento che la funzione $D_2 f$ è continua sul compatto R , per il Teorema di Heine sulla uniforme continuità (Teorema 1.8.6), essa è uniformemente continua: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se (x, y) e $(x', y') \in R$ distano meno di δ , allora

$$|D_2 f(x, y) - D_2 f(x', y')| < \varepsilon. \quad (1.58)$$

Per il Teorema del Valor Medio di Lagrange (Sezione 1.1), per ogni $x \in [a, b]$ e $y, y_0 \in [c, d]$ esiste $\eta = \eta(x, y, y_0) \in [y_0, y]$ tale che $f(x, y) - f(x, y_0) = D_2 f(x, \eta)$.

Consideriamo allora il rapporto incrementale di F a y_0 . Si ha:

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} dx = \int_a^b D_2 f(x, \eta) dx .$$

Ora fissiamo $\varepsilon > 0$ ed il δ ad esso associato che rende vera (1.58). Inoltre prendiamo $|y - y_0| < \delta$. Allora anche $\|(x, \eta) - (x, y_0)\| < \delta$ per ogni $x \in [a, b]$; pertanto, per (1.58),

$$\left| \frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b D_2 f(x, y_0) dx \right| \leq \int_a^b |D_2 f(x, \eta) - D_2 f(x, y_0)| dx \leq \varepsilon |b - a| , \quad (1.59)$$

e quindi $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = F'(y_0)$. □

Un argomento analogo porta alla generalizzazione seguente:

Corollario 1.23.2. (Derivazione sotto il segno di integrale su uno spazio di misura finita.) *Sia A un aperto in \mathbb{R} o \mathbb{C} , $[a, b]$ un intervallo in \mathbb{R} , o più in generale $[a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ un pluriintervallo in \mathbb{R}^n , e μ una misura di Borel finita su $[a, b]$. Sia $Q = [a, b] \times A$, e sia f una funzione definita su Q tale che, per ogni $y \in A$, l'integrale $F(y) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x, y) d\mu(x)$ esista finito, e la derivata rispetto a y , $D_2 f$ (nel senso reale se $A \subset \mathbb{R}$ o complesso della Definizione 1.22.13 se $A \subset \mathbb{C}$) sia continua su R . Allora F è derivabile per ogni $y \in A$ e*

$$F'(y) = \int_{[a, b]} D_2 f(x, y) d\mu(x) .$$

Dimostrazione. Fissiamo $y_0 \in A$ e sia $A_0 \subset A$ un disco aperto con centro in y_0 , e $\overline{A_0}$ la sua chiusura, ancora contenuta in A . Procedendo come nella dimostrazione del precedente Teorema 1.23.1, applicata al compatto $Q_0 = [a, b] \times \overline{A_0}$, grazie al Corollario 1.9.31 arriviamo al seguente analogo della

disuguaglianza (1.59),

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} - \int_{[a,b]} D_2 f(x, y_0) d\mu(x) \right| \\ \leq \int_{[a,b]} |D_2 f(x, \eta) - D_2 f(x, y_0)| d|\mu|(x) \leq \varepsilon |\mu|([a, b]), \end{aligned}$$

da cui il risultato segue come prima. \square

Nota 1.23.3. I precedenti risultati di derivazione sotto il segno di integrale (Teorema 1.23.1 e Corollario 1.23.2), così come tutte le loro varianti per integrali impropri, che illustreremo nelle prossime Sottosezioni 1.23.2 e 1.23.3, utilizzano soltanto rapporti incrementali, differenziabilità ed il Teorema del Valor Medio di Lagrange, e quindi valgono anche per derivate in senso complesso (Definizione 1.22.13), qualora il parametro rispetto al quale si deriva sia un parametro complesso. \square

1.23.2 Integrali su domini illimitati, uniformemente convergenti rispetto ad un parametro

Ora estendiamo il risultato di derivazione sotto il segno di integrale della Sottosezione 1.23 al caso di integrali su domini illimitati. Siano $O \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile secondo Lebesgue illimitato, $A \subset \mathbb{R}^m$, $f : O \times A \rightarrow \mathbb{C}$. Per ogni $y \in A$ vogliamo studiare il seguente integrale improprio sul dominio O :

$$F(y) = \int_O f(x, y) dx. \quad (1.60)$$

Definizione 1.23.4. (*Integrale su un dominio illimitato, uniformemente convergente.*) Si dice che l'integrale $F(y)$ in (1.60) è *uniformemente convergente* rispetto a y se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r_0 > 0$, che dipende da ε ma non da y , tale che, per ogni palla $B_r \subset \mathbb{R}^n$ con raggio $r > r_0$ e centro, diciamo, l'origine, si ha

$$\left| \int_{O \setminus B_r} f(x, y) dx \right| < \varepsilon. \quad (1.61)$$

Poniamo $F_r(y) = \int_{B_r} f(x, y) dx$. Allora (1.61) equivale a dire che, per $r \rightarrow \infty$, $F_r(y)$ converge uniformemente rispetto a $y \in A$ all'integrale $F(y)$ in (1.60).

Questa definizione ha varie conseguenze immediate:

Corollario 1.23.5. *Se f è continua in $\overline{O} \times \overline{A}$ e l'integrale in (1.60) è uniformemente convergente, allora F è continua in \overline{A}*

Corollario 1.23.6. *Se in aggiunta alle ipotesi del precedente Corollario 1.23.7 si assume che anche A sia misurabile secondo Lebesgue e se A è limitato o di misura finita oppure se $f \geq 0$, allora*

$$\int_A F(y) dy = \int_A \int_O f(x, y) dy dx = \int_O \int_A f(x, y) dx dy.$$

Lo stesso risultato vale se invece della misura di Lebesgue si considera una misura regolare di Borel assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue (Definizione 1.9.25).

Corollario 1.23.7. *Se f e $D_2 f$ sono continue in $\overline{O} \times \overline{A}$ e l'integrale in (1.60) è convergente per ogni $y \in \overline{A}$ e l'integrale $F_2(y) = \int_O D_2 f(x, y) dx$ è uniformemente convergente, allora (F_2 è continua per il Corollario 1.23.7 e si può scambiare la derivata con l'integrale: per ogni y , $F'(y) = F_2(y)$, cioè*

$$D_2 \int_O f(x, y) dx = \int_O D_2 f(x, y) dx.$$

Lo stesso risultato vale se invece della misura di Lebesgue si considera una misura regolare di Borel assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

Corollario 1.23.8. (Test di Weierstrass per la convergenza uniforme di integrali rispetto a un parametro.) *Se esiste $g \in L^1(O)$ tale che $|f(x, y)| \leq |g(x)|$ per quasi ogni $x \in O$ e per ogni $y \in A$, allora l'integrale $\int_O f(x, y) dx$ è uniformemente convergente.*

Lo stesso risultato vale se invece della misura di Lebesgue si considera una misura regolare di Borel assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

Accenniamo le dimostrazioni di questi risultati. Nelle ipotesi del Corollario 1.23.5 la funzione $f(x, y)$ è continua in $\overline{B_r} \times \overline{A}$. Quindi l'integrale $F_r(y)$ introdotto nella Definizione 1.23.4 è una funzione continua di y e converge uniformemente a $F(y) = \int_O f(x, y) dx$: dal Teorema 1.3.16 (che fu dimostrato per il passaggio al limite rispetto ad un indice discreto, ma la dimostrazione

è analoga in questo caso continuo) segue che F è continua su \overline{A} , e quindi il Corollario.

Analogamente si procede per dimostrare il Corollario 1.23.6, nelle cui ipotesi gli integrali $F_r(y)$ e $F(y)$ sono continui rispetto a $y \in \overline{A}$ ed il primo converge uniformemente al secondo per $r \rightarrow \infty$. Allora $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_A F_r(x) dx = \int_A F(x) dx$ esiste (finito se A è limitato) per il Teorema 1.3.17 (anche in questo caso esteso a passaggi al limite rispetto ad un indice continuo anziché discreto), e nel prodotto cartesiano $B_r \times A$ si può applicare il Teorema di Fubini 1.20.4 (i) se $f \geq 0$ oppure 1.20.4 (ii) se A è limitato o di misura finita per ottenere

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \int_A f(x, y) dy dx &= \int_A \int_{B_r} f(x, y) dx dy = \int_A F_r(y) dy \rightarrow \int_A F(y) dy \\ &= \int_A \int_O f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

da cui il Corollario 1.23.6.

La dimostrazione del Corollario 1.23.7 di derivazione sotto il segno di integrale è del tutto analoga: la dimostriamo qui con un certo dettaglio. Fissiamo $y_0 \in A$ e sia $A_0 \subset A$ un disco aperto con centro in y_0 , e $\overline{A_0}$ la sua chiusura, ancora contenuta in A . Poiché l'integrale si assume uniformemente convergente, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto K in \mathbb{R}^n tale che

$$\left| \int_{O \setminus K} f(x, y) d\mu(x) \right| < \varepsilon.$$

Procedendo come nella dimostrazione del precedente Teorema 1.23.1, applicata al compatto $Q_0 = K \times \overline{A_0}$, grazie al Corollario 1.9.31 arriviamo al seguente analogo della disuguaglianza (1.59),

$$\begin{aligned} &\left| \frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} - \int_O D_2 f(x, y_0) d\mu(x) \right| \\ &< \left| \frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} - \int_K D_2 f(x, y_0) d\mu(x) \right| + \varepsilon \\ &\leq \int_K |D_2 f(x, \eta) - D_2 f(x, y_0)| d|\mu|(x) + \varepsilon \leq \varepsilon (1 + |\mu|(K)), \end{aligned}$$

da cui il risultato segue come prima.

Infine, il test di Weierstrass vale perché, se la funzione maggiorante $g \in L^1(O)$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste r_0 tale che $\int_{O \setminus B_r} |g(x)| dx < \varepsilon$ per

ogni $r > r_0$. Ma allora, poichè $|f(x, y)| \leq |g(x)|$, la stessa disuguaglianza vale per f , e quindi il suo integrale verifica la condizione di uniformemente convergenza data nella Definizione 1.23.4.

1.23.3 Integrali di funzioni con singolarità fisse, uniformemente convergenti

Siano ora $D \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile secondo Lebesgue, $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : D \times U \rightarrow \mathbb{C}$ illimitata, con un unico punto x_0 di singolarità (cioè tale che per ogni palla $B = B_r(x_0)$ con centro x_0 e raggio $r > 0$ arbitrario si ha che f è limitata in $\{D \setminus B\} \times U$). Anche in questo caso, per ogni $y \in U$ vogliamo studiare l'integrale $F(y) = \int_D f(x, y) dx$, come in (1.60).

Definizione 1.23.9. (*Integrale improprio con singolarità al finito uniformemente convergente.*) Si dice che l'integrale $F(y)$ in (1.60) è *uniformemente convergente* rispetto a y se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r_0 > 0$, che dipende da ε ma non da y , tale che, per ogni palla $B = B_r(x_0)$ con centro x_0 e raggio $r < r_0$ si ha

$$\left| \int_{D \setminus B_r} f(x, y) dx \right| < \varepsilon. \quad (1.62)$$

Poniamo $F_r(y) = \int_{D \setminus B_r} f(x, y) dx$. Allora (1.62) equivale a dire che, per $r \rightarrow 0^+$, $F_r(y)$ converge uniformemente rispetto a $y \in U$ all'integrale $F(y)$ in (1.60).

I risultati esposti per gli integrali su domini illimitati dipendenti da un parametro si ripetono in maniera analoga in questo nuovo contesto: la loro formulazione e dimostrazione viene lasciata per esercizio.

1.23.4 Esempio: la funzione Gamma

La funzione Gamma, introdotta da L. Euler, è l'integrale improprio

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

Con $z \in \mathbb{C}$. Questo integrale è improprio sia a causa di una singolarità a $z = 0$ sia perché il dominio di integrazione è illimitato. Consideriamo dapprima il caso in cui z è reale positivo (scriviamo in questo caso s invece

di z). Mostriamo che l'integrale è uniformemente convergente se il parametro s varia in un qualsiasi intervallo finito, $a \leq s \leq b$. A questo scopo spezziamo l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx &= \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \\ &< \int_0^1 x^{a-1} dx + \int_1^\infty x^{b-1} e^{-x} dx < \infty \end{aligned} \quad (1.63)$$

perché $t^s < t^a$ per $0 < a < s$ e $0 < t < 1$, e viceversa $t^s < t^b$ per $s < b$ e $t > 1$. Gli ultimi due integrali sono convergenti perché $a - 1 > -1$ e perché la velocità di decadimento asintotico dell'esponenziale predomina sulla crescita del polinomio (Sezione 1.1). Pertanto l'integrale è uniformemente convergente rispetto al parametro $s \in [a, b]$ in base al test di Weierstrass (Corollario 1.23.8 ed il suo analogo per integrali con singolarità al finito).

La derivata dell'integrando della funzione Γ è $t^{s-1} \ln t e^{-t}$, e l'integrale $\int_0^\infty t^{s-1} \ln t e^{-t} dt$ è uniformemente convergente per lo stesso argomento che abbiamo usato per la funzione Γ .

Ritornando ora al parametro complesso $z = s + iu$ osserviamo che $|t^z| = t^s |t^{iu}| = t^s |e^{iu \ln t}| = t^s$. Pertanto anche gli integrali complessi $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ e $\int_0^\infty t^{z-1} \ln t e^{-t} dt$ sono uniformemente convergenti quando il parametro z verifica la condizione $0 < a \leq \operatorname{Re} z \leq b < \infty$. Quindi, per i teoremi di derivazione sotto il segno di integrale (Corollario 1.23.7 ed il suo analogo per integrali con singolarità al finito) ora sappiamo che la funzione Gamma è derivabile rispetto al parametro sotto il segno di integrale, purché $0 < a \leq \operatorname{Re} z \leq b < \infty$, e si ha

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \ln t e^{-t} dt.$$

Se il parametro z si prende complesso, i calcoli che abbiamo fatto ed i teoremi che abbiamo usato valgono anche per la derivata in senso complesso, grazie alla Nota 1.23.3, e quindi abbiamo provato che, nel range di variabilità del parametro $0 < a \leq \operatorname{Re} z \leq b < \infty$, la funzione Gamma è derivabile in senso complesso. Poiché $a > 0$ è arbitrario, questo prova che la Gamma è derivabile per ogni z con $\operatorname{Re} z > 0$.

Si noti però che l'integrale che definisce la Gamma non è uniformemente convergente se il parametro varia in tutta la semiretta $(0, +\infty)$: in effetti,

non lo è nessuno dei due integrali in cui abbiamo spezzato la Gamma in (1.63). Infatti, per il primo integrale basta notare che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^\varepsilon x^{s-1} e^{-x} dx \geq e^{-\varepsilon} \frac{\varepsilon^s}{s},$$

e per $\varepsilon \rightarrow 0$ l'ultimo membro non tende a zero *uniformemente* rispetto a $s = \operatorname{Re} z$ nel dominio $s > 0$ (tende a zero solo puntualmente).

Analogamente, per il secondo integrale,

$$\int_b^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \geq b^{s-1} \int_b^\infty e^{-x} dx = b^{s-1} e^{-b},$$

e l'ultimo membro tende sì a zero per $b \rightarrow +\infty$ puntualmente per ogni s , ma non uniformemente rispetto a s nel dominio $s > 0$.

1.24 Misura esterna e Lemma di Vitali

Il risultato principale di questa Sezione non viene dimostrato. Si rinvia a [22] per la dimostrazione.

Definizione 1.24.1. (Misura esterna.) Per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}$ consideriamo le successioni numerabili di intervalli aperti I_n tali che $E \subset \cup_n I_n$, e la serie $L = \sum_n m(I_n)$ delle loro lunghezze (finita o infinita). Si definisce *misura esterna* di E l'estremo inferiore $m^*(E)$ di L rispetto a tutte le successioni di intervalli come sopra.

È facile vedere che la misura esterna di un intervallo è la sua lunghezza, e più in generale per ogni insieme misurabile A si ha $m(A) = m^*(A)$; inoltre m^* è subadditiva (la misura esterna dell'unione è minore o uguale della somma delle misure (Proposizione 1.30.4), ma non sempre additiva. Per il lettore interessato, diamo una presentazione della misura esterna nell'Appendice 1.30.

Definizione 1.24.2. Sia $E \subset \mathbb{R}$. Si dice che una famiglia di intervalli \mathcal{I} è un *ricoprimento di Vitali* di E se per ogni $\varepsilon > 0$ e $x \in E$ esiste un intervallo $I \in \mathcal{I}$ che contiene x e di lunghezza minore di ε .

Presentiamo qui due lemmi di ricoprimento, dovuti a Vitali, che giocano un ruolo cruciale, il primo in in analisi matematica, il secondo in teoria della misura.

Lemma 1.24.3. (Lemma di ricoprimento di Vitali.) *Sia $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}$ una famiglia non vuota di intervalli aperti in un insieme K in \mathbb{R} di misura esterna finita (oppure misurabile secondo Lebesgue e di misura finita), o più in generale di palle aperte in un insieme di misura esterna finita in \mathbb{R}^n . Allora esiste una sottofamiglia numerabile $\{B_n\}$ tale che*

$$m(\cup_n B_n) > \frac{1}{4}m(\cup_\alpha B_\alpha)$$

dove m è la misura di Lebesgue (ossia la lunghezza, nel caso unidimensionale).

Dimostrazione. Poiché K ha misura esterna finita, il numero $d_1 := \sup_\alpha m(B_\alpha)$ è finito. Per definizione di estremo superiore, esiste α_1 tale che $m(B_{\alpha_1}) \geq \frac{3}{4}d_1$; per semplicità scriviamo B_1 invece di B_{α_1} .

Dimostriamo la seguente *asserzione*: senza perdita di generalità possiamo supporre che esistano intervalli in \mathcal{B} (o palle, nel caso di dimensione maggiore di 1) disgiunti da B_1 . In effetti, rammentando che ogni intervallo in \mathcal{B} ha lunghezza inferiore a $\frac{4}{3}m(B_1)$, vediamo che, se l'asserzione non fosse vera, l'unione $U := \cup_\alpha B_\alpha$ di tutti gli intervalli sarebbe (nel caso unidimensionale) un intervallo aperto di lunghezza non superiore a $(1 + 2\frac{4}{3})m(B_1) = \frac{11}{3}m(B_1)$, e l'enunciato sarebbe dimostrato (la successione di palle consisterebbe della sola palla B_1). Il fattore 2 è dovuto al fatto che un intervallo unidimensionale ha due punti estremi: nel caso di palle in \mathbb{R}^n con $n > 1$ la disuguaglianza triangolare ci dà un risultato analogo dove il diametro dell'aperto $U = \cup_\alpha B_\alpha$ è inferiore a $\frac{11}{3}m(B_1)$, e quindi $m(U) \leq (\frac{11}{3})^n m(B_1)$. Questo dimostra l'asserzione.

Allora poniamo \mathcal{B}_2 la famiglia di tutte le palle in $\mathcal{B}_1 \equiv \mathcal{B}$ che sono disgiunte da B_1 . Come prima, esiste $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tale che $m(B_2) \geq \frac{3}{4}d_2$, dove $d_2 := \sup\{m(B_\alpha) : B_\alpha \in \mathcal{B}_2\} \leq d_1$. Lo stesso argomento dell'asserzione precedente mostra che, senza perdita di generalità, si può supporre che esistano intervalli (o palle) in \mathcal{B} disgiunti sia da B_1 sia da B_2 . Sia \mathcal{B}_3 la famiglia di tutte le palle che non intersecano né B_1 né B_2 . Poiché $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2$, ogni palla in \mathcal{B}_3 ha misura inferiore a $m(K) - m(B_1) - m(B_2) \leq m(K) - d_1 - \frac{3}{4}d_2$. Ripetendo questa procedura, costruiamo iterativamente una successione disgiunta di intervalli (o palle) $B_n \in \mathcal{B}$ di misura che tende a zero. Mostriamo che questa successione verifica la disuguaglianza dell'enunciato.

Poiché $m(B_n)$ tende a zero e $\sup\{m(B) : B \in \mathcal{B}_n\} \leq d_n \leq \frac{4}{3}m(B_n)$, nessuna palla $B \in \mathcal{B}$ può appartenere a tutte le sottofamiglie \mathcal{B}_n , ma appartiene solo ad un numero finito di esse. Sia $B \in \mathcal{B}$ e \tilde{B}_n la palla concentrica a B_n ma

di diametro quadruplo. Sia n il *più piccolo* intero tale che $B \notin \mathcal{B}_n$ (ossia, per costruzione, tale che B interseca B_{n-1}). Allora B sta in \mathcal{B}_{n-1} , e quindi $m(B) \leq \frac{4}{3}m(B_{n-1})$. Consideriamo il caso unidimensionale: in tal caso, come visto prima, ogni intervallo che interseca B_{n-1} ed ha diametro inferiore a $\frac{4}{3}$ del diametro di B_{n-1} è contenuto in un intervallo concentrico a B_{n-1} e di diametro inferiore a $\frac{11}{3}$ del diametro di B_{n-1} , e quindi, siccome $\frac{11}{3} < 4$, deve essere strettamente contenuto in \tilde{B}_{n-1} . Anche nel caso multidimensionale, come accennato sopra, si applica questo ragionamento e vale la stessa inclusione. Quindi ogni $B \in \mathcal{B}$ è contenuto in $\cup_n \tilde{B}_n$, e quindi

$$m(\cup_\alpha B_\alpha) < m(\cup_n \tilde{B}_n) \leq m(\cup_n B_n).$$

□

Nota 1.24.4. La scelta del fattore $1/4$ nel precedente Lemma di ricoprimento di Vitali 1.24.3 può apparire arbitraria ed innaturale. Quanto si può migliorare? Supponiamo di voler provare che, per qualche $0 < \eta < 1$, vale la disuguaglianza $m(\cup_n B_n) > \eta m(\cup_\alpha B_\alpha)$ per una opportuna successione B_n costruita con l'argomento del Lemma. Questo è possibile, ma le scelte delle costanti diventano meno naturali e semplici. In effetti, il fattore $11/3$ nell'asserzione fatta nella dimostrazione del Lemma si trasformerebbe in $1 + \frac{2}{\eta} = \frac{2+\eta}{\eta}$, e quindi nella definizione dei B_n occorrerebbe richiedere $m(B_n) \geq \frac{\eta}{2+\eta} d_n$. Ad esempio, se si sceglie $\eta \approx 1$, allora questo ultimo fattore si avvicina a $1/3$. □

Corollario 1.24.5 (Vitali). *Sia $E \subset \mathbb{R}$ di misura esterna finita e \mathcal{B} un ricoprimento di Vitali di E . Allora per ogni ε esiste una famiglia finita B_1, \dots, B_N di intervalli in \mathcal{B} tale che $m^*[E \setminus \cup_{n=1}^N B_n] < \varepsilon$.*

Dimostrazione. L'insieme $E_0 := \cup_\alpha B_\alpha$ è un aperto (perché unione di intervalli) di misura finita perché contenuto in E . Per il precedente Lemma di Vitali 1.24.3, esiste una sottofamiglia numerabile $\{B_n\}$ di $\{B_\alpha\}$ tale che, ponendo $E_1 := \cup_\alpha B_\alpha \setminus \cup_n B_n$, si ha $m(E_1) < \frac{3}{4}m(E_0)$. Poiché $\cup_n B_n$ ha misura finita, per ogni $\eta > 0$ esiste una sottofamiglia finita $\{B_{n_1}, B_{n_k}\}$ tale che $m(\cup_{n=1}^\infty B_n \setminus \cup_{j=1}^k B_{n_j}) < \eta$: in particolare, esiste una tale sottofamiglia tale che, ponendo $E_1^0 := \cup_\alpha B_\alpha \setminus \cup_{j=1}^k B_{n_j}$, si ha $m(E_1^0) < \frac{4}{5}m(E_0)$. Poiché $\{B_\alpha\}$ è un ricoprimento di Vitali di E , la sottofamiglia $\{B_\beta\}$ di $\{B_\alpha\}$ che consiste di tutte gli intervalli che non sono contenuti in $\cup_{j=1}^k B_{n_j}$ è un

ricoprimento di Vitali di E_1^0 , ed iterando il ragionamento troviamo una sottofamiglia finita $\{B_{m_1}, B_{m_i}\}$ di $\{B_\beta\}$ tale che $m(E_1^0 \setminus \cup_{j=1}^l B_{m_j}) < \frac{4}{5}m(E_1^0) < (\frac{4}{5})^2 m(E_0)$. Ora uniamo le due sottofamiglie finite per produrre una nuova sottofamiglia finita $\{B_{i_1}, B_{i_r}\} = (\cup_{j=1}^k B_{n_j}) \cup (\cup_{p=1}^l B_{m_p})$ con la proprietà che $E_2 := E_0 \setminus \cup_{q=1}^r B_{i_q}$ ha misura inferiore a $(\frac{4}{5})^2 m(E_0)$. Per ricorrenza, per ogni N costruiamo così una sottofamiglia finita $\{B_{s_1}, B_{s_t}\}$ tali che $m(E_0 \setminus \cup_{u=1}^t B_{s_u}) < (\frac{4}{5})^N m(E_0)$. Basta scegliere N tale che $(\frac{4}{5})^N < \varepsilon$ per avere l'enunciato. \square

1.25 Derivabilità di funzioni monotòne

Per ogni funzione f ci sono quattro modi di definire la sua derivata ad ogni punto x interno al suo dominio di definizione: due derivate destre,

$$D^+ f(x) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D_+ f(x) = \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e due derivate sinistre,

$$D^- f(x) = \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$D_- f(x) = \liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Diciamo che f è *derivabile* in x se queste quattro derivate sono finite ed uguali, ed in tal caso scriviamo f' per il valore comune delle quattro derivate. È chiaro che per una funzione f continua in un intervallo il fatto che una delle quattro derivate sia sempre non negativa implica che f è non decrescente. Viceversa:

Teorema 1.25.1. *Sia f non decrescente in $[a, b]$. Allora f è derivabile quasi ovunque con derivata f' finita. Inoltre f' è misurabile, e*

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a).$$

Dimostrazione. Dobbiamo provare che la misura di Lebesgue dell'insieme dove due qualsiasi delle quattro derivate sono diverse è nulla. Mostriamo solo che ha misura nulla l'insieme $E = \{x : D^+f(x) > D_-f(x)\}$: gli altri insiemi analogamente associati alle derivate ed al segno di minore si trattano allo stesso modo. Sia

$$E_{u,v} = \{x : D^+f(x) > u > v > D_-f(x)\}.$$

Poiché E coincide con l'unione numerabile $\cup_{u,v \in \mathbb{Q}} E_{u,v}$ basta provare che il numero $s = m^*(E_{u,v})$ vale 0 per tutti i razionali u, v .

Per $\varepsilon > 0$ troviamo un aperto $O \supset E_{u,v}$ con $m(O) = m^*(O) < s + \varepsilon$ (esiste grazie alla Definizione 1.24.1 di misura esterna). Per ogni $x \in E_{u,v}$, il fatto che O sia aperto e $D_-f(x) < v$ implica che, per h sufficientemente piccolo, $[x-h, x] \subset O$ e $f(x) - f(x-h) < vh$. Questi intervalli, al variare di x e h , formano un ricoprimento di Vitali di $E_{u,v}$ (Definizione 1.24.2). Pertanto il Lemma di Vitali ?? assicura che le parti interne di un numero finito di essi, diciamo $I_n = (x_n - h_n, x_n)$, $n = 1, \dots, N$, coprono un sottoinsieme $A \subset E_{u,v}$ con $m^*(A) \leq s - \varepsilon$. Allora

$$\sum_{n=1}^N f(x_n) - f(x_n - h_n) < v \sum_{n=1}^N h_n < v \cdot m(O) < v \cdot (s + \varepsilon).$$

D'altra parte, poiché $D^+f(x) > u$, per ogni $y \in A$ esiste $k > 0$ sufficientemente piccolo affinché $(y, y+k)$ sia contenuto in qualche I_n e valga la disuguaglianza $f(y+k) - f(y) > uk$. Come prima, il Lemma di Vitali ci permette di trovare una famiglia finita J_1, \dots, J_M di tali intervalli la cui unione contiene un sottoinsieme di A di misura esterna minore di $s - \varepsilon$. Sommando su di essi si trova

$$\sum_{i=1}^M f(y_i + k_i) - f(y_i) > v \sum_{i=1}^M k_i > u \cdot (s - \varepsilon).$$

Per ogni n sommiamo ora solo sugli intervalli $J_i \subset I_n$. Allora, poichè f è crescente,

$$\sum [f(y_i + k_i) - f(y_i)] \leq f(x_n) - f(x_n - h_n).$$

Adesso sommiamo su n e troviamo

$$v \cdot (s + \varepsilon) > \sum_{n=1}^N f(x_n) - f(x_n - h_n) \geq \sum_{i=1}^M f(y_i + k_i) - f(y_i) > u \cdot (s - \varepsilon).$$

Poiché ε è arbitrario, questa disuguaglianza implica $vs \geq us$: ma allora, visto che si ha $v < u$, deve essere $s = 0$. Abbiamo quindi provato che $g(x) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ esiste quasi ovunque. Laddove g è finita f è derivabile e $f'(x) = g(x)$.

Mostriamo ora che g è misurabile e finita quasi ovunque. Poniamo $g_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$ (ovviamente qui si intende $f(x) = f(b)$ se $x > b$). Abbiamo appena visto che $g_n(x) \rightarrow g(x)$ per quasi ogni x : quindi g è misurabile per la Nota 1.9.41. Inoltre $g_n > 0$ perché f è crescente: quindi possiamo applicare il Lemma di Fatou (Teorema 1.9.52) ed ottenere

$$\begin{aligned} \int_a^b g &\leq \liminf \int_a^b g_n = \liminf n \int_a^b f(x + \frac{1}{n}) - f(x) dx \\ &= \liminf \left(n \int_b^{b+1/n} f - n \int_a^{a+1/n} f \right) = f(b) - \liminf \left(n \int_a^{a+1/n} f \right) \\ &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal Teorema della Media Integrale (Sezione 1.1) perché f è crescente in $[a, a + \frac{1}{n}]$. Quindi g è integrabile con integrale finito, e pertanto deve essere finita quasi ovunque. Pertanto $f' = g$ esiste finita quasi ovunque, ed inoltre vale la disuguaglianza dell'enunciato.

□

Nota 1.25.2. Si osservi che in generale, per funzioni monotòne discontinue, la disuguaglianza $\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a)$ del Teorema 1.25.1 non è una uguaglianza. Per costruire un esempio basta prendere $f = 0$ in $[-1, 0]$ e $f = 1$ in $(0, 1]$: allora f' è definita e vale 0 in $[-1, 1]$ eccetto che nel punto 0 dove non è definita, ma $f(1) - f(-1) = 1$. □

Nota 1.25.3. Alcune proprietà della misura di Lebesgue in rapporto ad insiemi chiusi ed aperti diventano caratterizzazioni in termini della misura esterna di Lebesgue. In particolare, il Lemma 1.9.33 si estende al seguente enunciato, che non viene utilizzato in questo libro e che, pertanto, non dimostriamo (per la dimostrazione si veda [22, Cap.3, Sez.3, Prop.15]):

Per un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$ le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) E è misurabile

(ii) per ogni $\delta > 0$ esiste un aperto $O \supset E$ tale che $m^*(O \setminus E) < \delta$

(iii) per ogni $\delta > 0$ esiste un chiuso $C \subset E$ tale che $m^*(E \setminus C) < \delta$.

□

1.26 Funzioni di variazione limitata

Definizione 1.26.1. (Variazione totale e funzioni di variazione limitata.) Usiamo la seguente terminologia: per ogni numero reale a scriviamo $[a]^+ = \max\{a, 0\}$ $[a]^- = -\min\{a, 0\}$: quindi $[a]^+, [a]^- \geq 0$ e $a = [a]^+ - [a]^-$. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ una partizione finita di $[a, b]$. Chiamiamo

$$p = \sum_{i=1}^k [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+$$

la *variazione positiva* di f rispetto a questa partizione,

$$n = \sum_{i=1}^k [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-$$

la *variazione negativa*, e $t = p + n$ la *variazione totale*. È evidente che

$$p - n = f(b) - f(a) \tag{1.64}$$

(si tratta della somma telescopica delle differenze consecutive dei valori di f sui punti della partizione). Ora poniamo $P = P_a^b = \sup p$, $N = N_a^b = \sup n$ e $T_f = T = T_a^b = \sup t$, dove gli estremi superiori sono presi rispetto a tutte le partizioni finite di $[a, b]$. Questi tre numeri si chiamano, rispettivamente, la *variazione positiva*, *negativa* e *totale* di f sull'intervallo $[a, b]$. Se $T < \infty$ si dice che f è di *variazione limitata* in $[a, b]$ e si scrive $f \in BV[a, b]$ e $T := \text{Var}_f[a, b]$.

Stabiliamo una definizione identica per le funzioni definite su un intervallo $[a, b]$ ma a valori in \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n , semplicemente rimpiazzando il valore assoluto con la norma euclidea (o qualunque altra: sono tutte equivalenti a dimensione finita!).

Una definizione analoga si applica a funzioni definite su tutto \mathbb{R} .

Esercizio 1.26.2. Dalla Definizione segue che $P \leq T \leq P + N$; è immediato provare che

$$T = P + N$$

e

$$f(b) - f(a) = P - N. \quad (1.65)$$

□

Nota 1.26.3. È ovvio che le funzioni di variazione limitata in un intervallo sono limitate. Il viceversa non è vero, come mostra il prossimo Esempio 1.26.4. □

Esempio 1.26.4. Non tutte le funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato sono a variazione limitata. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

non è monotona a tratti nell'intervallo $[0, 1]$, perché oscilla attorno all'asse x un numero illimitato di volte quando $x \rightarrow 0^+$, però è continua in $[0, 1]$: l'unico punto in cui la continuità non è ovvia è il punto $x = 0$ dove segue dal Teorema del Confronto (Sezione 1.1). Essa non è a variazione limitata

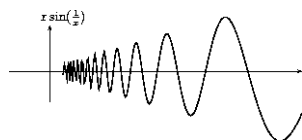


Figura 1.17: La funzione $x \sin \frac{1}{x}$ non è a variazione limitata

nell'intervallo $[0, 1]$. Infatti, per $k > 0$ consideriamo i punti

$$x_{2k+1} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

nei quali il grafico della funzione è tangente a quello della bisettrice del primo quadrante (quindi $f(x_{2k+1}) = x_{2k+1}$), ed i punti

$$x_{2k} = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$$

nei quali il grafico è tangente all'altra bisettrice (quindi $f(x_{2k}) = -x_{2k}$). Agli estremi dell'intervallo $[y_k, x_k]$ la funzione f ha segni opposti, e quindi la sua variazione totale in quest'intervallo è non inferiore a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_{2k+1}) - f(x_{2k})| = \sum_{k=1}^{\infty} |f(x_{2k+1})| + |f(x_{2k})| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{2k+1}| + |x_{2k}|$$

Poiché $|x_{2k+1}| + |x_{2k}| = O(\frac{1}{k})$, la serie diverge. \square

Esercizio 1.26.5. Si svolga lo stesso calcolo del precedente Esempio 1.26.4 per la funzione $f(0) = 0$ e $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ per $x \neq 0$ e si dimostri che questa funzione è di variazione limitata (la stima finale diventa $|x_{2k+1}| + |x_{2k}| = O(1/k^2)$). \square

Teorema 1.26.6. $f \in BV[a, b]$ se e solo se f la differenza di due funzioni monotone limitate definite su $[a, b]$.

Dimostrazione. Per $x \in [a, b]$ poniamo $g(x) = P_a^x$ e $h(x) = N_a^x$. Allora g e h sono funzioni monotone non decrescenti, entrambe con valori finiti, ossia limitate, perché $0 \leq P_a^x \leq T_a^x \leq T_a^b < \infty$ dal momento che $f \in BV$, ed analogamente per N_a^x . Inoltre, grazie a (1.65), si ha $f(x) = f(a) + g(x) - h(x)$, ed quindi f è la differenza delle due funzioni monotone $f(a) + g$ e h .

Viceversa, se $f = g - h$ su $[a, b]$ con g e h non decrescenti definite (e quindi finite) su $[a, b]$, allora per ogni partizione finita $\{x_1, \dots, x_k\}$ di $[a, b]$ si ha, come in (1.64),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^k |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^k |h(x_i) - h(x_{i-1})| \\ &= g(b) - g(a) + h(b) - h(a) \end{aligned}$$

e quindi $T_a^b(f) \leq g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < \infty$. \square

Corollario 1.26.7. Se la funzione f , definita su un intervallo $[a, b]$ o su tutto \mathbb{R} , è di variazione limitata, allora per ogni x_0 nel dominio di definizione di f esistono i limiti destro e sinistro $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f$. Tali limiti sono finiti se f è limitata in un intorno di x_0 .

Dimostrazione. Questo fatto è vero per le funzioni monotone, grazie all'esistenza dei loro limiti (Sezione 1.1), e quindi anche per le funzioni di variazione limitata, grazie al precedente Teorema 1.26.6. \square

Grazie al Teorema 1.25.1, ora otteniamo immediatamente:

Corollario 1.26.8. *Se f è di variazione limitata in $[a, b]$, allora la derivata f' esiste finita quasi ovunque su $[a, b]$.*

Corollario 1.26.9. *Una funzione di variazione limitata in $[a, b]$ appartiene a $L^1[a, b]$.*

Dimostrazione. Questo segue immediatamente dal Teorema 1.26.6, perché le funzioni monotone e limitate in $[a, b]$ sono integrabili in $[a, b]$ con integrale finito (si veda la Sezione 1.1). \square

1.27 *Il teorema fondamentale del calcolo

Questa e le restanti sezioni di questo Capitolo non sono necessarie per il seguito, e sono incluse solo per completezza.

La forma elementare del Teorema Fondamentale del Calcolo è ben nota:

Teorema 1.27.1. (Teorema Fondamentale del Calcolo per l'integrale di Riemann, ossia per funzioni $C^1[a, b]$.)

(i) (Derivata dell'integrale.) *Sia f è di classe C^1 (cioè derivabile con derivata continua) su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e $a, x \in I$. Allora*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

(ii) (Integrale della derivata.) *Viceversa, se per ogni $a \leq x \leq b$ vale l'identità*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t) dt$$

per qualche g continua su $[a, b]$, allora f è di classe C^1 e $f' = g$ per ogni x in $[a, b]$. (In questo enunciato, l'addendo $-f(a)$ a primo membro è messo per eleganza e simmetria: l'enunciato resta vero anche eliminando questo addendo, o sostituendolo con qualsiasi altra costante, perché in tal modo il valore della derivata f' non cambia.)

In questa Sezione dimostriamo tale teorema nelle seguenti ipotesi molto più generali.

Sia f integrabile su $[a, b]$ e consideriamo il suo integrale indefinito

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1.66)$$

dove $a \leq x \leq b$. Generalizziamo il Teorema 1.27.1 (i) mostrando che la derivata dell'integrale è quasi ovunque uguale all'integrando: $F' = f$ quasi ovunque (Teorema 1.27.6). Vedremo nel Teorema 1.27.5 che il viceversa, cioè l'asserzione analoga sull'integrale della derivata, vale se la derivata è limitata.

Anzitutto mostriamo che l'integrale di una funzione non negativa è *assolutamente continuo*, nel senso seguente (si veda anche Sezione 1.28):

Lemma 1.27.2. *Se f è una funzione integrabile (cioè con integrale di Lebesgue finito) su un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $A \subset E$ con $m(A) < \delta$, si ha*

$$\int_A |f| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità dimostriamo l'enunciato per $|f|$ invece che f , cioè assumiamo $f \geq 0$. L'enunciato è ovvio se f è limitata (in tal caso $\delta = \varepsilon/\|f\|_\infty$). Se invece non lo è, definiamo il suo troncamento f_n come $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Allora $0 \leq f_n \leq n$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per ogni $x \in E$. Per il Teorema di Convergenza Monotona 1.9.53 si ha $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$. Sia allora N tale che $\int_E f - f_N < \varepsilon/2$, e scegliamo $\delta < \varepsilon/2N$. Ora si ha

$$\int_A f = \int_A f - f_N + \int_A f_N < \int_E f - f_N + Nm(A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Lemma 1.27.3. *Per ogni f integrabile (con integrale finito) su $[a, b]$, la funzione F in (1.66) è continua e di variazione limitata su $[a, b]$.*

Dimostrazione. La continuità è il Lemma 1.27.2. Il fatto che F sia di variazione limitata è una conseguenza immediata della seguente disuguaglianza, che vale per ogni partizione $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$:

$$\sum_{i=1}^k |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt.$$

□

Lemma 1.27.4. *Se f è integrabile su $[a, b]$ e $\int_a^x f(t) dt = 0$ per ogni $a \leq x \leq b$, allora $f(x) = 0$ quasi ovunque.*

Dimostrazione. Una funzione è integrabile se e solo se lo sono le parti positive e negative della sua parte reale ed immaginaria (si riveda la Definizione 1.9.47). Quindi basta dimostrare l'enunciato per $f \geq 0$. In tal caso, supponiamo che $f > 0$ su un insieme E di misura di Lebesgue $m(E) > 0$ e deduciamone una contraddizione.

Poiché $m(E) > 0$, sappiamo dal Lemma 1.9.33 di poter trovare un chiuso $C \subset E$ con $m(C) > 0$. Osserviamo che il fatto che $f > 0$ sul chiuso C implica $\int_C f > 0$. Allora, poiché $\int_a^b f = 0$, se consideriamo l'aperto $O = (a, b) \setminus C$ deve valere $\int_O f = -\int_C f < 0$. Per il Lemma 1.9.3 (i) O si decompone come unione disgiunta di una famiglia numerabile di intervalli aperti (a_n, b_n) . Segue dal Teorema di Convergenza Monotona 1.9.53 che $\int_O f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} f$. Perciò almeno uno degli addendi è non nullo, diciamo $\int_{a_{n_0}}^{b_{n_0}} f \neq 0$. Ma allora

$$\int_a^{b_{n_0}} f - \int_a^{a_{n_0}} f = \int_{a_{n_0}}^{b_{n_0}} f \neq 0,$$

e quindi almeno uno fra $\int_a^{a_{n_0}} f$ e $\int_a^{b_{n_0}} f$ è non nullo, il che contraddice l'ipotesi. \square

Il prossimo lemma estende a L^∞ il Teorema Fondamentale del Calcolo 1.27.1):

Lemma 1.27.5. (Teorema Fondamentale del Calcolo per funzioni (con derivata in) L^∞ .) *Sia $f \in L^\infty[a, b]$ e $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$. Allora $F' = f$ quasi ovunque in $[a, b]$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 1.27.3 F è continua e di variazione limitata in $[a, b]$, e quindi F' esiste finito quasi ovunque per il Corollario 1.26.8. Quindi, se consideriamo il rapporto incrementale di passo $\frac{1}{n}$, $f_n(x) = n(F(x + \frac{1}{n}) - F(x))$, sappiamo che $\lim_n f_n(x) = F'(x)$ quasi ovunque. D'altra parte, per come F è definita si ha $f_n(x) = n \int_x^{x+1/n} f(t) dt$, da cui $|f_n| \leq \|f\|_\infty$. Pertanto, per il Teorema di Convergenza Dominata (Teorema 1.9.54), per ogni $a \leq y \leq b$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_a^y F'(x) dx &= \lim_n \int_a^y f_n(x) dx = \lim_n n \int_a^y F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) dx \\
&= \lim_n \left(n \int_y^{y+1/n} F(x) dx - n \int_a^{a+1/n} F(x) dx \right) \\
&= F(y) - F(a) = \int_a^y f(x) dx
\end{aligned}$$

grazie al Teorema della Media Integrale (Sezione 1.1) ed al fatto che F è continua. Ora sappiamo che per ogni $y \in [a, b]$ si ha $\int_a^y (F'(x) - f(x)) dx = 0$, e quindi l'enunciato segue dal Lemma 1.27.4. \square

Finalmente possiamo estendere la parte (i) del Teorema Fondamentale del Calcolo 1.27.1 al contesto più generale.

Teorema 1.27.6. (Teorema Fondamentale del Calcolo per funzioni (con derivata in) $L^1[a, b]$.) Sia $f \in L^1[a, b]$ e $F(x) = f(a) + \int_a^x f(t) dt$. Allora $F' = f$ quasi ovunque in $[a, b]$. (Qui a è un punto di Lebesgue di f , definito nel Teorema 1.9.37, e quindi in a è definito il valore di f , ma in alternativa basta scegliere $f(a)$ a piacere, visto che la scelta non influenza la derivata di F).

Dimostrazione. Come già osservato nella dimostrazione del Lemma 1.27.4, basta dimostrare l'enunciato per $f \geq 0$. Osserviamo anzitutto che questo significa che F è non decrescente. Come nella dimostrazione del Lemma 1.27.2, indichiamo con f_n il troncamento di f al di sotto di n : $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Allora $\lim_n f_n = f$; inoltre $f - f_n \geq 0$ e quindi l'integrale

$$G_n(x) = \int_a^x f - f_n$$

è monotona non decrescente. Grazie al Teorema 1.25.1, G'_n esiste quasi ovunque, finita e non negativa. D'altra parte, f_n è limitata, e quindi, dal Lemma 1.27.5, $D_x \int_a^x f_n = f_n(x)$ per quasi ogni x . Pertanto, per quasi ogni $x \in [a, b]$,

$$F'(x) = D_x G_n + D_x \int_a^x f_n \geq f_n(x).$$

Ora facciamo tendere n a infinito, ed otteniamo $F'(x) \geq f(x)$ quasi ovunque. Da qui segue

$$\int_a^b F'(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

D'altra parte, poiché F è non decrescente, $\int_a^b F'(x) dx \leq F(b) - F(a)$ per il Teorema 1.25.1. Quindi

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

e pertanto $\int_a^y (F'(x) - f(x)) dx = 0$. Anche questa volta l'enunciato segue quindi dal Lemma 1.27.4. \square

Nota 1.27.7. La seconda parte del Teorema Fondamentale del Calcolo (cioè l'enunciato del Teorema 1.27.1 (ii)) non vale in un ambito così generale: non è vero che, se una funzione g è derivabile quasi ovunque e $g' \in L^1[a, b]$, allora per ogni $x \in [a, b]$ si ha $g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t) dt$. Ad esempio, sia g la funzione definita nell'intervallo $[-1, 1]$ che vale 0 in $[-1, 0)$ e 1 in $[0, 1]$. Allora g' è definita ovunque in $[-1, 1]$ tranne che nell'origine, e $g' = 0$ (quasi ovunque). Quindi la funzione integrale $\int_{-1}^x g'(t) dt$ è la funzione identicamente nulla, e non coincide con g .

Un problema interessante, che proponiamo al lettore, è decidere se una funzione g derivabile *ovunque* in un intervallo $[a, b]$ con derivata in $L^1[a, b]$ sia l'integrale della propria derivata. Una risposta parziale è più sotto nel Teorema 1.28.9. \square

1.28 *Funzioni assolutamente continue

Definizione 1.28.1. Una funzione f definita in un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a valori reali si dice *assolutamente continua* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni famiglia finita di intervalli disgiunti $[x_i, y_i]$ con lunghezza totale $\sum_{i=1}^n |y_i - x_i| < \delta$, si abbia $\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$.

Stabiliamo una definizione identica per le funzioni definite su un intervallo $[a, b]$ ma a valori in \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n , semplicemente rimpiazzando il valore assoluto con la norma euclidea (o qualunque altra: sono tutte equivalenti a dimensione finita!).

Nota 1.28.2. È chiaro che le funzioni assolutamente continue formano uno spazio vettoriale contenuto in quello delle funzioni continue. Inoltre, grazie al Lemma 1.27.2, tutti gli integrali indefiniti (di integrandi continui) sono assolutamente continui. Una condizione sufficiente per la assoluta continuità è ovvia: che f sia derivabile ovunque con derivata limitata. Infatti sotto questa ipotesi il Teorema di Lagrange (Sezione 1.1) implica immediatamente la disuguaglianza di Lipschitz introdotta in (??),

$$|f(y_i) - f(x_i)| \leq M |y_i - x_i|$$

per ogni x_i e y_i , con $M = \|f'\|_\infty$, ed è ovvia l'osservazione che *la disuguaglianza di Lipschitz (??) implica la assoluta continuità*, e questo dimostra quanto appena asserito: *se f è derivabile ovunque e $f' \in L^\infty$, allora f è assolutamente continua.*

Studieremo in maggior dettaglio la disuguaglianza di Lipschitz nella Sezione 5.11, e riprenderemo questa semplice osservazione nel Corollario ??).

Per lo stesso motivo, una funzione continua e C^1 a tratti (si veda la Definizione 5.11.8 che diamo nel seguito) in un intervallo $[a, b]$ è assolutamente continua; analogamente, lo è una funzione continua e C^1 a tratti su \mathbb{R} con punti di singolarità isolati per la derivata (cioè privi di punti di accumulazione). \square

Esempio 1.28.3. Non tutte le funzioni continue in un intervallo sono assolutamente continue. Si consideri la funzione dell'Esempio 1.26.4: abbiamo visto che essa è continua in $[0, 1]$. Questa funzione è derivabile con continuità in ogni intervallo $[a, 1]$ con $0 < a < 1$, e quindi è assolutamente continua in questi intervalli, grazie alla precedente Nota 1.28.2: però non è assolutamente continua in $[0, 1]$. Per verificarlo, si considerino i punti x_k introdotti nell'Esempio 1.26.4, nei quali il grafico della funzione è alternativamente tangente alle due bisettrici degli assi. Abbiamo visto che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ è divergente, e più precisamente che il termine generale tende a zero per $k \rightarrow \infty$ esattamente come $\frac{1}{k}$. Pertanto le somme parziali $s_{m,n} = \sum_{k=m}^n |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ con $n > m$ divergono per ogni m quando n tende ad infinito: quindi, fissato un qualsiasi $\varepsilon > 0$, comunque si scelga m esiste $n = n_\varepsilon$ tale che $s_{m,n} > \varepsilon$. D'altra parte, $x_0 = \frac{2}{\pi}$ ed i punti $\{x_k, k = 0, \dots, \infty\}$ costituiscono una partizione (infinita) dell'intervallo $[0, \frac{2}{\pi}]$. Perciò la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k - x_{k+1}$ è la lunghezza di questo intervallo, e quindi converge. Ne segue che le somme parziali $r_{m,n} = \sum_{k=m}^n |x_{k+1} - x_k|$ con $n > m$ tendono a zero se m tende ad infinito: ossia, per ogni $\delta > 0$,

esiste $m = m_\delta$ tale che $r_{m,n} < \delta$ per ogni $n > m$. Questo significa che, per ogni ε fissato, comunque si scelga $\delta > 0$ la sottosuccessione finita costituita dai punti x_k per $m_\delta \leq k \leq n_\varepsilon$ non verifica la disuguaglianza della Definizione 1.28.1 di assoluta continuità. \square

Esercizio 1.28.4. Le funzioni assolutamente continue sono anche continue, mentre i limiti puntuali di funzioni continue non sempre lo sono. Allora, se f_j sono funzioni assolutamente continue che convergono puntualmente ad una funzione f , non può essere vero in generale che f sia assolutamente continua. Eppure, se i punti x_i e y_i sono quelli scelti nella Definizione 1.28.1, si ha $\lim_j f_j(y_i) = f(y_i)$ e $\lim_j f_j(x_i) = f(x_i)$, quindi in particolare

$$\lim_j \sum_{i=1}^n |f_j(y_i) - f_j(x_i)| = \sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)|.$$

A prima vista sembra quindi che la disuguaglianza della Definizione 1.28.1 valga non solo per le f_j ma anche per il loro limite puntuale f , e che quindi anche f sia assolutamente continua: ma abbiamo visto che questo in generale non è vero. Dov'è l'errore? (*Suggerimento:* nella definizione di assoluta continuità, δ dipende solo da ε ?) \square

Esempio 1.28.5. Limiti uniformi di successioni di funzioni assolutamente continue non sono necessariamente assolutamente continui. Si consideri la funzione dei precedenti Esempi 1.26.4 e 1.28.3, e la si consideri definita in un intervallo $[0, a]$ per qualche $a > 0$ (oppure $[0, +\infty)$). Essa si annulla ai punti $x_n = \frac{1}{n\pi}$, una successione che converge a 0. Approssimiamo f con la funzione f_n su $[0, a]$ definita da $f_n(x) = 0$ se $x \geq x_n$ e $f_n(x) = f(x)$ altrimenti. Allora $f - f_n$ è nulla al di fuori di $[0, x_n]$, ed in $[0, x_n]$ coincide con f , e quindi in quest'ultimo intervallo verifica la disuguaglianza $|f(x) - f_n(x)| = |f(x)| \leq x$. Ne segue che $\|f - f_n\|_\infty \leq x_n \rightarrow 0$, e quindi f_n converge uniformemente a f sull'intervallo $[0, a]$. Le funzioni f_n sono tutte continue e C^1 a tratti in $[0, a]$, e quindi assolutamente continue in base alla Nota 1.28.2, però il limite f non è assolutamente continuo, come fu mostrato nell'Esempio 1.28.3. \square

Proposizione 1.28.6. *Ogni funzione assolutamente continua è di variazione limitata.*

Dimostrazione. Scegliamo $\varepsilon = 1$ nella definizione di assoluta continuità e prendiamo il valore corrispondente di δ . Ogni partizione di $[a, b]$ in intervalli disgiunti si può spezzare (aggiungendo eventualmente ulteriori punti di

suddivisione) in un insieme finito di, diciamo, N famiglie di intervalli tutti mutualmente disgiunti, ciascuna di lunghezza minore di δ . Osserviamo che N è limitato indipendentemente dalla partizione scelta, perchè tutti gli intervalli sono disgiunti, e quindi il numero di sottofamiglie di lunghezza δ non supera $|b - a|/\delta$. Poichè f è assolutamente continua, la sua variazione totale su ciascuna di queste sottofamiglie deve essere inferiore a 1 (per come si è scelto δ), e quindi la variazione totale sulla partizione originale è inferiore a N . Prendendo l'estremo superiore rispetto a tutte le partizioni otteniamo che la variazione totale di f in $[a, b]$ è inferiore a N . \square

Ora dal Corollario 1.26.8 segue:

Corollario 1.28.7. *Ogni funzione assolutamente continua ha derivata (finita) quasi ovunque.*

Ora estendiamo alle funzioni assolutamente continue una proprietà ben nota delle funzioni continue:

Lemma 1.28.8. *Se f è assolutamente continua in $[a, b]$ e $f' = 0$ quasi ovunque, allora f è costante su $[a, b]$.*

Dimostrazione. Per ogni $t \in [a, b]$ esiste un insieme $E_t \subset (a, b)$ di misura di Lebesgue $t - a$ in cui $f' = 0$. Per ogni $x \in E_t$ e $\eta > 0$ esiste un $h > 0$ tale che l'intervallo $[x, x + h]$ è contenuto in $[a, t]$ (perché E_t è contenuto nell'aperto (a, b)) e $|f(x + h) - f(x)| < \eta h$ (perché $f'(x) = 0$). Grazie al Lemma 1.9.33, per ogni $\delta > 0$ esiste un sottoinsieme compatto $C \subset E_t$ di misura maggiore di δ che può essere coperto da una famiglia di tali intervalli. Poiché C è compatto (Definizione 1.9.4), esso viene ricoperto da una sottofamiglia finita di tali intervalli (Lemma 1.9.3 (ii)), i quali, eventualmente inserendo altri punti di suddivisione, si possono prendere con interni disgiunti: indichiamoli con $[x_k, y_k]$, con $a = y_0 \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < \dots \leq y_n \leq x_{n+1} = t$. Ora prendiamo un $\varepsilon > 0$ e scegliamo per δ il numero che corrisponde a $\varepsilon > 0$ nella Definizione 1.28.1 di assoluta continuità. Ora sappiamo che

$$\sum_{k=0}^n |x_{k+1} - y_k| < \delta$$

e

$$\sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(x_k)| < \eta \sum_{k=1}^n (y_k - x_k) < \eta(t - a).$$

Perciò segue dalla assoluta continuità di f e dalla scelta di δ che

$$\sum_{k=0}^n |f(x_{k+1}) - f(y_k)| < \varepsilon.$$

Dalle ultime due disuguaglianze ricaviamo

$$|f(t) - f(a)| = \left| \sum_{k=0}^n (f(x_{k+1}) - f(y_k)) + \sum_{k=1}^n (f(y_k) - f(x_k)) \right| < \varepsilon + \eta(t - a).$$

D'altra parte, nell'ultimo membro ε e η sono arbitrari. Prendendo l'estremo inferiore rispetto a queste due quantità si trova che $f(t) - f(a) = 0$, e quindi $f(t) = f(a)$ per ogni $t \in [a, b]$. \square

Teorema 1.28.9. (Teorema Fondamentale del Calcolo e funzioni assolutamente continue.) *Se la funzione F è un integrale indefinito, cioè se verifica $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$ per qualche f localmente integrabile (ossia integrabile sui compatti), allora F è assolutamente continua e $F' = f$ quasi ovunque. Viceversa, se F è assolutamente continua, allora è l'integrale indefinito della propria derivata.*

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato è il Lemma 1.27.2. Viceversa, sia F assolutamente continua in $[a, b]$: allora è di variazione limitata (Proposizione 1.28.6) e derivabile quasi ovunque (Corollari 1.28.7 oppure 1.26.8). Inoltre F è la differenza di due funzioni monotone non decrescenti, $F = F_1 - F_2$ (Teorema 1.26.6), e quindi $|F'| \leq F'_1 + F'_2$. Pertanto, per il Teorema Fondamentale del Calcolo per $L^\infty[a, b]$ (Lemma 1.27.5), $\int_a^b |F'(x)| dx \leq F_1(b) + F_2(b) - F_1(a) - F_2(a) < \infty$, quindi $F' \in L^1[a, b]$. Ne segue che il suo integrale indefinito $G(x) = \int_a^x F'(t) dt$ è assolutamente continuo, di nuovo per il Lemma 1.27.2, e quindi lo è la differenza $f = F - G$. D'altra parte, $f' = F' - G' = 0$ quasi ovunque, di nuovo per il Lemma 1.27.5, e quindi f è costante in $[a, b]$ per il Lemma 1.28.8. Poiché $f(a) = F(a) - G(a) = F(a)$, ora per ogni $x \in [a, b]$ si ha

$$F(x) = F(a) + G(x) = \int_a^x F'(t) dt.$$

\square

Corollario 1.28.10. *Se f è assolutamente continua in un intervallo $[a, b]$, allora la variazione totale $T_a^b(f)$ di f in $[a, b]$ è data da*

$$T_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)| dt. \quad (1.67)$$

Analogo risultato vale per funzioni a valori in \mathbb{R}^n se dentro l'integrale si sostituisce il valore assoluto con la norma (ad esempio euclidea).

Dimostrazione. Studiamo dapprima il caso in cui f sia a valori in uno spazio di dimensione 1 (\mathbb{R} o \mathbb{C}). È elementare provare che la variazione totale T_a^b verifica la disuguaglianza

$$T_a^b \leq \int_a^b |f'(t)| dt. \quad (1.68)$$

Infatti, sia $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$ una partizione finita di $[a, b]$. Grazie al precedente Teorema 1.28.9, si ha

$$|f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t)| dt.$$

Quindi la variazione totale rispetto ad una qualsiasi partizione finita è maggiorata da $\int_a^b |f'(t)| dt$. Passando all'estremo superiore rispetto alla partizione otteniamo (1.68)

Dimostriamo il viceversa. Poiché $f' \in L^1[a, b]$, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono funzioni a gradini (Definizione 1.18.1) $g \leq f' \leq h$ su $[a, b]$ tali che

$$\int_a^b (h(t) - g(t)) dt < \varepsilon. \quad (1.69)$$

Infittendo se necessario le rispettive partizioni di $[a, b]$ possiamo supporre che g e h siano a gradini rispetto alla stessa partizione $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$. Scriviamo allora $g = \sum_{i=1}^m a_i^- \chi_i$ e $h = \sum_{i=1}^m a_i^+ \chi_i$, dove χ_i è la funzione caratteristica dell'intervallo $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$ della partizione, e le costanti a_i^- , a_i^+ sono rispettivamente minoranti e maggioranti di f' quasi ovunque in tale intervallo. Allora, per ogni u, v in Δ_i si ha

$$|f'(u) - f'(v)| \leq a_i^+ - a_i^- \quad (1.70)$$

e quindi, per ogni $v \in \Delta_i$, segue da (1.68) che

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - f'(v) \right| &\leq \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f'(t) - f'(v)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t) - f'(v)| dt \leq a_i^+ - a_i^-. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Dalla disuguaglianza triangolare ora segue

$$\frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} \geq |f'(v)| - a_i^+ - a_i^-,$$

ed integrando rispetto a v in Δ_i otteniamo

$$|f(t_i) - f(t_{i-1})| \geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(v)| dv - (a_i^+ - a_i^-)(t_i - t_{i-1}). \quad (1.72)$$

Questa disuguaglianza vale per ogni i . Sommando per i da 1 a m , grazie a (1.69) abbiamo

$$\sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| \geq \int_a^b |f'(t)| dt - \varepsilon. \quad (1.73)$$

Ora prendendo l'estremo superiore al variare della partizione troviamo $T_a^b(f) \geq \int_a^b |f'(t)| dt - \varepsilon$. Poiché ε è libero di variare arbitrariamente, passando all'estremo inferiore rispetto a ε ricaviamo

$$T_a^b(f) \geq \int_a^b |f'(t)| dt$$

ossia la disuguaglianza inversa desiderata.

In seguito ci servirà il caso di f a valori in \mathbb{R}^n . La disuguaglianza diretta si dimostra in maniera identica, ma quella inversa è lievemente più complicata. Evidenziamo le differenze rispetto all'argomento precedente. Ora la derivata f' è in $L^1[a, b]$ ma a valori vettoriali (in \mathbb{R}^m), ossia tutte le sue componenti f'_j sono in L^1 , per $j = 1, \dots, n$. Consideriamo dunque funzioni a gradini che verificano quasi ovunque le disuguaglianze $g_j \leq f'_j \leq h_j$, e scriviamole rispetto alla partizione di prima come $g_j = \sum_{i=1}^n a_{ji}^- \chi_i$ e $h_j = \sum_{i=1}^n a_{ji}^+ \chi_i$.

Rammentiamo che a dimensione finita tutte le norme sono equivalenti, ed in particolare equivalenti alla norma ℓ^1 , come mostriamo esplicitamente nella Nota 1.7.10. In particolare, segue da (1.19) che

$$\|f'(u) - f'(v)\| \leq \sum_{j=1}^n |f'_j(u) - f'_j(v)|$$

e quindi (1.70) diventa

$$\|f'(u) - f'(v)\| \leq \sum_{j=1}^n a_{ji}^+ - a_{ji}^-$$

ed in (1.71) basta sostituire la norma al modulo per ottenere

$$\left\| \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - f'(v) \right\| \leq \sum_{j=1}^n a_{ji}^+ - a_{ji}^-.$$

Al posto di (1.72) ora si ha

$$\|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(v)\| dv - \sum_{j=1}^n a_{ji}^+ - a_{ji}^-(t_i - t_{i-1}).$$

Poiché l'ultimo addendo al lato destro coincide con $\sum_{j=1}^n \int_a^b (h_j - g_j)$, il resto della dimostrazione procede esattamente come prima salvo per la sostituzione dei moduli con le norme. \square

Il seguente corollario è un caso particolare semplicissimo di un teorema più ambizioso che dimostreremo subito dopo (Teorema 1.28.12).

Corollario 1.28.11. (*Teorema Fondamentale del Calcolo per funzioni derivabili ovunque con derivata in L^∞ .*) Sia f una funzione definita in un intervallo $[a, b]$, derivabile ovunque in (a, b) e tale che $f' \in L^\infty[a, b]$. Allora f è assolutamente continua, ed in particolare, per ogni $a, x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

Dimostrazione. Notiamo anzitutto che f è soddisfatta la disuguaglianza di Lipschitz (??) e quindi è assolutamente continua, come già osservato nella Nota 1.28.2. Per lo stesso motivo anche la funzione

$$F(x) := f(a) + \int_a^x f'(t) dt \quad (1.74)$$

soddisfa la disuguaglianza di Lipschitz ed è assolutamente continua, dal momento che, per ogni $u, v \in [a, x]$,

$$|F(v) - F(u)| = \left| \int_u^v f'(t) dt \right| \leq \int_u^v |f'(t)| dt \leq \|f'\|_\infty |v - u|$$

(l'assoluta continuità segue anche dal Lemma 1.27.2 oppure dal Teorema 1.28.9). Pertanto $F - f$ è assolutamente continua, e, sempre per il Teorema 1.28.9 $F' = f'$ quasi ovunque. Quindi $(F - f)' = 0$ quasi ovunque in $[a, b]$, e pertanto $F - f$ è costante, per il Lemma 1.28.8. Visto che $F(a) = f(a)$, ne segue che $F(x) = f(x)$ per ogni x , e quindi l'enunciato. \square

L'ipotesi che la derivata f' sia limitata, nel precedente Corollario 1.28.11, si può eliminare. Per questo scopo ricorriamo ad uno strumento più sofisticato, la proprietà di approssimazione con funzioni semicontinue (Teorema di Vitali–Carathéodory 1.14.4):

Teorema 1.28.12. (Teorema Fondamentale del Calcolo per funzioni derivabili ovunque con derivata in L^1 .) *Sia f una funzione definita in un intervallo $[a, b]$, derivabile ovunque in (a, b) e tale che $f' \in L^1[a, b]$. Allora f è assolutamente continua, ed in particolare, per ogni $a, x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

Dimostrazione. Basta provare la disuguaglianza

$$f(x) - f(a) \leq \int_a^x f'(t) dt, \quad (1.75)$$

perché allora, applicando questa stessa disuguaglianza alla funzione $-f$ al posto di f , ricaviamo l'uguaglianza dell'enunciato.

Se f' fosse continua, sarebbe anche limitata grazie al Teorema di Weierstrass (Sezione ??), e quindi l'enunciato si ridurrebbe alla semplice proprietà del precedente Corollario 1.28.11. In generale, invece, f' non è continua, ma possiamo approssimarla con funzioni semicontinue. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, il

Teorema di Vitali–Carathéodory 1.14.4 assicura l'esistenza di una funzione g semicontinua inferiormente in $[a, x]$ tale che $f' \leq g$ e

$$\int_a^x g(t) dt < \int_a^x f'(t) dt + \varepsilon \quad (1.76)$$

Poiché $[a, x] \subset [a, b]$ ha misura limitata, possiamo aggiungere a g una costante positiva abbastanza piccola affinché l'ultima disuguaglianza rimanga vera e la prima diventi $f' < g$. (Nota: per lo stesso teorema esiste anche una funzione h semicontinua superiormente tale che $f' > h$ e gli integrali delle due differiscono meno di ε . Se utilizzassimo h al posto di g nel resto della dimostrazione, otterremmo la disuguaglianza reciproca di (1.75), ma è più semplice ricavarla dall'argomento del primo paragrafo della dimostrazione che ricorre a $-f$ invece di f).

Ora abbiamo bisogno di una piccola approssimazione lineare. Fissiamo $\tau > 0$ arbitrario, e per $a \leq y \leq x$ poniamo

$$F_\tau(y) := \int_a^x g(t) dt - f(y) + f(a) + \tau(y - a). \quad (1.77)$$

Si noti che F_τ è continua, perché lo sono f (derivabile ovunque!) e la primitiva $G(y) := \int_a^y g(t) dt$ è continua: la seconda asserzione discende dal Teorema del Confronto (Sezione 1.1), perché $G(y_2) - G(y_1) = \int_{y_1}^{y_2} g(t) dt$ e

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f'(t) dt \right| < \left| \int_{y_1}^{y_2} g(t) dt \right| < (|g(y_1)| + \varepsilon) |y_2 - y_1|$$

se y_2 è sufficientemente vicino a y_1 , in base alla parte (v) dell'Esercizio 1.14.3. Poiché g è semicontinua inferiormente, l'insieme $\{t : g(t) > f'(y)\}$ è un aperto (Definizione 1.14.1), e questo aperto contiene y perché $g > f'$. D'altra parte, la derivabilità di f al punto y implica che il rapporto incrementale di f resti inferiore a $f'(y) + \tau$ in tutto un intorno aperto di y . Perciò esiste un intorno $I_y := \{y - \delta_y < t < y + \delta_y\}$ di y in cui

$$g(t) > f'(y) \quad (1.78)$$

e

$$\frac{f(t) - f(y)}{t - y} < f'(y) + \tau. \quad (1.79)$$

Segue da (1.78) e (1.79) che, per ogni $t \in I_y$,

$$\begin{aligned}
 F_\tau(v) - F_\tau(y) &= \int_y^v g(t) dt - f(v) + f(y) + \tau(v - y) & (1.80) \\
 &> (v - y) f'(y) - (v - y)(f'(y) + \tau) + \tau(v - y) = 0.
 \end{aligned}$$

Ma sappiamo che F_τ è continua, quindi l'insieme dei suoi zeri (che è non vuoto perché $F_\tau(a) = 0$) è chiuso in $[a, x]$, quindi compatto, ed allora ha un punto di massimo $y_0 \in [a, x]$. Se $y_0 = x$ allora $F_\tau \equiv 0$ in $[a, x]$. Se invece $y_0 < x$, allora $F_\tau(t) > 0$ per $y_0 < t \leq x$. In entrambi i casi, $F_\tau(x) \geq 0$. Allora, passando al limite per $\tau \rightarrow 0$ nella definizione (1.77) si trova $f(x) - f(a) \leq \int_a^x g(t) dt$, e da (1.76) ora segue $f(x) - f(a) \leq \int_a^x f'(t) dt + \varepsilon$. Dal momento che $\varepsilon > 0$ è arbitrario, prendendo l'estremo inferiore su ε otteniamo (1.75), e quindi il risultato voluto. \square

Nota 1.28.13. Il fatto che f' esista ovunque non implica necessariamente che f' appartenga a L^1 . Ad esempio, la funzione $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ (per $x \neq 0$) è assolutamente continua (per un ragionamento analogo a quello dell'Esercizio 1.26.5), ma la sua derivata, $f'(x) = 2x \sin(1/x^2) - 2x^{-1} \cos(1/x^2)$ non appartiene a L^1 in nessun intorno dell'origine, a causa della divergenza di tipo $1/x$: è facile verificare che questa funzione, anche se oscillante a causa dell'oscillazione del coseno, ha, in valore assoluto, integrale divergente (esercizio). Naturalmente questa funzione ha derivata in $L^1[a, b]$ per ogni $[a, b]$ che non contenga l'origine, e quindi il precedente Teorema 1.28.12 si applica a questi intervalli. \square

Nota 1.28.14. Dal Teorema ?? sappiamo che, se una funzione f è assolutamente continua, allora è derivabile *quasi ovunque*, la derivata f' è integrabile sui compatti e f è l'integrale indefinito della propria derivata (su quei compatti); viceversa, se f è un integrale indefinito, allora è assolutamente continua e f' coincide quasi ovunque con l'integrando. Dal Teorema ?? sappiamo che, se f è derivabile *ovunque* con f' integrabile sui compatti, allora f è assolutamente continua ed è l'integrale indefinito della propria derivata. Allora è naturale chiedersi se vale il viceversa del primo enunciato, nel senso seguente: se f è derivabile *quasi ovunque* e f' è integrabile sui compatti, allora f è necessariamente l'integrale indefinito della propria derivata? Vedremo nella Proposizione 1.28.19, forse sorprendentemente, che la risposta è no. A questo fine sono opportuni vari preliminari sul legame fra funzioni con de-

rivata integrabile e misure di Borel, che presentiamo nelle prossime Sezioni.

□

1.28.1 **Funzioni di variazione limitata come derivate di Radon–Nykodim di misure di Borel

In questa Sottosezione mostriamo che le funzioni di variazione limitata sono le primitive delle misure di Borel finite:

Teorema 1.28.15. (Funzioni di variazione limitata e misure complesse.)

- (i) Sia μ una misura complessa su \mathbb{R} finita (ossia $\mu(\mathbb{R}) \in \mathbb{C}$). Allora la funzione $f(x) = \int_{-\infty}^x d\mu = \mu(-\infty, x)$ è di variazione limitata, continua a sinistra (ossia $f(x^-) := \lim_{t \rightarrow x^-} f(t) = f(x)$ per ogni x , e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$). I punti di continuità (bilatera) di f sono precisamente gli x che non sono atomi di μ , nel senso che $\mu(\{x\}) = 0$.
- (ii) Sia f una funzione di variazione limitata, continua a sinistra e tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Allora esiste una misura complessa finita μ su \mathbb{R} tale che $f(x) = \int_{-\infty}^x d\mu$ per ogni x , e la sua variazione totale $\|\mu\|$ della Definizione 1.9.29 è legata alla variazione totale di f della Definizione 1.26.1 dalla relazione $T_f(x) = \|\mu\|(-\infty, x)$.

Dimostrazione. Dimostriamo solo la parte (i): per la dimostrazione di (ii) rinviamo a [23, Theorem 8.14]. Cominciamo con il dimostrare che la funzione $f(x) = \mu(-\infty, x)$ è continua a sinistra. Sia $y \rightarrow x^-$. Allora la famiglia di insiemi $E_y := (-\infty, y)$ invade $(-\infty, x)$, nel senso che gli E_y sono una famiglia crescente di sottoinsiemi di $(-\infty, x)$. Siccome una misura complessa è la somma, con coefficienti ± 1 e $\pm i$, di quattro misure reali positive, possiamo assumere che μ sia una misura positiva. Allora, grazie all'inclusione degli insiemi E_y , la funzione $f(y) = \mu(E_y)$ è non decrescente, e quindi è sufficiente calcolare il limite per successioni, ovvero limitare l'attenzione a successioni crescenti $x_1 < x_2 < \dots < x_n \rightarrow x$ e mostrare che $\mu(-\infty, x) = \mu(\cup_i E_{x_i}) = \lim_i \mu(E_{x_i})$: ma questo segue dalla numerabile additività della misura (identità 1.22). Inoltre,

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |\mu([x_{i-1}, x_i])| \leq \|\mu\|(-\infty, x)$$

per cui f è a variazione limitata e la sua variazione totale verifica $T_f(x) \equiv \text{Var}_f[a, x] \leq |\mu|(-\infty, x)$.

Infine, scegliamo una successione decrescente $x_n \rightarrow -\infty$: per lo stesso ragionamento di prima, o meglio per il Corollario 1.9.12, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_n \mu((-\infty, x_n)) = \mu(\cap_n (-\infty, x_n)) = \mu(\emptyset) = 0$. Questo dimostra la parte (i). \square

Corollario 1.28.16. (Formula di integrazione per parti.) *Sia $g \in C^1[a, b]$ e f di variazione limitata su $[a, b]$. Sia μ_f la misura finita associata a f nella parte (ii) del Teorema 1.28.15, ossia tale che $f(x) \equiv \int_{-\infty}^x d\mu$. Allora vale la seguente formula di integrazione per parti:*

$$\int_a^b g(x) d\mu(x) = g(b)f(b) - g(a)f(a) - \int_a^b g'(x)f(x) dx$$

purché f sia continua ai punti estremi a e b . Se al punto iniziale a o al punto finale b non vale l'ipotesi di continuità, la precedente identità vale ancora se rimpiazziamo i valori $f(a)$ e $f(b)$ rispettivamente con $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ (rammentiamo che le funzioni di variazione limitata ammettono i limiti destro e sinistro: Corollario 1.26.7).

Dimostrazione. In base al Teorema Fondamentale del Calcolo (Sezione 1.1), $g(x) \equiv g(a) + \int_a^x g'(t) dt$. Quindi il primo membro dell'identità nell'enunciato diventa

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) d\mu(x) &= \int_a^b g(a) d\mu(x) + \int_a^b \int_a^x g'(t) dt d\mu(x) & (1.81) \\ &= (f(b) - f(a))g(a) + \int_a^b \int_a^x g'(t) dt d\mu(x). \end{aligned}$$

Sia χ_+ la funzione caratteristica di \mathbb{R}_+ (ovvero la funzione che vale 1 se la sua variabile è non negativa e zero altrimenti). Allora l'ultimo integrale diventa

$$\int_a^b \int_a^x g'(t) dt d\mu(x) = \int_a^b \int_a^b g'(t) \chi_+(x-t) dt d\mu(x).$$

Poiché g' è continua su $[a, b]$, quindi integrabile, l'ordine di integrazione si può scambiare in base al Teorema di Fubini 1.20.4 (ii), e diventa

$$\int_a^b \int_t^b g'(t) d\mu(x) dt = \int_a^b g'(t) (f(b) - f(t)) dt$$

$$= -f(a)(g(b) - g(a)) + f(b)(g(b) - g(a)) - \int_a^b g'(t) f(t) dt.$$

Sostituendo questa identità in (1.81) otteniamo l'enunciato. \square

1.28.2 **Funzioni assolutamente continue e funzioni continue singolari

Sappiamo che le funzioni assolutamente continue sono a variazione limitata. Il seguente risultato illustra quali funzioni a variazione limitata sono assolutamente continue.

Definizione 1.28.17. Una funzione continua ovunque, derivabile quasi ovunque con derivata nulla quasi ovunque, si chiama una funzione continua singolare.

Teorema 1.28.18. (Decomposizione di Lebesgue.) *Se f è di variazione limitata su \mathbb{R} , continua a sinistra e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, allora f' esiste quasi ovunque, $f' \in L^1(\mathbb{R})$, ed esiste una seconda funzione f_s a variazione limitata, continua a sinistra e tendente a zero per $x \rightarrow -\infty$, derivabile quasi ovunque con $f'_s = 0$ quasi ovunque, e tale che, per ogni x ,*

$$f(x) = f_s(x) + \int_{-\infty}^x f'(t) dt.$$

La funzione f_s è quindi una funzione continua singolare nel senso della precedente Definizione 1.28.17, che viene chiamata la parte singolare di f . Si ha $f_s \equiv 0$ se e solo se f è assolutamente continua.

Dimostrazione. In base al Teorema 1.28.15, $f(x) = \mu(-\infty, x)$ per qualche misura di Borel complessa finita e per ogni x . In base al teorema di Radon–Nykodim (parte (ii) del Teorema 1.9.27), possiamo decomporre $\mu(E)$ come $\mu(E) = \mu_s(E) + \int_E g(t) dt$, con μ_s singolare rispetto a μ e $g \in L^1(\mathbb{R})$ (in questo caso rispetto alla misura di Lebesgue). Allora, ponendo $f_s(x) = \mu_s(-\infty, x)$, segue di nuovo dal Teorema di Radon–Nykodim 1.9.27, parte (iii), che $f'_s = 0$ e $f' = g$ quasi ovunque: abbiamo provato l'identità dell'enunciato. La funzione f_s è identicamente nulla se e solo se μ_s è la misura zero (e viceversa), nel qual caso $f(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt$ è assolutamente continua per il Lemma 1.27.2: questo prova l'ultima asserzione dell'enunciato. \square

1.28.3 **L'insieme ternario di Cantor

In questa Sottosezione mostriamo che l'ipotesi che la derivata esista ovunque, nel Teorema 1.28.12, non si può allentare. Infatti, come annunciato nella Nota 1.28.19, ora mostriamo il fatto seguente:

Proposizione 1.28.19. (*f non è necessariamente l'integrale di f' se f' esiste solo quasi ovunque.*) *Esistono funzioni f derivabili quasi ovunque, con $f' \in L^1$, ma tali che $f(x) \neq f(a) + \int_a^x f'(t) dt$. In particolare, esistono funzioni con derivata nulla quasi ovunque ma non costanti.*

Dimostrazione. La dimostrazione consiste nella costruzione di un esempio appropriato. Questa costruzione è svolta nel prossimo Esempio 1.28.20.

□

Esempio 1.28.20. (Insieme di Cantor e funzione di Cantor.) Sia $E_0 = [0, 1]$, $E_1 = E_0 \setminus (1/3, 2/3)$, e, per ricorrenza, E_n un insieme costituito dall'unione di 2^n intervalli chiusi disgiunti in $[0, 1]$ dal quale si ottiene E_{n+1} rimuovendo da ciascuno di questi intervalli il terzo centrale. Si noti che E_n è l'unione di 2^n intervalli ciascuno dei quali ha lunghezza 3^{-n} , e quindi la misura di Lebesgue di E_n è $(2/3)^n$. L'insieme di Cantor è definito da $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$; inoltre, per lo stesso motivo, anche il complemento $\complement E_n$ in $[0, 1]$ è un'unione di intervalli (aperti), ma ciascuno dista dal successivo esattamente 3^{-n} , e quindi il complemento di E è denso in $[0, 1]$.

L'insieme E è chiuso, perché intersezione di chiusi, e compatto perché oltre ad essere chiuso è anche limitato, essendo contenuto in $[0, 1]$. Il complemento in $[0, 1]$ di E è denso, perché Per il Corollario 1.9.12, la sua misura di Lebesgue è

$$m(E) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_n \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Ora indichiamo la funzione caratteristica di E_n con χ_n , e rinormalizziamo ponendo $h_n = (3/2)^n \chi_n$. Allora $\|h_n\|_1 = 1$. Poniamo $f_n(x) = \int_0^x h_n(t) dt$. Allora $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, f_n è non decrescente e costante su ciascun intervallo contenuto in $\complement E$. Invece sui 2^n intervalli chiusi J_n che compongono E_n , ciascuno lungo 3^{-n} , si ha $\int_{J_n} h_n(t) dt = (3/2)^n 3^{-n} = 2^{-n}$. D'altra parte, J_n è l'unione di due intervalli chiusi di lunghezza $3^{-(n+1)}$ che sono parti di E_{n+1} e di un intervallo aperto centrale (della stessa lunghezza) che è nel complemento di E_{n+1} . Visto che h_{n+1} è normalizzata in modo da essere tre volte maggiore di h_n sui primi due intervalli, ma questi sono tre volte più

corti di J_n , si ritrova nuovamente $\int_{J_n} h_{n+1}(t) dt = 2^{-n}$. Pertanto, quando si integrano h_n e h_{n+1} , le funzioni integrali crescono ad una pendenza diversa su ciascuno degli intervalli J_n di lunghezza 3^{-n} che compongono E_n : la prima delle due cresce a pendenza costante pari a $(3/2)^n$, la seconda cresce solo nel primo e nell'ultimo terzo ma con pendenza $(3/2)^{n+1}$ e rimane costante nel terzo centrale. Quindi, al termine dell'intervallo J_n , entrambe queste primitive sono aumentate della stessa quantità 2^{-n} , e dopo, nel successivo intervallo nel complemento di E_n , entrambe rimangono costanti. Di conseguenza, $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ per tutti gli $x \notin E_n$. Invece, per $x \in E_n$, diciamo per x in un intervallo dei 2^n intervalli che formano E_n (chiamiamolo J), abbiamo

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| &\leq \int_J |h_{n+1}(t) - h_n(t)| dt \\ &= \left(\int_{J \setminus E_{n+1}} + \int_{J \cap E_{n+1}} \right) |h_{n+1}(t) - h_n(t)| dt \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^n m(J \setminus E_{n+1}) + \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{2}\right)^n \right) m(J \cap E_{n+1}) \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{1}{3} 3^{-n} + \left(\frac{3}{2} - 1\right) \frac{2}{3} 3^{-n} \right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right) 2^{-n}. \end{aligned}$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ è convergente, dalle ultime due stime segue che $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy nella norma uniforme (si completino i dettagli per esercizio), e quindi converge ad una funzione f continua non decrescente tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e costante in intorno sufficientemente piccoli di ogni $x \notin E$, quindi con $f'(x) \equiv 0$ fuori di E . Poiché $m(E) = 0$, la funzione f' si annulla quasi ovunque, e quindi f è una funzione continua singolare nel senso della Definizione 1.28.17. La funzione f si chiama la *funzione di Cantor*. \square

Nota 1.28.21. (Proprietà dell'insieme di Cantor e funzione ternaria di Cantor.) L'insieme di Cantor ha varie proprietà interessanti.

Anzitutto, l'insieme di Cantor è totalmente sconnesso: la componente connessa di ciascun suo punto x è proprio il singleton $\{x\}$. Infatti, se la compo-

nente connessa contenesse anche un altro punto y , dovrebbe contenere l'intero intervallo (x, y) . Chiamiamo $d = |y - x|$ la lunghezza di tale intervallo. Sia n tale che $3^{-n} < d$. L'insieme E_n ottenuto dopo i primi n tagli non contiene intervalli di lunghezza maggiore di 3^{-n} , come si vede immediatamente per induzione, e quindi non può contenere (x, y) .

Esiste un modo più chiaro ed elegante di provare questo risultato. Ogni punto nell'intervallo $[0, 1]$ può essere scritto come sviluppo in base 3, ossia come la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$, con $a_n = 0, 1$ o 2 . La serie parte da $n = 1$ perché limitiamo l'attenzione a sviluppi la cui somma è in $[0, 1]$. Per il punto 0, tutti gli a_n sono nulli; per il punto 1, tutti gli a_n valgono 2, ma in questo caso lo sviluppo non è unico se si accetta che gli indici partano da $n = 0$, perché $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-n} = 1 = 1 + 0/3 + 0/3^2 + \dots$. Osserviamo che il punto $1/3$ corrisponde alla successione dei coefficienti $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \dots = 0$, ma anche in questo caso lo sviluppo non è unico a causa del fatto che la serie geometrica $\sum_{n=2}^{\infty} 2 \cdot 3^{-n} = 2/9 + 2/27 + \dots$ converge a $1/3$. Analogamente, $2/3 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$ con $a_1 = 2, a_2 = a_3 = \dots = 0$, ma anche $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \dots = 2$. I punti che hanno due diversi sviluppi ternari sono quelli le cui cifre da un dato indice in poi sono tutti 2 (esattamente come, nel caso di sviluppi decimali, i numeri con due sviluppi diversi sono quelli con sviluppo decimale le cui cifre sono definitivamente 9).

Ciò svela che i punti estremi dei sottointervalli connessi la cui unione è lo n -simo insieme E_n la cui intersezione è l'insieme di Cantor sono esprimibili con *due* diversi sviluppi ternari, uno dei quali contiene qualche cifra 1 e l'altro è uno sviluppo finito che non contiene la cifra 1. È altrettanto facile vedere che i punti *interni* di E_n sono esprimibili con sviluppi ternari infiniti i cui coefficienti a_n valgono 0 o 2, ma mai 1. L'insieme di Cantor E consiste quindi di tutti i numeri in $[0, 1]$ esprimibili con uno sviluppo ternario che non contiene la cifra 1: se un numero ha due sviluppi ternari, viene incluso in E se uno dei due sviluppi non contiene la cifra 1 (questo include in E tutti i punti estremi dei 2^2 sottointervalli connessi che formano E_n , per ogni n).

Considerato lo sviluppo ternario, è evidente che l'insieme di Cantor è totalmente sconnesso. Infatti, dati $x, y \in E$ diversi, diciamo $x < y$, con sviluppi ternari $x = \sum_{n \geq 1} a_n/3^n$ e $y = \sum_{n \geq 1} b_n/3^n$ consideriamo il primo indice n_0 tale che $a_n \neq b_n$: allora deve essere $a_{n_0} = 0$ e $b_{n_0} = 2$ (perché $x < y$), ed i numeri $z = \sum_{n \geq 1} c_n/3^n$ con $c_n = a_n = b_n$ per $1 \leq n < n_0$ e $c_{n_0} = 1$ verificano $x < z < y$: se si scelgono non tutti i $c_k = 1$ per $k > n_0$, questi numeri z hanno uno sviluppo ternario unico e non appartengono a E (perché lo sviluppo contiene la cifra 1). Quindi E è totalmente sconnesso.

Un'altra proprietà che diventa ovvia alla luce dello sviluppo ternario è il fatto che $\mathbb{C}E$ sia denso in $[0, 1]$. Infatti, ogni numero x con sviluppo ternario $x = \sum_{n \geq 1} a_n/3^n$ è approssimabile a meno, diciamo, di 3^{-k} con numeri $x_k = \sum_{n \geq 1} a_n^{(k)}/3^n$ il cui sviluppo ternario contiene la cifra 1: basta prendere $a_n^{(k)} = a_n$ per $n < k$ e $a_k^{(k)} = 1$.

Sempre lo sviluppo ternario rivela un'altra proprietà interessante: ogni punto di E è di accumulazione. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, si fissi k intero tale che $3^{-k} < \varepsilon$. Fissato un punto $x = \sum_{n \geq 1} a_n/3^n$ di E , consideriamo l'intorno di x di tutti gli $y = \sum_{n \geq 1} b_n/3^n$ tali che $b_n = a_n$ per $n \leq k$, e b_n arbitrario per $n > k$. Questo intorno ha diametro $3^{-k} < \varepsilon$ e contiene punti di E : tutti gli y in cui i b_n restano diversi da 1 anche per $n > k$. Quindi esistono punti di E diversi da x ma arbitrariamente vicini a x .

Manipolando lo sviluppo ternario si perviene ad un risultato ancora più sorprendente. Si consideri la funzione ϕ che manda il numero $x = \sum_{n \geq 1} a_n/3^n$ appartenente a E nel numero $y = \sum_{n \geq 1} b_n/2^n \in [0, 1]$ tale che $b_n/a_n/2$, ossia $b_n = 0$ se $a_n = 0$ e $b_n = 1$ se $a_n = 2$ (per i punti di E che hanno due sviluppi ternari differenti, ovviamente usiamo quello senza la cifra 1). In tal modo si ottiene qualsiasi successione $\{b_n\}$ di 0 e 1, e quindi qualsiasi sviluppo binario in $[0, 1]$: quindi l'immagine di ϕ è l'intero intervallo $[0, 1]$. I punti $x, y \in E$ con $x < y$ sono dati da due sviluppi ternari in cui la prima cifra differente (diciamo la cifra di indice k) è 0 per x e 2 per y : la mappa ϕ cambia questa cifra 2 in 1, ma preserva l'ordinamento perché la prima cifra binaria differente fra $\phi(x)$ e $\phi(y)$ è maggiore per y che per x , e quindi $\phi(x) < \phi(y)$. In altre parole, ϕ è monotona crescente su E , ed è una mappa iniettiva di E su $[0, 1]$.

Estendiamo il dominio di ϕ da E a $[0, 1]$. Dato uno sviluppo ternario $x = \sum_{n \geq 1} a_n/3^n$ di un punto arbitrario di $[0, 1]$ (non necessariamente di E), tronchiamo lo sviluppo al primo indice N tale che $a_N = 1$ (pertanto non lo tronchiamo affatto se $x \in E$, nel qual caso $N = \infty$), e poniamo $b_n = a_n/2$ per $n < N$, $b_N = a_N = 1$ e $b_n = 0$ se $n > N$. Allora il numero $y = \sum_{n=1}^N b_n/2^n$ appartiene a $[0, 1]$, ma ora occorre dimostrare che la mappa ϕ così estesa a tutto $[0, 1]$ è ben definita, ossia che i punti con due diversi sviluppi ternari portano allo stesso sviluppo binario. Ma due sviluppi ternari hanno la stessa somma x esattamente quando essi coincidono fino ad un dato indice n_0 , e uno dei due ha cifre a_n costantemente uguali a 2 da $n_0 + 1$ in poi (con $a_{n_0} = 0$ o 1), mentre l'altro si ottiene dal primo ponendo $a_n = 0$ per tutti questi indici maggiori di n_0 , ed aggiungendo 1 (modulo 3) a a_{n_0} . Possiamo supporre che $a_n \neq 1$ per $n < n_0$, visto che l'eventuale apparire di una cifra 1 arresterebbe

a questa cifra lo sviluppo di $\phi(x)$ senza che la successiva sequenza di cifre 2 consecutive avesse alcuna rilevanza. Consideriamo separatamente i due casi $a_{n_0} = 0$ e $a_{n_0} = 1$, e per ciascuno di essi i due sviluppi ternari con somma x . Nel secondo caso, $a_{n_0} = 1 = b_{n_0}$ e $a_n = 0$ per $n > n_0$. Allora lo sviluppo binario $\phi(x) = \sum_{n \geq N} b_n/2^n$ ottenuto tramite ϕ dal primo sviluppo ternario si arresta alla cifra $b_N = b_{n_0} = a_{n_0} = 1$ e la sequenza consecutiva di cifre 2 successive non entra in gioco; invece il secondo sviluppo ternario, che ha $a_{n_0} = 1 + 1 = 2$ e $a_n = 2$ per $n > n_0$, viene mandato da ϕ in una sequenza di cifre binarie $b_{n_0} = 1$ e $b_n = 0$ per $n > n_0$. Quindi le immagini sotto ϕ dei due sviluppi ternari coincidono.

Nel primo caso, i due sviluppi ternari hanno, rispettivamente, $a_{n_0} = 0$ e $a_n = 2$ per $n > n_0$, e $a_{n_0} = 1$ e $a_n = 0$ per $n > n_0$. Esattamente la stessa verifica ci fa concludere che, di nuovo, le immagini sotto ϕ dei due sviluppi coincidono. Quindi ϕ è ben definita. Dal fatto che la mappa ϕ , applicata a $x = \sum_{n \geq 1} a_n/3^n$, dà luogo ad uno sviluppo finito $y = \sum_{n=1}^N b_n/2^n$ che si arresta al primo indice N tale che $a_N = 1$, ossia agli estremi sinistri degli intervalli scavati da $[0, 1]$ per ottenere gli insiemi E_n , segue che ϕ è costante su ogni intervallo che fa parte del complemento di E . Quindi ora ϕ è ben definito su $[0, 1]$, strettamente crescente su E , costante sugli intervalli del complemento di E , surgettivo su $[0, 1]$, e biunivoco da E a $[0, 1]$. La mappa inversa, ϕ^{-1} , non è continua, altrimenti ϕ sarebbe un omeomorfismo, ovvero una equivalenza topologica, ma le topologie su E e $[0, 1]$ non sono equivalenti perché il primo insieme è totalmente sconnesso ed il secondo è connesso.

Questa estensione della funzione ϕ a tutto $[0, 1]$ si chiama la *funzione ternaria di Cantor*. \square

Esempio 1.28.22. (Insiemi di Cantor di misura zero ottenuti rimuovendo terzi non centrati.) Le caratteristiche dell'insieme di Cantor che rendono vera la Proposizione 1.28.19 non richiedono che la sua costruzione sia così simmetrica come l'abbiamo effettuata, rimuovendo ogni volta i terzi centrali. Infatti, basta scegliere una qualsiasi successione $\{\delta_n\}$ monotona decrescente con $\delta_0 = 1$ e $\lim_n \delta_n = 0$ e costruire insiemi E_n costituiti dall'unione di 2^n intervalli disgiunti di lunghezza $2^{-n}\delta_n$, ottenendo ricorsivamente E_{n+1} rimuovendo da ciascuno di questi intervalli che formano E_n un segmento di lunghezza $2^{-n}(\delta_n - \delta_{n+1})$, in modo che ciascun intervallo in E_n dia luogo a due intervalli di lunghezza $2^{-(n+1)}\delta_{n+1}$. Allora gli insiemi chiusi E_n costituiscono una famiglia decrescente tale che $m(E_n) = \delta_n$, e quindi $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ è ancora un compatto non vuoto di misura zero. La costruzione, però, è meno

elegante perché non è più possibile definire in maniera algebrica la funzione ternaria di Cantor introdotta prima. \square

Esempio 1.28.23. (Insiemi di Cantor generalizzati, di misura positiva.) Una variante di misura $\alpha > 0$ dell'insieme di Cantor, chiamato *insieme di Cantor generalizzato* $E^{(\alpha)}$, si ottiene rimuovendo iterativamente da $E_n^{(\alpha)}$ 2^n segmenti centrali di lunghezza non $3^{-(n+1)}$ (come nel caso del terzo centrale), ma $\alpha 3^{-(n+1)}$. Tutti le deduzioni esposte precedentemente continuano a valere, e $E^{(\alpha)}$ è un compatto non vuoto tutti i cui punti sono di accumulazione ed il cui complemento è denso in $[0, 1]$, ma adesso la misura di $E^{(\alpha)}$ non è zero. Infatti, la misura dell'insieme ternario di Cantor E è zero perché ad ogni passo della costruzione sottraiamo ad E_n 2^n intervalli di lunghezza $3^{-(n+1)}$ (ovviamente disgiunti da quelli sottratti al passo precedente), e quindi alla fine ciò che sottraiamo complessivamente è $1/3 + 2/3^2 + 4/3^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}/3^n = 1$. Nel caso generalizzato, sottraiamo invece da $E_n^{(\alpha)}$ 2^n segmenti centrali di lunghezza $\alpha 3^{-(n+1)}$, e quindi in totale sottraiamo $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}/3^n = \alpha/3 \sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n = \alpha$. Pertanto $m(E^{(\alpha)}) = 1 - \alpha$. \square

Nota 1.28.24. Si consideri l'insieme di Cantor E di misura zero ottenuto rimuovendo ricorsivamente i terzi centrali a partire dall'intervallo $[0, 1]$. Che relazione intercorre fra la funzione ternaria di Cantor ϕ introdotta nella Nota 1.28.21 e la funzione di Cantor $f(x) = \int_0^x \chi_E$ costruita alla fine dell'Esempio 1.28.20?

Naturalmente la funzione di Cantor f è definibile più in generale, su insiemi di Cantor ottenuti rimuovendo segmenti non centrati (Esempio 1.28.22) od anche per insiemi di Cantor generalizzati di misura positiva (Esempio 1.28.23), mentre la funzione ternaria di Cantor no, perché la sua costruzione si basa su una serie ottenuta proprio dall'aritmetica in base 3. Ma se si considera l'insieme di Cantor dei terzi centrali, allora che relazione c'è?

Entrambe hanno derivata nulla in ciascuno degli intervalli (terzi centrali) via via rimossi, sono continue, monotone non decrescenti, valgono 0 in 0 e 1 in 1 ed in particolare la loro immagine è tutto l'intervallo $[0, 1]$. Si potrebbe provare a dimostrare che le due funzioni coincidono, usando il fatto che f è approssimata dalle funzioni f_n date dalle primitive delle funzioni caratteristiche χ_{E_n} dopo le prime n generazioni di rimozioni di terzi centrali, mentre ϕ è espressa come una serie convergente approssimata dalle sue somme parziali n -sime ϕ_n , le quali sono il troncamento alle prime n cifre ternarie, poi divise

per 2 al fine che l'immagine di ϕ_n sia tutto l'intervallo $[0, 1]$ (*cautela: questo è un esercizio difficile*). \square

1.29 *Integrali curvilinei e forme differenziali

1.29.1 Curve regolari

Definizione 1.29.1. Una *curva continua* in \mathbb{R}^n è una funzione $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, continua sull'intervallo di definizione $[a, b]$. In questo libro restringiamo l'attenzione a curve continue, quindi con l'espressione *curva* intendiamo curva continua. Le curve continue si indicano anche con curve di classe C^0 .

Una *curva di classe C^k* è una funzione $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivabile k volte con derivate continue (agli estremi a e b dell'intervallo ovviamente la derivata è quella rispettivamente sinistra o destra).

Una curva si dice *chiusa* se $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$.

Una curva si dice *semplice* se è una funzione biunivoca di $[a, b]$ sulla sua immagine, tranne ovviamente per l'unica eccezione $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ nel caso di una curva chiusa.

In maniera analoga si definiscono le curve a valori in \mathbb{C}^n . Si noti che una curva è una funzione, quindi una legge oraria di percorso, e non la sua immagine, cioè il percorso geometrico.

Definizione 1.29.2. (Curve equivalenti.) Due curve \mathbf{r} e \mathbf{s} di classe C^k , definite rispettivamente in $[a, b]$ e $[c, d]$ si dicono equivalenti come curve C^k se esiste un cambiamento di parametrizzazione di classe C^k che manda l'una nell'altra, ossia una funzione biunivoca $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$ di classe C^k insieme alla sua inversa e tale che $\mathbf{r} = \mathbf{s} \circ u$ (e quindi anche $\mathbf{s} = \mathbf{r} \circ u^{-1}$).

Esercizio 1.29.3. Mostrare che questa nozione di equivalenza di curve è una relazione di equivalenza nel senso della Definizione 1.2.13, cioè che gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. \square

Nota 1.29.4. È ovvio che se due curve sono equivalenti e la prima è semplice allora lo è anche la seconda. \square

Nota 1.29.5. (Verso di percorrenza.) Consideriamo le funzioni continue e biunivoche $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$. Poichè ogni funzione continua da \mathbb{R} a \mathbb{R} assume in ogni intervallo tutti i valori intermedi fra ogni coppia di valori assunti

(Teorema dei Valori Intermedi, Sezione 1.1), una tale funzione u è biunivoca solo se è monotona; inoltre, se è derivabile con inversa anch'essa derivabile, deve essere monotona in senso stretto (altrimenti nei punti di monotonia non stratta l'inversa non avrebbe derivata finita). Quindi si danno solo due casi:

- $u(a) = c$ e $u(b) = d$
- $u(a) = d$ e $u(b) = c$

Nel primo caso si dice che l'equivalenza conserva il verso, ovvero che le due curve equivalenti hanno *lo stesso verso*; nel secondo caso si dice che hanno verso opposto. In questo senso, l'aver lo stesso verso è una nuova relazione di equivalenza, più fine, su ogni classe di equivalenza di curve: questa nuova relazione di equivalenza ha solo due classi, che si chiamano i *versi di percorrenza* della curva. \square

Esempio 1.29.6. È interessante il caso in cui si limita l'attenzione a curve equivalenti tutte definite sullo stesso intervallo $[a, b]$. In tal caso, un cambiamento di legge oraria che rovescia il verso di percorrenza è precisamente una funzione u da $[a, b]$ in sé, biunivoca e monotona decrescente: ad esempio la funzione $u(t) = a + b - t$, dove $t \in [a, b]$. Quindi per ogni curva \mathbf{r} un rappresentante della classe di equivalenza di verso opposto è $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(a + b - t)$. \square

Notazione 1.29.7. La classe di equivalenza delle curve dello stesso verso di \mathbf{r} si indica con \mathbf{r}_+ , quella delle curve di verso opposto con \mathbf{r}_- .

Nota 1.29.8. È chiaro che due curve equivalenti hanno la stessa immagine. Il viceversa non è vero: ad esempio, le curve a valori in \mathbb{R}^2 definite da

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= (\cos t, \sin t) & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \mathbf{s}(t) &= (\cos t, \sin t) & 0 \leq t \leq 4\pi\end{aligned}$$

hanno entrambe per immagine la circonferenza in \mathbb{R}^2 di raggio 1 e centro l'origine, ma non sono equivalenti, perché la prima è semplice e la seconda no (Nota 1.29.4).

Però, se due curve continue \mathbf{r} e \mathbf{s} sono *semplici* ed hanno la stessa immagine, allora la funzione $u = \mathbf{s}^{-1} \circ \mathbf{r}$ è un cambiamento di legge oraria da $[a, b]$ in sé *biunivoco*, che quindi dà luogo ad una equivalenza fra le due curve. Pertanto due curve continue semplici sono equivalenti se e solo se hanno la stessa immagine. \square

Esempio 1.29.9. La curva $\mathbf{r} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita (come nella Nota 1.29.8) da

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

è una curva semplice di classe C^∞ ed ha per immagine la semicirconferenza di raggio 1 e centro l'origine giacente nel semipiano superiore. Un'altra curva con la stessa immagine è

$$\mathbf{s}(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Questa seconda curva ha la stessa immagine della prima, è semplice e di classe C^0 ma non C^1 perché la sua derivata diverge agli estremi. Le due curve quindi sono equivalenti come curve di classe C^0 grazie a quanto osservato nella Nota 1.29.8, ma non sono equivalenti in classe C^k con $k > 0$. Le due curve hanno versi opposti: in base all'Esempio 1.29.6, una curva equivalente a \mathbf{r} e dello stesso verso è

$$\mathbf{p}(t) = (-t, \sqrt{1-t^2}) \quad -1 \leq t \leq 1.$$

□

Esempio 1.29.10. (Curve di classe C^∞ possono avere cuspidi.) Anche la regolarità di una curva è una proprietà della legge oraria, non della geometria dell'immagine. Ad esempio, la curva $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$, per $t \in [-1, 1]$, è di classe C^∞ , perché le sue componenti sono polinomi, ed ha per immagine l'arco da $x = -1$ a $x = 1$ del grafico della funzione $f(x) = |x|^{\frac{2}{3}}$, che ha una cuspidi nell'origine.

Ciò che avviene in questo caso è che il *vettore velocità* $\mathbf{r}'(t) = (3t^2, 2t)$ si annulla per $t = 0$, cioè nell'istante in cui la curva passa per l'origine. È chiaro che, nei punti in cui il vettore velocità è non nullo, esso costituisce un vettore tangente all'immagine della curva, che quindi in quei punti ammette un vettore tangente e pertanto non ha cuspidi.

Si badi però che l'annullarsi del vettore velocità non comporta sempre l'esistenza di cuspidi. Ad esempio, modifichiamo la curva precedente scambiandone le componenti, ovvero poniamo $\mathbf{s}(t) = (t^2, t^3)$, con $t \in [-1, 1]$. Questa nuova curva è ancora polinomiale, quindi di classe C^∞ , ed il suo vettore velocità si annulla ancora per $t = 0$. Però questa volta l'immagine della curva giace sul grafico della funzione $g(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$, che nell'origine non ha una cuspidi (è tangente all'asse x). □

Definizione 1.29.11. (Concatenazione di curve.) Siano $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{s} : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ due curve continue. Se $\mathbf{s}(b) = \mathbf{r}(b)$ allora la curva $\mathbf{r}\&\mathbf{s} : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da $\mathbf{r}\&\mathbf{s} = \mathbf{r}$ se $t \in [a, b]$ e $\mathbf{r}\&\mathbf{s} = \mathbf{s}$ se $t \in [b, c]$ è continua: essa si chiama la *concatenazione* di \mathbf{r} e \mathbf{s} .

Si può dimostrare il seguente risultato intuitivo ma non elementare:

Teorema 1.29.12. (Teorema di Jordan.) Sia \mathbf{r} una curva (continua) semplice chiusa in \mathbb{R}^2 , e C la sua immagine (osserviamo che, poiché \mathbf{r} è continua ed il suo intervallo dei parametri è compatto, anche C è un insieme compatto, quindi limitato; si veda la Sezione 1.1). Allora $\mathbb{R}^2 \setminus C$ consiste di due componenti connesse, entrambe con frontiera C , di cui una limitata (detta interno di C) e l'altra illimitata (detta esterno).

1.29.2 Curve di lunghezza finita

Notazione 1.29.13. Una curva $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua di variazione limitata (Definizione 1.26.1) si dice *di lunghezza finita*, o anche *rettificabile*. La variazione totale di \mathbf{r} si chiama la sua *lunghezza* e si indica con $\ell(\mathbf{r})$.

Dalla Definizione 1.26.1 di variazione limitata segue immediatamente:

Corollario 1.29.14. Sia $\alpha = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ una partizione finita di $[a, b]$. La variazione della curva \mathbf{r} rispetto a questa partizione è la lunghezza della spezzata poligonale da essa sottesa, cioè

$$p(\alpha) = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\| .$$

La variazione totale ℓ di \mathbf{r} quindi è data da $\ell = \sup_{\alpha} p(\alpha)$.

Se una curva è di lunghezza finita allora tutte le curve ad essa equivalenti sono anch'esse di lunghezza finita, con la stessa lunghezza.

La lunghezza della concatenazione di due curve continue, nelle ipotesi in cui questa nozione si definisce (Definizione 1.29.11) è la somma delle lunghezze

Dimostrazione. L'unico punto non completamente ovvio è l'ultimo, che lo diventa se si osserva che una partizione di $[a, c]$ si scinde in una partizione di $[a, b]$ ed una di $[b, c]$ se essa contiene il punto b , e se non lo contiene possiamo aggiungerglielo, passando in tal modo ad una partizione più fine. \square

Nota 1.29.15. La lunghezza di una curva è un invariante della legge oraria di curve, e non della geometria dell'immagine della curva. Infatti, due curve non equivalenti con la stessa immagine possono non avere la stessa lunghezza: ad esempio, le due curve della Nota 1.29.8 hanno entrambe per immagine la circonferenza con centro l'origine e raggio 1, ma la prima ha lunghezza 2π e la seconda 4π . \square

Esempio 1.29.16. Esistono curve continue non di lunghezza finita. Ad esempio, abbiamo mostrato nell'Esempio 1.26.4 che la curva

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ t \sin \frac{1}{t} & -1 < t \leq 0 \end{cases}$$

è continua ma non a variazione limitata, quindi non è di lunghezza finita. \square

Nota 1.29.17. Consideriamo le curve assolutamente continue (Definizione 1.28.1). Per la Proposizione 1.28.6 esse sono tutte di lunghezza finita.

Per il Teorema 1.28.9, le curve $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ assolutamente continue sono precisamente quelle per le quali esiste una funzione integrabile $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che, per ogni $a \leq a' \leq b' \leq b$, si ha

$$\mathbf{r}(b') - \mathbf{r}(a') = \int_{a'}^{b'} \mathbf{g}(t) dt.$$

Inoltre, $\mathbf{g} = \mathbf{r}'$ quasi ovunque. In base alla Nota 1.28.2, una classe particolare di queste curve è costituita dalle curve continue e C^1 a tratti (ad esempio le poligonali). Per la definizione precisa di curva C^1 a tratti si veda la Definizione 5.11.8 che diamo nel seguito. \square

Dal Corollario 1.28.10 si ha la seguente identità per la lunghezza di una curva assolutamente continua $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$:

Corollario 1.29.18. $\ell(\mathbf{r}) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$

1.29.3 Integrale lungo una curva di una funzione a valori scalari

Definizione 1.29.19. Sia f una funzione continua definita sull'immagine di una curva assolutamente continua $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Allora $f \circ \mathbf{r}$ è continua, e

\mathbf{r}' appartiene a $L^1[a, b]$, quindi vi appartiene anche $\|\mathbf{r}'\|$. Grazie all'Esercizio 1.16.32, il prodotto $f \circ \mathbf{r}(t)\|\mathbf{r}'\|(t)$ appartiene a $L^1[a, b]$ (se non si vuole usare l'Esercizio 1.16.32, basta imporre la condizione più forte che la curva \mathbf{r} sia di classe C^1 a tratti: questa condizione è sufficiente per i risultati nel resto di questo libro).

Si definisce l'*integrale di f lungo la curva \mathbf{r}* il numero

$$\int_{\mathbf{r}} f ds = \int_a^b f \circ \mathbf{r}(t) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Le seguenti proprietà dell'integrale seguono direttamente dalla definizione, tranne la proprietà (iii) che è nient'altro che il Corollario 1.29.18.

Proposizione 1.29.20. (Proprietà dell'integrale curvilineo di un campo scalare.) *Sia $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva assolutamente continua, R la sua immagine in \mathbb{R}^n e f una funzione continua su R . Allora*

- (i) *L'integrale curvilineo è un funzionale lineare sullo spazio delle funzioni continue.*
- (ii) (Teorema della media.) *Questo funzionale è continuo, nel senso (si veda la Sezione 4.6) che*

$$\min_R f \cdot \ell(\mathbf{r}) \leq \int_{\mathbf{r}} f ds \leq \max_R f \cdot \ell(\mathbf{r}).$$

Inoltre, esiste $t_0 \in [a, b]$ tale che $\int_{\mathbf{r}} f ds = f(\mathbf{r}(t_0)) \|\mathbf{r}'(t_0)\|$.

(iii) $\ell(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}} 1 ds$.

- (iv) (Additività rispetto al dominio di integrazione.) *Se $\mathbf{p} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una seconda curva assolutamente continua che comincia al punto finale di \mathbf{r} , ossia tale che $\mathbf{p}(c) = \mathbf{r}(b)$, allora l'integrale sulla curva concatenata $\mathbf{r}\&\mathbf{p}$ (Definizione 1.29.11) è la somma degli integrali separati:*

$$\int_{\mathbf{r}\&\mathbf{p}} f ds = \int_{\mathbf{r}} f ds + \int_{\mathbf{p}} f ds.$$

Esempio 1.29.21. Se il campo scalare da integrare rappresenta la densità di un materiale, allora il significato fisico del suo integrale curvilineo lungo una curva, intesa come un filo di materiale, è la massa totale della curva.

□

Il prossimo risultato mostra che l'integrale curvilineo di una funzione dipende solo dalla geometria dell'immagine della curva, non dalla sua legge oraria.

Proposizione 1.29.22. *Siano \mathbf{r} e \mathbf{p} due curve di classe C^1 equivalenti come curve di classe C^1 (nel senso della Definizione 1.29.2), e f una funzione continua sulla loro comune immagine. Allora $\int_{\mathbf{r}} f ds = \int_{\mathbf{p}} f ds$. La stessa identità vale per curve di classe C^1 a tratti equivalenti nel senso che ciascun tratto della prima è equivalente nel senso di C^1 al corrispondente tratto della seconda.*

Dimostrazione. Basta assumere che le curve siano di classe C^1 , perché, una volta dimostrato l'enunciato per curve di classe C^1 , esso si estende alle curve di classe C^1 a tratti per l'additività rispetto al dominio di integrazione. Sia $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$ il cambiamento di parametrizzazione, cioè l'applicazione biunivoca e C^1 con la sua inversa, che implementa l'equivalenza fra \mathbf{r} e \mathbf{p} , ossia tale che $\mathbf{r} = \mathbf{p} \circ u$. Abbiamo già osservato che u è strettamente monotona (Nota 1.29.5), e quindi u' non si annulla mai. Osserviamo che se u è crescente, cioè se $u' > 0$, allora si ha $u(a) = c$ e $u(b) = d$, altrimenti il viceversa. Inoltre, per il Teorema di Derivazione di Funzione Composta (Sezione 1.1) si ha $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{p}'(u(t))u'(t)$, da cui $\|\mathbf{r}'(t)\| = \|\mathbf{p}'(u(t))\||u'(t)|$. Pertanto segue dal Teorema 1.22.1 di integrazione per sostituzione che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} f ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(\mathbf{p}(u(t))) \|\mathbf{p}'(u(t))\| |u'(t)| dt \\ &= \int_c^d f(\mathbf{p}(s)) \|\mathbf{p}'(s)\| ds = \int_{\mathbf{p}} f ds. \end{aligned}$$

□

Nota 1.29.23. Segue dalla Proposizione 1.29.22 che l'integrale curvilineo di un campo scalare è costante sulla classe di equivalenza della curva rispetto alla quale è definito, ossia è invariante per equivalenza, e quindi in particolare non dipende dal verso di percorrenza. □

1.29.4 Altre nozioni di integrale curvilineo

Nella precedente sottosezione 1.29.22 abbiamo definito integrali curvilinei di campi scalari, ed abbiamo mostrato che per essi valgono linearità, teorema

della media, additività rispetto alla concatenazione di curve di integrazione (Proposizione 1.29.20) ed invarianza per equivalenza (Proposizione 1.29.22): in particolare essi non dipendono dal verso di percorrenza.

Presentiamo qui due altre varianti diverse di questa definizione, che ci saranno utili nel seguito.

La prima variante non è innovativa: è la copia identica della Definizione 1.29.19 nel caso che la funzione da integrare abbia valori vettoriali (la chiamiamo un *campo vettoriale*).

Definizione 1.29.24. (Integrale curvilineo a valori vettoriali di un campo vettoriale.) Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ un campo vettoriale e $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva assolutamente continua a valori nel dominio di definizione di \mathbf{f} . Chiamiamo *integrale a valori vettoriali di \mathbf{f} lungo la curva \mathbf{r}* il seguente vettore in \mathbb{R}^k :

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{f} \, ds = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt.$$

Esercizio 1.29.25. Mostrare che l'integrale curvilineo della precedente Definizione 1.29.24 ha proprietà analoghe a quello di campi scalari: linearità, additività rispetto alla concatenazione di curve di integrazione, teorema della media per la norma dell'integrale (Proposizione 1.29.20) ed invarianza per equivalenza (Proposizione 1.29.22): in particolare esso non dipende dal verso di percorrenza. \square

Esempio 1.29.26. Se il campo vettoriale è $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, allora il significato fisico dell'integrale curvilineo a valori vettoriali di un campo vettoriale è quello del baricentro della curva, intesa come un filo di materiale a densità costante. \square

Definizione 1.29.27. (Integrale curvilineo a valori vettoriali di un campo scalare.) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo scalare e $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva assolutamente continua a valori nel dominio di definizione di f . Chiamiamo *integrale a valori vettoriali di f lungo la curva \mathbf{r}* il seguente vettore in \mathbb{R}^n :

$$\int_{\mathbf{r}} f \, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \mathbf{r}'(t) \, dt.$$

Esempio 1.29.28. Se il campo scalare f rappresenta la densità di un materiale, allora il significato fisico del suo integrale curvilineo a valori vettoriali lungo

una curva è quello del baricentro della curva, intesa come un filo di materiale a densità data da f . \square

Esercizio 1.29.29. Mostrare che l'integrale curvilineo della Definizione 1.29.27 gode delle proprietà di linearità, additività rispetto alla concatenazione di curve di integrazione, teorema della media per la norma dell'integrale (Proposizione 1.29.20), ma non della invarianza per equivalenza (Proposizione 1.29.22). Infatti esso dipende dal verso di percorrenza, ed è invariante solo per cambi di parametrizzazione della curva che preservano il verso; se si rovescia il verso, esso cambia di segno, proprio come l'integrale normale su un intervallo (che in effetti ne è un caso particolare: si veda la prossima Definizione 1.29.30).

\square

Definizione 1.29.30. (Integrale curvilineo di funzioni complesse.)

Un integrale $\int_a^b f(x) dx$ (normale, non curvilineo) è un caso particolare di un integrale curvilineo, in cui la parametrizzazione della curva è $\mathbf{r}(t) = t$. La definizione analoga per funzioni di variabile complessa a valori complessi è particolarmente interessante; l'integrale si definisce come un integrale unidimensionale lungo una curva assolutamente continua $\mathbf{z} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ in analogia al caso reale appena visto, nel modo seguente:

$$\int_{\mathbf{r}} f(z) dz = \int_a^b f(\mathbf{z}(t)) \mathbf{z}'(t) dt,$$

dove il prodotto nell'integrando è la moltiplicazione complessa. Si osservi che l'integrale che si ottiene è un numero complesso, ma lo spazio complesso \mathbb{C} , come spazio vettoriale sui reali, è isomorfo a \mathbb{R}^2 . Questo integrale si può allora considerare come una nuova versione di integrale a valori vettoriali di un campo vettoriale $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lungo una curva $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Poiché la moltiplicazione complessa mescola le componenti reale ed immaginaria, questa nuova definizione di integrale a valori vettoriali di un campo vettoriale, che vale solo in due dimensioni reali, non coincide con quella precedentemente introdotta per \mathbb{R}^n (Definizione 1.29.24).

Esercizio 1.29.31. Mostrare che l'integrale complesso introdotto nella Definizione 1.29.30 gode delle proprietà di linearità, additività rispetto alla concatenazione di curve di integrazione, teorema della media, invarianza sotto equivalenza di curve che preservano il verso di percorrenza, e che esso cambia di segno se si rovescia il verso di percorrenza. \square

Notazione 1.29.32. Se $C \subset \mathbb{C}$ è l'immagine della curva \mathbf{r} , scriveremo spesso $\int_C f(z) dz$ invece che $\int_{\mathbf{r}} f(z) dz$. Si noti però che questa notazione è ambigua, perché l'integrale dipende non solo dall'immagine della curva, ma anche dal suo verso di percorrenza, che quindi occorre esplicitare, e (grazie all'additività per concatenazione) dal numero di giri percorsi lungo la curva se essa è chiusa (di solito assumeremo che la curva sia semplice, quindi che si percorra solo un giro).

Esempio 1.29.33. Mostriamo che, se C è la circonferenza di raggio r e centro l'origine nel piano complesso, percorsa una volta in senso antiorario, allora

$$\int_C z^k dz = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } k = -1 \end{cases}.$$

Infatti, parametrizziamo la curva come $\mathbf{z}(t) = re^{it}$, per $0 \leq t \leq 2\pi$. Allora

$$\int_C z^k dz = \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt} i r e^{it} dt = ir^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt$$

e l'ultimo integrale si annulla se $k+1 \neq 0$ perché le sue parti reale $\cos((k+1)t)$ ed immaginaria $\sin((k+1)t)$ sono a media nulla sul periodo, mentre se $k+1 = 0$ l'integrando vale identicamente 1 ed il risultato è $2\pi i$.

Pertanto, se poniamo $\text{Ind}_C(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z} dz$, il valore dell'integrale è il numero di volte che la curva gira intorno a 0 nel percorrere la circonferenza C , con segno positivo o negativo a seconda che il verso di percorrenza sia orario o antiorario. Analogamente, per una circonferenza con centro in $w \in \mathbb{C}$, il numero di avvolgimenti intorno a w di una curva chiusa che ha per immagine la circonferenza è dato dall'*indice di avvolgimento*

$$\text{Ind}_C(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z-w} dz \quad (1.82)$$

□

Il precedente Esempio conduce alla seguente definizione:

Definizione 1.29.34. (Indice di avvolgimento.) Definiamo *indice di avvolgimento* di una curva $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ intorno ad un punto $w \in \mathbb{C}$ il seguente integrale:

$$\text{Ind}_{\mathbf{r}}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{r}} \frac{1}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\mathbf{r}'(t)}{\mathbf{r}(t)-w} dt.$$

Nota 1.29.35. Estendendo l'Esempio 1.29.33, dimostreremo nella Nota 2.3.3 che l'indice di avvolgimento di una curva chiusa \mathbf{r} rispetto ad un punto w misura il numero di giri che la curva compie intorno a w , o, per essere più precisi, l'incremento dell'argomento del numero complesso $\mathbf{r}(t) - w$ al variare di t nell'intervallo di parametrizzazione della curva. \square

Osserviamo che in questo contesto il Teorema Fondamentale del Calcolo 1.27.1 assume una forma interessante:

Proposizione 1.29.36. (Teorema di Cauchy per una derivata.) *Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è derivabile in senso complesso (Definizione 1.22.13) con derivata continua, allora per ogni curva chiusa \mathbf{r} di classe C^1 a tratti (o assolutamente continua) si ha $\int_{\mathbf{r}} f'(z) dz = 0$.*

Dimostrazione. Scriviamo $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ e $z(t) = \mathbf{r}(t)$. Per il Teorema Fondamentale del Calcolo 1.27.1, l'integrale curvilineo vale $\int_{\mathbf{r}} f'(z) dz = \int_a^b f'(z(t)) z'(t) dt = f(z(b)) - f(z(a)) = 0$ perché $z(b) = z(a)$ (la curva è chiusa). \square

Poiché per ogni $n \neq -1$ la funzione z^n è la derivata di $\frac{z^{n+1}}{n+1}$, da qui abbiamo la seguente generalizzazione dell'Esempio 1.29.33:

Corollario 1.29.37. *Per ogni curva chiusa C si ha:*

- (i) $\int_C z^n dz = 0$ per $n = 0, 1, \dots$
- (ii) $\int_C z^n dz = 0$ per $n = -2, -3, \dots$ se $0 \notin C$

La prossima variante della nozione di integrale curvilineo è di fondamentale interesse. Ad essa, nella terminologia alternativa di *integrale di una forma differenziale*, è dedicato il resto dell'intera Sezione.

Definizione 1.29.38. (Integrale curvilineo a valori scalari di un campo vettoriale.) Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale e $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva assolutamente continua a valori nel dominio di definizione di \mathbf{f} . Chiamiamo *integrale di \mathbf{f} lungo la curva \mathbf{r}* il numero

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Quando non c'è adito a confusione, denotiamo questo integrale anche con $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$.

Esempio 1.29.39. Se \mathbf{f} rappresenta un campo di forze, il significato fisico dell'integrale $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ è il lavoro svolto dal campo su un punto che si muove lungo la curva. \square

Esercizio 1.29.40. Mostrare che l'integrale a valori scalari di un campo vettoriale, cioè il lavoro svolto dal campo, ha le proprietà di linearità, additività rispetto alla concatenazione di curve, invarianza sotto equivalenza di curve che preservano il verso di percorrenza, e cambia di segno se si rovescia il verso di percorrenza; infine, mostrare che esso gode della proprietà della media nella forma seguente:

$$\left| \int_{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \right| \leq \ell(\mathbf{r}) \max_{a \leq t \leq b} \|\mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\|$$

e, se il campo è una funzione continua,

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{f}(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0)$$

per qualche opportuno $t_0 \in [a, b]$ (qui $\ell(\mathbf{r})$ è la lunghezza della curva; per l'ultima uguaglianza si applichi il Teorema della Media Integrale (Sezione 1.1)). \square

1.29.5 Integrale curvilineo di un campo vettoriale e forme differenziali

Nella Definizione 1.29.38 abbiamo introdotto l'integrale di un campo vettoriale lungo una curva in \mathbb{R}^n ,

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{r}(t)) r'_i(t) dt.$$

Nella Nota 1.22.12 abbiamo chiamato una espressione di questo tipo una forma differenziale esatta. Rammentiamo la definizione, rinviando alla suddetta Nota per quanto concerne la terminologia.

Definizione 1.29.41. (i) Data una n -pla di funzioni continue a_1, \dots, a_n in un dominio aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, la funzione lineare $\omega : x \mapsto \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$, da \mathbb{R}^n a $(\mathbb{R}^n)^* \sim \mathbb{R}^n$, si chiama una *forma differenziale lineare del primo ordine*.

(ii) Se esiste una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $a_i = D_i f$ per ogni $i = 1, \dots, n$, la forma differenziale $df : x \mapsto df_x = \sum_{i=1}^n D_i f(x) dx_i$ si dice un *forma differenziale esatta*.

Una forma differenziale si dice di classe C^k se i suoi coefficienti sono funzioni in $C^k(A)$ (derivate parziali continue fino all'ordine k). Si noti che, se f è una funzione di classe C^{k+1} in A , allora df è una forma differenziale di classe C^k .

Definiamo l'integrale di una forma differenziale lineare ω del primo ordine lungo una curva \mathbf{r} in un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ in accordo con la Definizione 1.29.38:

Definizione 1.29.42. Sia $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ una forma differenziale lineare del primo ordine in un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow A$ una curva di classe C^1 con immagine in A (non necessariamente chiusa). L'integrale di ω lungo \mathbf{r} si definisce come

$$\int_{\mathbf{r}} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{r}(t)) r'_i(t) dt.$$

Nota 1.29.43. Data una forma differenziale lineare del primo ordine, i suoi coefficienti $a_1(x), \dots, a_n(x)$ formano un campo vettoriale f . Rammentiamo che l'integrale di una forma differenziale lungo una curva ha il significato fisico del lavoro svolto dal campo su un corpo che si muove lungo la curva (Esercizio 1.29.40): $\int_{\mathbf{r}} \omega = \int_{\mathbf{r}} \nabla f \cdot dt$ nel senso della Definizione 1.29.38. Pertanto, per le forme differenziali lineari del primo ordine valgono le proprietà dell'Esercizio 1.29.40. In particolare, l'integrale di una forma differenziale lungo una curva è lo stesso per tutte le curve nella sua classe di equivalenza positiva di orientamento (introdotta nella Notazione 1.29.7), ossia percorse nello stesso verso, mentre è l'opposto per le curve orientate in senso opposto. Quindi l'integrale dipende solo dal verso di percorrenza (per il suo segno), ma non dalla velocità di percorrenza della curva.

Nel seguito ci riferiremo alle forme differenziali lineari del primo ordine semplicemente come *forme differenziali lineari*. \square

1.29.6 Insiemi connessi

In questa breve sottosezione ci limitiamo a definire gli insiemi connessi in \mathbb{R}^2 e gli insiemi semplicemente connessi in \mathbb{R}^2 (o equivalentemente in \mathbb{C}).

Definizione 1.29.44. (Insiemi connessi.) Un insieme E in uno spazio topologico, ad esempio \mathbb{R}^n , si dice *sconnesso* se esistono due aperti A e B tali che $E = A \cup B$ e $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Con questa notazione, sia V il complementare di A e W il complementare di B . Allora questa definizione equivale a dire che E è sconnesso se e solo se $E \subset V \cup W$, dove V e W sono due chiusi ciascuno dei quali interseca E , ma tali che $E \cap V \cap W = \emptyset$. Pertanto, se E è sconnesso e *chiuso*, allora E è l'unione di due chiusi disgiunti non vuoti ($E \cap V$ e $E \cap W$).

Un insieme che non è sconnesso si dice *connesso*.

Vale il seguente risultato

Proposizione 1.29.45. *L'immagine di un insieme connesso sotto una funzione continua è un insieme connesso.*

Dimostrazione. Sia C un insieme connesso, X uno spazio topologico e $f : C \rightarrow X$ una funzione continua. Supponiamo per assurdo che $f(C)$ non sia connesso: allora esistono due aperti disgiunti A e $B \subset f(C)$ tali che $f(C) = A \cup B$. La controimmagine di un aperto sotto una funzione continua è un aperto (questa proprietà è equivalente alla definizione di continuità, si veda la Sezione 1.1). Pertanto si avrebbe $C = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, una decomposizione di C come unione disgiunta di due aperti. Questo contraddice il fatto che C sia connesso. \square

Una dimostrazione analoga prova il seguente enunciato:

Proposizione 1.29.46. *Sia E un aperto connesso in \mathbb{R}^n . Per ogni $x, y \in E$ esiste una curva C^1 a tratti con immagine in E il cui punto iniziale è x ed il punto finale è y .*

Dimostrazione. Basta mostrare che x e y sono congiunti da una curva poligonale (e quindi parametrizzabile in modo lineare a tratti, perciò C^1 a tratti). Poiché E è aperto, esiste un intorno sferico aperto O di x (una palla aperta con centro x) tutto contenuto in E : questa palla è convessa, ed i suoi punti sono congiunti a x da segmenti, quindi da curve C^1 , giacenti in O . Questo prova che il sottoinsieme A di E di punti congiunti a x da curve C^1 a tratti con immagine contenuta in E è non vuoto. Inoltre, se $w \in A$, allora $w \in E$ e quindi esiste una palla aperta con centro w contenuta in E , i cui punti, come prima, sono congiunti a w da segmenti: questo prova che A è aperto. ma ora, sia $B = E \setminus A$. L'insieme B consiste dei punti di E non congiunti a x da

curve C^1 a tratti con immagine in E . Di nuovo, se $z \in B$, esiste una palla aperta con centro z contenuta in E , la quale deve essere contenuta anche in B , perché, se un suo punto w fosse in $E \setminus B = A$, esso sarebbe congiungibile a x da una curva C^1 a tratti \mathbf{r} in E , ma allora lo sarebbe anche z (basterebbe concatenare \mathbf{r} con il segmento da w a z). Quindi anche B è aperto. D'altra parte, poiché E è connesso, non si può scomporre $E = A \cup B$ come unione di due aperti disgiunti non vuoti. Visto che $A \neq \emptyset$, deve essere $B = \emptyset$ e quindi $A = E$. \square

1.29.7 Campi conservativi e forme differenziali esatte

Teorema 1.29.47. *Sia ω una forma differenziale lineare di classe C^0 (ossia a coefficienti continui) in un aperto connesso E . La forma differenziale ω è esatta se e solo se vale la proprietà seguente:*

per ogni coppia di punti $x, y \in E$, l'integrale di ω assume lo stesso valore su ogni curva C^1 a tratti in E da x a y

(ossia con punto iniziale x e punto finale y : ovviamente, se si scambiano fra loro i punti iniziale e finale, ossia il verso di percorrenza, l'integrale della forma sulla curva cambia di segno, come osservato nella Nota 1.29.43). Tali curve esistono in base alla Proposizione 1.29.46.

Inoltre, sia ω una forma esatta su E e f una funzione di classe C^1 su E tale che $\omega = df$. Allora, se \mathbf{r} è una curva C^1 a tratti in E da x a y , si ha $\int_{\mathbf{r}} \omega = f(y) - f(x)$. (Per questo motivo, una f tale che $df = \omega$ si chiama una primitiva di ω).

Dimostrazione. Sia $\omega = \sum_{j=1}^n a_j dx_j$ una forma di classe C^0 che soddisfa la proprietà di indipendenza dell'integrale dalla curva esposta nell'enunciato. Vogliamo mostrare che esiste una funzione f di classe C^1 tale che $\omega = df$. Fissiamo un punto $w \in E$ e poniamo $f(x) = \int_{\mathbf{r}} \omega$ dove \mathbf{r} è una curva di classe C^1 a tratti in E da w a x : questa definizione ha senso proprio grazie all'ipotesi che l'integrale non dipenda dalla scelta della curva. Poiché E è aperto, esiste una palla aperta in E con centro in x , chiamiamo 2ρ il suo raggio. Sia \mathbf{e}_i l' i -esimo vettore canonico di base e $\mathbf{s}(t) = x + \rho t \mathbf{e}_i$, con $0 \leq t \leq 1$, una curva che ha per immagine un segmento da x a $x + \rho \mathbf{e}_i \in E$.

Allora, concatenando le curve come nella Definizione 1.29.11, otteniamo

$$\begin{aligned} f(x + \rho \mathbf{e}_i) &= \int_{\mathbf{r} \& \mathbf{s}} \omega = \int_{\mathbf{r}} \omega + \int_{\mathbf{s}} \omega = f(x) + \int_0^1 \sum_{j=1}^n a_j(\mathbf{s}(t)) s'_j(t) dt \\ &= f(x) + \rho \int_0^1 \sum_{j=1}^n a_j(x + \rho t \mathbf{e}_i) dt = f(x) + \rho \int_0^1 a_i(x + \rho t \mathbf{e}_i) dt. \end{aligned}$$

Poiché a_i è continua per ipotesi, segue da questa identità e dal Teorema della media integrale (Sezione 1.1) oppure, se si preferisce, dal Teorema Fondamentale del Calcolo 1.27.1, che

$$D_i f(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \rho \mathbf{e}_i) - f(x)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^1 a_i(x + \rho t \mathbf{e}_i) dt = a_i(x).$$

Quindi $df = \omega$.

Viceversa, sia ω una forma differenziale esatta, e f tale che $\omega = df$. Sia $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow E$ una curva di classe C^1 a tratti da x a y . Siano $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$ tali che r_i sia di classe C^1 negli intervalli $[t_{j-1}, t_j]$, con $j = 1, \dots, m$. Allora

$$\int_{\mathbf{r}} \omega = \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sum_{i=1}^n \nabla_i f(\mathbf{r}(t)) r'_i(t) dt. \quad (1.83)$$

Sappiamo, dal Teorema di derivazione di funzione composta in più variabili (regola della catena, Corollario 1.22.17), che

$$\sum_{i=1}^n \nabla_i f(\mathbf{r}(t)) r'_i(t) = D(f \circ \mathbf{r})(t).$$

Quindi (1.83) diventa

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} \omega &= \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\mathbf{r}(t)) dt = \sum_{j=1}^m (f(\mathbf{r}(t_j)) - f(\mathbf{r}(t_{j-1}))) \\ &= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) = f(y) - f(x). \end{aligned}$$

□

Corollario 1.29.48. *In un dominio aperto connesso in \mathbb{R}^n , l'integrale di una forma differenziale ω di classe C^0 su una qualsiasi curva di classe C^1 a tratti dipende solo dai punti iniziale e finale della curva (ossia, il campo vettoriale associato a ω è conservativo, ossia ancora, il lavoro fatto su una curva C^1 a tratti chiusa è zero) se e solo ω è esatta.*

1.29.8 *Insiemi semplicemente connessi e forme differenziali esatte di classe C^1

Nel Teorema 1.29.47 abbiamo dimostrato una condizione di esattezza di una forma di classe C^0 equivalente all'indipendenza dal percorso. Questa condizione è difficile da applicare, perché è scomodo cercare di verificarla per ogni curva regolare a tratti. Una condizione più comoda vale per forme differenziali di classe C^1 , come dimostriamo in questa Sottosezione.

Osserviamo prima una condizione necessaria:

Proposizione 1.29.49. *Sia $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ una forma differenziale esatta di classe C^1 in un aperto $E \subset \mathbb{R}^n$. Allora le componenti di ω hanno derivate incrociate uguali: per ogni $i, j = 1, \dots, n$ si ha*

$$D_j a_i = D_i a_j \quad (1.84)$$

identicamente in E .

Dimostrazione. Richiedere che ω sia esatta di classe C^1 significa richiedere che esista una funzione primitiva f di classe C^2 tale che $\omega = df$. La condizione dell'enunciato equivale all'identità $D_j D_i f = D_i D_j f$, che è vera in base al Lemma di Schwarz 1.22.3. \square

In generale, però, la condizione (1.84) non è sufficiente ad assicurare che una forma differenziale C^1 a tratti non dipenda dal percorso (e quindi sia esatta, in base al Teorema 1.29.47), come rivela il seguente esempio:

Esempio 1.29.50. Sia $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, e

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx$$

(quando si hanno due sole variabili, è più comodo scriverle come x, y invece che x_1, x_2). Sia $0 \leq t \leq 2\pi$ e $\mathbf{s}(t) = (\cos t, \sin t)$ una curva C^∞ chiusa la cui

immagine è la circonferenza di raggio 1 percorsa una volta in senso antiorario. Allora la condizione (1.84) è verificata ovunque, e

$$\int_{\mathbf{s}} \omega = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi,$$

quindi l'integrale sulla curva chiusa \mathbf{s} non è nullo e la forma ω non è esatta (il campo non è conservativo).

Osserviamo però che il dominio dove è definibile questa forma è il piano bucato: se ad esempio avessimo scelto $\omega = x dy - y dx$, allora la forma sarebbe stata definita ovunque e non esatta, ma non sarebbe stata verificata la condizione (1.84). \square

Definizione 1.29.51. (Insiemi semplicemente connessi.) Un sottoinsieme connesso E del piano si dice *semplicemente connesso* se non esiste alcun punto $w \notin E$ ed alcuna curva chiusa \mathbf{r} con immagine in E tale che l'indice di avvolgimento $\text{Ind}_{\mathbf{r}}(w)$ (introdotto nella Definizione 1.29.34) sia non nullo: ovvero, se non esiste alcuna curva in E che gira intorno a punti fuori di E (cioè, se l'interno dell'immagine delle curve in E è tutto contenuto in E , senza *buchi*: quest'ultima osservazione per ora intuitiva verrà resa precisa grazie alla nozione di equivalenza omotopica nella Sezione 2.4).

Teorema 1.29.52. *Se E è un aperto semplicemente connesso in \mathbb{R}^n e ω è una forma differenziale lineare di classe C^1 su E , allora la condizione (1.84) è sufficiente affinché ω sia esatta.*

Dimostrazione. In realtà non diamo qui la dimostrazione in dettaglio, ma rinviamo il lettore ad una dimostrazione simile in un altro capitolo successivo. L'idea è la seguente: per prima cosa (Teorema 2.4.6) si dimostra che due curve omotope possono essere portate l'una nell'altra con un'omotopia lineare a tratti (ossia, realizzando una interpolazione poligonale, lineare a tratti, dall'immagine della prima a quella della seconda); poi si dimostra che, sotto questo tipo di omotopia, l'integrale di una forma differenziale C^1 a tratti è lo stesso per le due curve (Teorema 2.4.7); infine, si sceglie come prima curva una curva chiusa e si utilizza il fatto che il dominio è semplicemente connesso per scegliere la seconda curva costante (ovvero avente per immagine un punto solo), e su di essa ovviamente l'integrale è zero. I succitati riferimenti in realtà hanno a che fare con integrali lungo curve di funzioni olomorfe su \mathbb{C} (che introdurremo nel successivo Capitolo 2, nella Definizione 2.2.4), le quali, come vedremo, verificano automaticamente la condizione (1.84) in base

alla parte (iv) del Teorema 2.1.5 (equazioni di Cauchy–Riemann). Quindi la dimostrazione a cui abbiamo rinvio il lettore è solo apparentemente in un altro contesto, tranne per il fatto che lo spazio ambiente, un aperto semplicemente connesso in $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ ha due sole dimensioni reali (ma la generalizzazione a più dimensioni non dovrebbe essere difficile). \square

1.30 Appendice: approccio di Carathéodory alla misura di Lebesgue

In questa Appendice, tratta da [22, Chapter 3, Section 3], introduciamo gli insiemi misurabili secondo Lebesgue mediante un approccio alternativo dovuto a Carathéodory e basato sulla misura esterna.

1.30.1 Misura esterna

Ripetiamo, per comodità del lettore, la Definizione 1.24.1:

Definizione 1.30.1. (Misura esterna.) Per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}$ consideriamo le successioni numerabili di intervalli aperti I_n tali che $E \subset \cup_n I_n$, e la serie $L = \sum_n m(I_n)$ delle loro lunghezze (finita o infinita). Si definisce *misura esterna* di E l'estremo inferiore $m^*(E)$ di L rispetto a tutte le successioni di intervalli come sopra.

Una definizione analoga vale in \mathbb{R}^n se si prendono, al posto degli intervalli unidimensionali, pluriintervalli n -dimensionali (ossia prodotti cartesiani di n intervalli sugli n assi coordinati), ed al posto della loro lunghezza il loro iper-volume.

Nota 1.30.2. Se $A \subset B$ allora ogni ricoprimento di B è un ricoprimento di A , e quindi $m^*(A) \leq m^*(B)$. \square

Proposizione 1.30.3. *La misura esterna di un intervallo I è la sua lunghezza $\ell(I)$.*

Dimostrazione. Sia $I = [a, b]$ un intervallo chiuso e limitato. Poiché per ogni $\varepsilon > 0$ l'intervallo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ricopre I , si ha $m^*(I) \leq b - a$. Dobbiamo dimostrare che, se $I \subset \cup_n (a_n, b_n)$, allora

$$\sum_n b_n - a_n \geq b - a. \quad (1.85)$$

Per la proprietà di Heine–Borel (parte (ii) del Lemma 1.9.3) possiamo limitare l'attenzione a ricoprimenti finiti $\{O_n = (a_n, b_n), n = 0, \dots, N\}$. Poiché $I \subset \cup_n O_n$, esiste $0 \leq n_1 \leq N$ tale che $a \in (a_{n_1}, b_{n_1})$, ossia $a_{n_1} < a < b_{n_1}$. Se $b \leq b_{n_1}$, allora vale la disuguaglianza (1.85), quindi possiamo assumere $b_{n_1} \leq b$. D'altra parte, b_{n_1} non appartiene all'intervallo (a_{n_1}, b_{n_1}) , e quindi

deve esistere $0 \leq n_2 \leq N$ tale che $b_{n_1} \in (a_{n_2}, b_{n_2})$. Iterando il ragionamento otteniamo una successione $n_i \in [0, \dots, N]$ con la proprietà $a_{n_i} < b_{n_{i-1}} < b_{n_i}$. Poiché l'insieme degli indici è finito, il procedimento termina dopo un numero finito di passi, ossia con un indice n_k tale che $b \in (a_{n_k}, b_{n_k})$. Ne segue che

$$\sum_n b_n - a_n \geq \sum_{i=1}^k b_{n_i} - a_{n_i} > b_{n_k} - a_{n_1}$$

(la disuguaglianza è stretta perché due intervalli O_{n_i} consecutivi si intersecano: contengono entrambi b_{n_i}). Siccome, per costruzione, si ha $a_{n_1} < a < b < b_{n_k}$, abbiamo dimostrato la disuguaglianza (1.85), e quindi l'enunciato, per ogni intervallo limitato e chiuso.

D'altra parte, dato un qualunque $\varepsilon > 0$, ogni intervallo limitato I è contenuto in un intervallo limitato e chiuso K tale che $\ell(I) > \ell(K) - \varepsilon = m^*(K) - \varepsilon$: ne segue che l'enunciato continua a valere per ogni intervallo limitato.

Infine, se I è un intervallo illimitato, ossia una semiretta o l'intera retta, esso contiene intervalli limitati di lunghezza arbitrariamente grande e quindi, ovviamente, la sua misura esterna è infinita. \square

Proposizione 1.30.4. *La misura esterna è (numerabilmente) subadditiva:*

$$m^*(\cup_n A_n) \leq \sum_n m^*(A_n).$$

Dimostrazione. L'enunciato è ovvio se $m^*(A_n) = \infty$ per un indice n , quindi possiamo restringere l'attenzione al caso in cui tutti gli insiemi A_n hanno misura esterna finita. Allora, per la Definizione 1.24.1 di misura esterna, per ogni n , ε esiste un ricoprimento di A_n con intervalli aperti $\{O_{n,i}, i \in \mathbb{N}\}$ tale che $\sum_i \ell(O_{n,i}) < m^*(A_n) + \varepsilon/2^n$. Allora la famiglia numerabile di intervalli aperti $\{O_{n,i}, n, i \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento di $\cup_n A_n$ tale che

$$m^*(\cup_n A_n) \leq \sum_n \sum_i \ell(O_{n,i}) < \sum_n m^*(A_n) + 2^{-n} \varepsilon = \varepsilon + \sum_n m^*(A_n),$$

da cui l'enunciato. \square

Il seguente facile esercizio mostra che la misura esterna è sì definita per ogni insieme, ma purtroppo non è numerabilmente additiva.

Esercizio 1.30.5. Ogni insieme numerabile ha misura esterna nulla. \square

1.30.2 Insiemi misurabili secondo Lebesgue

Reintroduciamo qui gli insiemi misurabili secondo Lebesgue sulla base di questa definizione dovuta a Carathéodory:

Definizione 1.30.6. Un insieme $E \subset \mathbb{R}$ è misurabile se per ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ vale l'identità $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \mathbb{C}E)$ (indichiamo con $\mathbb{C}E$ il complemento $\mathbb{R} \setminus E$).

Nota 1.30.7. È ovvio che un insieme è misurabile se e solo se lo è il suo complemento, e \emptyset e \mathbb{R} sono misurabili. \square

Lemma 1.30.8. *Tutti gli insiemi di misura esterna nulla sono misurabili.*

Dimostrazione. Supponiamo $m^*(E) = 0$. Poiché $A \cap E \subset E$ e $A \cup \mathbb{C}E \subset A$, segue dalla Nota 1.30.2 che $m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0$, e $m^*(A) \geq m^*(A \cap \mathbb{C}E) = m^*(A \cap \mathbb{C}E) + m^*(A \cap E)$. La disuguaglianza opposta segue di nuovo dalla Nota 1.30.2. \square

Proposizione 1.30.9. *L'unione di due insiemi misurabili è misurabile.*

Dimostrazione. Siano E_1 e E_2 due insiemi misurabili. La misurabilità di E_2 , per definizione, implica

$$m^*(A \cap \mathbb{C}E_1) = m^*(A \cap \mathbb{C}E_1 \cap E_2) + m^*(A \cap \mathbb{C}E_1 \cap \mathbb{C}E_2). \quad (1.86)$$

Osserviamo anche che $A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2 \cap \mathbb{C}E_1)$ (i punti di A che stanno in E_1 o in E_2 devono essere in E_1 o se no essere in E_2 ma non in E_1). Quindi, come al solito in base all'additività (Nota 1.30.2),

$$m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) \leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap \mathbb{C}E_1). \quad (1.87)$$

Questo ci fa concludere che $E_1 \cup E_2$ è misurabile. Infatti, in base a (1.86),

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap \mathbb{C}(E_1 \cup E_2)) \\ &= m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \cap \mathbb{C}E_1 \cap \mathbb{C}E_2) \\ &\leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap \mathbb{C}E_1) + m^*(A \cap \mathbb{C}E_1 \cap \mathbb{C}E_2) \end{aligned}$$

ed in base a (1.87)

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap \mathbb{C}E_1) + m^*(A \cap \mathbb{C}E_1 \cap \mathbb{C}E_2) \\ m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap \mathbb{C}E_1) = m^*(A) \end{aligned}$$

(l'ultima uguaglianza vale perché E_1 è misurabile). \square

Abbiamo così provato che la famiglia degli insiemi misurabili contiene \emptyset e \mathbb{R} ed è chiusa rispetto alle operazioni di complemento ed unione *finita* (in tal caso si dice che è un'algebra di insiemi). Vogliamo provare che è anche una σ -algebra (Definizione 1.9.8), ossia che è chiusa rispetto all'operazione di unione *numerabile*.

Proposizione 1.30.10. *La famiglia degli insiemi misurabili è una σ -algebra (Definizione 1.9.8).*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che, se $\{E_n\}$ è una successione di insiemi misurabili, anche $E := \cup_{n \geq 0} E_n$ è misurabile. Osserviamo anzitutto che è sufficiente limitare l'attenzione a successioni $\{E_n\}$ di insiemi a due a due disgiunti, perché se non sono disgiunti basta rimpiazzarli con gli insiemi $B_n := E_n \setminus \cup_{m=0}^{n-1} E_m$, che invece lo sono, ed hanno la stessa unione: $\cup_{n \geq 0} B_n = \cup_{n \geq 0} E_n$.

Per mostrare che E è misurabile occorre provare che, per ogni insieme A , si ha $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \mathbb{C}E)$ (Definizione 1.30.6). Siccome la disuguaglianza $m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \mathbb{C}E)$ è evidente grazie alla subadditività finita della misura esterna (un caso particolare della Proposizione 1.30.4), occorre mostrare solo la disuguaglianza inversa,

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \mathbb{C}E) \quad (1.88)$$

A causa della subadditività numerabile della misura esterna (Proposizione 1.30.4) abbiamo $m^*(A \cap E) \leq \sum_{k=0}^{\infty} m^*(A \cap E_k)$. Perciò la disuguaglianza (1.88) è certamente vera purché sia vero che

$$m^*(A) \geq \sum_{k=0}^{\infty} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap \mathbb{C}E).$$

A sua volta, questa disuguaglianza è certamente vera purché per ogni intero n sia vero che

$$m^*(A) \geq \sum_{k=0}^n m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap \mathbb{C}E). \quad (1.89)$$

Infatti in quest'ultima disuguaglianza il primo membro non dipende da n , e quindi, facendo tendere n ad infinito, da essa si ottiene la precedente.

Sia $U_n := \cup_{k=0}^n E_k$: questo insieme è unione finita di insiemi misurabili e quindi è un insieme misurabile grazie alla Proposizione 1.30.9. Da questo fatto, dall'ovvia relazione di contenimento $\mathfrak{C}U_n \supset \mathfrak{C}E$ e dalla Nota 1.30.2 abbiamo

$$m^*(A) = m^*(A \cap U_n) + m^*(A \cap \mathfrak{C}U_n) \geq m^*(A \cap U_n) + m^*(A \cap \mathfrak{C}E).$$

Da questa disuguaglianza segue la disuguaglianza (1.89), il che completa la dimostrazione, purché proviamo che l'unione di una famiglia finita di insiemi misurabili *disgiunti* E_k ($k = 0, \dots, n$) verifica la proprietà di additività seguente:

$$m^*(A \cap (\cup_{k=0}^n E_k)) = \sum_{k=0}^n m^*(A \cap E_k).$$

Quest'ultimo passo viene dimostrato come enunciato separato nel prossimo Lemma 1.30.11. \square

Lemma 1.30.11. *La misura esterna di insiemi disgiunti è finitamente additiva: se $\{E_k : k = 0, \dots, n\}$ è una famiglia finita di insiemi misurabili disgiunti, allora*

$$m^*(A \cap (\cup_{k=0}^n E_k)) = \sum_{k=0}^n m^*(A \cap E_k).$$

Dimostrazione. Dimostriamo l'enunciato per induzione su n . Per $n = 0$ è ovvio. Quindi, grazie all'ipotesi di induzione, dobbiamo solo provare che, per ogni n ,

$$m^*(A \cap (\cup_{k=0}^n E_k)) = m^*(A \cap E_n) + m^*(A \cap (\cup_{k=0}^{n-1} E_k)). \quad (1.90)$$

D'altra parte, poiché gli insiemi E_k sono disgiunti, abbiamo $(\cup_{k=0}^n E_k) \cap E_n = E_n$, e $(\cup_{k=0}^n E_k) \cap \mathfrak{C}E_n = \cup_{k=0}^{n-1} E_k$. Allora (1.90) segue dalla Definizione 1.30.6 di misurabilità e dal fatto che l'unione finita $\cup_{k=0}^n E_k$ è misurabile. \square

1.30.3 I Boreliani sono misurabili

Ora mostriamo che i Boreliani (ovvero gli elementi della σ -algebra generata dagli intervalli aperti, Definizione 1.9.9) sono insiemi misurabili secondo la definizione di Carathéodory.

Lemma 1.30.12. *Per ogni $a \in \mathbb{R}$, la semiretta (a, ∞) è misurabile.*

Dimostrazione. Per ogni insieme A poniamo $B := A \cap (a, \infty)$ e $C := A \cap (-\infty, a]$. Allora $A = B \cup C$, e, di nuovo grazie alla subadditività finita della misura esterna (come nella dimostrazione della Proposizione 1.30.10), basta provare che

$$m^*(A) \geq m^*(B) + m^*(C). \quad (1.91)$$

Questo è certamente vero se $m^*(A) = \infty$, quindi assumiamo $m^*(A) < \infty$. In tal caso, per la Definizione 1.24.1 di misura esterna, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento numerabile di A con intervalli aperti I_n tale che

$$\sum_n \ell(I_n) \leq m^*(A) + \varepsilon. \quad (1.92)$$

Adesso poniamo $J_n := I_n \cap (a, \infty)$ e $K_n := I_n \cap (-\infty, a]$. Gli insiemi J_n e K_n sono o vuoti o intervalli disgiunti contigui, e quindi

$$\ell(I_n) = \ell(J_n) + \ell(K_n) = m^*(J_n) + m^*(K_n) \quad (1.93)$$

(l'ultima identità segue dal Lemma 1.30.11). Ora notiamo che $B \subset \cup_n J_n$ e $C \subset \cup_n K_n$. Allora dalla monotonia della misura esterna (Nota 1.30.2) e dalla sua subadditività numerabile (Proposizione 1.30.4) segue rispettivamente $m^*(B) \leq m^*(\cup_n J_n) \leq \sum_n m^*(J_n)$ e $m^*(C) \leq m^*(\cup_n K_n) \leq \sum_n m^*(K_n)$. Sommando queste due disuguaglianze, in base alla identità (1.93) ed alla disuguaglianza (1.92) otteniamo

$$m^*(B) + m^*(C) \leq \sum_n (m^*(J_n) + m^*(K_n)) = \sum_n \ell(I_n) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

Poiché ε è arbitrario da qui segue (1.91). \square

Proposizione 1.30.13. *I Boreliani sono misurabili.*

Dimostrazione. Questo enunciato si dimostra con una estensione standard a partire dalle semirette considerate nel Lemma precedente. Gli insiemi misurabili formano una σ -algebra (Proposizione 1.30.10) e (a, ∞) è misurabile (Lemma 1.30.12). Pertanto, per ogni a , il suo complemento $(-\infty, a]$ è misurabile e lo è anche $(-\infty, a) = \cup_{n>0} (-\infty, a - 1/n]$. Allora ogni intervallo aperto $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$ è misurabile: dunque la σ -algebra di Borel, che è generata dagli intervalli aperti, è contenuta nella σ -algebra degli insiemi misurabili. \square

1.30.4 Misura di Lebesgue

Definizione 1.30.14. Chiamiamo *misura di Lebesgue* m la restrizione della misura esterna m^* (definita su tutti gli insiemi) alla σ -algebra degli insiemi misurabili.

Proposizione 1.30.15. Per ogni successione E_n di insiemi misurabili si ha $m(\cup_n E_n) \leq \sum_n m(E_n)$. Se in aggiunta gli insiemi E_n sono a due a due disgiunti, allora $m(\cup_n E_n) = \sum_n m(E_n)$.

Dimostrazione. La disuguaglianza segue direttamente dalla proprietà corrispondente per la misura esterna (Proposizione 1.30.4). Proviamo allora l'identità nel caso di una famiglia di insiemi a due a due disgiunti: ancora una volta grazie alla subadditività (numerabile) della misura esterna, basta provare

$$m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n). \quad (1.94)$$

Consideriamo una famiglia *finita* di insiemi misurabili E_n a due a due disgiunti: dal Lemma 1.30.11 segue la finita additività di m , ovvero l'identità dell'enunciato, $m(\cup_n E_n) = \sum_n m(E_n)$. Ora passiamo a considerare una famiglia $\{E_n\}$ *infinita* di insiemi misurabili a due a due disgiunti. Per ogni k , segue dalla Nota 1.30.2 e dalla finita additività che $\sum_{n=1}^k m(E_n) = m(\cup_{n=1}^k E_n) \leq m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)$. Da qui, facendo tendere n a infinito, otteniamo la disuguaglianza (1.94). \square

1.31 Appendice: dimostrazione diretta della disuguaglianza di Minkowski

Seguendo [22] diamo una dimostrazione della disuguaglianza di Minkowski (Teorema 1.16.10) che non richiede la disuguaglianza di Hölder 1.16.6, e che permette di studiare anche il caso $0 < p < 1$.

Dimostrazione (diretta della disuguaglianza di Minkowski, Teorema 1.16.10). La disuguaglianza è chiara se $p = \infty$, ed anche nei casi in cui $\|f\|$ o $\|g\| = 0$, perché in questi casi f o g sono nulle quasi ovunque. Supponiamo allora che $1 \leq p < \infty$ e $\|f\| \equiv \alpha \neq 0$, $\|g\| \equiv \beta \neq 0$. Normalizziamo, in modo che le norme diventino uguali a 1: cioè poniamo $f_0 = \frac{1}{\alpha}|f|$, $g_0 = \frac{1}{\beta}|g|$. Scriviamo $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Allora $1 - \lambda = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$. Allora

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p = (\alpha f_0(x) + \beta g_0(x))^p \\ &= (\alpha + \beta)^p (\lambda f_0(x) + (1 - \lambda)g_0(x))^p \\ &\leq (\alpha + \beta)^p (\lambda f_0(x)^p + (1 - \lambda)g_0(x)^p) \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla Definizione 1.15.1 di convessità perché la funzione $t \mapsto t^p$ è convessa per $t \geq 0$ e $p \geq 1$ (Esercizio 1.7.3, oppure, se non si è svolto quell'esercizio, si applichi il Corollario 1.15.9). Se $p > 1$ questa disuguaglianza è stretta a meno che $f_0 = g_0$ ed f e g abbiano due valori complessi della stessa fase per ogni x .

Integrando entrambi i termini di questa disuguaglianza si ottiene

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p &\leq (\alpha + \beta)^p (\lambda \|f_0\|_p^p + (1 - \lambda)\|g_0\|_p^p) \\ &\leq (\alpha + \beta)^p = (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^{1/p}. \end{aligned}$$

Otteniamo la disuguaglianza di Minkowski estraendo le radici p -esime di entrambi i lati.

Se $1 < p < \infty$ la disuguaglianza è stretta a meno che $f_0 = g_0$ quasi ovunque ed f e g abbiano quasi ovunque lo stesso angolo di fase: questo equivale a dire che f e g sono multipli una dell'altra per un fattore positivo (o nullo, naturalmente).

□

Nota 1.31.1. Se $0 < p < 1$, la stessa dimostrazione, ed il fatto che per questi p la funzione $t \mapsto t^p$ è concava per $t \geq 0$ mostrano che la disuguaglianza vale

nel verso opposto, e quindi per questi p l'espressione $\|f\|^p$ non è una norma perché non verifica la disuguaglianza triangolare. \square

Capitolo 2

Analisi complessa

Questo capitolo presenta cenni della parte elementare della teoria delle funzioni $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ derivabili in senso complesso. L'esposizione è ispirata a (ed in gran parte tratta da) [23, Chapter 10] ed a [1, Chapter 16].

2.1 *Derivata in senso complesso, differenziabilità ed equazioni di Cauchy–Riemann

In questa sottosezione consideriamo funzioni di variabile complessa e *a valori complessi*, $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Per queste funzioni, la nozione di derivata è quella ovvia:

Definizione 2.1.1. (Derivata in senso complesso.) . Sia $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, e sia z_0 un punto interno al dominio di definizione di f . Si dice che f è derivabile (in senso complesso) al punto z_0 se esiste finito il limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

che in tal caso si chiama la *derivata* di f a z_0 .

Nota 2.1.2. (Equazioni di Cauchy–Riemann.) Possiamo calcolare il limite del rapporto incrementale di $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ lungo, ad esempio, la direzione

dell'asse reale e dell'asse immaginario: se $z_0 = x_0 + iy_0$ otteniamo

$$f'(z_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0} \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \quad (2.1)$$

$$f'(z_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{iy - iy_0} \equiv \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Questo equivale a reinterpretare f come funzione da \mathbb{C} a \mathbb{R}^2 e considerare le sue *derivate parziali complesse* $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$. A causa del fattore i al denominatore nella derivata al variare di y , le precedenti identità ora diventano

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \quad (2.2)$$

Si osservi che queste derivate parziali sono numeri complessi. Ora separiamone la parte reale dalla parte immaginaria:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} + i \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} \quad (2.3)$$

ed analogamente per la derivata parziale rispetto a y . Ora è elementare verificare che l'uguaglianza (2.2) si spezza nel seguente sistema di equazioni (**Equazioni di Cauchy–Riemann**):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z_0) &= -\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(z_0). \end{aligned} \quad (2.4)$$

□

Nota 2.1.3. Per una funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ derivabile in senso complesso, grazie all'unidimensionalità (in senso complesso) del dominio e dell'immagine la nozione di derivabilità e di differenziabilità sono equivalenti (Nota 1.22.5). Più precisamente, entrambe le nozioni equivalgono alla seguente:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) := f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\epsilon(z) \quad (2.5)$$

dove $\epsilon(z)$ è infinitesimo per $z \rightarrow z_0$.

Questo sviluppo soddisfa la Definizione 1.22.4 di differenziale, perché la moltiplicazione per il numero $f'(z_0)$ è, ovviamente, un funzionale lineare sullo

spazio complesso unidimensionale \mathbb{C} (e tutti i funzionali lineari su uno spazio unidimensionale sono moltiplicazioni per un numero). Ma se separiamo le parti reale ed immaginaria, questo funzionale diventa un funzionale lineare su \mathbb{R}^2 , che, nella base canonica, è rappresentato da una matrice bidimensionale. Quale è la matrice?

Per semplicità, scegliamo $z_0 = 0$ (non c'è perdita di generalità, perché ci si riconduce a questo caso con una traslazione, che non altera derivate e differenziali). Scriviamo $f'(0) = a + ib$ e $z = x + iy$. Allora (2.5) diventa

$$f(z) = f(0) + (a + ib)(x + iy) + o(\|x + iy\|) = ax - by + i(bx + ay) + o(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (2.6)$$

dove chiaramente il simbolo $o(\|z\|)$ rappresenta un infinitesimo rispetto a $\|z\|$ (Sezione 1.1), quindi del tipo $z\epsilon(z)$. Ora reinterpretiamo $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ come una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$: allora dall'uguaglianza (2.6) si ricava la seguente espressione reale dell'operatore lineare su \mathbb{R}^2 determinato dal differenziale complesso, in termini di una matrice reale 2×2 :

$$d\mathbf{f}|_{(0,0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Ma la matrice che rappresenta il differenziale di una funzione reale $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ è data dalla matrice Jacobiana (Definizione 1.22.8), espressa in termini delle derivate parziali di \mathbf{f} come segue:

$$d\mathbf{f}|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(0) & \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(0) \\ \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(0) & \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(0) \end{pmatrix} .$$

Confrontando le differenti espressioni del differenziale reale calcolate nelle due uguaglianze precedenti, ritroviamo le equazioni di Cauchy–Riemann (2.4).

Infine, la funzione $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ si può considerare come una funzione da \mathbb{C} a \mathbb{R}^2 . In questo caso il suo differenziale è un operatore lineare da \mathbb{C} a \mathbb{R}^2 , e quindi è rappresentato nelle basi canoniche da una matrice consistente di una sola riga, i cui coefficienti sono le derivate parziali complesse di f rispetto alle variabili x e y , introdotte nella Nota 2.1.2. La nozione di differenziabilità per questa riformulazione diventa

$$f(z) = f(0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0)y + o(\|z\|) \quad (2.7)$$

ed è chiaro che, esprimendo le derivate parziali complesse in termini di quelle reali (ossia delle loro parti reali ed immaginarie) come in (2.3), questa nozione di differenziabilità equivale a quella complessa in (2.6), e quindi a quella da \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 . \square

Riassumendo, nella precedente Nota 2.1.3 abbiamo mostrato che una funzione $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ è derivabile in senso complesso se e solo se è differenziabile in senso reale (come funzione da \mathbb{R}^2 in sé), e anche come funzione da \mathbb{C} a \mathbb{R}^2 , e le sue derivate parziali (in senso reale) sono legate dalle equazioni di Cauchy–Riemann. Il prossimo risultato, Proposizione 2.1.5, mostra il viceversa: se f è differenziabile in senso reale e le sue derivate parziali soddisfano le equazioni di Cauchy, allora f è derivabile in senso complesso. Premettiamo una notazione utile.

Notazione 2.1.4. Denotiamo con ∂ e $\bar{\partial}$ i seguenti operatori differenziali sulle funzioni $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ derivabili in senso parziale:

$$\partial = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.8)$$

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2.9)$$

Proposizione 2.1.5. (Condizioni equivalenti alla derivabilità in senso complesso.) Per una funzione $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, ad ogni punto z_0 interno al suo dominio di definizione le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (i) f è derivabile in z_0 in senso complesso;
- (ii) f è differenziabile in z_0 in senso complesso (cioè nel senso in cui il differenziale è visto come applicazione lineare da \mathbb{C} a \mathbb{C});
- (iii) f , o meglio la funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ che si ottiene su \mathbb{R}^2 separandone le parti reale ed immaginaria, è differenziabile al punto z_0 (nel senso di \mathbb{R}^2) e le sue derivate parziali soddisfano le equazioni di Cauchy–Riemann (2.4);
- (iv) f , vista come funzione da \mathbb{C} a \mathbb{R}^2 , è differenziabile al punto z_0 (nel senso di (2.7)) e le sue derivate parziali soddisfano le equazioni di Cauchy–Riemann (2.4);
- (v) $\bar{\partial}f \equiv 0$.

Dimostrazione. L'equivalenza fra (i) e (ii) ed il fatto che ciascuna di queste due proprietà implica (iii) e che (iii) implica (iv) è stata dimostrata nella precedente Nota 2.1.3. Basta quindi mostrare che (iv) implica (v) e che (v) implica (i). Se $\mathbf{f} : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}^2$ è differenziabile al punto $z_0 = x_0 + iy_0$ nel senso di (2.7) e le sue derivate parziali soddisfano le equazioni di Cauchy–Riemann (2.4), allora la funzione $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ generata dalle componenti f_1 e f_2 di \mathbf{f} , ovvero $f = f_1 + if_2$, è derivabile in senso complesso al punto z_0 . In realtà, vedremo che lo stesso ragionamento prova non solo che (iv) implica (i), ma che queste due proprietà sono equivalenti. Come prima, senza perdita di generalità limitiamo l'attenzione al punto $z = 0$.

Nell'uguaglianza (2.7) sostituiamo $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ e $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ ed otteniamo

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0) - i \frac{\partial f}{\partial y}(0) \right) z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(0) \right) \bar{z} + z\epsilon(z) \\ &= \partial f(0)z + \bar{\partial}f(0)\bar{z} + z\epsilon(z) \end{aligned}$$

dove, come prima, ϵ è un infinitesimo.

Dividendo entrambi i membri per $z \neq 0$ otteniamo l'espressione del rapporto incrementale di f in 0:

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \partial f(0) + \bar{\partial}f(0)\frac{\bar{z}}{z} + \epsilon(z).$$

La funzione f è derivabile in $z = 0$ se e solo se esiste finito il limite di questo rapporto incrementale. Perché questo accada, bisogna che il limite non dipenda dal percorso che z segue nel tendere a zero. D'altra parte, \bar{z}/z vale costantemente 1 se z giace sull'asse reale, e costantemente -1 se giace sull'asse immaginario: quindi il limite non esiste a meno che non si abbia $\bar{\partial}f(0) = 0$, e se invece questa condizione è verificata il limite esiste (e vale $\partial f(0)$). Per concludere la dimostrazione basta solo osservare che la condizione di esistenza del limite, ovvero $\bar{\partial}f(0) = 0$, non è altro che le equazioni di Cauchy–Riemann (2.4). \square

2.2 Funzioni oloomorfe ed armoniche; funzione armonica coniugata

D'ora in poi, una funzione derivabile in senso complesso in un insieme aperto del piano complesso verrà chiamata *olomorfa*:

Definizione 2.2.1. Una funzione è olomorfa se è derivabile in senso complesso in ogni punto dell'aperto in cui è definita, ossia se soddisfa le equazioni di Cauchy–Riemann (2.4) ad ogni punto.

Per questa definizione, una funzione f olomorfa ha derivate parziali rispetto ad entrambe le variabili (reali) x e y . Supponiamo che queste derivate parziali siano derivabili a loro volta in senso parziale con continuità (vedremo che questo è sempre vero: Corollario 2.5.4). Allora, derivando rispetto a x la prima equazione di Cauchy–Riemann (2.4) e rispetto a y la seconda, ed applicando il Lemma di Schwartz 1.22.3, otteniamo

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv 0.$$

Definizione 2.2.2. L'operatore Δ si chiama *l'operatore di Laplace*. Una funzione che verifica l'identità $\Delta f = 0$ in un aperto E del piano si chiama *armonica* in E . Quindi ogni funzione olomorfa è armonica.

Sia f olomorfa in un aperto connesso E e scriviamo $u := \operatorname{Re} f$ e $v := \operatorname{Im} f$. Nel caso che u sia identicamente nulla, le equazioni di Cauchy–Riemann, nella forma $\bar{\partial} f \equiv 0$ (parte (v) della Proposizione 2.1.5) portano a

$$\frac{\partial v}{\partial x} \equiv -i \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Poiché v è a valori reali, questo implica che

$$\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0 \equiv \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Pertanto v è costante in E . Analogo ragionamento mostra che, se $v \equiv 0$, allora u è costante in E . Abbiamo quindi provato:

Corollario 2.2.3. *Se $f = u + iv$ è definita in un aperto connesso $E \subset \mathbb{C}$, allora data u c'è al più una sola funzione v , a meno di costanti additive, per cui f risulta olomorfa in E . Le funzioni u e v sono funzioni armoniche reali, e la funzione v si chiama la funzione armonica coniugata di u .*

Notazione 2.2.4. Le funzioni derivabili in senso complesso, oltre che *olomorfe*, sono dette anche *analitiche*, nella regione in cui sono derivabili.

Il quoziente di due funzioni olomorfe, laddove definito (ossia dove il denominatore non si annulla) si chiama una funzione *meromorfa*.

Le funzioni meromorfe sono esattamente quelle funzioni olomorfe tranne che in un insieme senza punti di accumulazione nel dominio di definizione (gli zeri del denominatore) che consiste di singolarità polari. (Per una dimostrazione accurata di questa caratterizzazione, che richiede vari concetti molti dei quali saranno sviluppati in questo Capitolo, si veda [23, Theorem 16.8]). Rammentiamo che per le funzioni olomorfe valgono i risultati della Sottosezione 1.22.2, in particolare il legame fra le derivate parziali delle parti reale ed immaginaria di f stabilito dalle equazioni di Cauchy–Riemann (Nota 2.1.2), e la regola di derivazione di funzione composta (Nota 1.22.16).

Inoltre, useremo continuamente le proprietà, presentate nelle Sezioni 1.4 e 1.6, delle funzioni f rappresentabili come serie di potenze, ed in particolare modo il fatto che, se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, allora la convergenza è uniforme nei compatti contenuti nel disco aperto di convergenza, f è di classe C^∞ all'interno di questo disco, e la serie di potenze è la serie di Taylor di f con centro z_0 , ossia $a_n = D^{(n)}f(z_0)/n!$ per ogni n . Infine, useremo senza ulteriori commenti la nozione di integrale curvilineo di funzioni complesse (Definizione 1.29.30), e come caso particolare assai frequente quella dell'*indice di avvolgimento* (Definizione 1.29.34).

Teorema 2.2.5. *Sia X uno spazio topologico in cui è definita una misura di Borel complessa finita μ (Definizione 1.9.11). Allora, per ogni funzione misurabile $\phi : X \mapsto \mathbb{C}$ e per ogni $z \notin \phi(X)$, la funzione integrale*

$$f(z) = \int_X \frac{1}{\phi(x) - z} d\mu(x) \quad (2.10)$$

è sviluppabile in serie di potenze, e quindi in particolare olomorfa.

Dimostrazione. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto tale che $\Omega \cap \phi(X) = \emptyset$, $a \in \Omega$ e $r > 0$ tale che il disco $B_r(a)$ con centro a e raggio r sia contenuto in Ω . Allora per ogni $x \in X$ la distanza $|\phi(x) - a|$ è maggiore di r , e quindi, se $z \in B_r(a)$, abbiamo

$$q \equiv \left| \frac{z - a}{\phi(x) - a} \right| < 1.$$

Perciò la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\phi(x) - a} \right)^n$$

converge a $\frac{1}{1-q} = \frac{\phi(x)-a}{\phi(x)-z}$ (Sezione 1.1), e la convergenza è uniforme rispetto a $x \in X$ grazie al test di Weierstrass 1.3.29. Pertanto la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\phi(x)-a)^{n+1}} = \frac{1}{\phi(x)-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\phi(x)-a} \right)^n$$

converge a $\frac{1}{\phi(x)-z}$ uniformemente rispetto a x . Allora possiamo sostituire questa serie nell'integrando di (2.10) e scambiare la serie con l'integrale (Teorema di integrazione per serie 1.3.34). In tal modo, per $z \in B_r(a)$, otteniamo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

dove $a_n = \int_X \frac{1}{(\phi(x)-a)^{n+1}} d\mu(x)$ (questo integrale è convergente perché l'integrando non si annulla mai, visto che il modulo del suo denominatore è maggiore di r^{n+1}). \square

2.3 Indice di avvolgimento

Notazione 2.3.1. D'ora in avanti, con *percorso chiuso*, o *ciclo*, intendiamo una curva chiusa di classe C^1 a tratti a valori in \mathbb{C} , o anche solo assolutamente continua (e quindi tale che su di essa ha senso l'integrale curvilineo delle funzioni $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, si veda la Definizione 1.29.30).

Teorema 2.3.2. (Indice di avvolgimento.) *Siano $\mathbf{r} : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ un percorso chiuso con immagine $C = \text{Image}(\mathbf{r})$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \text{Image}(\mathbf{r})$, e $z \in \Omega$. Poniamo $w = \mathbf{r}(t)$, e, seguendo la terminologia sviluppata nella Notazione 1.29.32 e nella Definizione 1.29.34, scriviamo*

$$\text{Ind}_{\mathbf{r}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{w-z} dw.$$

Allora $\text{Ind}_{\mathbf{r}}$ è una funzione su Ω a valori interi, costante sulle componenti connesse di Ω e nulla sulla componente illimitata.

Dimostrazione. Sappiamo dal Teorema 2.2.5 che l'indice di avvolgimento è olomorfo in Ω , quindi in particolare continuo. Poiché l'immagine continua di un insieme connesso è connessa (Proposizione 1.29.45), se i valori dell'indice

di avvolgimento sono interi, allora essi devono essere costanti in ciascuna componente connessa di Ω . Proviamo quindi che questi valori sono interi.

In base alla Definizione 1.29.30, l'integrale curvilineo si scrive come

$$\text{Ind}_{\mathbf{r}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{w'(t)}{w(t) - z} dt, \quad (2.11)$$

ed il fatto che l'indice di avvolgimento abbia valori interi equivale alla seguente asserzione:

la funzione

$$\phi(s) \equiv \exp \left(\int_a^s \frac{w'(t)}{w(t) - z} dt \right) \quad (2.12)$$

verifica la condizione $\phi(b) = 1$.

Osserviamo che la funzione ϕ è data da un esponenziale e quindi non si annulla mai. Inoltre, poiché $z \notin \text{Im}(\mathbf{r})$, il denominatore della frazione nell'integrando non si annulla mai. Pertanto, per il Teorema di derivazione di funzione composta ed il Teorema fondamentale del calcolo (Sezione 1.1), ϕ è continua ovunque e derivabile laddove \mathbf{r} lo è (quindi ovunque tranne che in un insieme finito), e

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{w'(s)}{w(s) - z}. \quad (2.13)$$

Quindi la funzione continua $\frac{\phi(s)}{w(s) - z}$ è derivabile quasi ovunque; la sua derivata è

$$\frac{\phi'(s)(w(s) - z) - \phi(s)w'(s)}{(w(s) - z)^2},$$

che vale zero grazie a 2.13, tranne che in un insieme finito di punti. Dal momento che questa funzione è continua, essa è costante: poiché $\phi(a) = 1$ ne segue che

$$\phi(s) = \frac{w(s) - z}{w(a) - z} \quad (2.14)$$

per ogni $a \leq s \leq b$. Ma il percorso \mathbf{r} è chiuso e pertanto $w(b) = w(a)$, da cui $\phi(b) = 1$. In tal modo abbiamo provato l'asserzione sul valore intero.

Infine, sulla componente illimitata di Ω il denominatore nell'integrale 2.11 può essere reso arbitrariamente grande (basta scegliere z sufficientemente lontano dall'immagine del percorso \mathbf{r}), e quindi il valore intero dell'indice di avvolgimento in questa componente deve essere zero. \square

Nota 2.3.3. La formula (2.14) mostra che, all'aumentare di s in $[a, b]$, l'incremento della parte immaginaria della funzione $\phi(s)$ definita in (2.12) misura l'incremento dell'argomento del numero complesso $\mathbf{r}(s) - z$ durante il percorso di \mathbf{r} intorno a z , e che questo incremento vale $2\pi \text{Ind}_{\mathbf{r}}(z)$. Quindi il precedente Teorema 2.3.2 asserisce che per ogni giro che il percorso chiuso \mathbf{r} compie intorno a z l'indice di avvolgimento aumenta di 1 se il giro è percorso in senso antiorario (il segno positivo dell'incremento dell'argomento dei numeri complessi), e diminuisce di 1 se il giro è in senso orario. Questo fatto spiega la terminologia *indice di avvolgimento*. \square

2.4 Invarianza per omotopia e teorema di Cauchy

In questa Sezione dimostriamo che, in opportuni domini, l'integrale di una funzione derivabile su un percorso chiuso vale zero (per una forma preliminare di un enunciato simile si veda la Proposizione 1.29.36). La dimostrazione che presentiamo si applica a domini *semplicemente connessi*, introdotti nella Definizione 1.29.51 e ridefiniti in maniera più operativa nel seguito (l'equivalenza delle due definizioni sarà mostrata nella prossima Sezione). A questo fine dovremo *deformare con continuità* i percorsi sui quali calcolare l'integrale curvilineo. Il significato di questa deformazione continua è dato dalla seguente nozione di omotopia (rinviamo all'Appendice 2.16 i lettori interessati solo ad una versione del teorema di Cauchy su insiemi più elementari, ad esempio insiemi convessi).

Definizione 2.4.1. (Omotopia.) Siano \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 due curve definite entrambe sullo stesso intervallo $[a, b]$ e

- (a) con gli stessi punti iniziali e finali in \mathbb{C} , oppure
- (b) entrambe chiuse.

(Rammentiamo che le curve si intendono continue, come sempre in questo libro: si veda la Definizione 1.29.1).

Sia $A \subset \mathbb{C}$ un insieme che contiene le immagini di entrambe le curve. Si dice che le due curve sono *omotope in A* se esiste una funzione continua $h : [a, b] \times [0, 1] \mapsto A$ tale che

- $h(t, 0) = \mathbf{r}_0(t)$ per ogni $t \in [a, b]$ (ossia $h(\cdot, 0)$ è la prima delle due curve);
- $h(t, 1) = \mathbf{r}_1(t)$ per ogni $t \in [a, b]$ (ossia $h(\cdot, 1)$ è la seconda curva);
- nel caso (a), $h(a, s) = \mathbf{r}_0(a) = \mathbf{r}_1(a)$ e $h(b, s) = \mathbf{r}_0(b) = \mathbf{r}_1(b)$, ovvero la deformazione conserva i punti iniziali e finali nelle curve intermedie;
- nel caso (b), $h(a, s) = h(b, s)$ per ogni $s \in [0, 1]$, ovvero la deformazione conserva il fatto che le curve intermedie siano tutte chiuse.

La funzione h si chiama una *omotopia*.

Se una delle due curve omotope, diciamo \mathbf{r}_1 , è costante, ossia $\mathbf{r}_1(t) = z_1$ per ogni $t \in [a, b]$, allora si dice che \mathbf{r}_0 è *omotopa al punto* z_1 .

Esercizio 2.4.2. L'omotopia è una relazione di equivalenza sull'insieme delle curve. *Osservazione:* per dimostrare la proprietà transitiva si deve usare la *concatenazione di omotopie*: se h_0 e h_1 sono le omotopie fra \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 e rispettivamente fra \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , allora l'omotopia fra \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_2 è la concatenazione fra h_0 e h_1 ; lasciamo trovare al lettore la definizione precisa. \square

Nota 2.4.3. La nozione di omotopia permette di rendere rigorosa la nozione di *insieme senza buchi* annunciata nella Definizione 1.29.51. Infatti, date due curve \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 omotope in un insieme A , possiamo considerare l'immagine della omotopia $h(t, s)$ come un'area (o meglio una superficie) contenuta in A e parametrizzata dai parametri t e s : si tratta dell'area spazzata dalla famiglia di *curve intermedie* $h(\cdot, s)$ al variare di s in $[0, 1]$. Ad esempio, se \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 hanno gli stessi punti estremi e le curve intermedie sono tutte contenute nell'insieme il cui perimetro è dato dalle immagini di \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 , allora si intuisce che questa superficie è proprio questo insieme. Ora, se \mathbf{r}_0 è una curva chiusa omotopa ad un punto, questa intuizione ci fa concludere che il suo interno è senza buchi. Ciò porta alla seguente generalizzazione della Definizione 1.29.51. \square

Definizione 2.4.4. (Nozione omotopica di domini semplicemente connessi.) Un insieme $A \subset \mathbb{C}$ è semplicemente connesso se ogni curva chiusa con immagine in A è omotopa in A ad un punto.

Esempio 2.4.5. (Omotopia lineare.) Se l'insieme A ha la proprietà che, per ogni $t \in [a, b]$, il segmento che congiunge i punti $\mathbf{r}_0(t)$ e $\mathbf{r}_1(t)$ sia tutto

contenuto in A , allora le curve \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 sono omotope: l'omotopia è la combinazione convessa $h(t, s) = s\mathbf{r}_0(t) + (1 - s)\mathbf{r}_1(t)$. Questa omotopia si chiama *omotopia lineare*.

In particolare, in un insieme convesso tutte le curve con gli stessi punti estremi sono omotope, e tutte le curve chiuse sono omotope ad un punto.

□

Teorema 2.4.6. (Interpolazione poligonale a tratti fra curve.) *Siano \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 due curve omotope in un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Allora esiste un numero finito di curve lineari a tratti $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n-1}$ tali che, ponendo $\mathbf{q}_0 = \mathbf{r}_0$ e $\mathbf{q}_n = \mathbf{r}_1$, ciascuna \mathbf{q}_j è omotopa in A alla curva successiva tramite una omotopia lineare (definita nel precedente Esempio 2.4.5).*

Dimostrazione. Sia $h : [a, b] \times [0, 1] \mapsto A$ l'omotopia fra \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 . Poiché l'insieme $[a, b] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ è compatto e h è ivi continua, allora h è uniformemente continua, per il Teorema di Heine 1.8.6. Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, se due coppie (s, t) , (s', t') distano nel piano complesso meno di δ , allora le loro immagini sotto h distano meno di ε . Scegliamo due partizioni $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ in $[a, b]$ e $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ in $[0, 1]$ tali che i rettangoli $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ abbiano tutti diametro minore di δ (per ogni i e j). Allora ciascuno di tali rettangoli ha immagine sotto h contenuta in un disco $A_{ij} \subset \mathbb{C}$ di diametro minore di ε . Poiché A è aperto, se si sceglie ε sufficientemente piccolo si ha che A_{ij} è contenuto in A (in realtà quanto sia grande il diametro di questi dischi è inessenziale per questo ragionamento, quello che importa è che siano interamente contenuti in A).

Sia allora \mathbf{r}_{s_j} la curva intermedia data da $\mathbf{r}_{s_j} = h(t, s_j)$, per $0 < j < n$. Consideriamo la curva lineare a tratti \mathbf{q}_j ottenuta congiungendo con segmenti i punti consecutivi $h(t_i, s_j)$ per $0 \leq i \leq n$, e poniamo $\mathbf{q}_0 = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{q}_n = \mathbf{r}_1$. Osserviamo che, per il modo in cui sono stati definiti i dischi A_{ij} , i punti $\mathbf{q}_j(t_i)$, $\mathbf{q}_j(t_{i+1})$, $\mathbf{q}_{j+1}(t_i)$ e $\mathbf{q}_{j+1}(t_{i+1})$ appartengono ad A_{ij} . Poiché A_{ij} è convesso, i segmenti

$$s\mathbf{q}_{j+1}(t) + (1 - s)\mathbf{q}_j(t)$$

giacciono in A_{ij} per ogni $(t, s) \in [t_j, t_{j+1}] \times [0, 1]$. Poiché tutti i dischi A_{ij} sono interni ad A , questo vuol dire che tutti questi segmenti che congiungono le due curve \mathbf{q}_j , \mathbf{q}_{j+1} sono contenuti in A . Quindi le due curve sono linearmente omotope in A . □

Ora applichiamo l'omotopia agli integrali curvilinei:

Teorema 2.4.7. (Invarianza per omotopia.) *Sia f una funzione olo-morfa in un aperto A , eccetto al più su un insieme finito di punti in cui è almeno continua. Siano \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 due curve C^1 a tratti (o assolutamente continue) omotope in A . Allora*

$$\int_{\mathbf{r}_0} f dz = \int_{\mathbf{r}_1} f dz.$$

Dimostrazione. Grazie al teorema di interpolazione lineare a tratti, possiamo limitarci a considerare il caso in cui le due curve sono linearmente omotope. Assumiamo cioè che per ogni $0 \leq s \leq 1$ il punto $\mathbf{r}_s(t) = s\mathbf{r}_1(t) + (1-s)\mathbf{r}_0(t)$ appartenga ad A per ogni $t \in [a, b]$. Allora \mathbf{r}_s è una curva C^1 a tratti (o assolutamente continua) con immagine in A .

Per $a \leq t \leq b$ scriviamo $\mathbf{d}(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_0(t)$ e riscriviamo le curve intermedie come $\mathbf{r}_s(t) = \mathbf{r}_0(t) + s\mathbf{d}(t)$. Osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{r}_s(t) = \mathbf{d}(t), \quad (2.15)$$

e quindi, indicando con \mathbf{r}'_s la derivata rispetto alla variabile t , abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{r}'_s(t) = \mathbf{d}'(t). \quad (2.16)$$

I vettori in \mathbb{R}^2 in queste identità si possono identificare con numeri complessi. In tal modo ha senso l'integrale curvilineo

$$\phi(s) = \int_{\mathbf{r}_s} f(z) dz = \int_a^b f(\mathbf{r}_s(t)) \mathbf{r}'_s(t) dt,$$

introdotto nella Definizione 1.29.30. Dobbiamo provare che $\phi(1) = \phi(0)$; mostreremo (equivalentemente) che ϕ è costante.

Ora per semplicità di notazione continuiamo ad identificare i vettori in \mathbb{R}^2 con numeri complessi e scriviamo $z_s(t) = \mathbf{r}_s(t)$ e $w(t) = \mathbf{d}(t)$. Allora

$$\frac{\partial}{\partial s} z_s(t) = w(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial s} z'_s(t) = w'(t). \quad (2.17)$$

Derivando sotto il segno di integrale (grazie al Teorema 1.23.1) ed applicando i teoremi di derivazione del prodotto e di funzione composta (1.1), da (2.15),

(2.16) e (2.17) otteniamo

$$\begin{aligned}
 \phi'(s) &= \frac{\partial}{\partial s} \int_a^b (f \circ z_s)(t) z'_s(t) dt = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial s} (f \circ z_s)(t) + (f \circ z_s)(t) \frac{\partial}{\partial s} z'_s(t) \right) dt \\
 &= \int_a^b f'(z_s(t)) \frac{\partial}{\partial s} z_s(t) z'_s(t) dt + \int_a^b f(z_s(t)) \frac{\partial}{\partial s} z'_s(t) dt \\
 &= \int_a^b f'(z_s(t)) w(t) z'_s(t) dt + \int_a^b f(z_s(t)) w'(t) dt \\
 &= \int_a^b (f \circ z_s \cdot w)'(t) dt = f \circ z_s \cdot w \Big|_a^b, \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

dove i prodotti nell'ultima riga sono le consuete moltiplicazioni complesse. Poiché le curve \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 sono omotope, si ha $w(a) = \mathbf{d}(a) = \mathbf{r}_1(a) - \mathbf{r}_0(a) = 0$, ed analogamente $w(b) = 0$. Pertanto l'ultimo termine in (2.18) si annulla, e l'enunciato è dimostrato. \square

Corollario 2.4.8. *L'indice di avvolgimento è un invariante omotopico: se \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 sono due curve chiuse omotope in un insieme $A \subset \mathbb{C}$ e $z \notin A$, allora $\text{Ind}_{\mathbf{r}_0}(w) = \text{Ind}_{\mathbf{r}_1}(w)$.*

Nota 2.4.9. Il precedente corollario mostra che la nozione di insieme semplicemente connesso presentata nella Definizione 1.29.51 in termini dell'indice di avvolgimento $\text{Ind}_{\mathbf{r}}(w)$ (Definizione 1.29.34 e Sezione 2.3) equivale a quella espressa in termini di omotopia (Definizione 2.4.4). \square

Corollario 2.4.10. (Teorema di Cauchy in domini semplicemente connessi.) *Sia f una funzione olomorfa in un aperto A , eccetto al più su un insieme finito di punti in cui è almeno continua. Su ogni curva C^1 a tratti (o assolutamente continua) \mathbf{r} omotopa in A ad un punto si ha*

$$\int_{\mathbf{r}} f(z) dz = 0.$$

In particolare, se A è semplicemente connesso (Definizione 2.4.4), l'integrale curvilineo di f si annulla su ogni curva chiusa C^1 a tratti (o assolutamente continua).

Dimostrazione. Basta osservare che, se \mathbf{r} è omotopa ad una curva costante $\mathbf{q}(t) = z_0$, in base al precedente Teorema di invarianza 2.4.7 l'integrale vale $\int_a^b f(\mathbf{q}(t)) \mathbf{q}'(t) dt$, che è nullo perché $\mathbf{q}'(t) = 0$. \square

Chiaramente, possiamo riscrivere questo risultato come segue:

Corollario 2.4.11. *Sia f una funzione olomorfa su un dominio A semplicemente connesso, $u, w \in A$ e γ_1, γ_2 due curve C^1 a tratti (o assolutamente continua) da u a w . Allora l'integrale di f da u a w è indipendente dal percorso: $\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$.*

Nota 2.4.12. Sia \mathbf{r} una curva semplice chiusa in \mathbb{C} , e consideriamo il suo interno I ed il suo esterno E , nel senso del Teorema di Jordan 1.29.12. Se $z_0 \in E$, allora \mathbf{r} è omotopa ad un punto in I e l'integrando $\frac{1}{z-z_0}$ dell'indice di avvolgimento è ivi olomorfo, quindi, per il teorema di Cauchy (Corollario 2.4.10), l'indice di avvolgimento intorno a z_0 è nullo. Invece, se $z_0 \in I$, allora $\frac{1}{z-z_0}$ è olomorfo in $I \setminus \{z_0\}$, e \mathbf{r} è omotopa in $I \setminus \{z_0\}$ ad una circonferenza intorno a z_0 percorso una volta in senso antiorario od in senso orario: pertanto in questi due casi, per il Teorema di invarianza omotopica 2.4.7, l'indice di avvolgimento vale rispettivamente 1 o -1 . Nel primo caso diciamo che la curva è orientata positivamente, nel secondo che è orientata negativamente. \square

Notazione 2.4.13. D'ora in avanti, con *curva* o *percorso* intendiamo una curva di classe C^1 a tratti (o anche solo assolutamente continua).

Un altro corollario del teorema di invarianza omotopica è così importante che gli dedichiamo l'intera prossima Sezione.

2.5 Ricostruzione di funzioni olomorfe dai loro valori al bordo: la formula integrale di Cauchy

Il prossimo risultato permette di ricostruire i valori di una funzione olomorfa dentro un dominio semplicemente connesso tramite un integrale curvilineo dei suoi valori sul bordo. Il lettore che fosse interessato a questo risultato solo su insiemi convessi può ignorare la precedente trattazione dell'invarianza omotopica e fare riferimento alla presentazione del teorema di Cauchy in tali insiemi data nell'Appendice, Sezione 2.16.

Corollario 2.5.1. (Formula integrale di Cauchy in un insieme semplicemente connesso.) Se $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto semplicemente connesso, C una curva chiusa in A e f una funzione olomorfa su A , allora per ogni $z \in A \setminus C$ si ha

$$\text{Ind}_C(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Dimostrazione. La funzione h definita su A da $h(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ se $w \neq z$, e $h(z) = f'(z)$, è continua su A ed olomorfa in $A \setminus \{z\}$. Quindi $\int_C h(w) dw = 0$ per il teorema di Cauchy (Corollario 2.4.10), e

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw - \text{Ind}_C(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C h(w) dw = 0.$$

□

Corollario 2.5.2. (Formula di Cauchy per le derivate in un insieme semplicemente connesso.) Nelle ipotesi del precedente Corollario 2.5.1, per ogni $z \in A$ e per ogni $n \geq 0$ la derivata n -sima di f soddisfa l'identità

$$\text{Ind}_C(z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw. \quad (2.19)$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n (se necessario si veda la Sezione 1.1 per riferimenti a questa tecnica di dimostrazione). Il caso $n = 0$ è il precedente Corollario 2.5.1. Se ora (2.19) vale per un dato n , allora, derivando sotto il segno di integrale (in base al Teorema 1.23.1), si ricava

$$\text{Ind}_C(z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C (n+1) \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}} dw,$$

che è precisamente l'identità (2.19) per $n+1$. □

Corollario 2.5.3. (Le funzioni olomorfe sono serie di potenze.) Per ogni aperto $A \subset \mathbb{C}$, le funzioni olomorfe su A sono sviluppabili in serie di potenze ad ogni punto $z_0 \in A$, convergente nel più grande disco aperto con centro z_0 contenuto in A .

Dimostrazione. Sia $z_0 \in A$ e $R > 0$ tale che il disco aperto con centro z_0 e raggio R sia contenuto nell'aperto A . Per ogni $r < R$ sia C_r la curva

data dalla circonferenza con centro z_0 e raggio r , percorsa una volta in senso antiorario. Per il precedente Corollario 2.5.1 per ogni z tale che $|z - z_0| < r$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

(si noti che basta applicare il teorema di Cauchy su dischi: una dimostrazione diretta del teorema di Cauchy per questo ambiente semplice è nell'Appendice, Sezione 2.16).

Ora possiamo applicare il Teorema 2.2.5, con $X = [0, 2\pi]$, $\phi(t) = e^{it}$ e $d\mu(t) = f(\phi(t)) \phi'(t) dt$ e concludere che f è sviluppabile in serie di potenze con centro in z_0 . I coefficienti dello sviluppo sono i coefficienti di Taylor di f (Corollario 1.6.1), che dipendono solo dai valori di f in intorno arbitrariamente piccoli di z_0 , quindi non dipendono dalla scelta di $r < R$. Quindi si può scegliere r arbitrariamente vicino a R ottenendo sempre lo stesso sviluppo: quindi la serie converge nell'intero disco aperto di raggio R . \square

Corollario 2.5.4. *Le funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$ sono tutte e sole le funzioni sviluppabili in serie di Taylor con centro in ogni punto di A (e raggio di convergenza dato dalla distanza dal centro di sviluppo alla frontiera di A). Ogni funzione derivabile una volta in senso complesso in A è derivabile infinite volte.*

Dimostrazione. Dal precedente Corollario 2.5.3 sappiamo che le funzioni olomorfe sono sviluppabili in serie di potenze, quindi in serie di Taylor (Corollario 1.6.1). Viceversa, ogni funzione sviluppabile in serie di potenze con centro in un punto è derivabile infinite volte in quel punto (Teorema 1.4.9). \square

Lemma 2.5.5. *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto convesso, e f una funzione olomorfa su A . Allora esiste g olomorfa su A tale che $g' = f$. Lo stesso risultato vale se esiste un sottoinsieme finito $F \subset A$ tale che f è continua su A ed olomorfa in $A \setminus F$.*

Dimostrazione. Per ogni fissato $a \in A$ il segmento $[a, z]$ che congiunge a con un qualsiasi altro punto z di A giace in A , a causa della convessità. Allora possiamo definire una funzione g su A in questo modo:

$$g(z) = \int_{[a,z]} f(w) dw.$$

Sempre per la convessità, per ogni altro punto $z_0 \in A$ il triangolo con vertici a , z e z_0 giace in A . L'integrale di f lungo il perimetro di questo triangolo vale 0 per il teorema di Cauchy (Corollario 2.4.10). Qui in realtà il teorema di Cauchy ci serve solo sui triangoli: in questo ambiente lo riproveremo separatamente nell'Appendice, Sezione 2.16 (Lemma 2.16.1). Poiché $\int_{[z_0, z]} dw = z - z_0$, questo equivale, per $z \neq z_0$, all'identità

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} (f(w) - f(z_0)) dw. \quad (2.20)$$

Poiché f è continua in z_0 , per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $|w - z_0| < \delta$, si ha $|f(w) - f(z_0)| < \varepsilon$. Quindi, per $z \rightarrow z_0$, il secondo membro di (2.20) tende a zero: pertanto $g'(z_0) = f(z_0)$. La stessa asserzione nel caso in cui f sia olomorfa solo in $A \setminus F$ si dimostra nello stesso modo, grazie al fatto che il teorema di Cauchy sul triangolo di vertici a , z e z_0 continua a valere nell'ipotesi che f sia continua ovunque ed olomorfa in A meno un punto (Lemma 2.16.1). \square

Il seguente celebre risultato è un inverso del teorema di Cauchy (Corollario 2.4.10).

Corollario 2.5.6. (Teorema di Morera.) *Se $A \subset \mathbb{C}$ è aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ è continua e tale che $\int_C f(z) dz = 0$ per ogni percorso chiuso contenuto in A (o anche solo per il perimetro di ogni triangolo interamente contenuto in A), allora f è olomorfa in A .*

Dimostrazione. Poiché A è aperto, intorno ad ogni suo punto z l'insieme A contiene un disco aperto D , che è convesso. In base al precedente Lemma 2.5.5, esiste una funzione olomorfa g su D tale che $g' = f$. Osserviamo che, per quanto illustrato nella dimostrazione del Lemma 2.5.5, qui basta considerare curve la cui immagine sia il perimetro di un triangolo contenuto in A e che contiene z .

Sappiamo dal Corollario 2.5.4 che le derivate di funzioni olomorfe sono olomorfe: quindi f è olomorfa al generico punto $z \in A$. \square

Dai teoremi di Cauchy e di Morera segue questo sorprendente risultato di rigidità per i limiti di funzioni olomorfe: la convergenza uniforme sui compatti rispetta l'olomorfia.

Corollario 2.5.7. *Se una successione f_n di funzioni olomorfe in un aperto A converge uniformemente sui compatti, allora il limite f è una funzione olomorfa in A .*

Dimostrazione. Il limite uniforme sui compatti è continuo (Teorema 1.3.16): quindi possiamo integrarlo lungo le curve assolutamente continue (di solito si riduce l'attenzione a curve di classe C^1 a tratti) nel senso della Definizione 1.29.30). Consideriamo una tale curva la cui immagine C sia interamente contenuta in un disco aperto contenuto in A . Per la convergenza uniforme si può passare al limite sotto il segno di integrale (Teorema 1.3.17), e quindi, poiché il disco è convesso, segue dal teorema di Cauchy (Corollario 2.4.10) che

$$\int_C f(z) dz = \lim_n \int_C f_n(z) dz = 0$$

(qui di nuovo basterebbe limitare l'attenzione a curve triangolari ed applicare il teorema di Cauchy su triangoli, Lemma 2.16.1). In base al teorema di Morera (ossia al precedente Corollario 2.5.6), questo implica che il limite $f = \lim_n f_n$ è olomorfo in A . \square

Lemma 2.5.8. *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio aperto in \mathbb{C} .*

- (i) *Sia $\{h_t\}$ una famiglia di funzioni olomorfe in un dominio $D \subset \mathbb{C}$ al variare di t in un intervallo $[a, b]$ in \mathbb{R} o più in generale in un pluriintervallo $[a, b]$ in \mathbb{R}^n , tali che per ogni $z \in D$ la funzione $H_z(t) = h_t(z)$ appartenga a $L^1([a, b])$ ed la derivata $\frac{d}{dz} h_t$ sia continua su $[a, b] \times D$. Allora per ogni misura μ di Borel finita su $[a, b]$ la funzione $h(z) = \int \cdots \int_{[a, b]} h_t(z) d\mu(t)$ è olomorfa, e si può derivare sotto il segno di integrale: $h'(z) = \int \cdots \int_{[a, b]} h'_t(z) d\mu(t)$.*
- (ii) *Lo stesso teorema di derivazione sotto il segno di integrale vale nelle ipotesi più generali che la misura μ su \mathbb{R} o su \mathbb{R}^n sia solo sigma-finita nel senso della Definizione 1.9.11, o più precisamente finita sui compatti, e la funzione $H(t) = \sup_{z \in D} h_t(z)$ appartenga a $L^1(|\mu|)$.*

Dimostrazione. La prima parte è conseguenza immediata del Corollario 1.23.2. Per provare la seconda parte, si consideri un plurirettangolo $K = [a, b]$ in \mathbb{R}^n e siano $h(z) = \int_{\mathbb{R}^n} h_t(z) d\mu(t)$, $h_K(z) = \int \cdots \int_{[a, b]} h_t(z) d\mu(t)$: dalla prima parte sappiamo che h_K è olomorfa e si può derivare sotto il segno di integrale. D'altro lato, in base al Corollario 1.9.31,

$$|h(z) - h_K(z)| \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |h_t(z)| d|\mu|(t) \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |H(t)| d|\mu|(t).$$

L'ultimo integrale tende a zero quando K invade \mathbb{R}^n , grazie all'ipotesi fatta su H . Quindi h_K tende uniformemente a h quando K invade \mathbb{R}^n , e pertanto anche h è olomorfa, grazie al precedente Corollario 2.5.7. Per lo stesso motivo h'_K converge uniformemente a h' , e poiché per la prima parte di questa dimostrazione sappiamo che $h'_K(z) = \int_K h'_t(z) d\mu(t)$, lo stesso vale per la funzione h . \square

2.6 Zeri di funzioni olomorfe

Teorema 2.6.1. (Ordine degli zeri.) *Sia $A \subset \mathbb{C}$ e f olomorfa su A . Sia $Z \equiv \{z \in A : f(z) = 0\}$ il luogo degli zeri di f . Allora o $Z = A$ (cioè f è identicamente nulla), oppure Z non ha punti di accumulazione in A (Definizione 1.1.1) ed è un insieme finito o numerabile. In tal caso, per ogni $z_0 \in Z$, esiste un unico intero $m > 0$ (che dipende da z_0) ed una funzione olomorfa g su A tali che $g(z_0) \neq 0$ e*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad (2.21)$$

per ogni $z \in A$. L'intero m si chiama l'ordine dello zero di f al punto z_0 , e chiaramente coincide con l'ordine di infinitesimo di f .

Dimostrazione. Sia W l'insieme dei punti di accumulazione di Z . È chiaro dalla continuità di f che W è un sottoinsieme di Z . Per ogni $z_0 \in W$ consideriamo un disco $B_r(z_0) \subset A$ di raggio $r > 0$. Sappiamo che f è sviluppabile in serie di potenze con centro in z_0 : lo sviluppo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge per ogni $z \in B_r(z_0)$ (Corollario 2.5.3). La funzione f è identicamente nulla in $B_r(z_0)$ se e solo se tutti i coefficienti a_n sono nulli: in tal caso z_0 è un punto interno di Z . SE questo non accade, consideriamo il più piccolo intero m tale che $a_m \neq 0$, e poniamo $g(z) = (z - z_0)^{-m} f(z)$ per $z \in A \setminus \{z_0\}$, e $g(z_0) = a_m$. Questa funzione è olomorfa in $A \setminus \{z_0\}$ perché ivi $z - z_0$ non si annulla, e verifica $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_0)^n$ per ogni $z \in B_r(z_0)$, perché l'ultima serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza di $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Quindi g è sviluppabile in serie di potenze con centro in z_0 , e pertanto è olomorfa anche al punto z_0 (Corollario 2.5.4). Poiché $g(z_0) = a_m \neq 0$, la funzione g rimane non nulla in un intorno di z_0 . Quindi z_0 è un punto isolato: ma questo contraddice l'ipotesi che sia un punto di accumulazione. Quindi tutti i punti di W sono punti interni, e pertanto W è aperto. D'altra parte, è chiaro dalla Definizione 1.1.1 che se

un punto v non è di accumulazione per Z allora esiste un disco con centro in v che non contiene punti di Z , e quindi che consiste di punti che non sono di accumulazione per Z : ma allora il complemento di W è aperto, quindi W è chiuso.

In tal modo si conclude che W è allo stesso tempo aperto e chiuso, e quindi che A è sconnesso, contrariamente all'ipotesi, a meno che non sia $W = A$ oppure $W = \emptyset$. Nel primo caso $Z = A$ e f è identicamente nulla; nel secondo caso, per ogni compatto K l'intersezione $W \cap K$ deve essere vuota oppure finita (perché le successioni infinite in un compatto hanno un punto di accumulazione, in virtù del Teorema di Bolzano–Weierstrass 1.9.6). D'altra parte, \mathbb{C} , e quindi A , è unione numerabile di compatti (basta considerare i dischi chiusi con centro ad esempio l'origine e raggio intero positivo): quindi W è unione numerabile di insiemi al più finiti, e quindi è un insieme al più numerabile. \square

Corollario 2.6.2. (*Unicità del prolungamento.*) *Se due funzioni oloedomorfe in un aperto connesso coincidono in un sottoinsieme che ha qualche punto di accumulazione, allora coincidono dovunque.*

2.7 Singolarità rimovibili e singolarità essenziali

Definizione 2.7.1. Se A è un aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in A$ e f è olomorfa in $A \setminus \{z_0\}$, si dice che f ha una *singolarità isolata* al punto z_0 . Se è possibile definire f in z_0 in modo tale da renderla olomorfa su tutto A si dice che la singolarità è *rimovibile*. Se invece per ogni $r > 0$ l'immagine sotto f del disco bucato $B_r z_0 \setminus \{z_0\}$ è densa in \mathbb{C} , allora si dice che z_0 è un punto di singolarità *essenziale*.

Lemma 2.7.2. *Se A è un aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa in $A \setminus \{z_0\}$ e limitata in un intorno di z_0 allora in z_0 la funzione f ha una singolarità rimovibile.*

Dimostrazione. La funzione $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$ for $z \neq z_0$ and $g(z_0) = 0$ è olomorfa in $A \setminus \{z_0\}$, ed in z_0 il suo rapporto incrementale vale $(z - z_0) f(z)$, che tende a 0 per $z \rightarrow z_0$ perché f è limitata in un intorno di z_0 . Quindi g è olomorfa in A , ed in particolare sviluppabile

in serie di potenze (Corollario 2.5.3), ed è infinitesima del secondo ordine a z_0 . Quindi il suo sviluppo in serie di Taylor a z_0 si scrive così: $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+2}$. Ora, per ogni $z \neq z_0$ in un disco aperto di centro z_0 , si ha $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, e questa identità vale anche in z_0 se poniamo $f(z_0) = a_0$. Quindi f è sviluppabile in serie di Taylor convergente in un intorno di z_0 , e pertanto olomorfa anche in z_0 (Corollario 2.5.4). \square

Teorema 2.7.3. (Classificazione delle singolarità.) *Se $A \subset \mathbb{C}$ è un aperto, $z_0 \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa in $A \setminus z_0$, allora vale una ed una sola delle seguenti tre proprietà:*

- (i) z_0 è un punto di singolarità rimovibile per f (in particolare, in questo caso si ha $|f(z)| \rightarrow \infty$ se $z \rightarrow z_0$);
- (ii) esistono $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$, con $a_j \neq 0$, tali che $f(z) - \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{(z-z_0)^j}$ ha una singolarità rimovibile in z_0 ;
- (iii) z_0 è un punto di singolarità essenziale.

Dimostrazione. In base alla Definizione 2.7.1, se z_0 non è un punto di singolarità essenziale, devono esistere $r > 0$, $\varepsilon > 0$ e $w \in \mathbb{C}$ tali che $|f(z) - w| > \varepsilon$ se $0 < |z - z_0| < r$. In tal caso, la funzione $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ è olomorfa nel disco bucato $0 < |z - z_0| < r$; poiché in tale dominio si ha anche $|g(z)| < \frac{1}{\varepsilon}$, g è olomorfa anche in z_0 per il precedente Teorema 2.7.2. Ora, consideriamo i due casi $g(z_0) = 0$ e $g(z_0) \neq 0$. Nel primo caso, per la continuità, g rimane non nulla in un intorno del punto z_0 , e quindi esistono una costante $M > 0$ ed un disco chiuso centrato in z_0 tale che per ogni z in esso si ha $g(z) > M$ (per l'esistenza dei minimi di funzioni continue sui compatti: si veda la Sezione 1.1). Allora in questo disco si ha $|f(z) - w| < \frac{1}{M}$, e quindi $|f(z)| < |w| + \frac{1}{M}$: ossia f è ivi limitata. Pertanto, per il precedente Teorema 2.7.2, f è olomorfa anche in z_0 e questo punto costituisce una singolarità rimovibile. Abbiamo provato (i).

Consideriamo ora il secondo caso, $g(z_0) = 0$. Sia $m > 0$ l'ordine di zero di g a z_0 , definito nell'enunciato del Teorema 2.6.1: per quel Teorema ora si ha $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$ per ogni z nel disco $|z - z_0| < r$, dove h è una funzione olomorfa in questo disco tale che $h(z_0) \neq 0$. Questa funzione h non si annulla neppure nel resto del disco, perché non vi si annulla g per il modo in cui è stata definita. Allora il suo reciproco $k = \frac{1}{h}$ è olomorfo e mai

nullo in questo disco; la funzione k verifica

$$k(z) = \frac{1}{h(z)} = (z - z_0)^m (f(z) - w), \quad (2.22)$$

e quindi si ha $f(z) - w = (z - z_0)^{-m} k(z)$. Poiché k è olomorfa nel disco, essa si sviluppa in serie uniformemente convergente $k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Sostituendo questo sviluppo in (2.22) otteniamo (ii). \square

Corollario 2.7.4. *Se una funzione f è olomorfa in un disco aperto D ma in nessun disco più grande con lo stesso centro, allora f ha un punto di singolarità non rimovibile sulla frontiera di D .*

Dimostrazione. L'enunciato segue immediatamente dal Corollario 2.5.4 \square

2.8 Crescita di funzioni olomorfe

Definizione 2.8.1. (Funzioni intere.) Una funzione olomorfa su tutto \mathbb{C} si dice *intera*.

Teorema 2.8.2. (Liouville.) *Una funzione intera limitata è costante.*

Dimostrazione. Sia f una funzione intera: allora essa è sviluppabile in serie di potenze su tutto il piano complesso. Consideriamo il suo sviluppo con centro, ad esempio, in $z_0 = 0$: lo sviluppo converge uniformemente su tutto \mathbb{C} (Corollario 2.5.3): $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Lasciamo variare z sulla circonferenza di raggio r fissato: lo sviluppo si scrive come

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \quad (2.23)$$

Questa serie è uniformemente convergente, e quindi l'integrale che rappresenta i coefficienti di Fourier della sua somma $f(re^{i\theta})$ commuta con la somma. Grazie all'ortogonalità degli esponenziali complessi $e^{in\theta}$, il coefficiente di Fourier n -simo della funzione $f_r(\theta) \equiv f(re^{i\theta})$ è precisamente $a_n r^n$: quindi la serie in (2.23) è nient'altro che la serie di Fourier di f_r . Dalla disuguaglianza di Bessel (Corollario 4.3.2(iii)) ora segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \|f_r\|_2^2 \leq \|f_r\|_{\infty}^2. \quad (2.24)$$

Ora, se f è limitata, la serie in questa identità è limitata: ma le sue somme parziali crescono in maniera illimitata al crescere di r , e quindi la limitatezza si può avere solo se $a_n = 0$ per tutti gli $n > 0$. Pertanto $f(z) = a_0$ per ogni z : f è costante. \square

Corollario 2.8.3. (Teorema del massimo modulo, o principio del massimo.) *Sia f una funzione olomorfa in un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Per ogni $z \in A$ e $r > 0$ tali che il disco con centro z e raggio r sia contenuto in A , il punto di massimo di $|f|$ su questo disco si trova sulla sua frontiera, o equivalentemente*

$$|f(z)| \leq \max_{\theta} |f(z + re^{i\theta})|.$$

Si ha l'uguaglianza per qualche z e per qualche $r > 0$ se e solo se f è costante su tutto A .

Di conseguenza, se f è olomorfa in un aperto D e continua in \bar{D} , il massimo del modulo di f viene raggiunto unicamente sulla frontiera di questo aperto: $\|f\|_{L^\infty(D)} = \|f\|_{L^\infty(\bar{D})}$ e $\|f\|_{L^\infty(\int D)} < \|f\|_{L^\infty(\bar{D})}$.

Dimostrazione. Se vale $|f(z + re^{i\theta})| \leq |f(z)|$ per ogni $0 \leq \theta < 2\pi$, allora, grazie alla disuguaglianza di Bessel analogamente a (2.24), si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq |f(z)|^2 = |a_0|^2.$$

Lo stesso argomento della dimostrazione del Teorema di Liouville 2.8.2 ora mostra che $a_n = 0$ per ogni $n > 0$, ossia che f è costante. L'ultima asserzione dell'enunciato è una conseguenza diretta di questo fatto. \square

Corollario 2.8.4. (Teorema fondamentale dell'algebra.) *Ogni polinomio di grado n a coefficienti complessi, $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, ha esattamente n radici, contate con la loro molteplicità (ossia il loro ordine di zero definito nell'enunciato del Teorema 2.6.1).*

Dimostrazione. Per induzione sul grado n , è sufficiente provare che il polinomio P ha una radice, ossia si può scrivere come $P(z) = (z - z_1)Q(z)$ per qualche $z_1 \in \mathbb{C}$. Rinormalizzando, possiamo limitarci a polinomi del tipo $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k + z^n$.

Se r è abbastanza grande si ha

$$r^n \geq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k r^k|$$

perché il termine di grado massimo cresce più velocemente degli altri. Ne segue che, per questi valori di r e per $0 \leq \theta < 2\pi$ si ha

$$|P(re^{i\theta})| \geq r^n - \sum_{k=1}^{n-1} |a_k r^k| \geq r^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k r^k| + |a_0| > |f(0)|.$$

Quindi, se P non ha zeri, il suo reciproco $f = \frac{1}{P}$ è una funzione intera che verifica $|f(0)| > |f(re^{i\theta})|$ per tutti i θ e per r sufficientemente grande: questo contraddice il Teorema del Massimo Modulo (Corollario 2.8.3). \square

Corollario 2.8.5. (Stime di Cauchy.) *Se f è olomorfa nel disco di centro z_0 e raggio $r > 0$, ed il suo modulo è ivi limitato da una costante M , allora per ogni $n > 0$ la derivata n -sima verifica la stima*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq M \frac{n!}{R^n}.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dall'identità (2.24) che i coefficienti $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ dello sviluppo di Taylor di $f_r(\theta) = f(re^{i\theta})$ con centro in z_0 verificano $|a_n r^n| \leq M$ per ogni $0 < r < R$. Prendendo l'estremo superiore rispetto a r si ottiene l'enunciato. \square

Corollario 2.8.6. *Se f è intera e $|f(z)| < C(1 + |z|^\alpha)$ per qualche $\alpha < 1$, allora f è costante.*

Dimostrazione. Poiché $|f(Re^{it})| < C(1 + R^\alpha) < C'R^\alpha$ per qualche costante C' , facendo tendere R a infinito nelle stime di Cauchy del precedente Corollario 2.8.5 si ottiene che tutte le derivate di f sono nulle in $z = 0$, e quindi il suo sviluppo di Taylor consiste solo del termine costante. \square

Da queste stime si deduce il seguente altro sorprendente risultato di rigidità, relativo alle proprietà di convergenza di funzioni olomorfe: la convergenza uniforme sui compatti di funzioni olomorfe equivale alla convergenza in C^∞ (Definizione 11.3.6).

Corollario 2.8.7. *Se una successione f_n di funzioni olomorfe in un aperto A converge uniformemente sui compatti, allora per ogni k la successione $f_n^{(k)}$ delle derivate k -sime converge uniformemente sui compatti alla derivata k -sima del limite, $f^{(k)}$.*

Dimostrazione. Sappiamo già (Corollario 2.5.7) che il limite $f = \lim_n f_n$ esiste ed è olomorfo in A . È sufficiente provare l'enunciato per la derivata prima: applicandolo poi iterativamente lo si trasorta ad una derivata qualsiasi. Per ogni $z \in A$, consideriamo la distanza $d(z, \partial A)$ di z dalla frontiera ∂A (se $A = \mathbb{C}$ allora questa distanza è infinita). Osserviamo che tale distanza è una funzione continua (Nota 4.1.2): quindi su ogni compatto K interamente contenuto in A essa ammette minimo, necessariamente strettamente positivo: $d(K, \partial A \equiv \min_{z \in K} d(z, \partial A) > 0$. Quindi, per ogni raggio $r < d(K, \partial A)$, il disco chiuso $B_r(z)$ con centro $z \in K$ e raggio r è interamente contenuto in A . L'unione di questi dischi è un compatto che indichiamo con U . Quindi su U si ha convergenza uniforme: $\lim_n \|f_n - f\|_{L^\infty(U)} = 0$. Per ogni $z \in K$, applicando nel disco $B_r(z)$ la stima di Cauchy del precedente Corollario 2.8.5 otteniamo

$$|f'_n(z) - f'(z)| \leq \|f_n - f\|_{L^\infty(U)} \rightarrow 0,$$

da cui la convergenza uniforme delle derivate. \square

2.9 Lo sviluppo di Laurent in una corona circolare

Sia f una funzione olomorfa nel disco $B_R(z_0)$ con centro in z_0 e raggio R . Allora f è sviluppabile in serie di potenze convergente in tale disco: se $|z - z_0| < R$ si ha $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ per opportuni $c_n \in \mathbb{C}$. Se $R = \infty$ allora f è una funzione intera (Definizione 2.8.1).

Per semplicità, per il momento scegliamo $z_0 = 0$. La sostituzione $z \mapsto \frac{1}{z}$ trasforma f nella funzione $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$. Per la regola di derivazione di funzione composta (Sezione 1.1), g è olomorfa nell'anello $\{z : |z| > \frac{1}{R}\}$, ed ammette il seguente sviluppo in serie:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}.$$

Ora, se consideriamo un'altra funzione h , olomorfa nel disco $B_{R'}(0)$ con $R' < R$, ossia ivi sviluppabile come $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$, la somma $u = g + h$ soddisfa $u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ nell'anello $\{\frac{1}{R} < |z| < R'\}$, dove $a_n = c_{-n}$ se $n < 0$ e $a_n = d_n$ se $n > 0$; se $n = 0$ possiamo assumere $c_0 = 0$ e $a_0 = d_0$.

Notazione 2.9.1. Una serie doppia $u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ in cui le somme sugli indici positivi e su quelli negativi convergono separatamente si chiama *serie di Laurent* di f .

Abbiamo quindi provato:

Corollario 2.9.2. Siano R' e R , rispettivamente, i raggi di convergenza delle serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n z^n$. Se $\frac{1}{R} < R'$ la serie doppia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ converge ad una funzione olomorfa nell'anello $\{\frac{1}{R} < |z| < R'\}$.

Risultati analoghi si ottengono per funzioni sviluppabili in dischi con centro in $z_0 \neq 0$: in tal caso, invece che $g(z) = f(\frac{1}{z})$, occorre traslare l'origine al punto z_0 , ossia scegliere $g(z) = f(\frac{1}{z-z_0})$.

Viceversa:

Teorema 2.9.3. (Sviluppo di Laurent.) Se $0 < r_0 < r_1$ e f è olomorfa nell'anello $A = \{z : r_0 < |z - z_0| < r_1\}$, allora f si spezza in A come somma $f = f_0 + f_1$, dove la parte principale f_0 e la parte regolare f_1 sono definite da

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad (2.25)$$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (2.26)$$

e le due serie convergono separatamente in A in maniera uniforme (la serie di f_0 converge nel disco $B_{r_1}(z_0)$; la serie di f_1 converge nel complemento del disco chiuso $\overline{B_{r_0}(z_0)}$). I coefficienti dello sviluppo sono univocamente determinati dalle identità

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (2.27)$$

dove C è una curva semplice chiusa che percorre in senso antiorario una circonferenza con centro z_0 contenuta nell'anello A (cioè tale che il suo raggio r verifica $r_0 < r < r_1$) (od equivalentemente una curva omotopicamente equivalente a questa).

Dimostrazione. Per ogni $z \in A$, la funzione h definita su A da $h(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ se $w \neq z$, e $h(z) = f'(z)$, è continua su A ed olomorfa in $A \setminus \{z\}$. Quindi l'integrale $H_r = \int_{C_r} h(w) dw = 0$ è indipendente da r (con $r_0 \leq r \leq r_1$), per il teorema di invarianza omotopica (Teorema 2.4.7) (qui le curve C_r sono linearmente omotope sotto l'omotopia data dalla dilatazione con centro z_0). In particolare, $H_0 = H_1$: questa uguaglianza si riscrive come

$$f(z) \left(\int_{C_1} \frac{1}{w-z} dw - \int_{C_0} \frac{1}{w-z} dw \right) = \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{C_0} \frac{f(w)}{w-z} dw. \quad (2.28)$$

D'altra parte, $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{w-z} dw = \text{Ind}_C(z)$ è l'indice di avvolgimento del percorso C intorno a z (Definizione 1.29.34). Nel nostro caso, z è esterno a C_0 , quindi $\text{Ind}_{C_0}(z) = 0$, mentre C_1 compie un giro intorno a z , quindi $\text{Ind}_{C_1}(z) = 1$. Pertanto (2.28) diventa $f(z) = f_1(z) + f_1(z)$, con

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{e} \quad f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(w)}{w-z} dw. \quad (2.29)$$

Nota bene: si osservi che le identità (2.29) sono pressoché identiche a quella del Corollario 2.5.1, che in effetti fu ottenuto con la stessa dimostrazione (il lettore è invitato a verificare). Però quel Corollario si riferiva ad una unica curva, mentre qui abbiamo due circonferenze C_0 e C_1 ed il punto z è nella loro intercapedine. Per dedurre (2.29) da quel Corollario sarebbe bastato tracciare un raggio che congiungesse C_0 e C_1 , e percorrerlo C_1 in senso antiorario, poi questo raggio verso l'interno, poi C_0 in senso orario, poi il raggio verso l'esterno: in questo modo il raggio viene percorso due volte in versi opposti ed il suo contributo all'integrale si cancella. Però la curva risultante non è semplice: se si preferisce avere una curva semplice occorre prendere due segmenti paralleli distinti al posto del raggio, arbitrariamente vicini, in modo che, per continuità, i loro contributi all'integrazione sono arbitrariamente vicini.

Come prima, per il Teorema di invarianza omotopica 2.4.7, gli integrali curvilinei che definiscono f_1 e f_1 non cambiano se invece che su C_1 o C_0 integriamo su C_r con $r_0 \leq r \leq R_1$. In seguito sceglieremo lo stesso raggio (ovvero lo stesso percorso) per entrambi gli integrali.

Ora, per il Teorema 2.2.5, f_1 è olomorfa nel disco $B_{r_1}(z_0)$, e quindi $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Calcoliamo i coefficienti dello sviluppo. A questo scopo,

nell'integrando dei due integrali curvilinei in (2.29), poniamo

$$t = \frac{z - z_0}{w - z_0} \quad (2.30)$$

ed osserviamo che $|z - z_0| < r_1$ e $|w - z_0| = r_1$, da cui $|t| < 1$. Quindi vale la formula di somma geometrica, $\sum_{n=0}^N t^n = \frac{1-t^{N+1}}{1-t}$ (Sezione 1.1), ovvero

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^N t^n + \frac{t^{N+1}}{1-t}.$$

Osserviamo che $\frac{1}{1-t} = \frac{w-z_0}{w-z}$: pertanto

$$\frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1-t} = \frac{1}{w-z}.$$

Sostituiamo le ultime due identità nel primo integrale in (2.29):

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z_0} \frac{1}{1-t} dw & (2.31) \\ &= \sum_{n=0}^N (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^{N+1} dw \\ &= \sum_{n=0}^N c_n (z-z_0)^n + R_N, \end{aligned}$$

dove c_n è il coefficiente in (2.27) ed il termine di resto R_N è dato da

$$R_N = \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^{N+1} dw = \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} {}^{N+1} dw. \quad (2.32)$$

Si noti che il fattore che contiene t , in quest'ultimo integrale, dipende da w , ma è uniformemente maggiorato in modulo da 1, come osservammo subito dopo (2.30). Ma allora $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$, e pertanto segue da (2.31) che f_1 soddisfa lo sviluppo in serie (2.25).

Come prima, per il Teorema di invarianza omotopica 2.4.7, l'integrale curvilineo che definisce il coefficiente c_n non cambia se invece che su C_1 integriamo su C_r con $r_0 \leq r \leq r_1$.

Resta da dimostrare uno sviluppo analogo per f_0 . Procediamo come prima, ma questa volta poniamo $t = \frac{w-z_0}{z-z_0}$. Sulla circonferenza C_{r_0} il numeratore ha modulo r_0 ed il denominatore ha modulo maggiore (perché z è interno all'anello A), quindi $|t| < 1$ e la serie geometrica converge. Di nuovo dalla formula di somma geometrica abbiamo

$$\frac{z-z_0}{z-w} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^N \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n + \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^{N+1} \frac{z-z_0}{z-w}.$$

Procedendo come prima ora si trova

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^N b_n (z-z_0)^n + R'_N$$

dove

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_0}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{1-n}} dw = c_n,$$

dove c_n è il coefficiente in (2.27), ed il termine di resto R'_N tende a zero quando $N \rightarrow \infty$. Questo prova lo sviluppo di f_0 enunciato in (2.25); inoltre, come già prima, l'integrale che esprime i coefficienti si può calcolare, senza che il risultato cambi, su qualsiasi altra circonferenza con raggio $r_0 \leq r \leq r_1$. Quindi possiamo calcolare i coefficienti di f_0 e di f_1 tramite integrali sulla stessa circonferenza, ottenendo in tal modo sia per la parte regolare sia per la parte principale la stessa formula (2.27). \square

Definizione 2.9.4. (Singularità isolate.) Diciamo che z_0 è un *punto di singularità isolato* di f se f non è olomorfa (e neppure necessariamente definita) in z_0 ma esiste un disco privato del suo centro, $B'(z_0) = B(z_0) \setminus \{z_0\}$, tale che f sia olomorfa in $B'(z_0)$.

Grazie ai risultati della precedente Sezione 2.9, se z_0 è un punto di singularità isolato di f , per ogni $z \in B'(z_0)$ lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

è convergente (nel senso che le due serie unilaterali dei termini con indici positivi e negativi convergono separatamente).

Definizione 2.9.5. (Poli di ordine n .) Se z_0 è una singolarità isolata per f e nello sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

si ha $c_{-k} \neq 0$ per qualche $k > 0$, ma $c_{-m} = 0$ per ogni $m > k$, allora il punto z_0 si dice un *polo di ordine n* di f .

Nota 2.9.6. Con riferimento alla notazione introdotta nella Definizione 2.7.1, osserviamo che, se $c_n = 0$ per ogni $n = 1, 2, \dots$, allora ovviamente z_0 è una singolarità rimovibile. Invece, se $c_n \neq 0$ per infiniti $n > 0$, allora z_0 è una singolarità essenziale, ma non avremo bisogno di questo fatto, e quindi non lo dimostriamo. \square

Esercizio 2.9.7. (i) La funzione $\sin z/z$ ha una singolarità rimovibile in $z = 0$;

(ii) la funzione $\cos z/z$ ha in $z = 0$ un polo del primo ordine (detto anche *polo semplice*);

(iii) la funzione $e^{1/z}$ ha una singolarità essenziale in $z = 0$. \square

2.10 Il teorema dei residui

Definizione 2.10.1. (Residuo.) Sia z_0 una singolarità isolata di f (Definizione 2.9.4), e $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ lo sviluppo di Laurent. Il coefficiente c_{-1} di questo sviluppo si chiama il *residuo* di f a z_0 , e si indica con $\text{Res}_{z=z_0} f(z)$. Si noti che in base a (2.27) si ha

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

per qualunque circonferenza C contenuta in $B'(z_0)$ percorsa in senso antiorario e che include z_0 al suo interno, e che in base al Teorema di invarianza omotopica 2.4.7 la stessa formula vale per qualsiasi curva semplice chiusa con immagine contenuta in $B'(z_0)$ ed indice di avvolgimento $\text{Ind}(z_0) = 1$ (si veda la Sezione 2.3).

Nota 2.10.2. Se f ha un polo del primo ordine in z_0 , ossia se lo sviluppo di Laurent è

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

scon $c_{-1} \neq 0$, allora dal Corollario 1.29.37 segue immediatamente che

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Se invece f ha un polo di ordine $n > 1$ in z_0 , è ancora possibile calcolare il suo residuo in z_0 grazie ad un passaggio al limite, come illustrato nella prossima Proposizione 2.10.4. \square

Nota 2.10.3. Segue dalla Nota 2.10.2 che, se $f(z) = g(z)h(z)$, dove g ha un polo del primo ordine al punto $z = z_0$ e h è olomorfa a z_0 , allora $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = h(z_0) \operatorname{Res}_{z=z_0} g(z)$. \square

Proposizione 2.10.4. *Se f è olomorfa in un disco bucato di centro z_0 ed in z_0 ha un polo di ordine n , allora*

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} D^{(n-1)}((z - z_0)^n f(z)).$$

Dimostrazione. Moltiplichiamo lo sviluppo di Laurent $f(z) = \sum_{j=-n}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$ per $(z - z_0)^n$: riscalandò gli indici della serie otteniamo allora

$$f(z)(z - z_0)^n = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m-n} (z - z_0)^m.$$

Derivando $n - 1$ volte otteniamo

$$D^{(n-1)}(f(z)(z - z_0)^n) = \sum_{m=n-1}^{\infty} m(m-1) \dots (m-n+2) c_{m-n} (z - z_0)^{m-n+1}.$$

Nella serie a secondo membro i termini sono continui rispetto a z e sono ordinati per potenze successive di $z - z_0$: il primo termine, quello con $m = n - 1$, ha potenza zero e quindi è costante, il secondo è lineare in $z - z_0$, il terzo è quadratico e così via. Pertanto tutti meno il primo si annullano

in $z = z_0$. Quindi, passando al limite per $z \rightarrow z_0$, sopravvive solo il primo termine e si ottiene

$$\lim_{z \rightarrow z_0} D^{(n-1)}(f(z)(z - z_0)^n) = (n-1)!c_{-1},$$

ossia l'enunciato. □

Teorema 2.10.5. (Teorema dei residui.) *Sia f una funzione olomorfa in un aperto O tranne al più in un numero finito di singolarità isolate z_1, \dots, z_n . Sia \mathbf{r} un percorso chiuso omotopo in O ad un punto (Definizione 2.4.1) che non passa per alcuna di queste singolarità. Allora*

$$\int_{\mathbf{r}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Ind}_{\mathbf{r}}(z_j) \text{Res}_{z=z_j} f(z). \quad (2.33)$$

In particolare, se \mathbf{r} è una curva semplice percorsa in senso antiorario, allora $\text{Ind}_{\mathbf{r}}(z_j) = 1$ per ogni punto di singolarità al suo interno e $\text{Ind}_{\mathbf{r}}(z_j) = 0$ altrimenti (Nota 2.4.12), e quindi l'identità (2.33) diventa

$$\int_{\mathbf{r}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_j \text{ interno a } \mathbf{r}} \text{Res}_{z=z_j} f(z). \quad (2.34)$$

Dimostrazione. Sappiamo dalla Nota 1.29.33 che, se C è la circonferenza di raggio r e centro z_0 , percorsa una volta in senso antiorario, allora

$$\int_C (z - z_0)^k dz = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } k = -1 \end{cases}.$$

Più in generale, grazie al Teorema di invarianza omotopica 2.4.7, per ogni percorso chiuso \mathbf{r} si ha

$$\int_{\mathbf{r}} (z - z_0)^k dz = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq -1 \\ 2\pi i \text{Ind}_{\mathbf{r}}(z_0) & \text{se } k = -1 \end{cases}. \quad (2.35)$$

Infatti, se $k \geq 0$ l'integrale si annulla per il teorema di Cauchy (Corollario 2.4.10). Invece, se $k < 0$, ci sono da considerare due casi. Un caso è che il percorso \mathbf{r} non contenga z_0 al suo interno (quindi $\text{Ind}_{\mathbf{r}}(z_0) = 0$, si veda la Nota 2.4.12): allora \mathbf{r} è omotopo ad un punto, l'integrando è olomorfo all'interno del percorso e l'integrale si annulla per il teorema di invarianza omotopica.

L'altro caso è che il percorso \mathbf{r} contenga il punto z_0 al suo interno, cioè gli giri intorno: in tal caso \mathbf{r} è omotopo ad una circonferenza con centro z_0 percorsa un numero di volte pari a $\text{Ind}_{\mathbf{r}}(z_0)$, e, di nuovo per il teorema di invarianza omotopica, l'integrale in (2.35) ha il valore dell'integrale sulla circonferenza percorsa una sola volta in senso antiorario moltiplicato per $\text{Ind}_{\mathbf{r}}(z_0)$. Questo dimostra le identità (2.35).

Sia ora f_j la parte principale di f nello sviluppo di Laurent intorno a z_j (la terminologia è quella del Teorema 2.9.3). In virtù di questo teorema, f_j è olomorfa in $O \setminus \{z_j\}$. Invece $f - f_j$ è olomorfo in z_j , perché coincide con la parte regolare di f a z_j . Si noti che $f - f_j$, sempre per il Teorema di Laurent 2.9.3, è olomorfa in O tranne che nei punti z_m con $m \neq j$. Pertanto la funzione $g = f - \sum_{j=1}^n f_j$ è olomorfa in tutto O . Poiché \mathbf{r} è omotopa ad un punto, dal teorema di Cauchy (nella forma del Corollario 2.4.10) segue che $\int_{\mathbf{r}} g(z) dz = 0$, ovvero

$$\int_{\mathbf{r}} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbf{r}} f_j(z) dz. \quad (2.36)$$

Con la notazione del Teorema 2.9.3, scriviamo ciascuna parte principale f_j come $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_j)^{-n}$, una serie uniformemente convergente in $O \setminus \{z_j\}$. Ora, in ciascun addendo al secondo membro di (2.36) integriamo termine a termine la corrispondente serie uniformemente convergente (Teorema 1.3.34) ed applichiamo a ciascun termine l'identità (2.35) per ottenere (2.33) e completare quindi la dimostrazione. \square

2.11 L'indicatore logaritmico

Rammentiamo la notazione stabilita nel Teorema 2.6.1 e nella Defini-
zione 2.9.5). Sia f una funzione non identicamente nulla che nel punto z_0 non ha singolarità oppure ha una singolarità isolata non essenziale (terminologia come nel Teorema 2.7.3). Sia m il primo indice per cui il coefficiente dello sviluppo di Laurent di f a z_0 è non nullo, ovvero $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ con $c_m \neq 0$. Scriviamo $m = m_f(z_0)$ e diciamo che z_0 è uno *zero di ordine* (o *molteplicità*) m di f se $m > 0$, ed un polo di ordine $-m$ se $m < 0$

In conseguenza del fatto che gli zeri di f non hanno punti di accumulazione (Teorema 2.6.1), in ogni compatto $m_f(z_0)$ è nullo tranne al più per un insieme finito di punti z_0 .

Teorema 2.11.1. (Indicatore logaritmico del numero di zeri e poli.)

Sia f una funzione olomorfa in un aperto $O \subset \mathbb{C}$ tranne al più per un numero finito di poli. Sia C una curva chiusa contenuta in O percorsa in senso positivo (ossia una curva di Jordan orientata positivamente, Nota 2.4.12), omotopa ad un punto e che non passa per alcuno zero o polo di f . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C d(\log f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum \text{Ind}_C(z_0) m_f(z_0).$$

In particolare, se la curva è semplice, allora per ogni punto nel suo interno si ha $\text{Ind}_C(z_0) = 1$ (si veda di nuovo la Nota 2.4.12), e quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f + P_f$$

dove N_f è il numero di zeri e P_f il numero di poli di f all'interno della curva, contati con la molteplicità.

Dimostrazione. Se f ha uno zero o un polo al punto z_0 , allora in una sfera aperta bucata $B(z_0) \setminus \{z_0\}$ centrata in z_0 si ha $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, con g olomorfa a z_0 ed ivi non nulla ($m > 0$ se si ha uno zero ovvero $m < 0$ se si ha un polo). Perciò in questa sfera bucata

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)}{(z - z_0)^m g(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Poiché $g(z_0) \neq 0$, la funzione $g'(z)/g(z)$ è olomorfa a z_0 . Dalla precedente identità segue che f'/f ha un polo semplice con residuo m esattamente nei punti in cui f ha uno zero di ordine m , e con residuo $-m$ esattamente dove f ha un polo di ordine m . Pertanto l'enunciato segue dal Teorema dei residui 2.10.5. \square

2.12 Calcolo di integrali con il teorema dei residui

Una parte degli esempi di questa Sezione è ripresa dall'eccellente esposizione in [10]; altri da [1].

2.12.1 Integrali di funzioni senza singolarità reali

Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione meromorfa nel semipiano superiore (Definizione 2.2.4), con valori reali sull'asse reale, e con sole singolarità polari (nessuna singolarità essenziale tranne all'infinito) ed in numero finito. Un tipico esempio si ottiene partendo da una funzione razionale reale, ossia il quoziente p/q con p e q polinomi a coefficienti reali: in tal caso scriviamo $f(z) = p(z)/q(z)$ l'estensione olomorfa $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ al piano complesso (che, per inciso, è unica, in base al Corollario 2.6.2).

Supponiamo inoltre che f non abbia poli sull'asse reale, e che

$$f(z) = o(1/|z|) \quad (2.37)$$

per $|z| \rightarrow \infty$. Per funzioni razionali, la stima precedente equivale a

$$f(z) = O(1/|z|^2)$$

(infatti questa condizione equivale a richiedere che i gradi dei polinomi p e q verifichino $\text{grado}(q) \geq \text{grado}(p) + 2$).

Grazie a (2.37), se C_r è la circonferenza con centro, diciamo, l'origine e raggio r , l'integrale $\int_{C_r} f(z) dz$ tende a zero per $r \rightarrow \infty$, perché la circonferenza ha lunghezza proporzionale a r mentre l'integrando è maggiorato da un multiplo di $1/r^2$. Da questo fatto e dal Teorema dei residui 2.10.5 traiamo due conseguenze:

Corollario 2.12.1. (i) *Se z_1, \dots, z_n sono i poli di f in \mathbb{C} (cioè, nel caso f sia una funzione razionale, gli zeri semplici del denominatore, dopo aver eliminato i fattori comuni col numeratore), si ha*

$$\sum_{j=1}^n \text{Res}_{z=z_j} f(z) = 0.$$

(ii) *Se z_1^+, \dots, z_k^+ sono i poli di f nel semipiano superiore e z_1^-, \dots, z_m^- sono quelli nel semipiano inferiore (naturalmente $m = k$ se f è razionale a coefficienti reali), allora dall'identità precedente*

$$\sum_{j=1}^k \text{Res}_{z=z_j^+} f(z) = \sum_{j=1}^m \text{Res}_{z=z_j^-} f(z)$$

e dal Teorema dei residui 2.10.5

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j^+} f(z) \\ &= -2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j^-} f(z). \end{aligned}$$

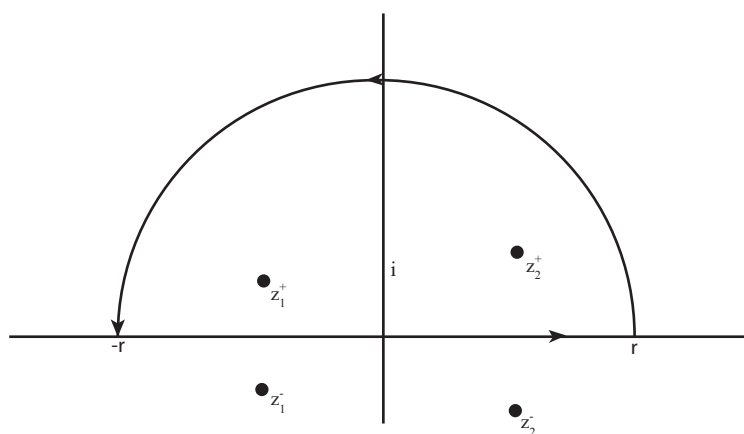


Figura 2.1: Contorno per integrare una funzione meromorfa $f(z) = o(1/|z|)$ senza poli sull'asse reale

Nota 2.12.2. Se la funzione razionale f è reale, ossia quoziente di due polinomi a coefficienti reali, i suoi poli, che sono gli zeri del denominatore non compensati da zeri al numeratore, sono simmetrici rispetto all'asse reale, perché il complesso coniugato di ogni radice di un polinomio reale è ancora una radice. \square

Esempio 2.12.3. Dal Teorema fondamentale del calcolo (1.1) sappiamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi,$$

perché l'integrando è la derivata della funzione arcotangente. Ricalcoliamo l'integrale applicando il teorema dei residui. L'estensione complessa

dell'integrando è

$$f(z) = \frac{1}{i + z^2}$$

ed ha poli nei punti $z_{\pm} = \pm i$. Il residuo al polo nel semipiano superiore si calcola come nella Nota 2.10.3:

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i} \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{2i}.$$

Pertanto, dal Corollario 2.12.1 (ii),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

□

Esempio 2.12.4. Calcoliamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{(1+x^2)(4+x^2)} dx.$$

In questo caso i poli sono i punti $z = \pm i, \pm 2i$. Calcoliamo, ancora come nella Nota 2.10.3, i residui ai poli nel semipiano superiore.

Si ottiene

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1+i}{(2i)(4+i^2)} \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{z-i} = \frac{1-i}{6}$$

. Analogamente, $\operatorname{Res}_{z=2i} f(z) = \frac{1+2i}{(4i)(1+4i^2)} = -\frac{2-i}{12}$. Ne segue:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{(1+x^2)(4+x^2)} dx = 2\pi i \left(\frac{1-i}{6} - \frac{2-i}{12} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

□

2.12.2 Integrali di funzioni con poli semplici reali

Nota 2.12.5. Premettiamo anzitutto, estendendo l'Esempio 1.29.33 e la Nota 2.3.3, che, se C è una semicirconfenza con centro in 0 e raggio $r > 0$ percorsa in senso antiorario, ad esempio con estremi sull'asse reale, si ha $\int_C \frac{dz}{z} =$

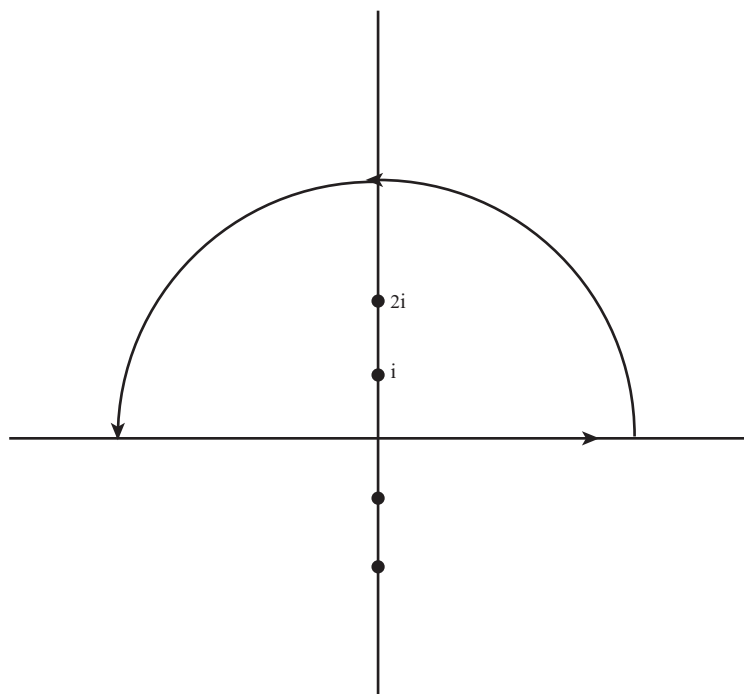


Figura 2.2: Contorno per integrare $\frac{1+x}{(1+x^2)(4+x^2)}$

$\int_0^\pi \frac{itre^{it}}{re^{it}} dt = i\pi$. Identico risultato si ottiene se l'angolo di percorrenza del mezzo giro varia da θ a $\theta + \pi$. Se il verso di percorrenza è orario il risultato cambia di segno. Risultati identici si ottengono se la circonferenza è centrata in un altro punto z_0 . In ogni caso il risultato non dipende dal raggio $r > 0$ della semicirconferenza. \square

Consideriamo ora il caso in cui, in aggiunta a poli nel semipiano superiore ed inferiore, la funzione meromorfa f della precedente Sottosezione 2.12.1 abbia anche qualche polo semplice sull'asse reale, diciamo x_1, \dots, x_m . Mostriamo che il Teorema dei residui 2.10.5 ci permette di calcolare l'integrale

$$I \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{x_1 - \varepsilon} + \int_{x_1 + \varepsilon}^{x_2 - \varepsilon} + \dots + \int_{x_{m-1} + \varepsilon}^{x_m - \varepsilon} + \int_{x_m + \varepsilon}^{\infty} \right) f(x) dx \quad (2.38)$$

purché $f(z) = O(1/|z|^2)$ per $|z| \rightarrow \infty$ (ossia se il polinomio al denominatore ha grado superiore di almeno 2 rispetto a quello al numeratore). Più in generale, tutti i risultati di questa sottosezione valgono per funzioni f meromorfe

nel semipiano superiore (Definizione 2.2.4) che tendono a zero per $|z| \rightarrow \infty$ più velocemente di $1/|z|$.

Rammentiamo che si dice che l'integrale in (2.38), calcolato omettendo intervalli centrati nei punti di singolarità e poi facendo tendere a zero il diametro di questi intervalli, è calcolato nel senso del *valore principale di Cauchy*, introdotto nell'Esempio 11.5.5, e lo si scrive v. p. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.

Nota 2.12.6. Nella situazione in cui l'integrando ha singolarità reali che non sono poli semplici, l'integrale può non convergere: ad esempio, se l'integrando ha singolarità di ordine quadratico, o di ordine *pari* più elevato, in un intorno reale del punto di singolarità l'integrando è di segno costante, ed in ciascuno dei due semi-intorni destro e sinistro non ha integrale finito (Sezione 1.1. In tale situazione, l'integrale improprio non si può calcolare con i metodi di questa Sezione. \square

Calcoliamo l'integrale utilizzando il percorso di integrazione $C_{r,\varepsilon}$ illustrato in Figura 2.3.

Consideriamo il polo x_1 . In un intorno di x_1 lo sviluppo di Laurent di r è

$$f(z) = \frac{\operatorname{Res} f(z)_{z=x_1}}{z - x_1} + h(z)$$

con h olomorfa in tale intorno. Sia $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo affinché la semicirconferenza $C_{1,\varepsilon}$ nel semipiano superiore di centro x_1 e raggio ε (ossia quella che fa parte del percorso in Figura 2.3) giaccia nel suddetto intorno. Sia M il massimo di $|h|$ su C_1 . È chiaro che vale la disuguaglianza $\left| \int_{C_1} h(z) dz \right| \leq M\pi\varepsilon$, ed il secondo membro tende a zero per $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Invece, per quanto concerne l'altro termine dello sviluppo di Laurent (2.12.2), segue dalla Nota 2.12.5 che

$$\int_{C_1} \frac{1}{z - x_1} dz = -i\pi \operatorname{Res}_{z=x_1} f(z) \quad (2.39)$$

(il segno è negativo perché la semicirconferenza è percorsa in senso orario. Quindi, per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, il contributo all'integrale curvilineo dato dalla semicirconferenza di raggio ε con centro in x_1 tende a $-i\pi \operatorname{Res}_{z=x_1} f(z)$. Vale un risultato analogo per ogni polo reale.

Osserviamo ora che il contributo all'integrale curvilineo dato dalla semicirconferenza di raggio r tende a zero quando $r \rightarrow \infty$ perché l'integrando tende

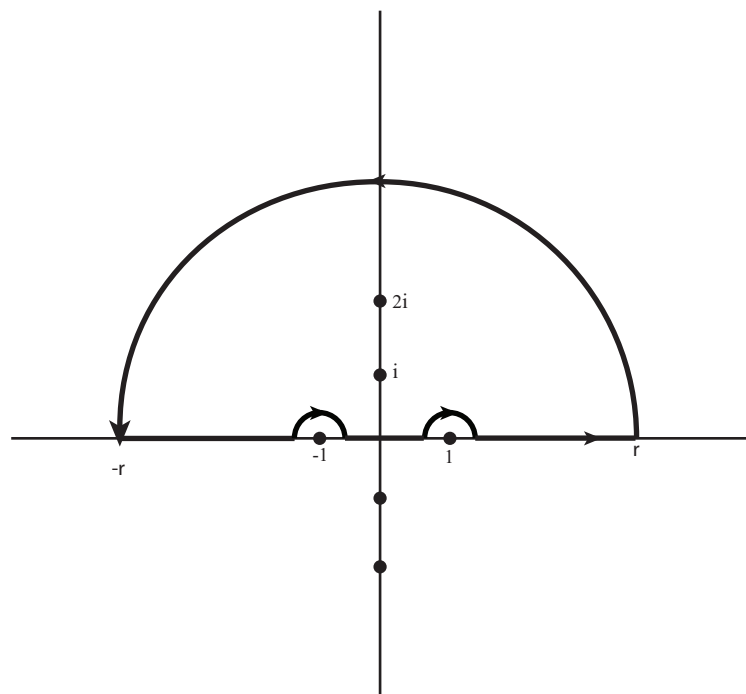


Figura 2.3: Contorno per integrare una funzione meromorfa $f(z) = o(1/|z|)$ con poli reali

a zero più velocemente di $\frac{1}{r}$. Quindi dal Teorema dei residui 2.10.5 possiamo concludere che

$$\begin{aligned} \text{v. p. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \sum_{l=1}^m \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_{l,\varepsilon}} f(z) dz &= \lim_{r \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_{r,\varepsilon}} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{z=z_j^+} f(z), \end{aligned}$$

da cui, grazie a (2.39) ed i commenti subito oltre,

$$I \equiv \text{v. p. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{z=z_j^+} f(z) + \pi i \sum_{l=1}^m \text{Res}_{z=x_l} f(z). \quad (2.40)$$

Il calcolo analogo sul percorso simmetrico nel semipiano inferiore (percorso

in senso orario) fornisce il seguente risultato:

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j^-} f(z) - \pi i \sum_{l=1}^m \operatorname{Res}_{z=x_l} f(z).$$

2.12.3 Trasformate di Fourier di funzioni limitate all'infinito

Definizione 2.12.7. Sia E un sottoinsieme di \mathbb{C} . Diciamo che una funzione $f : E \mapsto \mathbb{C}$ è *limitata all'infinito* (ovvero *asintoticamente*) da una funzione $g : E \mapsto \mathbb{C}$ se esiste un compatto al di fuori del quale $|f| < C|g|$ per qualche costante $C > 0$.

I risultati della sottosezione precedente si estendono al calcolo dell'integrale v. p. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$ dove f è una funzione meromorfa limitata all'infinito da $1/r$ nel semipiano superiore (o inferiore), e $\alpha \neq 0$ è un numero reale. Si noti che questo integrale è esattamente la trasformata di Fourier di f al punto α (calcolato nel senso del valore principale (Esempio 11.5.5) se f ha singolarità polari semplici sull'asse reale).

Per svolgere il calcolo, consideriamo, ad esempio, il caso $\alpha > 0$. Allora $|e^{i\alpha z}| = e^{-\alpha \operatorname{Im} z}$ tende a zero in maniera monotona quando $r \rightarrow \infty$ se $z = re^{i\vartheta}$ è nel semipiano superiore. Sia r sufficientemente grande affinché la semicirconfenza C_r di centro l'origine e raggio r sia al di fuori del compatto K della Definizione 2.12.7, e sia $|f(z)| < C/r$ al di fuori di K . Poiché $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z}$ e se $z = re^{i\vartheta}$ si ha $\operatorname{Im} z = r \sin \vartheta$, l'integrale sulla semicirconfenza si stima nel modo seguente:

$$\left| \int_{C_r} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| \leq M \int_0^\pi e^{-r\alpha \sin \vartheta} |re^{i\vartheta}| d\vartheta = \frac{C}{r} r \int_{C_r} \int_0^\pi e^{-r\alpha \sin \vartheta} d\vartheta. \quad (2.41)$$

Per $r \rightarrow \infty$ l'ultimo membro tende a zero per il Teorema di convergenza monotona di Lebesgue (Teorema 1.9.53), perché l'integrando, per $r \rightarrow \infty$, tende in maniera monotona alla funzione $h(\vartheta)$ che vale 0 in $(0, \pi)$ e 1 in $\vartheta = 0, \pi$. In alternativa si può applicare anche il teorema di convergenza dominata (Teorema 1.9.54), perché al variare di r l'integrando è limitato, uniformemente rispetto a r , dalla funzione costantemente 1 nell'intervallo $[0, \pi]$.

Il lettore che non fosse familiare con i suddetti teoremi di convergenza per l'integrale di Lebesgue può arrivare allo stesso risultato con metodi più elementari come segue. Osserviamo che, per $r \rightarrow \infty$, l'integrando $e^{-r\alpha \sin \vartheta}$ converge puntualmente in $[0, \pi]$ alla funzione h scritta più sopra, ma non uniformemente, perché h non è continua negli estremi 0 e π . Però la convergenza è uniforme nel sottointervallo $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ per ogni $\varepsilon > 0$, e quindi, passando al limite sotto il segno di integrale (Teorema 1.3.17), si ottiene $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^{\pi - \varepsilon} e^{-r\alpha \sin \vartheta} d\vartheta = 0$. D'altra parte, $\int_0^{\varepsilon} e^{-r\alpha \sin \vartheta} d\vartheta \leq \varepsilon$, perché l'integrando è limitato dalla costante 1, e lo stesso risultato vale per l'integrale $\int_{\pi - \varepsilon}^{\pi} e^{-r\alpha \sin \vartheta} d\vartheta$. Pertanto $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} e^{-r\alpha \sin \vartheta} d\vartheta < 2\varepsilon$, e, poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, prendendo l'estremo inferiore rispetto a ε vediamo che il limite vale 0.

Ovviamente il residuo di $f(z)e^{iaz}$ al polo x_j vale $e^{iax_j} \operatorname{Res}_{z=x_j} f(z)$ (Nota 2.10.2). Pertanto, dal Teorema dei residui 2.10.5, ora segue che

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j^+} f(z) - \pi i \sum_{l=1}^m \operatorname{Res}_{z=x_l} f(z).$$

Possiamo svolgere un calcolo del tutto analogo se $\alpha < 0$ e f è limitata all'infinito da $1/r$ nel semipiano inferiore, integrando su un percorso nel semipiano inferiore ottenuto ribaltando rispetto all'asse delle ascisse quello appena considerato. In tal modo si ottiene:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j^-} f(z) + \pi i \sum_{l=1}^m \operatorname{Res}_{z=x_l} f(z).$$

2.12.4 La trasformata di Fourier della funzione sinc

Nell'Esercizio 10.1.5 abbiamo calcolato la trasformata di Fourier di una funzione caratteristica: in particolare, segue immediatamente da questo Esercizio e dalla proprietà di dilatazione della trasformata di Fourier (Teorema 8.2.4 (iv)) che la trasformata di Fourier di $\pi \chi_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}$ è la funzione $\operatorname{sinc} \frac{\omega}{\pi} = \frac{\sin \omega}{\omega}$ introdotta nella Definizione 10.1.4. Non abbiamo calcolato direttamente la trasformata di Fourier della funzione sinc, perché essa non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$: però appartiene a $L^2(\mathbb{R})$, e quindi possiamo definire la trasformata di Fourier nel senso di $L^2(\mathbb{R})$ (Nota 8.5.3), o più in generale nel senso delle distribuzioni. Grazie al Teorema di inversione per la trasformata

di Fourier per distribuzioni (Proposizione 11.12.4), o anche semplicemente per $L^2(\mathbb{R})$ (Corollario 8.5.6), possiamo quindi concludere che la trasformata di Fourier di $\sin(x)/x$ è la (classe di equivalenza L^2 della) funzione caratteristica $\pi\chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$, ossia coincide con questa funzione quasi ovunque (e quindi vi coincide nel senso delle distribuzioni date da funzioni localmente integrabili a crescita polinomiale (Esempio 11.5.4 (i))). In particolare, la trasformata di Fourier cambia solo a meno di equivalenza (sia nel senso di $L^2(\mathbb{R})$ sia nel senso delle distribuzioni) se modifichiamo il suo valore ai punti ± 1 . Per analogia con la funzione somma della serie di Fourier della funzione caratteristica (Teorema 5.15.1 (i)), vogliamo porre il valore della trasformata di Fourier a questi due punti uguale a $\frac{\pi}{2}$, ovvero, se troviamo un modo diretto di calcolarla, ci piacerebbe che questo risultasse essere il valore ai due suddetti punti estremi dell'immagine.

In effetti, questo approccio è indiretto: preferiremmo essere in grado di calcolare direttamente l'integrale di Fourier. Poiché l'integrando non è in L^1 , il calcolo diretto richiede di troncare l'integrale su compatti via via più grandi e poi passare al limite al crescere del compatto. Purtroppo, però, non si riesce a svolgere il calcolo dell'integrale troncato su un compatto: l'integrando non è una funzione elementare e non sappiamo calcolare i suoi valori sugli estremi di un intervallo, nonostante il fatto che siamo stati in grado, con tecniche più raffinate, di calcolare l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ su tutto \mathbb{R} (più precisamente sulla semiretta positiva (Lemma 5.19.3, ma per parità l'integrale su tutta la retta è il doppio di questo).

Siamo quindi soddisfatti nello scoprire che possiamo calcolare direttamente la trasformata di Fourier grazie al teorema dei residui, come ora illustriamo.

Vogliamo calcolare il limite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{\sin x}{x} e^{isx} dx .$$

Da quanto visto prima, sappiamo che il risultato deve essere uguale alla costante π in $(-1, 1)$ e 0 al di fuori di $[-1, 1]$ (perché nella definizione di trasformata di Fourier abbiamo messo all'esponente dell'esponenziale un fattore di scala 2π , quindi ora dobbiamo prendere $s = 2\pi\omega$). Auspichiamo che il risultato sia $\frac{\pi}{2}$ ai punti estremi dell'immagine, ± 1 . Mostriamo che questo risultato segue dal teorema dei residui.

Osserviamo che la funzione $\frac{\sin z}{z} e^{isz}$ non ha una singolarità in $z = 0$, quindi, in base al teorema di Cauchy (Corollario 2.4.10), l'integrale sul segmento

dell'asse reale da $-r$ a r coincide con l'integrale sul segmento reale da $-r$ a -1 , seguito dall'integrale sulla semicirconfenza con centro l'origine e raggio 1 nel semipiano superiore, seguito a sua volta dall'integrale sul segmento reale da 1 a r : chiamiamo C questo percorso che include la semicirconfenza (con verso di percorrenza da sinistra a destra). Ora, se scriviamo $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ e

$$\Phi_r(s) = \int_C \frac{e^{isz}}{z} dz,$$

vediamo che

$$\int_{-r}^r \frac{\sin x}{x} e^{isx} dx = \frac{1}{2i} (\Phi_r(s+1) - \Phi_r(s-1)). \quad (2.42)$$

Consideriamo il percorso chiuso C_r^+ ottenuto chiudendo C con la semicirconfenza nel semipiano superiore con centro l'origine e raggio r , percorsa in senso antiorario. All'interno di questo percorso la funzione $\frac{e^{itz}}{z}$ è olomorfa nella variabile z per ogni t reale, e quindi il Teorema dei residui 2.10.5 asserisce che il suo integrale su questo percorso è zero, ovvero che $\Phi_r(t)$ è l'opposto dell'integrale sulla semicirconfenza (percorsa in senso antiorario). Tenendo conto che sulla semicirconfenza si ha $dz = ir e^{i\vartheta} d\vartheta = iz d\vartheta$, troviamo

$$\Phi_r(t) = -i \int_0^\pi e^{itre^{i\vartheta}} d\vartheta.$$

Osserviamo, in particolare, che si ha

$$\Phi_r(0) = -i\pi. \quad (2.43)$$

D'altra parte, poiché per ogni $s \in \mathbb{R}$ la funzione e^{itz} vale 1 in $z = 0$, la funzione $\frac{e^{itz}}{z}$ ha un polo semplice in $z = 0$ con residuo 1. Pertanto, se ora consideriamo il percorso C_r^- ottenuto chiudendo C con la semicirconfenza nel semipiano inferiore ribaltata rispetto a quella di prima, adesso dentro questo percorso c'è un polo semplice di $\frac{e^{itz}}{z}$, e lo stesso ragionamento di prima ora porta all'identità

$$\Phi_r(t) = 2\pi i + i \int_{-\pi}^0 e^{irte^{i\vartheta}} d\vartheta.$$

In questi due integrali, il modulo dell'integrando vale $e^{-rt \sin \vartheta}$: poiché $\sin \vartheta$ è positivo per $0 < \vartheta < \pi$ (ossia nel semipiano superiore $\text{Im } z \geq 0$) e negativo

in quello inferiore, questo modulo tende a zero in maniera monotona nel dominio $0 < \vartheta < \pi$ (ossia per z nel semipiano superiore) allorché $t > 0$, e nel dominio $-\pi < \vartheta < 0$ (ossia per z nel semipiano inferiore) allorché $t < 0$. Pertanto dal Teorema di Convergenza Monotona 1.9.53 abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r(t) &= 2\pi i && \text{se } t < 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r(t) &= 0 && \text{se } t > 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Osserviamo infine che, se $|s| > 1$, allora $s + 1$ e $s - 1$ hanno lo stesso segno (entrambi positivi o entrambi negativi), mentre se $|s| < 1$, allora $s + 1$ e $s - 1$ hanno segni opposti (il primo positivo ed il secondo negativo). Da questo fatto e da (2.42) segue

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{\sin x}{x} e^{isx} dx &= \pi && \text{se } |s| < 1 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{\sin x}{x} e^{isx} dx &= 0 && \text{se } |s| > 1. \end{aligned}$$

Abbiamo così verificato l'identità $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{\sin x}{x} e^{isx} dx = \pi \chi_{[-1,1]}$ per tutti i valori reali di s eccetto $s = \pm 1$. D'altra parte, se $s = 1$ allora $s - 1 = 0$ e $s + 1 = 2$, e se $s = -1$ allora $s - 1 = -2$ e $s + 1 = 0$. Nel primo caso segue da (2.43) che $\Phi_r(s-1) = \Phi_r(0) = -\pi i$, e da (2.44) che $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r(s+1) = 0$. Nel secondo caso invece abbiamo $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r(s-1) = 2\pi i$, e $\Phi_r(s+1) = \Phi_r(0) = -\pi i$. Pertanto segue ancora da (2.42) che $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{\sin x}{x} e^{\pm ix} dx = \frac{\pi}{2}$. Questo conclude il calcolo diretto della trasformata di Fourier della funzione sinc, ed indica che il risultato è esattamente quanto volevamo, anche ai punti estremi dell'immagine.

2.12.5 Integrali di espressioni trigonometriche razionali

In questa sottosezione integriamo funzioni razionali in $\sin t$ e $\cos t$. Questi integrali si calcolano tutti come nell'esempio seguente.

Esempio 2.12.8. Sia $a \in \mathbb{R}$ e $f(t) = \frac{1}{a \cos t}$. La funzione f è periodica di periodo 2π : limitiamo l'attenzione all'intervallo $[-\pi, \pi]$. Se $a = \pm 1$, il denominatore ha uno zero di ordine due. Più precisamente, per $a = -1$ il denominatore si annulla in $t = 0$ ed il suo sviluppo di Taylor comincia con il termine

quadratico $\frac{1}{2}t^2$, mentre per $a = 1$ il denominatore si annulla in $t = \pm\pi$ ed il suo sviluppo di Taylor in questi punti comincia rispettivamente con il termine $\frac{1}{2}(t - (\pm\pi))^2$. In base alle caratteristiche di convergenza degli integrali impropri (Sezione 1.1) concludiamo che la funzione f non è integrabile sul suo periodo se $|a| = 1$.

Se $|a| < 1$, la funzione ha due punti di singolarità nel periodo: i punti in cui $\cos t = a$, che nel caso $a = 0$ sono in realtà tre ($-\pi$, 0 e π), ma il primo e l'ultimo si possono considerare identificati per periodicità. Poiché in questi punti di singolarità la derivata prima della funzione coseno è non nulla, il denominatore ha uno zero di ordine uno, e di nuovo la funzione f non è integrabile in senso improprio; però questa volta è integrabile nel senso del valore principale di Cauchy (Esempio 11.5.5): lasciamo come esercizio al lettore il calcolo dell'integrale in analogia al procedimento che stiamo per sviluppare per il caso $|a| > 1$ adattato seguendo la linea della Sottosezione 2.12.2.

Trattiamo qui il caso più facile, quello senza singolarità reali: $|a| > 1$. Sia $z = e^{it}$ un numero complesso di modulo 1: allora

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{e^{2it} + 1}{2e^{it}} = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a + \cos t} dt = \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} dz.$$

L'integrando ha due poli semplici in \mathbb{C} , entrambi reali: i punti $z_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Poiché $\sqrt{a^2 - 1} < |a|$, se $a > 1$ z_+ sta nel disco unitario e z_- no, mentre se $a < -1$ capita il viceversa. In base alla Nota 2.10.2, il residuo a z_{\pm} è

$$\lim_{z \rightarrow z_{\pm}} \frac{z - z_{pm}}{z^2 + 2az + 1} = \pm \frac{1}{z_+ - z_-}.$$

Pertanto, dal Teorema dei residui 2.10.5 segue

- Se $a > 1$, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a + \cos t} dt = \frac{4\pi}{z_+ - z_-} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$
- Se $a < -1$, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a + \cos t} dt = \frac{4\pi}{z_- - z_+} = -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$

□

Più in generale, supponiamo di voler integrare una funzione f periodica di periodo, diciamo, 2π , senza singolarità in tutto il periodo, avente un'estensione meromorfa alla striscia $S \equiv \operatorname{Re} |z| \leq \pi, \operatorname{Im} z \geq 0$ (che indichiamo

ancora con f) senza singolarità essenziali e tale che esiste il limite uniforme $\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} f(z)$ ed è costante indipendentemente dalla parte reale di z (indichiamo con l il valore del limite). Supponiamo inoltre che f non abbia punti di singolarità sulle semirette $\text{Re } z = \pm\pi$. Rammentiamo che le singolarità non essenziali non possono avere punti di accumulazione (Lemma 2.7.2 e Teorema 2.7.3). Poiché il limite $\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} f(z)$ è finito, tutti i punti di singolarità debbono giacere in un sottoinsieme limitato della striscia S , quindi in un compatto. Dalla proprietà di Bolzano–Weierstrass (Teorema 1.9.6) segue che i punti di singolarità dentro la striscia S , che denotiamo con x_1, \dots, x_n , sono in numero finito. Allora l'integrale si può calcolare con il Teorema dei residui 2.10.5 come segue:

Proposizione 2.12.9. *Nelle ipotesi appena enunciate,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 2\pi \left(l + i \sum_{i=1}^n \text{Res}_{z=x_i} f(z) \right).$$

Dimostrazione. Consideriamo il percorso di integrazione dato dal rettangolo R i cui lati verticali sono $\text{Re } z = \pm\pi$, $0 \leq \text{Im } z \leq a$, ed i lati orizzontali sono $-\pi \leq \text{Re } z \leq \pi$, $\text{Im } z = 0$ oppure $\text{Im } z = a$, percorso in senso antiorario. Per periodicità, la funzione f assume gli stessi valori sui punti alla stessa ordinata dei lati verticali. Poiché questi lati sono percorsi in versi opposti (dall'alto al basso quello di sinistra, dal basso all'alto quello di destra) i loro contributi si eliminano a vicenda. Sul lato inferiore l'integrale della funzione f è l'integrale sul segmento reale $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$. Se si fa tendere a a $+\infty$, l'integrale sul lato superiore, a causa della condizione $\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} f(z) = l$ uniforme e del Teorema di passaggio al limite uniforme sotto il segno di integrale 1.3.17), tende a $-2\pi l$ (il segno negativo è dovuto al verso di percorrenza da sinistra a destra). Da queste osservazioni si ricava l'enunciato. \square

2.12.6 Esercizi ed esempi sul calcolo di integrali con i residui

Il lettore che non riuscisse a risolvere i seguenti esercizi può trovarne lo svolgimento in [10].

Esercizio 2.12.10. Sia f una funzione olomorfa con singolarità polari (quindi isolate, come osservato prima della Proposizione 2.12.9) solo nel semiasse

reale negativo, ed in numero finito, diciamo m . Osserviamo che allora la funzione $f(e^z)$ è periodica di periodo 2π nella direzione immaginaria, ed a meno di tale periodicità ha poli z_1, \dots, z_m tutti con parte immaginaria π (perché e^z è un numero reale negativo se e solo se $\text{Im } z = \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$). Supponiamo infine che

$$f(z) = O(1/|z|). \quad (2.45)$$

Mostrare che, se $0 < \alpha < 1$, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x} f(e^x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{i=1}^m \text{Res}_{z=z_i} (e^{\alpha z} f(e^z)).$$

Suggerimento: scelto a reale, si integri sul contorno rettangolare di ascissa fra $-a$ e a e di ordinata fra 0 e 2π . Per a sufficientemente grande, questo contorno gira intorno a tutte le singolarità. Si mostri che, grazie alla condizione (2.45) ed al fatto che $|e^{\alpha(a \pm iy)}| = e^{\alpha a} = o(e^a)$ (perché $\alpha < 1$), i contributi dei due segmenti verticali tendono a zero quando a tende a infinito. A questo punto basta osservare che il contributo sul segmento orizzontale alto (il quale è percorso da destra a sinistra) ha il segno opposto di quello sul tratto verticale basso (che è l'integrale che si vuol calcolare) moltiplicato per il fattore $e^{2\pi i \alpha}$ (perché il fattore esponenziale sul tratto superiore è il prodotto di questo fattore per l'esponenziale sul tratto inferiore). \square

Esercizio 2.12.11. Utilizzando l'approccio del precedente Esercizio 2.12.10, si mostri che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi \alpha)}.$$

\square

Esempio 2.12.12. Sia f una funzione meromorfa con un numero finito di poli semplici z_1, \dots, z_n , ma senza poli sul semiasse reale positivo (inclusa l'origine), e che decresce all'infinito nel modo seguente:

$$f(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right). \quad (2.46)$$

Un tipico esempio è il caso di una funzione razionale f in cui il polinomio al denominatore abbia grado maggiore o uguale del polinomio al numeratore più 1. Se il grado del denominatore eccede di esattamente 1 quello del

denominatore, l'integrale improprio $\int_0^\infty f(t) dt$ non converge (Sezione 1.1). Quindi consideriamo invece l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$$

dove $0 < \alpha < 1$ (dal caso particolare di funzioni razionali stiamo siamo quindi passati a considerare all'integrando una funzione razionale quoziente di espressioni a crescita polinomiale non necessariamente di grado intero, ma con grado del denominatore superiore di più di 1 rispetto a quello del denominatore). Ora l'integrale converge (si veda di nuovo la Sezione 1.1).

Per applicare il Teorema dei residui 2.10.5 dobbiamo considerare l'estensione dell'integrando ad una funzione meromorfa su \mathbb{C} . Qui il problema è che $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ è una funzione definita sui reali positivi che non si estende ad una funzione meromorfa su tutto \mathbb{C} ma solo su parte del piano complesso, e non in modo unico. La seguente Nota è un inciso per spiegare perché.

Nota 2.12.13. (Il logaritmo complesso.) Incontriamo un problema nell'estensione al piano complesso della funzione logaritmo. Sappiamo definire il logaritmo di un numero reale positivo. Allora, se z è complesso, scriviamo $z = |z|e^{i\vartheta}$ e, per rispettare la proprietà che il logaritmo manda prodotti in somme, dobbiamo definire il logaritmo complesso come

$$\log z = \log |z| + i\vartheta,$$

dove $\log |z|$ è il consueto logaritmo reale. Naturalmente, il logaritmo complesso deve avere una singolarità nell'origine, perché questo già accade al logaritmo reale. Qui supponiamo $0 \leq \vartheta < 2\pi$; se ϑ varia al di fuori dell'intervallo $[0, 2\pi)$, ad esempio se consideriamo $\vartheta' = \vartheta + 2k\pi$, si ottiene lo stesso numero complesso $z = |z|e^{i\vartheta} = |z|e^{i\vartheta'}$, *ma non lo stesso logaritmo*: se $z = |z|e^{i\vartheta'}$ abbiamo

$$\log z = \log |z| + i\vartheta' = \log |z| + i\vartheta + 2k\pi i.$$

Quindi il logaritmo complesso è in realtà una funzione a più valori, infiniti valori che differiscono ciascuno dal precedente di $2\pi i$:

$$\log z = \log |z| + i\vartheta + 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Però la definizione di funzione richiede che il valore sia unico. Quindi dobbiamo limitare la variazione dell'angolo θ ad un intervallo fissato di lunghezza

2π , ad esempio, come prima, l'intervallo $[0, 2\pi)$ (questa si chiama la *determinazione principale* del logaritmo complesso). Purtroppo, però, ciò dà luogo ad una discontinuità: se ora z è un numero reale positivo e consideriamo due altri numeri complessi che lo approssimano, $z_+ = z + i\varepsilon$ nel semipiano superiore ($\text{Im } z_+ = \varepsilon > 0$) e $z_- = z - i\varepsilon$ nel semipiano inferiore, allora abbiamo $z_+ = ze^{i\varphi}$ e $z_- = ze^{-i\varphi} = ze^{i(2\pi-\varphi)}$, dove adesso gli angoli φ e $2\pi - \varphi$ appartengono entrambi all'intervallo $[0, 2\pi)$ della determinazione canonica. Se ora ε tende a zero, anche φ tende a zero e si ottiene:

$$\begin{array}{lll} \lim z_+ = z & \text{e} & \lim \log z_+ = \log z \\ \lim z_- = z & \text{ma} & \lim \log z_- = \log z + 2\pi \end{array}$$

Pertanto la restrizione a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ del logaritmo complesso data dalla determinazione principale è discontinua sul semiasse reale $z \geq 0$. Il problema non si risolve scegliendo altre determinazioni: se ad esempio si prende $\varphi \leq \vartheta < \varphi + 2\pi$, lo stesso calcolo mostra che si ottiene una discontinuità sulla semiretta uscente dall'origine ad angolo ϑ . Pertanto, per avere una funzione meromorfa, dobbiamo limitare l'attenzione ad un sottoinsieme del piano complesso, scartando una semiretta uscente dall'origine (o, come si dice, introducendo un *taglio*). Per la determinazione principale, si limita l'attenzione al *piano tagliato* $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \{0\}\} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R}, z \geq 0\}$. \square

Allora, ritornando all'integrale $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$, estendiamo l'integrando alla funzione meromorfa sul piano tagliato $f(z)/z^\alpha$ ottenuta a partire dalla determinazione principale del logaritmo complesso: $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$.

Consideriamo il percorso di integrazione illustrato nella Figura 2.4, contenuto nel piano tagliato, che consiste di due archi di circonferenza, rispettivamente C_r e C_R , con raggi $r < R$, centrate all'origine, unite da due segmenti orizzontali paralleli al taglio, S_+ e S_- . Faremo tendere i due segmenti al segmento reale $[r, R]$, ma dai due lati opposti del taglio, e poi faremo tendere r a zero, R ad infinito. Grazie all'ipotesi che non ci siano poli di f sui reali positivi o nullo, in tal modo il percorso di integrazione invade una regione che contiene tutti i poli di f .

Quando facciamo tendere i due segmenti S_+ e S_- al segmento reale, l'integrale su S_+ tende a $\int_r^R \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$. Invece, per quanto riguarda S_- , osserviamo che l'argomento della variabile z tende a 2π , e quindi

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} \rightarrow e^{2\pi i \alpha} |z|^\alpha. \quad (2.47)$$

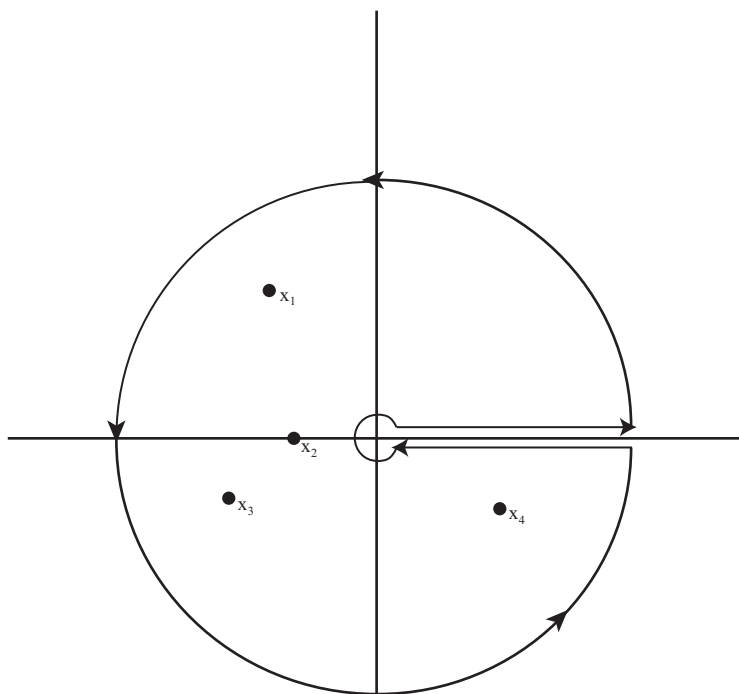


Figura 2.4: Contorno per integrare una funzione $f(z)/z^\alpha$ con $f(z) = O(1/|z|)$ senza poli reali positivi

Quindi l'integrale su S_- tende a $e^{-2\pi i\alpha} \int_r^R \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$.

Ora facciamo tendere rispettivamente a zero e ad infinito i raggi interno ed esterno. Vicino all'origine l'integrando è $O(|z|^{-\alpha})$ e quindi l'integrale su C_r tende a zero con r , perché la lunghezza dell'arco è proporzionale al raggio r . All'infinito, l'integrando $f(z)/z^\alpha$ è $o(1/|z|)$ perché $f(z) = O(1/|z|)$, quindi anche l'integrale su C_R tende a zero per $R \rightarrow +\infty$, per la stessa ragione di prima.

Pertanto, quando percorriamo il ciclo in senso antiorario, applicando ad esso il Teorema dei residui 2.10.5, e poi passiamo al limite come spiegato

sopra, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t^\alpha} dt &= \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \alpha}} \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_i} \left(\frac{f(z)}{z^\alpha} \right) \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \alpha}} \sum_{i=1}^n z_i^{-\alpha} \operatorname{Res}_{z=z_i} \left(\frac{f(z)}{z^\alpha} \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

□

Esercizio 2.12.14. Mostrare che, per $0 < \alpha < 1$, si ha

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha(1+t)} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

nei due modi seguenti:

- applicando il risultato del precedente Esempio 2.12.12 (si usi il percorso in Figura 2.5);
- riducendo l'integrale a

$$\int_0^\infty \frac{e^{(1-\alpha)x}}{1+e^x} dx$$

mediante la sostituzione $t = e^x$, ed applicando il risultato dell'Esercizio 2.12.11 (qui occorre osservare che $\sin(\pi\alpha) = \sin(\pi(1-\alpha))$), grazie alle formule di addizione della funzione seno.

□

Esempio 2.12.15. Modifichiamo il precedente Esempio 2.12.12 considerando ora funzioni f meromorfe decrescenti all'infinito come $O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ e con un numero finito di singolarità polari, consistenti di un numero finito di poli semplici z_1, \dots, z_n fuori del semiasse reale positivo e di un numero finito di poli semplici x_1, \dots, x_m sul semiasse reale positivo (ma non nell'origine). Assumiamo che sul semiasse reale positivo le uniche singolarità siano poli semplici. Sia $0 < \alpha < 1$. La presenza di poli semplici sul percorso di integrazione $(0, +\infty)$ rende ora non convergente l'integrale $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$, perché l'integrando ha singolarità dell'ordine di $1/x$ (più precisamente, $1/(x-x_j)$, $j = 1, \dots, m$): si veda la convergenza di integrali impropri nella Sezione 1.1. Però possiamo

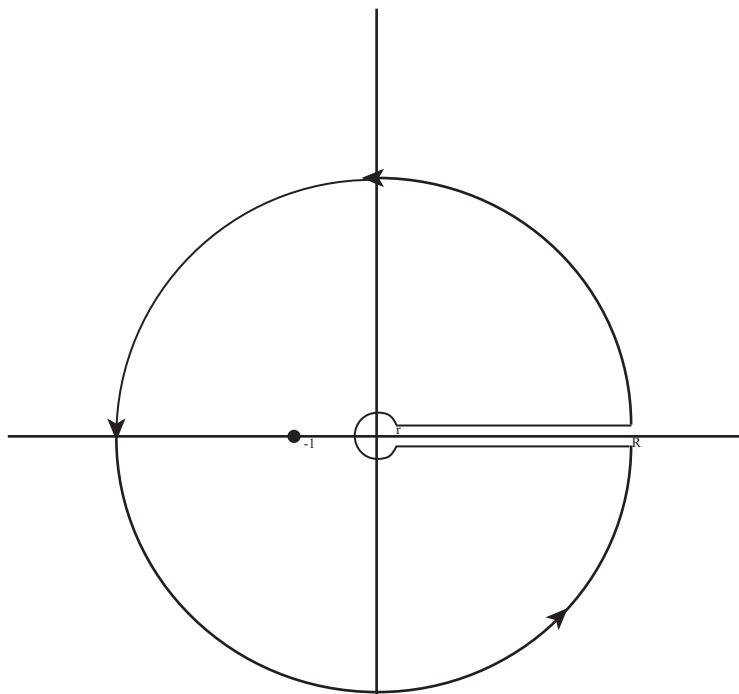


Figura 2.5: Contorno per integrare una funzione $f(z)/z^\alpha$ con $f(z) = O(1/|z|)$ senza poli reali positivi

calcolare questo integrale nel senso del valore principale definito nell'Esempio 11.5.5.

Usiamo ora il percorso della Figura 2.6.

Calcoliamo l'integrale su questo percorso come nell'Esempio 2.12.12, ottenendo come risultato $2\pi i$ per la somma dei residui dei poli semplici interni (che sono tutti i poli non reali positivi z_1, \dots, z_n se il raggio r delle circonferenze interne è abbastanza piccolo ed il raggio R della circonferenza esterna abbastanza grande. Poi passiamo al limite facendo tendere i tratti orizzontali ai corrispondenti segmenti reali, ed infine facendo tendere r a 0 e R ad infinito. L'intero calcolo rimane come svolto nel suddetto Esempio, tranne per il fatto che ora abbiamo i contributi aggiuntivi delle semicirconferenze superiori ed inferiori attorno ai poli reali x_j , $j = 1, \dots, m$. Scriviamo $c_j = \text{Res}(z^{-\alpha} f(z))_{z=x_j}$. Al polo semplice x_j l'integrando non è sviluppabile secondo Laurent perché il fattore $z^{-\alpha}$ (nella sua determinazione principale

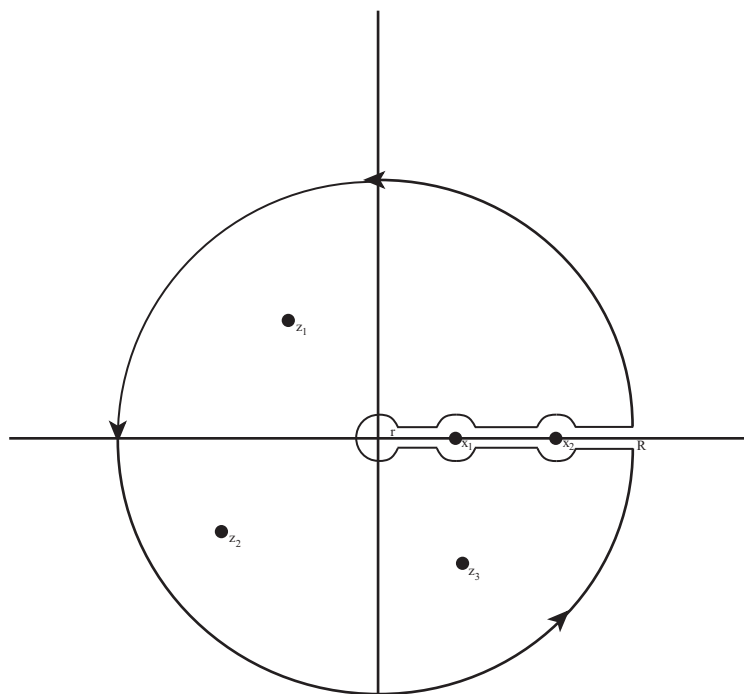


Figura 2.6: Contorno per integrare una funzione $f(z)/z^\alpha$ con $f(z) = O(1/|z|)$ senza poli reali positivi

data da quella del logaritmo in $z^{-\alpha} = e^{-\alpha \log z}$, che abbiamo scelto come canonica nella Nota 2.12.13) non è meromorfo sul semiasse reale positivo; però possiamo calcolare gli sviluppi di Laurent a x_j nel semipiano superiore ed in quello inferiore, rispettivamente. Nel semipiano superiore, ossia se $\text{Im } z > 0$, il fattore $z^{-\alpha}$ è analitico, e quindi verifica $z^{-\alpha} = x_j^{-\alpha} + O(|z - x_j|)$ (sviluppo di Taylor); nel semipiano inferiore succede la stessa cosa, ma il valore al punto x_j (che è sul taglio della determinazione canonica di $z^{-\alpha} = e^{-\alpha \log z}$) ora non è $x_j^{-\alpha}$ come prima, bensì $x_j^{-\alpha} e^{-2\pi i \alpha}$, esattamente come abbiamo calcolato in (2.47). Invece lo sviluppo di Laurent della funzione f (olomorfa in un disco bucato (ovvero privato del centro) intorno a x_j) è lo stesso da entrambi i lati: $f(z) = \text{Res } f(z)_{z=x_j} \frac{1}{z-x_j} + O(1)$. Quindi i valori dell'integrando sulla semicirconferenza superiore sono del tipo $f(z) = x_j^{-\alpha} \text{Res } f(z)_{z=x_j} \frac{1}{z-x_j} + O(1)$, mentre su quella inferiore sono $f(z) = e^{-2\pi i \alpha} x_j^{-\alpha} \text{Res } f(z)_{z=x_j} \frac{1}{z-x_j} + O(1)$. I termini del tipo $O(1)$ sono limitati, e quindi i loro contributi all'integrale

tendono a zero con il raggio delle semicirconferenze. Invece l'integrale di $\frac{1}{z-x_j}$ sulle due semicirconferenze di centro x_j (che, rammentiamo, sono percorse in senso orario) vale su entrambe $-\pi i$ (lo abbiamo calcolato direttamente varie volte, ad esempio in (2.39)).

In conclusione, quando $r \rightarrow 0^+$ i contributi all'integrale dati dai poli sul semiasse reale positivo tendono a

$$-\pi i (1 + e^{-2\pi i \alpha}) \sum_{j=1}^m x_j^{-\alpha} \operatorname{Res} f(z)_{z=x_j}.$$

Dobbiamo inserire questo nuovo contributo nel risultato già ricavato nell'Esempio 2.12.12.

Osserviamo che, in seguito al legame fra seno e coseno ed esponenziale complesso (Sezione 1.1) vale l'identità

$$\begin{aligned} \frac{1 + e^{-2\pi i \alpha}}{1 - e^{-2\pi i \alpha}} &= \frac{e^{\pi i \alpha} + e^{-\pi i \alpha}}{e^{\pi i \alpha} - e^{-\pi i \alpha}} \\ &= \frac{2 \cos(\pi \alpha)}{2i \sin(\pi \alpha)} = -i \cot(\pi \alpha), \end{aligned}$$

Da questa identità e dall'uguaglianza (2.48) si ricava infine

$$\begin{aligned} \text{v. p.} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t^\alpha} dt &= \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \alpha}} \sum_{i=1}^n z_i^{-\alpha} \operatorname{Res}_{z=z_i} \left(\frac{f(z)}{z^\alpha} \right) \\ &+ \pi \cot(\pi \alpha) \sum_{j=1}^m x_j^{-\alpha} \operatorname{Res} f(z)_{z=x_j}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

□

Esercizio 2.12.16. Si usi il risultato espresso nell'identità (2.49) del precedente Esempio 2.12.15 per mostrare che per $0 < \alpha < 1$ si ha

$$\text{v. p.} \int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha(1-t)} dt = -\pi \cot(\pi \alpha).$$

Suggerimento: l'unico polo è semplice e si trova a $z = 1$. Il percorso di integrazione del precedente Esempio ora è quello illustrato in Figura 2.7, percorso in senso antiorario; si noti che gli archi di semicirconferenza interni (quelli con centro nel polo $z = -1$) sono percorsi in senso antiorario.

□

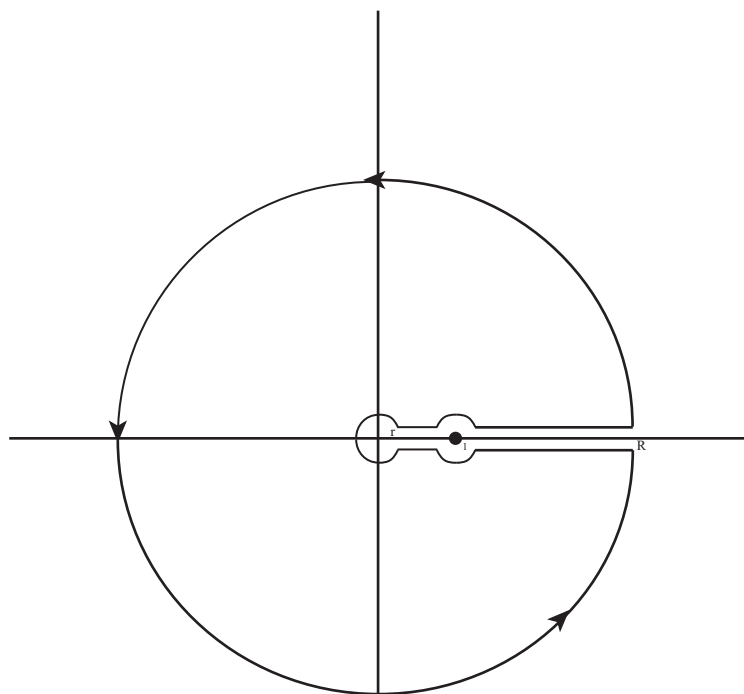


Figura 2.7: Contorno per integrare $\frac{1}{x^\alpha(1-x)}$

Esempio 2.12.17. Consideriamo infine funzioni f meromorfe nel semipiano superiore, con un numero finito di singolarità tutte fuori dell'asse reale, e decrescenti all'infinito come $o\left(\frac{1}{|z|}\right)$ (ad esempio, nel caso frequente in cui f è una funzione razionale, il grado del denominatore deve essere maggiore almeno di due unità rispetto a quello del numeratore, e quindi $f(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$).

Vogliamo calcolare l'integrale

$$\int_0^\infty f(x) \log x \, dx.$$

A questo fine è conveniente integrare su tutto l'asse reale, assumendo in aggiunta che f sia *pari sull'asse reale*, ovvero che $f(-x) = f(x)$ per ogni x reale. Per calcolare l'integrale consideriamo l'estensione complessa del logaritmo con determinazione data, ad esempio, dall'argomento di z compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, ovvero con taglio sul semiasse immaginario negativo, e corri-

spondentemente applichiamo il Teorema dei residui 2.10.5 ad un percorso che non interseca il taglio, come ad esempio quello in Figura 2.8.

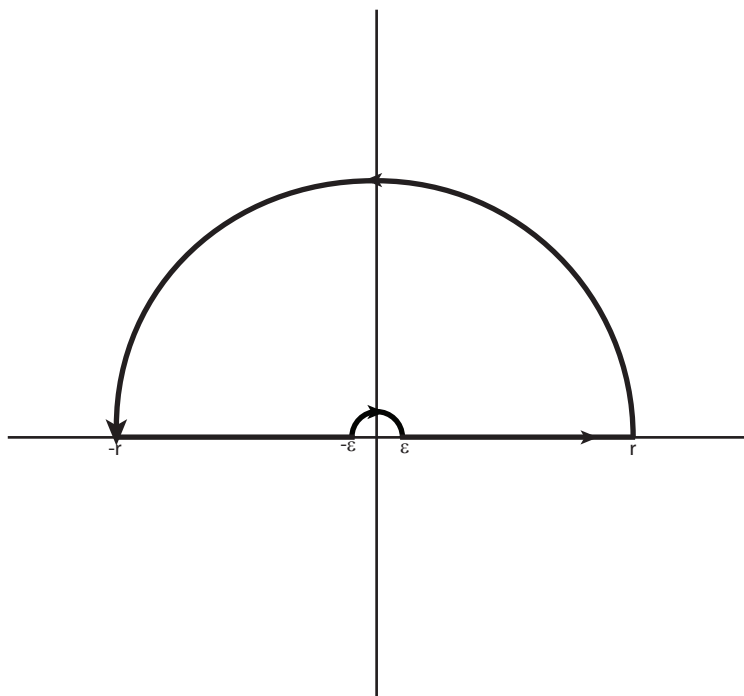


Figura 2.8: Contorno per integrare $f(x) \log x$

Osserviamo che l'integrando $f(x) \log x$ ha una singolarità nell'origine solo a causa del logaritmo, poiché invece f è continua nell'origine. Allora la sulla semicirconferenza di raggio ε l'integrando diverge come $|\log \varepsilon|$, ma la lunghezza del percorso di integrazione è proporzionale a ε . Poiché $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \log \varepsilon = 0$ (Sezione 1.1), il limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ del contributo all'integrale dato dalla semicirconferenza piccola è nullo. Analogamente, sulla circonferenza grande l'integrando è infinitesimo rispetto a $\frac{\log x}{r}$ e la semicirconferenza ha lunghezza proporzionale a r , quindi anche il suo contributo tende a zero per grandi r perché $\lim_{r \rightarrow +\infty} r \log r = 0$.

Osserviamo anche che, se x è reale positivo, si ha $-x = x e^{i\pi}$, e quindi il logaritmo complesso, vista la determinazione del logaritmo che abbiamo scelto, verifica $\log(-x) = \log(x) + i\pi$ (si riveda la Nota 2.12.13). Pertanto segue dall'ipotesi di parità ($f(-x) = f(x)$) che

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} f(z) \log z \, dz + \int_{\varepsilon}^r f(z) \log z \, dz = 2 \int_{\varepsilon}^r f(x) \log x \, dx + i\pi \int_{\varepsilon}^r f(x) \, dx .$$

Da qui, passando a limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e $r \rightarrow +\infty$ ed applicando il Teorema dei residui 2.10.5, otteniamo

$$2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j} [f(z) \log z] = 2 \int_0^{\infty} f(x) \log x \, dx + i\pi \int_0^{\infty} f(x) \, dx , \quad (2.50)$$

dove gli z_j sono i poli semplici di f nel semipiano superiore. A questo proposito osserviamo qui che, se si parte con una f meromorfa nel semipiano *inferiore*, il calcolo rimane valido pur di scegliere un percorso simmetrico rispetto all'asse reale di quello che abbiamo usato.

Ora assumiamo ancora, per comodità, che f abbia valori reali sull'asse reale (cioè quando la sua variabile è reale). Allora, separando le parti reale ed immaginaria in (2.50), abbiamo

$$\int_0^{\infty} f(x) \log x \, dx = -\pi \operatorname{Im} \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{Res}_{z=z_j} [f(z) \log z] \quad (2.51)$$

e

$$\int_0^{\infty} f(x) \, dx = 2 \operatorname{Re} \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{Res}_{z=z_j} [f(z) \log z] . \quad (2.52)$$

Si noti che non solo abbiamo calcolato grazie al teorema dei residui l'integrale $\int_0^{\infty} f(x) \log x \, dx$, ma anche l'integrale $\int_0^{\infty} f(x) \, dx$. \square

Esercizio 2.12.18. Usare il Teorema dei residui 2.10.5 per calcolare:

- (i) l'integrale $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} \, dx$;
- (ii) l'integrale $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx$;
- (iii) l'integrale $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} \, dx$;
- (iv) l'integrale $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$.

Suggerimento: la funzione $\frac{1}{1+z^2}$ è $O(1/|z|^2)$ per $|z| \rightarrow \infty$ ed ha un polo semplice solo in $z = \pm i$; nel semipiano superiore l'unico polo è in $z = i$. Poiché $\frac{1}{i+z^2} = \frac{1}{z-i} \frac{1}{z+i}$, il residuo di $\frac{\log z}{1+z^2}$ a questo polo è

$$\left. \frac{\log z}{z+i} \right|_{z=i} = \frac{\log i}{2i} = \frac{i\pi/2}{2i} = \frac{\pi}{4}.$$

Pertanto (i) segue da (2.51):

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx = -\pi \operatorname{Im} \frac{\pi}{4} = 0,$$

e (ii) segue da (2.52):

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \operatorname{Re} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Si osservi che quest'ultimo integrale era già noto, perché la primitiva di $\frac{1}{1+x^2}$ è $\arctan x$ (si veda anche l'Esempio 2.12.3).

Per calcolare gli integrali (iii) e (iv), si osservi che la funzione $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ ha poli di ordine 2 ai punti $z = \pm i$. Basta allora calcolare il suo residuo al punto $z = i$ tramite la Proposizione 2.10.4 ed applicare la Nota 2.10.3 per ottenere

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{\log z}{(1+z^2)^2} = \frac{\pi}{8} + \frac{i}{4}.$$

Ora, prendendo la parte reale e immaginaria, otteniamo da (2.51) che l'integrale in (iii) vale $-\frac{\pi}{4}$, e da (2.52) che l'integrale in (iv) vale $\frac{\pi}{4}$.

□

2.13 Introduzione al prolungamento analitico: la funzione Gamma

Supponiamo che f sia una funzione olomorfa in un dominio (aperto connesso) D . Per ogni punto z_0 di D , essa è esprimibile come sviluppo in serie di potenze con centro in z_0 . Abbiamo già osservato il seguente comportamento di rigidità delle funzioni olomorfe. Se g è un'altra funzione olomorfa in z_0 che coincide con f in un intorno di z_0 , o anche solo su una successione di punti

che ha z_0 come punto di accumulazione, allora f e g coincidono in tutto D ; in particolare, se f e g coincidono localmente (ad esempio se sono uguali con tutte le loro derivate al punto z_0), allora coincidono ovunque (Teorema 2.6.1 e Corollario 2.6.2).

Allora, supponiamo di avere due funzioni f e g olomorfe in due domini diversi D_1 e D_2 , e che l'intersezione di D_1 e D_2 contenga un aperto (o anche solo un insieme con un punto di accumulazione, magari un arco di curva). Allora mettendo insieme f e g nei rispettivi domini otteniamo una funzione olomorfa definita nell'unione $D_1 \cup D_2$, che chiamiamo ancora f e denotiamo con *prolungamento analitico* di f a $D_1 \cup D_2$. Per quanto visto prima, il prolungamento analitico è unico. Lo sviluppo di Taylor di f intorno a punti di D_1 non converge necessariamente in D_2 , e neppure in sottodomini di D_2 tranne che per centri di sviluppo contenuti in $D_1 \cap D_2$, ma cambiando appropriatamente centri di sviluppo si ottiene un ricoprimento di $D_1 \cup D_2$ in dischi parzialmente sovrapposti ciascuno dei quali è un disco di convergenza della serie di Taylor di un'unica funzione olomorfa che continuiamo a denotare con f .

Questo implica che se f è olomorfa in D e se prendiamo una curva che comincia dentro D e sviluppiamo secondo Taylor la funzione f con centri sui punti della curva, allora man mano che ci spostiamo verso l'esterno di D possiamo, cambiando centri di sviluppo, trovare nuove regioni di olomorfia per f esterne a D . Se seguiamo quella curva, il prolungamento analitico così costruito è unico: ma potrebbe dipendere dalla curva che abbiamo percorso. Se la curva comincia a $z_0 \in D$ e finisce a $z \notin D$, otteniamo un prolungamento f che in z è olomorfo; ma se avessimo seguito un altro percorso da z_0 a z , avremmo ottenuto la stessa funzione? Questa è la domanda alla base della teoria del prolungamento analitico.

In questa Sezione non affrontiamo questo problema, che viene rimandato alla successiva, ma ci limitiamo ad un esempio facilmente costruibile di prolungamento analitico: quello relativo all'estensione del dominio di definizione della funzione Gamma.

La funzione Gamma è stata introdotta nella Sottosezione 1.23.4, dove abbiamo dimostrato che è una funzione olomorfa definita nel semipiano $D_0 := \{\operatorname{Re} z > 0\}$. Si tratta dell'integrale $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$, che converge appunto in tale semipiano. Ora ne estendiamo il dominio di definizione grazie alla seguente formula di ricorrenza, che si ottiene integrando per parti: se

$\operatorname{Re} z > 0$,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty x^z e^{-x} dx = [-t^z e^{-t}]_0^\infty + z \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx = z\Gamma(z),$$

dove il termine costante si annulla a zero a causa del polinomio e tende a zero all'infinito a causa dell'esponenziale. Riscriviamo questa identità come

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z},$$

ed usiamola per estendere la definizione di Gamma dalla striscia $\{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ alla striscia $\{-1 < \operatorname{Re} z < 0\}$. Purtroppo questa striscia addizionale che così aggiungiamo al dominio di definizione è disgiunta dal semipiano destro D_0 (ne è separata dalla retta immaginaria $\{\operatorname{Re} z = 0\}$). Però possiamo eseguire un passaggio intermedio nel prolungamento, estendendo prima alla striscia $\{-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\}$: a causa del denominatore nella formula di ricorrenza, questo passaggio intermedio fornisce l'estensione olomorfa richiesta in tutta questa striscia eccetto il punto $z = 0$. Ora le due striscie di estensione, $\{-1 < \operatorname{Re} z < 0\}$ e $\{-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}, z \neq 0\}$ si sovrappongono parzialmente, e quindi abbiamo esteso la funzione Gamma al semipiano bucato $D_{-1} := \{\operatorname{Re} z > -1, z \neq 0\}$. Iterando questo procedimento per ricorrenza, estendiamo la funzione Gamma al dominio $\mathbb{C} \setminus \{z = 0, -1, -2, \dots\}$.

Si osservi che la convergenza dell'integrale che definisce la funzione Gamma *non* si estende a nessun punto del semipiano sinistro $\{\operatorname{Re} z < 0\}$: la Gamma si estende, ma con una diversa definizione, data da formule di ricorrenza o da opportuni sviluppi di Taylor, e basata sulla rigidità delle funzioni olomorfe, non dalla espressione integrale che la definisce nel semipiano destro.

Vogliamo ora determinare il comportamento della funzione Gamma ai punti interi negativi $-\mathbb{N} = \{z = 0, -1, -2, \dots\}$. Osserviamo dapprima che $\Gamma(0) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$, e per ricorrenza otteniamo

$$\Gamma(n) = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!.$$

Alla stessa maniera, per ogni $n > 0$ e $z \notin -\mathbb{N}$ abbiamo

$$\Gamma(z+n) = (z-n+1)(z-n+2)\dots(z+1)z\Gamma(z).$$

Ora studiamo come si comporta la Gamma in prossimità del punto di singolarità $-n$. Scriviamo $z = -n + w$: dalla precedente identità si ha

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(w+1)}{w(w-1)(w-2)\dots(w-n)}.$$

Pertanto $\lim_{w \rightarrow 0} w\Gamma(-n + w) = (-1)^n/n$, e quindi ai punti $\{-n, n \in \mathbb{N}\}$ ci sono poli semplici con residuo $(-1)^n/n$ (si veda la Definizione 2.9.5).

Nota 2.13.1. (Nota terminologica.) Nella Definizione 1.6.7 abbiamo chiamato *analitica reale* una funzione di (una o più) variabili reali sviluppabile in serie di Taylor in un disco di raggio positivo intorno ad ogni punto del suo dominio di definizione. L'analogo per funzioni di variabile complessa dovrebbe indicarsi come funzione analitica complessa, e così avviene in molti libri ma non in in questo, che riserva a tali funzioni il nome di funzioni olomorfe. Nondimeno, parliamo di prolungamento analitico invece che di prolungamento olomorfo. Questo perché il prolungamento di una funzione f avviene scegliendo un disco iniziale D_z con centro z in cui sviluppiamo f secondo Taylor, poi scegliendo in questo disco un punto w ed esaminando lo sviluppo di Taylor di f intorno ad esso: se lo sviluppo converge in un disco D_w che sborda da (ossia non è interamente contenuto in) D_z , abbiamo esteso la funzione in maniera olomorfa al di fuori di D_z : ma con un altro sviluppo di Taylor! Quindi ciò che viene estesa è la proprietà di analiticità (svilupparibilità in serie di Taylor) rispetto a centri diversi. \square

2.14 Prolungamento analitico

In questo libro, dibattere un tema sofisticato come il prolungamento analitico sarebbe solo necessario per approfondire e generalizzare un esempio elementare di cui abbiamo bisogno e che presentiamo subito con un calcolo diretto, quello del logaritmo complesso. Nondimeno, diamo una presentazione abbastanza ampia, seppure non completa, dell'argomento (omettiamo ad esempio il piccolo ed il grande teorema di Picard). La presentazione in questa Sezione è tratta da [10, Capitolo 7] e [23, Chapter 16].

2.14.1 Il logaritmo complesso: definizione naturale

Scriviamo la variabile complessa z in forma polare, $z = re^{i\theta}$. C'è un modo obbligato di estendere la funzione logaritmo, originariamente definita sulla semiretta reale positiva, ad un dominio complesso che la contiene, ed allo stesso tempo mantenere la proprietà del logaritmo di trasformare prodotti in somme: esso consiste nel definire

$$\ln(z) = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta, \quad (2.53)$$

dove ovviamente $\ln r$ è il consueto logaritmo reale. La funzione logaritmo complesso così estesa è ovunque derivabile in senso complesso, quindi olomorfa, come si trova immediatamente verificando che valgono le equazioni di Cauchy–Riemann (Nota 2.1.2).

L'estensione complessa che abbiamo appena dato ha senso localmente in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ma purtroppo non globalmente. Supponiamo infatti di percorrere in senso antiorario la curva $\theta \mapsto re^{i\theta}$, la cui immagine è la circonferenza con centro l'origine e raggio $r > 0$. In ogni punto la definizione (2.53) ha senso, ma dopo aver compiuto un giro il valore del logaritmo al punto finale eccede di $2\pi i$ quello al punto iniziale: però i due punti coincidono! La definizione che abbiamo dato non porta quindi ad una funzione ad un solo valore, bensì ad infiniti valori (numerabili), separati l'uno dall'altro di multipli interi di $2\pi i$. Secondo la terminologia usuale, questa non è una funzione (in analisi complessa è peraltro abituale chiamarla una *funzione polidroma*, in antitesi alle funzioni consuete, che vengono chiamate *monodrome*). Per evitare la polidromia, occorre restringere la definizione a domini nel piano complesso nei quali non sia possibile percorrere giri intorno all'origine (ossia avere curve con indice di avvolgimento non nullo intorno all'origine: Definizione 1.29.34). Il dominio più ovvio è il piano complesso scavato di una qualsiasi semiretta uscente dall'origine.

Nonostante qui non sia indispensabile, il concetto di come estendere in maniera ben definita ed analitica funzioni da un sottodominio in \mathbb{C} ad un dominio più grande è di tale importanza storica e concettuale che ne diamo una succinta trattazione nel resto di questa Sezione.

2.14.2 Elementi analitici di funzione

Segue immediatamente dal Corollario 2.6.2 il seguente *principio del prolungamento analitico*:

Teorema 2.14.1. *Siano D_0 e D_1 due domini (aperti connessi) in \mathbb{C} , e supponiamo che l'aperto $D := D_0 \cap D_1$ sia non vuoto. Se f_0 è olomorfa in D_0 , esiste al più un'unica funzione f_1 olomorfa in D_1 che coincide con f_0 in D (o anche semplicemente in una parte di D che abbia un punto di accumulazione). Se una tale f_1 esiste, la coppia di funzioni f_0 e f_1 definisce quindi un'unica funzione olomorfa in $D_0 \cup D_1$.*

Il Teorema precedente ribadisce che le funzioni olomorfe che si estendono a domini più grandi lo fanno in maniera unica. Ma cosa succede ai loro

sviluppi di Taylor? Lo sviluppo di Taylor con centro in un punto z_0 converge in un disco D_0 di raggio r_0 , che può essere tutto \mathbb{C} . Se il disco di convergenza di $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ è tutto il piano complesso, sviluppando f_0 con un nuovo centro di sviluppo in z_1 otteniamo una nuova serie di potenze $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_1)^n$ che converge di nuovo in tutto \mathbb{C} . Invece, se il raggio di convergenza r_0 è finito, allora scegliendo un nuovo centro di sviluppo z_1 nel disco D_0 otteniamo un nuovo disco di convergenza che potrebbe estendersi fuori di D_0 , e dar quindi luogo ad una estensione olomorfa (unica) di f_0 fuori di D_0 . Ecco un esempio.

Esempio 2.14.2. Sia

$$f_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (z - i)^n = \frac{1}{1 - (z - i)}$$

nel disco $D_0 = \{z : |z - i| < 1\}$ con centro i e raggio 1. Esprimiamo f_0 con uno sviluppo con centro in 1, scrivendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - (z - i)} &= \frac{1}{i - (z - 1)} = -i \frac{1}{1 - \frac{z-1}{i}} = -i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{i} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} (z-1)^n. \end{aligned}$$

La serie di potenze all'ultimo membro è una serie geometrica convergente nel disco $D_1 = \{z : |z - 1| < 1\}$, con raggio 1 e centro in 1. Il disco D_1 non è interamente contenuto in D_0 e quindi abbiamo costruito un prolungamento analitico non banale.

I due sviluppi in serie f_0 e f_1 , convergenti rispettivamente nei dischi D_0 e D_1 , definiscono quindi un'unica funzione olomorfa f in $D_0 \cup D_1$ e si chiamano *elementi analitici della funzione f* , o più semplicemente *elementi della funzione f* . \square

Notazione 2.14.3. Con maggiore proprietà di linguaggio, un elemento analitico è una coppia (f, D) , dove D è un disco aperto in \mathbb{C} e f una funzione olomorfa in D , ossia una serie di Taylor con centro nel centro di D e convergente in D . Un elemento analitico di una funzione olomorfa g è del tipo (f, D) con f coincidente con g in D . Se (f_0, D_0) e (f_1, D_1) sono due elementi analitici tali che $D = D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ e $f_1 = f_2$ in D , allora scriviamo

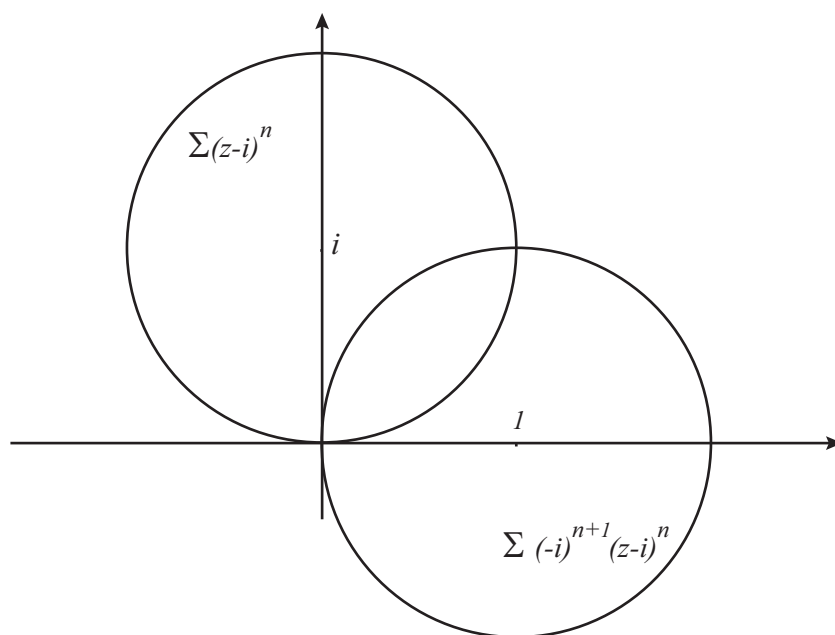


Figura 2.9: Due elementi analitici della stessa funzione olomorfa

$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$: lasciamo al lettore la verifica banale del fatto che questa è una relazione di equivalenza (le tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva sono quasi ovvie). In tal caso, le due funzioni f_0 e f_1 sono le restrizioni rispettivamente a D_0 e D_1 di un'unica funzione olomorfa in $D_0 \cup D_1$.

2.14.3 Monodromia, polidromia e prolungamento analitico lungo curve

Supponiamo di iterare il prolungamento analitico definito nella precedente Sottosezione 2.14.2 incollando elementi di funzione. In tal modo, a partire da un elemento centrato in un punto z_0 , possiamo arrivare a definire la funzione prolungata analiticamente in un altro punto z_1 in più di un modo, a seconda di quali dischi di olomorfia abbiamo incollato nel corso delle iterazioni. L'esempio della funzione logaritmo complesso presentato nella Sottosezione 2.14.1 mostra che il risultato non è necessariamente unico: può dipendere dalla scelta dei dischi, ossia da come ci siamo mossi per spostarci da z_0 a z_1 . Questo concetto diventa ancora più chiaro se osserviamo che l'unicità del

prolungamento da un disco al successivo non si basa sul fatto che i due elementi analitici coincidano nell'intersezione (aperta) dei loro due dischi: basta che coincidano in un insieme con un punto di accumulazione, ad esempio un arco di curva (Corollario 2.6.2). Quindi studiamo come prolungare analiticamente funzioni lungo curve, e quando il risultato è indipendente dalla scelta della curva o invece ne dipende. Nel primo caso definiamo il prolungamento *monodromo*, nel secondo *polidromo*.

Definizione 2.14.4. Sia γ una curva continua da un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ ad un punto z_1 , e per ogni z nell'immagine di γ sia f_z un elemento analitico (ossia una serie di potenze convergente in un disco di raggio non nullo con centro z) con la proprietà che le restrizioni all'immagine di γ dei diversi elementi coincidono a due a due negli archi di curva dove si sovrappongono i rispettivi dischi. In tal caso si dice che l'elemento finale f_{z_1} è il prolungamento analitico lungo la curva γ dell'elemento iniziale f_{z_0} , e viceversa (ed analogamente, ogni elemento intermedio è prolungamento analitico lungo la curva di ogni altro elemento). Un prolungamento che non dipende dalla scelta della curva si chiama *monodromo*, altrimenti *polidromo*.

Il prossimo teorema è una conseguenza del Corollario 2.6.2.

Teorema 2.14.5. (Unicità del prolungamento analitico.) Ogni elemento analitico (f, D) che ammette una continuazione analitica lungo una curva continua γ che passa per il centro di D ammette una sola continuazione analitica lungo γ : gli elementi analitici ottenuti al termine di γ coincidono.

Dimostrazione. Consideriamo due catene di dischi, diciamo $\{A_0, A_1, \dots, A_m\}$ e $\{B_0, B_1, \dots, B_k\}$, che cominciano con D (ovvero $A_0 = B_0 = D$) e che ricoprono entrambe l'immagine di γ , ossia esistono $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m < 1$ e $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < 1$ tali che gli intervalli $I_j = [s_j, s_{j+1}]$ e $K_i = [t_i, t_{i+1}]$ verificano $\gamma(I_j) \subset A_j$, $\gamma(K_i) \subset B_i$ per $0 < j < m - 1$, $0 < i < k - 1$, e tali che dischi consecutivi in ciascuna catena si intersecano: $A_j \cap A_{j+1} \neq \emptyset$, $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ per tutti questi valori di j e i . Supponiamo che per tutti questi indici esistano elementi analitici (g_j, A_j) e (h_i, B_i) tali che $g_0 = h_0 = f$ su D e $(g_j, A_j) \sim (g_{j+1}, A_{j+1})$ e $(h_i, B_i) \sim (h_{i+1}, B_{i+1})$. Dobbiamo dimostrare che ogni volta che $I_j \cap K_i \neq \emptyset$ si ha $(g_j, A_j) \sim (h_i, B_i)$. Questo è vero per ipotesi se $i = j = 0$. Per assurdo, supponiamo che smetta di essere vero per i e j sufficientemente grandi, e scegliamo i e j che verificano questa ipotesi fatta per assurdo, ovvero che sia

$$A_j \cap B_i \neq \emptyset \quad \text{e} \quad (g_j, A_j) \not\sim (h_i, B_i), \quad (2.54)$$

e minori possibili, nel senso che $i + j$ sia il minimo valore per cui si incontra tale proprietà. Consideriamo gli intervalli $I_j = [s_j, s_{j+1}]$ e $K_i = [t_i, t_{i+1}]$ e supponiamo che si abbia, ad esempio, $t_i < s_j < t_{i+1}$: ossia, $s_j \in I_j \cap K_i$. Rammentiamo che I_j interseca I_{j-1} , ovvero $s_j \in I_{j-1} \cap I_j$. Quindi

$$\gamma(s_j) \in A_{j-1} \cap A_i \cap B_j.$$

Poiché $i + j$ è minimo fra tutte le coppie di indici per i quali i corrispondenti elementi analitici non sono equivalenti (ossia prolungamenti analitici l'uno dell'altro), necessariamente abbiamo $(g_{j-1}, A_{j-1}) \sim (h_i, B_i)$. D'altra parte sappiamo anche che $(g_{j-1}, A_{j-1}) \sim (g_j, A_j)$, e per la proprietà transitiva dell'equivalenza abbiamo $(g_j, A_j) \sim (h_i, B_i)$, in contraddizione con (2.54). Questa contraddizione mostra che per nessuna coppia di indici i e j vale (2.54). \square

Corollario 2.14.6. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio connesso, e (f, D) un elemento analitico di funzione su un disco aperto d con centro w . Sia γ una qualsiasi curva continua semplice chiusa che passa per w , e supponiamo che lungo γ sia possibile il prolungamento analitico. Sia (g, D') l'elemento analitico di funzione su un disco D' con centro w che si ottiene prolungando analiticamente (f, D) lungo γ . Se per ogni tale curva si ha che $g = f$ in un intorno di w (nel qual caso i dischi di olomorfia D e D' coincidono, quindi $(f, D) = (g, D')$), allora esiste una funzione olomorfa in tutto Ω che estende f , e viceversa.*

Dimostrazione. Il prolungamento analitico lungo una curva chiusa riconduce all'elemento analitico di partenza se e solo se il prolungamento analitico lungo due qualsiasi curve dallo stesso punto iniziale w allo stesso punto finale z porta allo stesso elemento analitico di funzione intorno a z (infatti, concatenando la prima curva con la seconda percorsa a ritroso, si ottiene una generica curva continua da w a w). Quindi l'ipotesi del teorema equivale ad asserire che il prolungamento analitico non dipende dalla curva scelta, nel qual caso ovviamente definisce una funzione olomorfa che estende tutti gli elementi analitici lungo i punti della curva. Poiché Ω è connesso, ogni suo punto z si può raggiungere da w tramite una curva continua, e quindi questa funzione olomorfa è definita su tutto Ω . \square

Nota 2.14.7. Vedremo in seguito, nel corso della dimostrazione del teorema di monodromia (Corollario 2.14.10) che il prolungamento analitico dà sempre luogo ad una unica estensione olomorfa (ossia non dipende dal percorso,

ovvero ancora riconduce allo stesso elemento di funzione al termine di ogni curva chiusa) se il dominio Ω è *semplicemente connesso* (Definizione 2.4.4). In particolare, rimandiamo il lettore al Teorema 2.14.9. \square

Definizione 2.14.8. Siano γ_1 e γ_2 due curve omotope da un punto w a un punto z in \mathbb{C} , sia $A \subset \mathbb{C}$ un insieme che contiene le immagini di entrambe le curve (spesso si sceglie l'interno della regione da esse delimitata), e $h : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto A$ la mappa continua di omotopia (Definizione 2.4.1): quindi $h(s, 0) = w$ e $h(s, 1) = z$ per ogni $0 \leq s \leq 1$. Chiamiamo *famiglia a un parametro di curve omotope* la famiglia di curve continue da w a z date, per ciascun $0 \leq t \leq 1$, da $\gamma_t(s) = h(s, t)$.

Teorema 2.14.9. (i) *Date due curve continue σ_0 e σ_1 da w a z in un dominio Ω semplicemente connesso (Definizione 2.4.4), esiste una famiglia ad un parametro $\{\gamma_t, 0 \leq t \leq 1\}$ di curve omotope tali che $\gamma_0 = \sigma_0$ e $\gamma_1 = \sigma_1$.*

(ii) *Se $\{\gamma_t, 0 \leq t \leq 1\}$ è una famiglia ad un parametro di curve omotope da w a z , D un disco aperto con centro in w e (f, D) un elemento analitico di funzione che ammette continuazione analitica lungo ogni curva γ_t ad un elemento analitico (g_t, D_t) con D_t centrato in z , allora $D_t \cap D_u \neq \emptyset$ e $(g_t, D_t) \sim (g_u, D_u)$ per ogni t, u (ossia tutti i prolungamenti analitici g_t coincidono in un disco con centro in z).*

Dimostrazione. Poiché Ω è semplicemente connesso, σ_1 è omotopa in Ω ad una curva costante z_1 e σ_2 è omotopa ad una costante $z_2 \in \Omega$, nel senso che esistono mappe continue $h_1, h_2 : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \Omega$ tali che:

$$\begin{array}{ll} h_1(t, 0) = \sigma_1(t) & \text{per ogni } t \in [a, b] \\ h_1(t, 1) = z_1 & \text{per ogni } t \in [a, b] \\ h_2(t, 0) = \sigma_2(t) & \text{per ogni } t \in [a, b] \\ h_2(t, 1) = z_2 & \text{per ogni } t \in [a, b] \end{array}$$

Comprimiamo, trasliamo e riflettiamo il dominio di variabilità della variabile s in modo da iniziare la costruzione di una omotopia \tilde{h} come segue:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1(t, s) &= h_1(t, s/3), \\ \tilde{h}_2(t, s) &= h_1(t, \frac{2}{3} + \frac{1-s}{3}). \end{aligned}$$

In tal modo, $\tilde{h}_1(t, 0) = \gamma_1(t)$, $\tilde{h}_1(t, 1/3) = z_1$, $\tilde{h}_2(t, 2/3) = z_2$ e $\tilde{h}_2(t, 1) = \gamma_2(t)$. Poiché Ω è connesso, esiste una curva continua γ_3 con immagine in Ω che comincia a z_1 e finisce a z_2 . Completiamo allora la costruzione dell'omotopia \tilde{h} ponendo $\tilde{h}_3(s, t) = \gamma_3(t)$ per $1/3 < s < 2/3$. Allora è chiaro che la funzione $\tilde{h} : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \Omega$ definita concatenando queste tre omotopie fornisce la famiglia ad un parametro richiesta nell'enunciato: si tratta della funzione $\tilde{h} = \tilde{h}_1$ se $0 \leq s \leq 1/3$, $\tilde{h} = \tilde{h}_3$ se $1/3 < s < 2/3$ e $\tilde{h} = \tilde{h}_2$ se $2/3 \leq s \leq 1$. Questo prova la parte (i).

Nell'ipotesi della parte (ii), esiste una catena di dischi $B_v^{(t)}$ con centri in ciascun punto $\gamma_t(u)$ di γ_t ed elementi di funzione $(f_u^{(t)}, B_v^{(t)})$ tali che le funzioni olomorfe $f_u^{(t)} : B_v^{(t)} \mapsto \mathbb{C}$ coincidono nelle intersezioni dei rispettivi dischi di definizione. Poiché la curva γ_t è continua, essa ha immagine compatta (Sezione 1.1): siccome tale immagine è coperta dalla famiglia di dischi $B_v^{(t)}$, da tale immagine si estrae un sottoricoprimento finito, ancora in base ai risultati della Sezione 1.1. L'unione di questa catena finita di dischi è un intorno tubulare Ω_t dell'immagine di γ_t : ossia, esiste $\varepsilon_t > 0$ tale che l'aperto Ω_t contiene tutti i punti a distanza minore di ε_t da γ_t .

Ora rammentiamo che $\gamma_t(s) = h(s, t)$ e la mappa h di omotopia è continua nel compatto $[0, 1] \times [0, 1]$, quindi uniformemente continua, per il Teorema di Heine 1.8.6. Pertanto, in corrispondenza di ε_t esiste $\delta_t > 0$ tale che

$$|\gamma_t(s) - \gamma_t(u)| < \varepsilon_t \quad \text{se} \quad 0 \leq s, u \leq 1, |u - t| < \delta_t.$$

Questo significa che, per tali u , l'immagine della curva γ_u giace nell'intorno tubulare Ω_t di γ_t , e quindi γ_u è ricoperta dalla stessa catena finita di dischi che ricopre γ_t . Pertanto i prolungamenti analitici (g_t, D_t) e (g_u, D_u) al punto finale comune z delle curve γ_t e γ_u coincidono per tutti gli u nell'intervallo aperto $J_t := |u - t| < \delta_t$. In tal modo ricopriamo $[0, 1]$ con una famiglia di intervalli aperti J_t . Di nuovo per compattezza, possiamo ricoprire $[0, 1]$ con una sottofamiglia finita J_{t_1}, \dots, J_{t_n} , e quindi ci sono solo al più n prolungamenti analitici $(g_{t_1}, D_{t_1}), \dots, (g_{t_n}, D_{t_n})$ differenti con centro in z . Però ciascuno degli intervalli J_{t_i} ha sovrapposizione non vuota col successivo (perché $[0, 1]$ è connesso), e quindi $(g_{t_i}, D_{t_i}) \sim (g_{t_{i+1}}, D_{t_{i+1}})$ per ogni i . Pertanto tutti i prolungamenti analitici (g_t, D_t) coincidono. \square

Come conseguenza abbiamo che il prolungamento analitico su domini semplicemente connessi è sempre monodromo:

Corollario 2.14.10. (Teorema di monodromia.) *Sia Ω un dominio (aperto connesso) semplicemente connesso, $D \subset \Omega$ un disco aperto con cen-*

tro in un punto z_0 , (f_0, D_0) un elemento analitico di funzione (ossia una serie di Taylor convergente in D) con la proprietà che (f_0, D_0) ammette prolungamento analitico lungo ogni curva di classe C^1 a tratti (o assolutamente continua) in Ω che comincia a z_0 . Allora esiste una funzione olomorfa g su Ω tale che g coincide con f in D : ovvero, il prolungamento è monodromo.

Dimostrazione. Si prolunghi l'elemento analitico di funzione (f, D) lungo differenti curve C^1 a tratti (o assolutamente continue) da z_0 ad un punto generico $z \in \Omega$ (queste curve esistono perché Ω è connesso). Sappiamo che il prolungamento analitico lungo ogni tale curva porta ad un elemento analitico di funzione intorno a z . Il precedente Teorema 2.14.9 mostra che gli elementi analitici intorno a z_0 che in tal modo si ottengono sono equivalenti, ossia coincidono in un intorno di z_0 , e pertanto definiscono un'unica funzione olomorfa a ciascun punto $z \in \Omega$, indipendente da percorso seguito per congiungere z_0 con z . \square

La frontiera naturale

Ogni curva chiusa γ di classe C^1 è la frontiera del dominio massimale di analiticità di una funzione olomorfa, nel senso che il prolungamento analitico lungo ogni curva (nel senso della Definizione 2.14.4) che comincia all'interno di γ (si veda il Teorema di Jordan 1.29.12) non si estende ad alcun punto all'esterno di γ . In tal caso si dice che γ è la *frontiera naturale di analiticità*. In questa sottosezione costruiamo manualmente un esempio di funzione olomorfa all'interno del disco unitario che non si può prolungare all'esterno: da qui il caso generale segue come applicazione di un risultato classico dell'analisi complessa, il teorema della mappa di Riemann, la cui dimostrazione però va iolte gli scopi di questo libro (per una dimostrazione, si veda [23, Chapter 14, Section 8]). Una dimostrazione alternativa e più elegante, ma notevolmente più complicata, di una funzione olomorfa nel disco che ha il cerchio come frontiera naturale è in [23, Teoremi 16.5 e 16.6]; per un'altra costruzione elementare, si veda [10, pg. 135].

Cominciamo con l'osservare che, per ogni numero complesso w di modulo 1, la funzione

$$f_w(z) = \frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}} \quad (2.55)$$

ha serie di Taylor con centro in 0 convergente nel disco aperto D di raggio 1 (con una singolarità polare in $z = 1$). Ora scegliamo una successione $\{w_j\}$ con $|w_j| \equiv 1$ densa nel cerchio C di raggio 1 (la frontiera di D), e consideriamo la serie

$$f := \sum_{j \geq 0} 2^{-j} f_{w_j}. \quad (2.56)$$

Osserviamo che, per ogni $w \in C$ e per ogni z in ogni disco chiuso $U \subset D$ vale la maggiorazione $|f_w(z)| \geq 1/\rho$, dove $\rho > 0$ è la distanza fra U e C . Pertanto la serie (2.56) converge uniformemente in U in base al test di Weierstrass (Teorema 1.3.29).

Incidentalmente, osserviamo che la derivata di f_w soddisfa una disuguaglianza simile. Infatti $f'_w(z) = 1/(w-z)^2$ e quindi $|f'_w(z)| \geq 1/\rho^2$ per ogni z in U . Quindi anche la serie $\sum_{j \geq 0} 2^{-j} f'_{w_j}$ converge uniformemente in U .

È chiaro che ogni punto w_j è una singolarità polare di f . Poiché l'insieme di questi punti è denso nella circonferenza unitaria C , f non può essere prolungata analiticamente fuori di C . Rimane solo da dimostrare che f è olomorfa nel disco unitario aperto D . Questo fatto segue in maniera quasi ovvia dal fatto che f è una serie uniformemente convergente di funzioni olomorfe in D , ma ora lo dimostriamo rigorosamente.

Consideriamo la somma parziale di ordine N della serie di Taylor di f con centro in 0. Per il Teorema di derivabilità per serie 1.3.35 sappiamo che $f'(0)$ esiste e $f'(0) = \sum_{j \geq 0} 2^{-j} f'_{w_j}(0)$; per un ragionamento identico, una identità analoga vale per ogni ordine di derivazione. Allora il coefficiente di Taylor di f in 0 di grado N è

$$\frac{1}{N!} \sum_{j \geq 0} 2^{-j} f_{w_j}^{(N)}(0)$$

ossia la serie dei coefficienti di Taylor di ordine N delle funzioni f_{w_j} . D'altra parte, segue direttamente da (2.55) che il coefficiente di Taylor di grado N di f_{w_j} è $1/w_j^{N+1}$. Quindi il coefficiente di Taylor di grado N di f è $\sum_{j \geq 0} 2^{-j} w_j^{-N-1}$. Questa serie converge ad un punto di D per il teorema del confronto per serie (Sezione 1.1), dal momento che $|w_j| = 1$.

Pertanto la serie di Taylor di f converge nel disco unitario D in base al teorema del raggio di convergenza di serie di potenze (Teorema 1.4.2).

2.14.4 Primitive di funzioni olomorfe e logaritmo complesso

Teorema 2.14.11. *(Il teorema fondamentale del calcolo per funzioni olomorfe.)* Sia f una funzione olomorfa in un dominio (aperto connesso) Ω .

- (i) Se γ è una curva di classe C^1 a tratti (o assolutamente continua) con immagine interamente contenuta in Ω e punto finale z , allora anche $g(z) = \int_{\gamma} f(w) dw$ è olomorfa in Ω , e $g' \equiv f$. La funzione g si chiama una primitiva complessa di f (g dipende dalla scelta di γ e cambia per una costante additiva al cambiare della curva).
- (ii) Se Ω è semplicemente connesso (Definizione 2.4.4), allora per ogni $z_0, z \in \Omega$ si ha

$$f(z) = f(z_0) + \int_{\gamma} f'(w) dw, \quad (2.57)$$

dove γ è una qualunque curva C^1 a tratti (o assolutamente continua) contenuta in Ω .

Dimostrazione. Proviamo la parte (i). Sia U un intorno aperto di z contenuto in Ω . In un opportuno sottodisco S di U con centro in z la funzione olomorfa f è sviluppabile in serie di Taylor uniformemente convergente. Si fissi un altro punto $u \in \Omega$ nell'immagine di γ , e sia γ_1 l'arco finale di curva di *gamma* che unisce u a z : scriviamo $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$, dove γ_0 è la porzione iniziale di γ . Integrando termine a termine, vediamo che anche $\int_{\sigma} f(w) dw$ è sviluppabile in serie di Taylor in U , ossia olomorfa in z . Allora

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \int_{\gamma_0} f(w) dw + \int_{\gamma_1} f(w) dw.$$

Sappiamo che solo il secondo integrale dipende da z (punto terminale di γ_1): inoltre esso è olomorfo rispetto alla variabile z : quindi l'integrale a primo membro è una funzione olomorfa di z . Come conseguenza del Teorema di Cauchy (nella forma del Corollario 2.4.11), il risultato non dipende dalla scelta della curva perché il dominio Ω è semplicemente connesso e la funzione f è olomorfa in Ω .

Per calcolare la derivata di g , immaginiamo di prolungare γ da z a $z + s$

con s complesso, diciamo lungo il segmento che unisce i numeri complessi z e $z + s$, e calcolare il limite del rapporto incrementale

$$\frac{f(z + s) - f(z)}{s} = \frac{1}{s} \int_z^{z+s} f(w) dw$$

Ora l'identità $g'(z) = f(z)$ segue subito dal Teorema della Media Integrale (Sezione 1.1).

Ora proviamo la parte (ii). In primo luogo mostriamo che l'enunciato ha senso, ossia che l'integrale $\int_\gamma f'(w) dw$ non dipende dalla scelta della curva γ ma solo dai suoi punti estremi: poiché qui abbiamo assunto che Ω sia semplicemente connesso, questo fatto è conseguenza del teorema di invarianza per omotopia (Teorema 2.4.7), o equivalentemente del suo corollario, il Teorema di Cauchy (Corollario 2.4.10). Ora che sappiamo che la funzione $g(z) := \int_\gamma f'(w) dw$ è ben definita, la prima parte del teorema ci dice che $g' \equiv f'$. Poiché Ω è un dominio, quindi connesso, questo implica che $f - g$ è costante (regola della derivata nulla, Sezione 1.1). D'altra parte, se si sceglie $z = z_0$, si vede che $g(z_0) = 0$ mentre $f(z) = f(z_0)$: quindi $g - f$ è la costante $f(z_0)$, ovvero $f(z) = f(z_0) + g(z) = f(z_0) + \int_\gamma f'(w) dw$. \square

Corollario 2.14.12. *Sia f una funzione olomorfa in un intorno Ω del segmento $[0, x]$ dell'asse reale, e γ una curva C^1 a tratti (o assolutamente continua) da 0 a z con immagine contenuta in Ω . Allora la funzione $g(z) = \int_\gamma f(w) dw$ è una primitiva complessa di f , ossia $g' = f$, ed ogni prolungamento analitico della primitiva reale $\int_0^z f(w) dw$ è di questa forma.*

Dimostrazione. Sappiamo già dal Teorema 2.14.11 che g è una primitiva complessa di f e $g' = f$. Restringendo l'attenzione al segmento $[0, x]$, dal Teorema Fondamentale del Calcolo segue che $g' = f$ nel senso reale su questo segmento. Poiché g e f sono olomorfe, ne segue che, a meno di costanti additive, g è l'unica funzione olomorfa che soddisfa questa condizione. Per completare la dimostrazione, basta quindi provare che i prolungamenti analitici lungo una curva di g e di f soddisfano la stessa condizione.

Per ogni s in un disco D_1 di centro z che non contiene l'origine, consideriamo una curva γ con immagine in Ω , di classe C^1 a tratti (o assolutamente continua), che termina in z . Chiamiamo z_0 il punto iniziale di γ . Un arco finale della curva γ sta dentro il dominio semplicemente connesso D_1 : sia w un punto di D_1 per cui passa γ_1 . Spezziamo $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$, dove γ_0 è

l'arco iniziale da z_0 a w (che può anche toccare w più volte) e γ_1 la continuazione da w a z dentro D_1 che lascia w e non ci ripassa più. Allora $f_w(z) = \int_\gamma f(u) du = \int_{\gamma_0} f(u) du + \int_{\gamma_1} f(u) du$. Al punto w la primitiva g è olomorfa e la derivata termine a termine della sua serie di Taylor è la serie di Taylor di f con centro w : in altre parole, queste serie di Taylor rappresentano elementi analitici delle funzioni f e g con la proprietà che $g' = f$, e gli elementi analitici considerati prima al punto z sono il prolungamento analitico di questi, dal momento che essi coincidono in un arco della curva γ intorno a w . Continuando iterativamente a spezzare γ_0 e considerare dischi con centro in punti di questi spezzamenti dove gli sviluppi di Taylor convergono, ci accorgiamo che servono soltanto un numero finito di tali dischi (perché la curva γ , essendo continua, ha immagine compatta), e su questa catena di dischi gli sviluppi di Taylor così ottenuti formano una catena di elementi analitici a due a due parzialmente sovrapposti, con la proprietà $g' = f$ per ciascuno di essi. \square

Nel resto di questa Sottosezione dedicheremo molta attenzione al caso importante del prolungamento analitico lungo una curva della funzione logaritmo.

Per cominciare abbiamo bisogno di un elemento analitico di partenza per la funzione logaritmo complesso. Una possibilità di estensione consiste nel considerare una curva con un segmento iniziale sul semiasse reale positivo, dove il logaritmo è definito nel senso reale. Ma poiché vogliamo partire con un elemento analitico, dobbiamo esprimere il logaritmo come sviluppo di Taylor in un disco. Allora consideriamo un disco con centro al punto 1. Dallo sviluppo di Taylor con centro in 1 del logaritmo reale abbiamo la formula $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^n/n$, da cui, ponendo $x = 1+t$, $\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (x-1)^n/n$. Allora dobbiamo estendere questo sviluppo di Taylor a variabile complessa semplicemente complessificando i polinomi di Taylor, ossia ponendo

$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}.$$

La serie converge nel disco complesso $\{z : |z-1| < 1\}$. Osserviamo che, derivando questa serie di potenze, otteniamo

$$D \ln(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (z-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n = \frac{1}{1-(z-1)} = \frac{1}{2-z} = \frac{1}{z-2}.$$

(2.58)

Allora, sia γ una qualunque curva di classe C^1 a tratti (o assolutamente continua) con immagine nel disco $D := \{z : |z-1| < 1\}$. Poiché $\ln(x) = \int_1^x \frac{du}{u}$ (qui stiamo integrando il logaritmo ordinario sul semiasse reale, ed usando il fatto che $D \ln(x) = 1/x$), dal Corollario 2.14.12 si ha

$$\ln(z) = \int_1^z \frac{du}{u}$$

se l'integrale è eseguito lungo una curva con immagine in D , ed il risultato non dipende dalla scelta della curva (o alternativamente, senza usare il Corollario, basta integrare termine a termine l'identità (2.58)).

Dal Corollario 2.14.12 segue infine la formula del prolungamento analitico del logaritmo, che rienciammo per memoria:

Corollario 2.14.13. *Ogni elemento analitico f_w del logaritmo complesso, centrato in un punto $w \neq 0$, è del tipo $f_w(z) = \int_\gamma \frac{du}{u}$ lungo una curva C^1 a tratti (o assolutamente continua) γ da 1 a z che non passa per l'origine.*

A titolo di esempio, consideriamo la curva di classe C^1 a tratti che congiunge 1 con $z = re^{i\theta}$, con $r > 0$, data da un tratto iniziale da 1 a r lungo il semiasse reale positivo, seguito dall'arco di circonferenza da r a $re^{i\theta}$ (percorso solo una volta, senza giri intorno all'origine, ossia con variazione angolare minore di 2π). Dal precedente Teorema ?? si ottiene l'espressione $\ln(z) = \ln(r) + i\theta$. Se invece l'arco di circonferenza ha una variazione angolare maggiore di 2π , ossia la curva lungo la circonferenza percorre diciamo N giri intorno all'origine (considerando N positivo se il percorso è antiorario e negativo altrimenti), allora occorre aggiungere al secondo membro l'addendo $2\pi Ni$. Questi sono esattamente i risultati che abbiamo ottenuto per via diretta nella Sottosezione 2.14.1, e ribadiscono il fatto che il prolungamento analitico del logaritmo è polidromo.

Definizione 2.14.14. Consideriamo il disco aperto privo del centro $C = \{z : 0 < |z - a| < r\}$, e sia f una funzione olomorfa ottenuta dal prolungamento analitico di un suo elemento. Il punto a si dice *punto di diramazione di f* se il prolungamento analitico è polidromo in C .

Consideriamo ora il piano complesso esteso con l'aggiunta di un punto all'infinito (si può pensare come la compattificazione di \mathbb{C} con un punto, ma ora la topologia non ci serve). Diciamo che il punto ∞ è un punto di diramazione di f se 0 lo è per la funzione $z \mapsto f(1/z)$.

Esempio 2.14.15. Enunciamo quanto segue.

(i) Per ogni $\alpha > 0$ e $z \neq 0$, le funzioni $f_\alpha(z) = 1/z^\alpha$ hanno serie di Taylor convergente nel disco $\{w : |w - z| < |z|\}$ (ovvero il disco aperto con centro z e raggio tale che l'origine stia nella sua frontiera), ed hanno prolungamento analitico monodromo a tutto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Non ci sono quindi punti di diramazione.

(ii) I punti di diramazione del logaritmo complesso sono 0 e ∞ .

(iii) la funzione reale

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

ha come prolungamento analitico la primitiva complessa di $1/(1+z^2)$, ossia la funzione olomorfa

$$\arctan(z) = \int_0^z \frac{1}{1+w^2} dw$$

dove l'integrale si intende su una curva C^1 a tratti (o assolutamente continua) che non passa per i punti $\pm i$. Ci sono due punti di diramazione: $\pm i$.

(iv) Per ogni intero $n > 1$, la funzione radice n -sima, $f_n(z) = z^{1/n}$, è olomorfa in ciascun disco che non contiene l'origine nel suo interno (non è olomorfa all'origine). Essa ha due punti di diramazione, 0 e ∞ . Per il punto (i) più sopra la funzione $h_n(z) = nz^{n-1}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ha prolungamento analitico monodromo a partire da qualsiasi disco aperto che non contenga l'origine), ed il prolungamento analitico della radice n -sima è l'integrale

$$\sqrt[n]{z} = 1 + n \int_\gamma z^{n-1} dz$$

lungo una qualsiasi curva continua C^1 a tratti (o assolutamente continua) che congiunga 1 a z senza passare per l'origine. L'integrale dipende dalla curva scelta se essa ha indice di avvolgimento non nullo (modulo n) intorno all'origine, e quindi si ha ploidromia.

Dimostriamo le quattro asserzioni. Per quanto concerne la parte (i), l'unica singolarità di $f_\alpha(z) = 1/z^\alpha$ è nell'origine. Se il prolungamento analitico a partire da un qualunque disco (con centro $z_0 \neq 0$) che non contiene l'origine fosse polidromo, ci sarebbe una curva chiusa C^1 a tratti γ che gira intorno all'origine (cioè con indice di avvolgimento non nullo rispetto all'origine) tale che l'integrale lungo la curva $\int_\gamma f'_\alpha dz$ a secondo membro dell'identità 2.57 del Teorema Fondamentale sarebbe non nullo. Ma f'_α è proporzionale a $1/z^{\alpha+1}$, che ha un polo nell'origine solo per $\alpha = 0$. Per il Teorema dei residui 2.10.5, quindi, $\int_\gamma f'_\alpha dz = 0$ per ogni $\alpha > 0$ (ed evidentemente anche per ogni $\alpha \leq 0$, visto che per questi α la funzione f_α è intera).

Consideriamo ora la parte (ii). Sappiamo già che per curve che girano intorno a 0 (ossia con indice di avvolgimento non nullo rispetto a 0) il logaritmo ha prolungamento analitico polidromo, quindi 0 è un punto di diramazione, ma nessun altro $z \in \mathbb{C}$ lo è, perché il logaritmo è olomorfo in qualche disco *non bucato* intorno a qualsiasi $z \neq 0$: lì il suo sviluppo di Taylor è convergente ed il logaritmo è monodromo, dunque lo rimane anche se buchiamo il disco togliendogli il centro. Infine, poiché $\ln(1/z) = -\ln(z)$, anche ∞ è un punto di diramazione.

Veniamo alla parte (iii). Segue dal Corollario 2.14.12 che il prolungamento analitico della funzione reale $\arctan(x)$ è dato da

$$\arctan(z) = \int_0^z \frac{1}{1+w^2} dw$$

lungo una qualsiasi curva da 0 a z dentro il dominio di olomorfia di $w \mapsto 1/(1+w^2)$. È chiaro che questa funzione è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$: come nella parte precedente, nessuno di questi punti è di diramazione. Mostriamo ora che i punti $\pm i$ sono invece punti di diramazione. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \arctan(z) &= \int_0^z \frac{1}{1+w^2} dw = \frac{1}{2} \int_0^z \left(\frac{1}{1-iw} + \frac{1}{1+iw} \right) dw \\ &= \frac{1}{2i} (\ln(1+iz) - \ln(1-iz)) = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Le uniche singolarità sono i punti $\pm i$, che corrispondono a zeri delle due funzioni $z \mapsto 1 \pm iz$ che sono gli argomenti del logaritmo, ed il logaritmo ha l'unico suo punto di diramazione al finito proprio in zero. È quindi chiaro che la funzione arcotangente complessa non ha altri punti di diramazione al finito che in $\pm i$. Mostriamo che questi due punti sono di diramazione

prendendo una curva chiusa γ che gira intorno ad uno dei due punti, diciamo $z = i$, e non all'altro (ossia che non incontra la semiretta $\{it : t \leq -1\}$): non importa quale di queste curve scegliamo perché, grazie al Teorema di invarianza omotopica 2.4.7, l'integrale $\int_{\gamma} \arctan z dz$ non dipende dalla scelta di γ nel dominio semplicemente connesso $\mathbb{C} \setminus \{it : t \leq -1\}$. Scegliamo allora la curva più naturale, la circonferenza con verso antiorario $\gamma(t) = i + e^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$. L'immagine dei punti di γ sotto la funzione $z \mapsto 1 + iz$ è la curva

$$t \mapsto 1 + i\gamma(t) = ie^{it} = e^{i(t+\frac{\pi}{2})},$$

che per $0 \leq t \leq 2\pi$ compie un giro in senso antiorario intorno al punto $z = i$ (ossia ha indice di avvolgimento 1). Quindi nel percorrere questa curva chiusa l'addendo $\ln(1 + iz)$ in (2.59) aumenta di $2\pi i$, e quindi il punto $z = i$ è un punto di diramazione per l'arcotangente complessa. Se utilizziamo invece la curva $\gamma(t) = -i + e^{it}$ segue che $z = -i$ è un altro punto di diramazione. In questo caso però l'immagine di γ sotto la funzione $z \mapsto 1 - iz$ è una curva che gira intorno al punto $-i$ in senso *orario*. Al termine di un giro, quindi, l'addendo $\ln(1 + iz)$ in (2.59) aumenta di $-2\pi i$. Si osservi che, se si sceglie una curva chiusa che gira una volta intorno alla coppia di punti $\pm i$, ad esempio la circonferenza con centro l'origine a raggio 2, alla fine del giro i due addendi $\ln(1 \pm iz)$ subiscono incrementi che si bilanciano, e quindi su queste curve l'arcotangente dopo un giro non cambia.

Poiché il logaritmo complesso ha un punto di diramazione a ∞ , resta da vedere se il punto all'infinito è o no di diramazione per l'arcotangente. In base alla Definizione 2.14.14 di punto di diramazione all'infinito, questo equivale a verificare se la funzione $\arctan(1/z)$ è o no olomorfa in $z = 0$. Segue da (2.59) che

$$\arctan(1/z) = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + i/z}{1 - i/z} = \frac{1}{2i} \ln \frac{z + i}{z - i} = \frac{1}{2i} (\ln(z + i) - \ln(z - i)),$$

che è olomorfa in $z = 0$ perché lo sono le due funzioni $z \mapsto \ln(z \pm i)$. Quindi l'arcotangente complessa non ha un punto di diramazione all'infinito.

Consideriamo infine la parte (*iv*). Scriviamo $z \neq 0$ in forma polare: $z = \rho e^{i\theta}$. Allora

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}}$$

e se una curva chiusa che parte da z ha indice di avvolgimento 1 intorno all'origine, al suo ritorno a z il valore della funzione diventa

$$\sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2\pi}{n}} = e^{\frac{2\pi i}{n}} \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}}$$

quindi il valore della funzione ottenuto dopo un giro si ottiene moltiplicando quello di partenza per la prima radice n -sima dell'unità (Notazione 14.2.1). Analogamente, se l'indice di avvolgimento è k , al termine della curva, ovvero al suo ritorno a z dopo k giri, il valore ottenuto è $e^{2\pi ik/n} \sqrt[n]{\rho} e^{i\theta/n}$. Dopo n giri si ritorna al valore iniziale.

Se invece una curva ha indice di avvolgimento nullo intorno all'origine, allora al termine della curva l'argomento θ non è cambiato rispetto all'inizio (Nota 2.3.3), e quindi il valore della funzione radice n -sima non cambia.

Quindi l'origine è un punto di diramazione, e non ci sono altri punti di diramazione al finito.

Mostriamo che c'è un punto di diramazione all'infinito. Basta mostrare che la funzione reciproca, $\sqrt[n]{1/z} = z^{-1/n}$ ha un punto di diramazione in 0. Questo fatto segue dallo stesso argomento più sopra, visto che, scrivendo $z = \rho e^{i\theta}$, si ottiene $z^{-1/n} = \rho^{-1/n} e^{-i\theta/n}$, e quindi un giro intorno a zero cambia il valore di θ di 2π ma moltiplica il valore di $z^{-1/n}$ per la radice dell'unità $e^{-2\pi i/n}$.

Se tagliamo il piano complesso con una curva semplice che unisca i due punti di diramazione, ad esempio una qualsiasi semiretta uscente dall'origine, allora il piano tagliato è un dominio semplicemente connesso in cui il prolungamento analitico è monodromo, come al solito per il teorema di monodromia (Corollario 2.14.10).

Infine, l'espressione in forma integrale del prolungamento analitico della radice n -sima segue dal Corollario 2.14.12. \square

Nota 2.14.16. Riesaminiamo le parti (ii) e (iii) dell'Esempio 2.14.15. Nel caso della funzione logaritmo, uno dei punti di diramazione è 0 e l'altro non è in \mathbb{C} bensì all'infinito. Però, se tagliamo il piano con una curva da 0 a ∞ (ad esempio una qualunque semiretta uscente dall'origine), la parte (ii) del suddetto esempio mostra che si ha monodromia nel piano tagliato (e del resto, il piano tagliato è semplicemente connesso, e si applica il teorema di monodromia).

Ora consideriamo una funzione con solo due punti di diramazione $z, w \in \mathbb{C}$. Senza perdita di generalità, tramite rotazioni e dilatazioni, possiamo assumere che questi due punti siano $\{\pm i\}$, come nel caso dell'arcotangente. Se ora tagliamo il piano complesso con due semirette disgiunte che partono rispettivamente da i e $-i$ (e vanno all'infinito), stiamo escludendo tutte le curve che attraversano il taglio, ossia che girano intorno ai punti di diramazione. In tal modo il prolungamento analitico lungo queste curve, ovvero in questo dominio con taglio, è necessariamente monodromo. Anche in questo

caso, comunque, si applica il teorema di monodromia, perché il piano tagliato con queste due semirette è semplicemente connesso. Questo è il caso dell'arcotangente, che per \varnothing ' è interessante riconsiderare con maggiore cura. Prima abbiamo considerato il taglio del piano complesso effettuato con due semirette, come ad esempio $\{it : |t| \geq 1\}$. Se invece avessimo tagliato il piano s+icon il segmento che congiunge $-i$ a i , ossia $\{it : |t| \leq 1\}$, non si escludono più le curve che girano intorno ai punti di diramazione, ma solo quelle che girano *un numero diverso di volte* intorno ai punti di diramazione (ad esempio, si escludono quelle che girano intorno ad uno dei due punti ma non all'altro), ed inoltre il piano così tagliato non è semplicemente connesso. Nondimeno, la parte (iii) dell'Esempio 2.14.15 mostra che anche in questo caso il prolungamento analitico lungo una curva chiusa che non interseca il taglio riconduce allo stesso elemento analitico iniziale, e quindi è monodromo (Corollario 2.14.6). Si badi però che in realtà la funzione arcotangente è olomorfa anche all'infinito, come mostrato alla fine della parte (iii) dell'Esempio 2.14.15, ed il dominio $\Omega := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{it : |t| \leq 1\}$ è semplicemente connesso (ogni curva che gira intorno al segmento $\{it : |t| \leq 1\}$ viene deformata con continuità nel punto all'infinito semplicemente dalla famiglia di dilatazioni con centro l'origine, che è una omotetia in Ω).

Espandiamo queste osservazioni nella prossima Sottosezione 2.14.5. \square

2.14.5 Rami olomorfi

Sia D il disco di convergenza di una serie di Taylor f . Supponiamo che l'elemento di funzione (f, D) abbia un prolungamento analitico (g_t, D_t) lungo i punti di ogni curva continua γ con immagine in un dominio connesso Ω ad un disco di convergenza D_t centrato in $\gamma(t)$. Abbiamo visto che tale prolungamento è monodromo, ovvero definisce una funzione olomorfa in Ω , se e solo se esso non dipende dalla scelta della curva: per ogni due curve che cominciano a z e finiscono al punto w , diciamo per $t = 1$, la condizione è che a $t = 1$ entrambe portino allo stesso elemento di funzione (g_1, D_1) . In maniera equivalente, la condizione per la monodromia è che, per ogni curva chiusa da z a z lungo cui si ha prolungamento analitico fino ad un elemento di funzione finale (g_1, D_1) , si abbia $(f, D) = (g_1, D_1)$ (Corollario 2.14.6). Abbiamo anche visto che, se Ω è semplicemente connesso e il prolungamento analitico è possibile lungo ogni curva in Ω , allora questa condizione è sempre

verificata e si ha monodromia (Corollario 2.14.10).

Definizione 2.14.17. (Rami olomorfi del prolungamento analitico.)

In un dominio connesso $\Omega \subset \mathbb{C}$ scegliamo un qualunque elemento di funzione (f, D) (ossia una serie di Taylor f convergente in un disco D con centro in un punto $z \in \Omega$). Supponiamo che valga la condizione seguente:

per ogni curva chiusa in Ω che passa per z (più precisamente, che contiene z nella sua immagine), sia possibile il prolungamento analitico di (f, D) e che l'elemento di funzione che si ottiene al ritorno a z al termine della curva sia ancora l'elemento (f, D) .

Allora la funzione olomorfa in Ω che ristretta a D coincide con f , data dal prolungamento analitico nel senso del Corollario 2.14.10, si chiama il *ramo olomorfo* generato da f . Se invece il prolungamento analitico è possibile lungo ogni curva continua in Ω ma non vale la condizione più sopra formulata lungo le curve chiuse (ovvero, il prolungamento dipende dalla scelta della curva), allora sia (g, D_1) un qualsiasi elemento di funzione che si ottiene a partire da (f, D) in un disco D_1 con centro z percorrendo curve chiuse a partire da z . Allora diciamo che (g, D_1) genera un diverso ramo olomorfo della funzione polidroma f in un dominio Ω' ottenuto tagliando Ω con una curva continua che includa nella propria immagine tutti i punti di diramazione di tale “funzione” polidroma (ovvero, in ogni dominio Ω' le cui curve portino ad un prolungamento analitico monodromo).

Esempio 2.14.18. (Rami olomorfi del logaritmo.) Abbiamo già studiato il comportamento della funzione logaritmo in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, un dominio in cui il logaritmo è polidromo. Se tagliamo da \mathbb{C} l'immagine di una qualsiasi curva semplice continua che parte dall'origine e va all'infinito, ad esempio le semirette $\mathbf{r}_\alpha(t) = te^{i\alpha}$, allora il piano tagliato Ω_α così ottenuto è semplicemente connesso ed ivi il prolungamento analitico del logaritmo genera un ramo olomorfo. Ad esempio, è tradizione scegliere $\alpha = \pi$, e come elemento analitico di partenza quello che coincide con il logaritmo reale in un intorno del punto 1 sull'asse $\{x > 0\}$. Calcoliamo quanto vale $\ln(i)$ per questa scelta di ramo olomorfo (è in questa scelta di ramo olomorfo che il logaritmo complesso si indica con \ln invece che con \log). Non importa quale curva continua da 1 a i scegliamo in $\Omega = \Omega_\pi$, che è un dominio semplicemente connesso (e quindi il prolungamento analitico lungo le curve dipende solo dai punti estremi). Per convenienza, il lettore potrebbe ad esempio scegliere l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio 1 percorso in senso antiorario dal punto 1 (angolo

iniziale 0) al punto i (angolo finale $\frac{\pi}{2}$). Sappiamo dalla identità (2.53), o equivalentemente dal Corollario 2.14.13, che il risultato è $\ln(i) = i\pi/2$. Osserviamo che la circonferenza non poteva essere percorsa in senso orario in Ω a causa del taglio.

Ora risolviamo il calcolo di $\log(i)$ per il ramo olomorfo generato dallo stesso elemento analitico ma nel dominio $\Omega_{\pi/4}$ ottenuto tagliando il piano con la bisettrice del primo quadrante. Ora il percorso antiorario sulla circonferenza di raggio centro l'origine e raggio 1 è impedito dal taglio, e dobbiamo invece percorrere tale curva in senso orario: l'angolo varia da 0 a $-2\pi + \frac{\pi}{2} = -3\pi/2$, e quindi in questo ramo olomorfo il risultato diventa $\log(i) = -3i\pi/2$. Fissato un qualsiasi taglio come sopra, altri rami olomorfi si ottengono a partire da elementi analitici diversi, i quali comunque differiscono per una costante (da ciascuno al successivo ottenuto un giro dopo intorno all'origine la differenza è $2\pi i$, come visto in (2.53).

Si noti che, nei domini (connessi) di olomorfia dei rami olomorfi del logaritmo, vale la regola equivalente a (2.53):

$$\log(r_0 e^{i\theta_0}) - \log(r_1 e^{i\theta_1}) = \ln(r_0/r_1) + i(\theta_0 - \theta_1). \quad (2.60)$$

□

Nota 2.14.19. Due rami olomorfi della stessa funzione possono essere generati dallo stesso elemento di funzione (f, D) in due domini diversi Ω_0 e Ω_1 . Quando questo accade, non è detto che i due rami olomorfi coincidano in $\Omega_0 \cap \Omega_1$ sebbene coincidano entrambi con f in D : un esempio è dato dai due rami olomorfi del logaritmo nei domini Ω_0 e $\Omega_{\pi/4}$ del precedente Esempio 2.14.18. Si noti però che i due rami olomorfi così ottenuti differiscono in differenti componenti connesse di $\Omega_0 \cap \Omega_{\pi/4}$: il calcolo svolto in quell'Esempio mostra che nella componente connessa dell'intersezione che contiene il disco D i due rami olomorfi coincidono. Questo fatto è sempre vero, dal momento che due funzioni olomorfe che coincidono in un disco D devono coincidere in ogni connesso che contiene D ed in cui sono entrambi olomorfe (Corollario 2.6.2). □

Esempio 2.14.20. (Rami olomorfi dell'arcotangente.) Ritorniamo a considerare l'arcotangente complessa, studiata nella parte (iii) dell'Esempio 2.14.15. Ci sono due punti di diramazione, $z = \pm i$. Calcoliamo il prolungamento dell'elemento analitico dell'arcotangente che in un segmento dell'asse reale intorno ad un punto $\rho > 0$ coincide con l'arcotangente reale, per due

diversi rami olomorfi. Consideriamo i due domini $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \{it : |t| \geq 1\}$ e $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{it : -1 \leq t \leq 1\}$. Il dominio Ω_0 è semplicemente connesso, e per il teorema di monodromia (Corollario 2.14.10) sappiamo già che l'elemento analitico considerato si prolunga all'unica funzione olomorfa che sull'asse reale coincide con l'arcotangente reale. Per conferma, se si vuole svolgere il calcolo del prolungamento lungo le curve, si può calcolare $\arctan(-\rho)$ lungo il segmento reale da ρ a $-\rho$: questo coincide con il risultato del Teorema 2.14.12, ovvero l'integrale $\int_{\rho}^{-\rho} (1+w^2)^{-1} dw$ della derivata dell'arcotangente lungo tale segmento reale, ed ovviamente porta al valore dell'arcotangente reale al punto $-\rho$ (e del suo prolungamento analitico in un disco con centro in $-\rho$ che coincide con l'arcotangente reale sul diametro reale).

Invece il dominio Ω_1 non è semplicemente connesso, ed il teorema di monodromia non si applica: ma abbiamo osservato nella Nota 2.14.16 che anche in questo caso vale la proprietà di coerenza lungo le curve chiuse enunciata nella Definizione 2.14.17, ed il prolungamento è monodromo. In base alla precedente Nota 2.14.19, il ramo olomorfo determinato in Ω_1 dallo stesso elemento di funzione di prima definito in un intorno del punto 1 deve coincidere con quello determinato in Ω_0 nella componente connessa di $\Omega_0 \cap \Omega_1$ che contiene il punto 1, ma nel nostro caso tale componente connessa è il semipiano destro. Cosa succede nel semipiano sinistro? Ad esempio, se come prima partiamo dal punto $\rho > 0$ e dalla funzione arcotangente reale in un segmento dell'asse reale centrato in ρ , che valore per l'arcotangente troviamo al punto $-\rho$ per il ramo olomorfo determinato da Ω_1 ?

Per calcolare il risultato possiamo usare l'identità (2.59):

$$\arctan(z) = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1}{2i} (\ln(1+iz) - \ln(1-iz)).$$

Osserviamo che, a causa di questa identità, il resto di questo Esempio in realtà diventa lo studio della funzione polidroma $g(z) = \ln((1-iz)/(1+iz))$, la quale diventa monodroma se tagliamo il piano con il segmento da $-i$ a i (o la coppia di semirette lungo l'asse immaginario da questi due punti all'infinito).

Prendiamo per comodità $\rho > 1$ e scegliamo la curva dal punto ρ al punto $-\rho$ data dalla semicirconferenza percorsa in verso antiorario con centro l'origine e raggio ρ (ma se il verso fosse orario il risultato sarebbe lo stesso, in base a quanto osservato nella Nota 2.14.16). Denotiamo con γ la semicirconferenza appena indicata, $\gamma(t) = \rho e^{it}$, con $0 \leq t \leq \pi$. Per una generica funzione f su \mathbb{C} , indichiamo con $\Delta_{\gamma} f$ la differenza dei valori di f fra il punto

finale e quello iniziale di *gamma*. Pertanto dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} g(-\rho) &= g(\rho) + \Delta_\gamma g = g(\rho) + \Delta_\gamma \ln \left| \frac{1+iz}{1-iz} \right| + i \arg \frac{1+iz}{1-iz} \\ &= g(\rho) + \Delta_\gamma \ln \left| \frac{1+iz}{1-iz} \right| + i\Delta_\gamma \arg(1+iz) - i\Delta_\gamma \arg(1-iz). \end{aligned} \quad (2.61)$$

L'immagine dei punti di γ sotto la funzione $z \mapsto 1+iz$ è la semicirconferenza $t \mapsto 1+i\gamma(t) = 1+i\rho e^{it}$, che compie mezzo giro intorno all'origine con verso antiorario. Essa va da $1+i\rho$ a $1-i\rho$ ed interseca l'asse reale nel punto $1-\rho$. Invece l'immagine di γ sotto la funzione $z \mapsto 1+iz$ è la semicirconferenza $t \mapsto 1-i\gamma(t) = 1-i\rho e^{it}$, che compie mezzo giro intorno all'origine in senso orario, va da $1-i\rho$ a $1+i\rho$ ed interseca l'asse reale nel punto $1+\rho$: pertanto si mantiene nel dominio consueto di olomorfia $\Omega_\pi = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ del ramo consueto del logaritmo complesso, e si applica l'identità (2.53), ma ad entrambe le semicirconferenze si applica comunque l'identità (2.60). La semicirconferenza $t \mapsto 1-i\gamma(t)$, ($0 \leq t \leq \pi$), congiunge $1-i\rho$ a $1+i\rho$, e l'argomento varia da quello di $1-i\rho$, ovvero $\arctan(-rho) = -\arctan \rho$ (questa arcotangente è quella reale!) a quello di $1+i\rho$, ovvero $\arctan \rho$. Poiché $|1-i\rho| = |1+i\rho|$, in base a (2.53) la variazione del logaritmo lungo questa semicirconferenza è $2i \arctan \rho$. Analogamente, l'altra semicirconferenza va da $1+i\rho$ a $1-i\rho$, passando a sinistra dell'origine, ossia intersecando il semiasse reale negativo. Per calcolare la variazione del logaritmo lungo di essa dobbiamo quindi scegliere un altro dominio tagliato: tagliando ad esempio lungo il semiasse reale positivo otteniamo un ramo olomorfo del logaritmo che lungo questa semicirconferenza, in base a (2.60) ha variazione data da $2i\pi - 2i \arctan \rho$. Sottraendo i risultati, otteniamo che la variazione lungo la semicirconferenza γ di $g(z) = \ln(1+iz) - \ln(1-iz)$ è esattamente $2\pi i$, e quindi la variazione di $\arctan z = (\ln(1+iz) - \ln(1-iz))/2i$ è π . Pertanto $\arctan(-\rho) = \arctan(\rho) + \pi$ (in questa identità \arctan denota il ramo olomorfo dell'arcotangente complessa che coincide con l'arcotangente reale sulla semiretta positiva). Una volta scelto il dominio con taglio, sia esso Ω_0 o Ω_1 , poiché questi due domini sono semplicemente connessi e si ha monodromia dei rami olomorfi, l'arcotangente si spezza in una famiglia di rami olomorfi. Dalla formula $\arctan(z) = \frac{1}{2i} \ln(1+iz)/(1-iz)$ e dal fatto che i rami olomorfi del logaritmo differiscono di un addendo multiplo di $2\pi i$ segue che i rami olomorfi dell'arcotangente differiscono di multipli di π . \square

Esercizio 2.14.21. Calcolare la variazione dell'arcotangente da un lato all'altro del segmento di taglio $\{iy : |y| \leq 1\}$.

Svolgimento. Rammentando che $\arctan(z) = \frac{1}{2i}(\ln 1 + iz - \ln(1 - iz))$, questo equivale a calcolare i valori limite sui due lati del taglio della funzione $g(z) = \ln 1 + iz - \ln(1 - iz)$.

Supponiamo di considerare il taglio dato dal segmento che congiunge i punti $-i$ e i , ossia il dominio di monodromia Ω_1 nel precedente Esempio 2.14.20. Scegliamo il ramo olomorfo che verifica la condizione $\lim_{x \rightarrow 0^+, y \rightarrow 0} g(z) = 0$ (ossia $\lim_{x \rightarrow 0^+, y \rightarrow 0} \arctan z = 0$), e calcoliamo (più in generale) i valori di questo ramo olomorfo su tutti i punti dell'asse immaginario utilizzando la identità (2.61).

Cominciamo dai valori sul lato destro del taglio. Indichiamo con $g(0^+ + iy)$ i valori $g(iy)$ ottenuti come limiti dal semipiano destro: prendendo $-1 < y < 1$ questi sono i valori limite sul taglio provenendo dal semipiano destro. Partiamo dal punto di riferimento $0 + i0$ e raggiungiamo $0^+ + iy$ con un segmento γ lungo il margine destro del taglio (o se si preferisce, con una curva leggermente a destra del taglio, che poi spostiamo facendola aderire da destra al segmento di taglio). Lungo questo segmento gli angoli rispetto ai punti $\pm i$ non cambiano, ossia $\Delta_\gamma \arg(1 + iz) = 0 = \Delta_\gamma \arg(1 - iz)$. Pertanto, da (2.61) si ottiene

$$g(0^+ + iy) = \ln \left| \frac{1 - y}{1 + y} \right| = \ln \frac{1 - y}{1 + y}$$

(poiché $|y| < 1$, l'argomento del logaritmo è positivo ed il modulo non occorre).

Ora otteniamo i valori di $g(iy)$ per $y > 1$, ossia sull'asse immaginario positivo al di sopra del segmento di taglio. Adesso non possiamo usare una curva γ che consiste di un segmento rettilineo lungo l'asse immaginario da 0 a iy , perché questo segmento passa per il punto i che è una singolarità di g . Dobbiamo aggirare la singolarità come abbiamo fatto nel calcolo dei residui. Lo facciamo mantenendoci nel semipiano destro, fissando un $\varepsilon > 0$ e percorrendo la curva γ data dal segmento da $0 + i0$ a $0 + i(1 - \varepsilon)$, seguita dalla semicirconferenza con centro i e raggio ε da $0 + i(1 - \varepsilon)$ a $i(1 + \varepsilon)$ (che compie un mezzo giro in verso antiorario intorno al punto i), completata infine dal segmento rettilineo da $i(1 + \varepsilon)$ a iy (si veda la Figura 2.10). Lungo i segmenti rettilinei gli argomenti non variano, ma variano

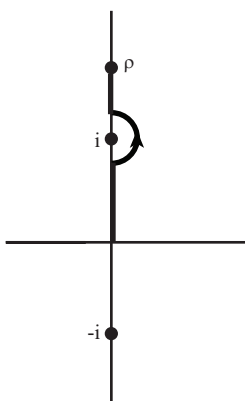


Figura 2.10: Percorso per il prolungamento analitico dell'arcotangente sull'asse immaginario iy per $y > 1$

lungo la semicirconferenza nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\Delta_\gamma \arg(1 + iz) &= \Delta_\gamma \arg \frac{z - i}{i} = \Delta_\gamma \arg(z - i) = \pi \\ \Delta_\gamma \arg(1 - iz) &= 0.\end{aligned}$$

Pertanto in questo caso si ottiene

$$g(iy) = \ln \left| \frac{1 - y}{1 + y} \right| + i\pi = \ln \frac{y - 1}{1 + y} + i\pi$$

(ora $1 + y > 0$ ma $1 - y < 0$, e quindi il modulo porta ad un cambiamento di segno).

Una situazione simmetrica si ha nel calcolo di $g(iy)$ per $y < -1$. Procediamo con la curva γ che rasenta da destra il taglio fino a distanza ε dal punto $-i$, poi prosegue con la semicirconferenza nel semipiano destro di centro $-i$ e raggio ε (che compie un mezzo giro in verso orario intorno al punto $-i$), poi continua lungo il semiasse immaginario negativo fino al punto iy (Figura 2.11). Ora le variazioni angolari sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\Delta_\gamma \arg(1 + iz) &= 0 \\ \Delta_\gamma \arg(1 - iz) &= \Delta_\gamma \arg \frac{z + i}{-i} = \Delta_\gamma \arg(z + i) = -\pi.\end{aligned}$$

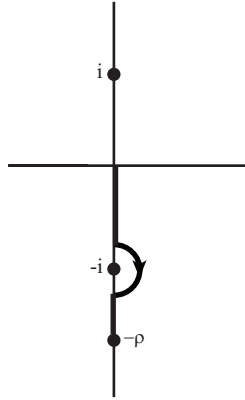


Figura 2.11: Percorso per il prolungamento analitico dell'arcotangente sull'asse immaginario iy per $y < -1$

Quindi in questo caso si ottiene

$$g(iy) = \ln \left| \frac{1-y}{1+y} \right| - i\pi = \ln \frac{y-1}{1+y} - i\pi$$

(qui $1+y < 0$ e $1-y > 0$, ed il modulo porta di nuovo ad un cambiamento di segno).

Infine, consideriamo i punti sul bordo sinistro del taglio: calcoliamo i valori di $g(0^- + iy)$ per $|y| < 1$. Seguiamo ad esempio la curva γ che da $0^+ + i0$ si muove lungo il lato destro del taglio nella direzione positiva dell'asse immaginario fino a distanza ε dal punto i , poi percorre l'intera circonferenza di raggio ε intorno ad i , da $0^+ + i(1-\varepsilon)$ a $0^- + i(1-\varepsilon)$, ed infine scende lungo il lato sinistro del taglio fino al punto $0^- + iy$. (Figura 2.12). variazione angolare solo lungo la circonferenza, e precisamente

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma \arg(1+iz) &= \Delta_\gamma \arg \frac{z-i}{i} = \Delta_\gamma \arg(z-i) = 2\pi \\ \Delta_\gamma \arg(1-iz) &= 0, \end{aligned}$$

e quindi abbiamo

$$g(0^- + iy) = \ln \left| \frac{1-y}{1+y} \right| + 2i\pi = \ln \frac{1-y}{1+y} + 2i\pi$$

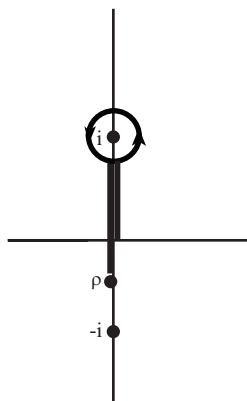


Figura 2.12: Percorso per il prolungamento analitico dell'arcotangente sull'asse immaginario sul lato sinistro del taglio $[-i, i]$

(il numeratore ed il denominatore della frazione sono entrambi positivi, ed il modulo non serve).

Invitiamo il lettore a verificare il comportamento analogo della funzione ottenuta ruotando la variabile di $\pi/2$, ossia moltiplicandola per i : si tratta della funzione

$$h(z) = \ln \frac{1-z}{1+z}.$$

Scegliamo come taglio l'intervallo reale $[-1, 1]$. Il lettore può verificare i propri calcoli con quelli svolti in [10, Capitolo t, Sezione 7], che è la fonte di questo esercizio. \square

Esempio 2.14.22. (Rami olomorfi della radice.) Abbiamo visto nella parte (iv) dell'Esempio 2.14.15 che la radice n -sima ha un prolungamento analitico polidromo in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, e che al termine di ogni curva con indice di avvolgimento $k \neq 0$ intorno all'origine il valore della radice n -sima cambia per la moltiplicazione per la k -sima radice dell'unità, ma non ci sono altri punti di diramazione a parte il punto all'infinito. Ci sono quindi esattamente n rami olomorfi, in un qualunque dominio tagliato con una semiretta uscente da 0. Per comodità prendiamo il dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Se prendiamo un punto $\rho > 0$ sul lato superiore del taglio e percorriamo la circonferenza (antioraria) di raggio ρ , al termine ritorniamo a ρ dal lato inferiore. Il valore su tale lato è quello di prima moltiplicato per $e^{2\pi i/n}$. Interessante è

il caso della radice quadrata, che ha esattamente due rami olomorfi, ed al termine del giro il valore è l'opposto che all'inizio (quindi sui lati del taglio si ottengono rispettivamente le funzioni $\sqrt{\rho}$ e $-\sqrt{\rho}$).

Ad esempio, calcoliamo \sqrt{i} nel ramo olomorfo in Ω scelto in modo che sul lato superiore del taglio si abbia la funzione positiva \sqrt{x} (ossia, $\sqrt{1+} = 1$, con la notazione del precedente esempio 2.14.20). Per il calcolo, usiamo una curva qualsiasi che non attraversa il taglio, parte da $1+$ e finisce in i : ad esempio un arco di circonferenza di raggio 1 percorso in senso antiorario. La variazione angolare è $\pi/2$, e quindi $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$ in questo ramo. Ma se scegliamo un altro ramo grazie ad un taglio che lascia i punti 1 e i su lati opposti, ad esempio la bisettrice del primo quadrante, allora occorre scegliere una curva che gira in senso opposto, ad esempio l'arco orario della stessa circonferenza con variazione angolare di $-3i\pi/2$. In tal caso il valore della radice diventa $e^{-3i\pi/4}$. Osserviamo, come del resto è palese, che il primo valore è l'opposto del secondo, ossia si ottiene dal secondo moltiplicandolo per la radice dell'unità $e^{i\pi} = -1$: questo è evidentemente necessario, perché la differenza fra i due percorsi che abbiamo seguito corrisponde ad un giro intorno all'origine. \square

Esercizio 2.14.23. Applicando l'esempio precedente sulla radice, studiamo i rami olomorfi della funzione composta $f(z) = \sqrt{1-z^2}$.

Svolgimento. La radice ha il solo punto di diramazione al finito nell'origine, e il radicale $1-z^2$ si annulla solo in $z = \pm 1$, quindi questi sono gli unici punti di diramazione al finito della funzione composta f . Nel dominio tagliato $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$, che è semplicemente connesso, esistono quindi rami olomorfi, e sono esattamente due perché due sono i rami olomorfi della radice: essi sono uno opposto dell'altro, e sono identificati dalla scelta del valore per x nell'intervallo reale $[-1, 1]$: o $\sqrt{1-x^2}$ oppure $-\sqrt{1-x^2}$.

Se invece si considera il dominio tagliato $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, che non è semplicemente connesso, procediamo come abbiamo fatto per l'arcotangente nell'Esempio 2.14.22. Basta osservare che ogni curva che gira in senso antiorario intorno al punto 1 produce dopo un giro un incremento di -2π dell'argomento di $1-z$, ed ogni curva che gira in senso antiorario intorno a -1 produce dopo un giro un incremento di 2π dell'argomento di $1+z$. Quindi una curva che gira intorno al taglio $[-1, 1]$ lascia invariato $\arg(1-z) + \arg(1+z) = \arg((1-z)(1+z)) = \arg(1-z^2)$. D'altra parte,

$$\sqrt{1-z^2} = \sqrt{|1-z^2|} e^{i \frac{\arg(1-z^2)}{2}}$$

e quindi, al termine del giro, il valore della funzione non cambia: si ha monodromia del prolungamento analitico. Anche in questo caso si trovano due rami olomorfi, opposti uno dell'altro. Lasciamo al lettore di verificare che i valori ai bordi superiore ed inferiore dei tagli per questi rami olomorfi sono opposti uno dell'altro. \square

2.15 Interpolazione olomorfa sulle strisce

Dal teorema del massimo modulo (Corollario 2.8.3) sappiamo che, se una funzione f è olomorfa in un aperto D e continua sulla sua chiusura, allora il suo massimo si trova sulla frontiera. Se f è intera (ossia olomorfa *su tutto* \mathbb{C}) e non cresce troppo rapidamente, ciò resta vero, nel senso che f è costante (Corollario 2.8.6), ma altrimenti in generale no. Ad esempio:

Esempio 2.15.1. Sia S_1 la striscia $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leq \pi/2\}$, e

$$f(z) = e^{e^z}.$$

Allora se $z = x \in \mathbb{R}$ i valori $f(x) = \exp(\exp x)$ divergono più che esponenzialmente, ma, dal momento che $\exp(\pm i\frac{\pi}{2}) = \pm i$, i valori di f sulla frontiera di S_1 ,

$$f\left(x \pm i\frac{\pi}{2}\right) = e^{e^x e^{\pm i\frac{\pi}{2}}} = e^{\pm i e^x},$$

hanno modulo 1. Analogo risultato si ha per la funzione $g(z) = \exp(\exp(iz))$ sulla striscia $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq \pi/2\}$. \square

Il prossimo teorema mostra che, se una funzione olomorfa su una striscia ha un tasso di crescita esponenziale più lento che nell'Esempio 2.15.1, allora è limitata ed il suo massimo viene assunto sulla frontiera della striscia.

Teorema 2.15.2. (*Phragmèn–Lindelöf.*)

- (i) Sia $S_{\pi/2}$ la striscia $S := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq \pi/2\}$ e f una funzione olomorfa su $S_{\pi/2}$ e continua su $\overline{S_{\pi/2}}$. Se per ogni $z = x + iy$ in S e per qualche costante $\alpha < 1$ e $A, M < \infty$ vale la stima

$$|f(z)| \leq M e^{A e^{\alpha|y|}} \tag{2.62}$$

allora $|f| \leq M$ su tutto $S_{\pi/2}$.

(ii) Sia $S_{a,b}$ la striscia $S_{a,b} := \{z \in \mathbb{C} : a < |\operatorname{Re} z| < b\}$ e f una funzione olomorfa su $S_{a,b}$ e continua su $\overline{S_{a,b}}$. Poniamo

$$M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x + iy)|.$$

Se f è limitata su S , diciamo $|f| \leq K$, allora il logaritmo di M è una funzione convessa in (a, b) , ossia

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a}.$$

Dimostrazione. Per dimostrare la parte (i), fissiamo β tale che $0 < \alpha\beta < 1$ e $\varepsilon > 0$. Poniamo

$$h_\varepsilon(z) = e^{-2\varepsilon \cos(\beta z)} = e^{-\varepsilon(e^{i\beta z} + e^{-i\beta z})}. \quad (2.63)$$

Poiché $e^{i\beta z} = e^{i\beta(x+iy)} = e^{i\beta x} e^{-\beta y}$ e $|x| \leq \pi/2$ in $\overline{S_{\pi/2}}$, in questa striscia si ha

$$\operatorname{Re}(e^{i\beta z} + e^{-i\beta z}) = 2 \cos(\beta x) (e^{\beta y} + e^{-\beta y}) \geq \cos(\beta\pi/2) (e^{\beta y} + e^{-\beta y}). \quad (2.64)$$

Poniamo $\eta := \cos(\beta\pi/2)$. Dal momento che $\beta < 1$ abbiamo $\eta > 0$, e quindi dalle disuguaglianze (2.15) e (2.64) segue che, per $z \in \overline{S_{\pi/2}}$,

$$|h_\varepsilon(z)| = e^{\operatorname{Re}(-\varepsilon(e^{i\beta z} + e^{-i\beta z}))} \leq e^{-\varepsilon\eta(e^{\beta y} + e^{-\beta y})}.$$

Poiché l'esponente $\eta(e^{\beta y} + e^{-\beta y})$ è positivo abbiamo $|h_\varepsilon| < 1$ su $\overline{S_{\pi/2}}$, e quindi, visto che $|f| < M$, vale la disuguaglianza

$$|fh_\varepsilon| < M \quad \text{per ogni } z \in \partial S_{\pi/2}. \quad (2.65)$$

Invece, per ogni $z \in \overline{S_{\pi/2}}$, dall'ipotesi (2.62) e dalla disuguaglianza (2.64) segue

$$|f(z)h_\varepsilon(z)| \leq M e^{A e^{\alpha|y|} - \varepsilon \cos(\frac{\beta\pi}{2})(e^{\beta y} + e^{-\beta y})}.$$

Ora osserviamo che $\varepsilon \cos(\frac{\beta\pi}{2}) > 0$ e $\beta > \alpha$. Pertanto l'esponente al lato destro dell'ultima disuguaglianza tende a $-\infty$ per $|y| \rightarrow \pm\infty$ e quindi esiste $y_0 > 0$ tale che $|f(z)h_\varepsilon(z)| < M$ per $z \in S_{\pi/2}$ e $|\operatorname{Im} z| = |y| > y_0$. D'altra parte, sappiamo da (2.65) che la stessa disuguaglianza vale per $z \in \partial S_{\pi/2}$, e da questa due stime segue che $|f(z)h_\varepsilon(z)| < M$ per ogni z nel bordo del rettangolo con vertici in $\pm\pi/2 \pm iy_0$, e quindi, grazie al teorema del massimo modulo (Corollario 2.8.3), anche all'interno di questo rettangolo. Ma allora $|fh_\varepsilon| < M$ su tutto $\overline{S_{\pi/2}}$. Ora, passando al limite per ε a 0, abbiamo che

$h_\varepsilon(z) \rightarrow 1$ e quindi $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in \overline{S_{\pi/2}}$. Questo dimostra la parte (i).

Veniamo ora alla parte (ii). Cominciamo la dimostrazione sotto l'ipotesi aggiuntiva $M(a) = M(b) = 1$, ossia

$$|f| \leq 1 \quad (2.66)$$

sulla frontiera di $S_{a,b}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e per $z \in \overline{S_{a,b}}$ poniamo

$$g_\varepsilon(z) = \frac{1}{1 + \varepsilon(z - a)}.$$

Poiché per $z \in \overline{S_{a,b}}$ si ha $\operatorname{Re}(z - a) = x - a > 0$, si ha anche $\operatorname{Re}(1 + \varepsilon(z - a)) > 1$, e quindi $|1 + \varepsilon(z - a)| > 1$, da cui $|g_\varepsilon| < 1$. Allora, in base all'ipotesi (2.66),

$$|f g_\varepsilon| < \|f\|_{L^\infty(\overline{S_{a,b}})} \leq 1 \quad (2.67)$$

su $\partial S_{a,b}$.

D'altra parte, $\varepsilon|y| = \operatorname{Im}(1 + \varepsilon(z - a)) \leq |1 + \varepsilon(z - a)|$, e quindi $|g_\varepsilon| < 1/(\varepsilon|y|)$. Pertanto, per $z \in \overline{S_{a,b}}$,

$$|f(z) g_\varepsilon(z)| \leq \frac{K}{\varepsilon|y|}. \quad (2.68)$$

Ora da (2.67) e (2.68) vediamo che sulla frontiera del rettangolo $R := \overline{S_{a,b}} \cap \{|y| \leq K/\varepsilon\}$ vale la disuguaglianza $|f g_\varepsilon| \leq 1$: pertanto la stessa disuguaglianza vale anche all'interno di R grazie al teorema del massimo modulo (Corollario 2.8.3). D'altra parte, questa stessa disuguaglianza vale anche nella parte di $S_{a,b}$ esterna al rettangolo R grazie a (2.68): quindi vale in tutta la striscia $S_{a,b}$. Questo dimostra la parte (ii) dell'enunciato sotto l'ipotesi aggiuntiva $M(a) = M(b) = 1$.

Ora abbandoniamo questa ipotesi. Poniamo

$$m(z) = M(a)^{(b-z)/(b-a)} M(b)^{(z-a)/(b-a)} := M(a)^w(z) M(b)^s(z)$$

dove $w(z) = (b - z)/(b - a)$ e $s(z) = (z - a)/(b - a)$. Poiché gli esponenziali $w \mapsto M(a)^w = e^{w \ln M(a)}$ e $s \mapsto M(b)^s$ sono funzioni intere mai nulle e per $z \in \overline{S_{a,b}}$ si ha $\operatorname{Re} w(z) \geq 0$ e $\operatorname{Re} s(z) \geq 0$, vediamo che le funzioni $M(a)^w(z)$ e $M(b)^s(z)$ sono limitate inferiormente su $\overline{S_{a,b}}$, e quindi è ivi limitata la funzione $1/m(z)$. Inoltre $|m(a + iy)| = M(a)$ e $|m(b + iy)| = M(b)$ per ogni y . Ma allora f/m ha modulo 1 sui bordi della striscia $S_{a,b}$ ed è continua e limitata

su $\overline{S_{a,b}}$ ed olomorfa all'interno. Quindi la funzione f/m verifica l'ipotesi aggiuntiva con cui abbiamo cominciato questa parte della dimostrazione, ed allora abbiamo visto che $|f/m| \leq 1$ su $\overline{S_{a,b}}$. Quindi $|f| \leq |m|$, e questo è l'enunciato della parte (ii). \square

2.16 Appendice: dimostrazione elementare del teorema di Cauchy in un insieme convesso

In questa Sezione diamo una dimostrazione indipendente, per insiemi convessi, del teorema di Cauchy (Corollario 2.4.10). Cominciamo con domini triangolari.

Lemma 2.16.1. (Il teorema di Cauchy in un triangolo.)

- (i) Sia $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in un aperto A che contiene un triangolo chiuso T , ed indichiamo con ∂T la frontiera del triangolo (o meglio, una curva C^1 a tratti che la percorre). Allora $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$.
- (ii) La stessa conclusione vale se f è olomorfa ovunque in A tranne che in un punto $p \in A$.

Dimostrazione.

- (i) I punti di mezzo dei lati del triangolo determinano quattro nuovi triangoli simili a quello originale, le cui curve di frontiera $C^{(j)}$ ($j = 1, \dots, 4$) sono costituite di due segmenti sulla frontiera C di T ed uno interno a T , e sono lunghe $L/2$ se L è la lunghezza di C . Il verso di percorrenza originalmente scelto per C determina quindi per ciascuna delle curve $C^{(j)}$ un verso di percorrenza compatibile tale che ogni tratto interno è percorso in verso opposto dalle due nuove curve che lo contengono. Pertanto, se si sommano i quattro integrali curvilinei rispetto al verso di percorrenza così indotto, i contributi dei tratti interni si cancellano a due a due, e ciò che rimane è

$$\sum_{j=1}^4 \int_{C^{(j)}} f(z) dz = \int_C f(z) dz.$$

Quindi almeno su una delle quattro curve $C^{(j)}$ il valore dell'integrale curvilineo, preso in modulo, non è inferiore a $\frac{1}{4} \left| \int_C f(z) dz \right|$. Ora procediamo per bisezioni successive, ricalcando la dimostrazione del Teorema di Bolzano–Weierstrass 1.9.6. Dopo n suddivisioni si ottengono 4^n curve di lunghezza $2^{-n}L$, almeno una delle quali, che chiameremo C_n , verifica

$$\left| \int_{C_n} f(z) dz \right| \leq 4^{-n} \left| \int_C f(z) dz \right|. \quad (2.69)$$

Abbiamo già mostrato nella dimostrazione del Teorema di Bolzano–Weierstrass 1.9.6 (che l'intersezione dei triangoli inscatolati T_n con perimetro C_n ottenuti per bisezioni successive consiste di un unico punto (si veda anche la Nota 1.9.7), che denotiamo con z_0 . Quindi $z_0 \in T \subset A$, e pertanto f è derivabile in z_0 .

Osserviamo a questo punto che $\int_{C_n} dz = 0$ per la Proposizione 1.29.36, e $\int_{C_n} (z - z_0) dz = 0$ per il Corollario 1.29.37. Quindi

$$\int_{C_n} f(z) dz = \int_{C_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz. \quad (2.70)$$

D'altra parte, visto che f è derivabile a z_0 , per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r > 0$ tale che, se $|z - z_0| < r$, si ha $|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon$. Allora segue da (2.70) che, se n è così grande che il triangolo T_n sia contenuto nel disco $|z - z_0| < r$, si ha

$$\int_{C_n} f(z) dz \leq \varepsilon \int_{C_n} |z - z_0|^n dz.$$

Osserviamo che $z_0 \in T_n$, e quindi la sua distanza $|z - z_0|$ dal punto generico $z \in \partial T_n = C_n$ è inferiore al perimetro del triangolo, e quindi a $2^{-n}L$: pertanto dall'ultima disuguaglianza si ha $\int_{C_n} f(z) dz \leq 2^{-n}L\varepsilon$.

A sua volta, da questa disuguaglianza e da (2.69) segue $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \varepsilon L^2$. Poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, questo significa che $\int_C f(z) dz = 0$.

- (ii) Sia ora f olomorfa in $A \setminus \{p\}$. Se $p \notin T$ allora la prima parte della dimostrazione si applica senza varianti. Se invece $p \in T$, esaminiamo separatamente i casi in cui p sia un vertice di T oppure no.

Nel primo caso, scegliamo due punti x, y sulla frontiera di T vicini a p (entro una distanza da p $\varepsilon > 0$ fissata), e spezziamo T come unione

di un triangolo T_0 con vertici p, x, y e del rimanente quadrilatero. Sezionando quest'ultimo lungo una diagonale vediamo che esso è l'unione di due triangoli in A che non contengono p , e quindi ad essi si applica la prima parte della dimostrazione. Osserviamo che l'integrale su C si spezza come somma degli integrali sulla frontiera dei tre triangoli, come prima per il fatto che i contributi dei tratti interni si cancellano. Pertanto l'integrale su C è semplicemente l'integrale curvilineo sulla frontiera del triangolo T_0 , quello che ha un vertice in p . Questo triangolo ha diametro inferiore a 2ε e quindi perimetro inferiore a 6ε (anzi 4ε perché i due lati con estremo in p sono lunghi meno di ε). Su T_0 la funzione $|f|$ è limitata da qualche costante M , per l'esistenza dei massimi e minimi delle funzioni continue su un compatto (Sezione 1.1). In conclusione, sulla frontiera di T_0 (e quindi anche su C) l'integrale è limitato da $M\varepsilon$. Ora la dimostrazione segue come prima dal fatto che ε è arbitrario.

Infine, se p è un punto di T ma non un vertice, decomponiamo T in due triangoli (se p è sulla sua frontiera) oppure tre triangoli (se p è un punto interno di T) ciascuno dei quali ha un vertice in p , ad applichiamo l'argomento precedente a ciascuno di essi.

□

Una parte del prossimo teorema discende dal Teorema 2.14.11, ma la dimostrazione che ne diamo qui è più diretta (ma usa un'ipotesi più forte, la convessità invece della semplice connessione).

Teorema 2.16.2. (Teorema di Cauchy per insiemi convessi.) *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto convesso, e f una funzione olomorfa su A . Allora esiste g olomorfa su A tale che $g' = f$. Quindi, per ogni curva chiusa assolutamente continua $C \subset A$, si ha $\int_C f(z) dz = 0$, per la Proposizione 1.29.36. Lo stesso risultato vale se esiste $p \in A$ tale che f è continua su A ed olomorfa in $A \setminus \{p\}$.*

Dimostrazione. Per ogni fissato $a \in A$ il segmento $[a, z]$ che congiunge a con un qualsiasi altro punto z di A giace in A , a causa della convessità. Allora possiamo definire una funzione g su A in questo modo:

$$g(z) = \int_{[a,z]} f(w) dw.$$

Sempre per la convessità, per ogni altro punto $z_0 \in A$ il triangolo con vertici a , z e z_0 giace in A . L'integrale di f lungo il perimetro di questo triangolo vale 0 per il Lemma 2.16.1. Poiché $\int_{[z_0, z]} dw = z - z_0$, questo equivale, per $z \neq z_0$, all'identità (2.20):

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} (f(w) - f(z_0)) dw.$$

Poiché f è continua in z_0 , per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $|w - z_0| < \delta$, si ha $|f(w) - f(z_0)| < \varepsilon$. Quindi, per $z \rightarrow z_0$, il secondo membro della identità precedente tende a zero: pertanto $g'(z_0) = f(z_0)$. La stessa asserzione nel caso in cui f sia olomorfa solo in $A \setminus \{p\}$ si dimostra nello stesso modo, grazie al fatto che il teorema di Cauchy sul triangolo di vertici a , z e z_0 continua a valere in questa ipotesi (Lemma 2.16.1). \square

Capitolo 3

*Spazi vettoriali topologici ed analisi funzionale

Questo capitolo è di natura più sofisticata ed astratta che il resto della Parte preliminare, ed è necessario solo per alcuni degli argomenti successivi più sofisticati di analisi matematica (tipicamente il Capitolo 7 di approfondimenti sulle serie di Fourier e la nozione di topologia nello spazio delle distribuzioni non temperate nella Sezione 11.18 del Capitolo 11 sulle distribuzioni, ed in parte anche per maggiori approfondimenti sulla topologia di spazi con famiglie separatici di seminorme come la classe di Schwartz (Capitolo 9). Ma queste nozioni non sono mai necessarie per gli sviluppi sul trattamento dei segnali, tranne che per un fugace riferimento al teorema di uniforme limitatezza nella definizione di convergenza di distribuzioni (Proposizione 11.5.3). Quasi sempre, nei pochi casi in cui i contenuti di questo Capitolo vengono utilizzati nel seguito, essi vengono ivi riassunti in maniera semplificata, per permettere la comprensione ai lettori non interessati a questi approfondimenti astratti. Si badi però che il punto di vista dell'autore di questo trattato è che non dovrebbe esserci un confine netto fra la conoscenza e forse anche gli interessi di chi si occupa di matematica pura e di matematica applicata, e quindi il lettore interessato alla teoria dei segnali è fortemente incoraggiato a studiare a fondo anche le parti più astratte.

Per il succitato motivo di parziale dispensabilità, l'intero Capitolo è contrassegnato con una stelletta: esso può essere omissso da parte dei suddetti lettori. Alcune delle sue Sezioni, a loro volta, sono contrassegnate con una stelletta: si tratta delle Sezioni che presentano contenuti e risultati apparentemente assai naturali e plausibili, ma che in realtà richiedono un maggiore

senso critico da parte dei lettori più sofisticati (il principio di massimalità di Hausdorff, l'assioma della scelta, l'esistenza di prodotti cartesiani su insiemi di indici più che numerabili, la compattezza di un qualsiasi prodotto cartesiano di insiemi compatti). Infine, altre Sezioni sono contrassegnate con due asterischi: quelle i cui contenuti sono inclusi per completezza ma non vengono mai utilizzati in quest'opera.

La maggior parte della esposizione è tratta da [22, Ch.1, Sect. 5, 8; Ch. 10, Sect. 3, 4, 5, 6, 7] e [25, Ch. 1, 2, 3, 4].

3.1 Spazi vettoriali topologici, spazi di Banach e di Fréchet

Nel resto di quest'opera, gli unici spazi vettoriali topologici che introdurremo sono gli spazi di Banach e gli spazi di Fréchet, che fra breve definiremo: limitando l'attenzione a questi casi, il lettore può semplificare parte di questo Capitolo. Peraltro, per maggiore generalità, presentiamo gli argomenti nel contesto più ampio degli spazi vettoriali topologici.

Definizione 3.1.1. Uno spazio vettoriale topologico è uno spazio vettoriale V munito di una topologia rispetto alla quale i punti sono chiusi e le operazioni dello spazio vettoriale sono continue. In particolare, si noti che ogni traslazione è continua e, poiché la mappa inversa è la traslazione opposta, ogni traslazione è un omeomorfismo, ossia preserva la topologia: d'ora in poi diremo che la topologia è invariante per traslazione.

Un sottoinsieme A di uno spazio vettoriale topologico V si dice *limitato* se per ogni intorno U di 0 in V esiste $r = r_{A,U} > 0$ tale che $A \subset \lambda U$ per tutte le dilatazioni λ con $|\lambda| > r$.

Una successione $\{v_n\}$ in V si dice *di Cauchy* se per ogni intorno U dell'origine esiste un intero $N = N(U)$ tale che $v_n - v_m \in U$ per ogni $n, m \geq N$. Se tutte le successioni di Cauchy hanno limite, si dice che la topologia è *completa*.

Una distanza su uno spazio vettoriale V si dice *invariante per traslazione* se, per ogni $u, v, w \in V$, si ha $\text{dist}(u, v) = \text{dist}(u + w, v + w)$. Si noti che una distanza su uno spazio vettoriale non è necessariamente invariante oer traslazione: ad esempio, si scelga $V = \mathbb{R}$, h una funzione positiva localmente integrabile su \mathbb{R} (ad esempio, $h(t) = 1/(1 + t)$, o $h(t) = 1/(1 + t^2)$), e $\text{dist}(u, v) = \int_u^v h(t) dt$. Si vede facilmente che la funzione dist verifica le proprietà delle distanze elencate nella Definizione 1.2.10, ma non è invariante per traslazione.

riante per traslazione: infatti, dato $x \in \mathbb{R}$, si ha $\int_u^v h(t) dt \neq \int_{u+x}^{v+x} h(t) dt$ (l'uguaglianza per ogni x si ha solo se h ha un grafico lineare (una retta), ma siccome $\text{dist}(u, v) = \int_u^v h(t) dt$ deve essere non negativa, le uniche tali h ammissibili sono le costanti positive (o zero), che danno luogo a multipli della distanza euclidea: più in generale, il lettore può mostrare come esercizio che i multipli della distanza euclidea sono le uniche misure invarianti. È interessante notare anche che, nel nostro esempio, la scelta $h(t) = 1/(1+t^2)$ dà luogo ad una distanza limitata: per ogni $u, v \in \mathbb{R}$, $\text{dist}(u, v) < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \arctg t = \pi$.

Diciamo che uno spazio vettoriale topologico V :

- è *localmente limitato* se esiste un intorno limitato dell'origine;
- è *localmente convesso* se esiste una base della topologia costituita da insiemi convessi (poiché le traslazioni sono operazioni continue, questo equivale a richiedere che esista una base di intorni aperti dell'origine che sono convessi);
- è *metrizzabile* se la topologia è indotta da una metrica (non necessariamente invariante per traslazione);
- è un *F-spazio* se è metrizzabile, la metrica è invariante per traslazione e la topologia è completa;
- è uno *spazio di Fréchet* se è un *F-spazio* localmente convesso, ossia se la sua topologia è localmente convessa ed indotta da una metrica invariante per traslazione rispetto alla quale V è completo;
- è uno *spazio di Banach* se la sua topologia è indotta da una norma ed è completo in questa norma (rammentiamo che la nozione di *norma* su uno spazio vettoriale è stata introdotta nella Definizione 1.2.8).

Nota 3.1.2. È chiaro che ogni spazio normato è localmente limitato e localmente convesso, e che ogni spazio di Banach è anche di Fréchet.

□

3.1.1 Sottospazi e quozienti

La topologia di uno spazio vettoriale verifica varie proprietà piuttosto naturali ed alcune più sottili. A titolo di esempio, vediamo due di quelle naturali nei prossimo esercizi:

Esercizio 3.1.3. Sia V uno spazio vettoriale topologico.

(i) Per ogni $A, B \subset V$, $\overline{A + B} \subset \overline{A} + \overline{B}$;

(ii) Se W è un sottospazio di V , anche la sua chiusura \overline{W} è un sottospazio.

Svolgimento. Per ogni $a \in \overline{A}$ e $b \in \overline{B}$ sia U un intorno di $a + b$. Poiché la somma è una operazione continua da $V \times V$ in V , ossia la controimmagine di un aperto $U \subset V$ è aperta in $V \times V$ (Sezione 1.1), esistono intorni aperti U_1 di a e U_2 di b tali che $U_1 + U_2 \subset U$. Poiché a e b appartengono alle chiusure di A e B rispettivamente, esistono $x \in A \cap U_1$ e $y \in B \cap U_2$. Quindi $x + y \in (A \cap U_1) + (B \cap U_2) = (A + B) \cap (U_1 + U_2) \subset (A + B) \cap U$: pertanto l'ultima intersezione è non vuota per ogni intorno U di $a + b$, e questo significa che $a + b$ appartiene alla chiusura $\overline{A + B}$. Questo dimostra la parte (i). Per dimostrare (ii), lasciamo al lettore la verifica elementare del fatto che, per ogni scalare α e sottoinsieme $W \subset V$, si ha $\overline{\alpha W} = \alpha \overline{W}$ (se $\alpha = 0$ è ovvio, altrimenti si osservi che la moltiplicazione per α è continua con inversa continua, in base alla Definizione 3.1.1 di spazio vettoriale topologico). Pertanto, per tutti gli scalari α e β , si ha $\overline{\alpha W + \beta W} = \overline{\alpha W} + \overline{\beta W}$, ed il secondo membro è contenuto in $\overline{\alpha W + \beta W}$ in base alla parte (i). Allora, se W è anche un sottospazio, $\overline{\alpha W} + \overline{\beta W} \subset \overline{W}$. \square

Per quanto riguarda gli spazi quozienti, rammentiamo le seguenti definizioni ben note in Algebra Lineare.

Definizione 3.1.4. Dato uno spazio vettoriale V ed un sottospazio N , lo spazio quoziente V/N è l'insieme delle classi laterali $\{v + N\}$ al variare di v in V . Il quoziente è uno spazio vettoriale se munito dell'operazione naturale di somma, ovvero $\{v + N\} + \{w + N\} := \{(v + w) + N\}$: l'elemento neutro rispetto a questa somma è la classe laterale di $0 \in V$, ossia N . L'operazione di somma è ben definita, cioè non dipende dalla scelta dei rappresentanti v e w , perché se $v + N = v' + N$ e $w + N = w' + N$, allora $v - v' \in N$ e $w - w' \in N$, e quindi $(v + w) + N = (v' + w') + N$. La proiezione canonica (o mappa quoziente) $\pi : V \rightarrow V/N$ è definita da $\pi(v) = v + N$: si tratta di una applicazione lineare che ha per nucleo N , ossia l'origine nello spazio V/N .

Definizione 3.1.5. (Topologia quoziente.) Se V è uno spazio vettoriale topologico con topologia τ e N è un sottospazio chiuso, introduciamo la topologia quoziente σ su V/N data dal lifting di τ sotto π : ossia, gli aperti di

σ sono i sottoinsiemi di V/N le cui controimmagini sotto π sono aperti di τ . In questo modo, la mappa quoziente π manda aperti in aperti, ed è continua (l'immagine inversa di ogni aperto è un aperto).

Esercizio 3.1.6. Per ogni sottospazio chiuso N di V , la topologia quoziente σ introdotta nella precedente Definizione 3.1.5 è una topologia di spazio vettoriale. La mappa quoziente $\pi : V \rightarrow V/N$ manda basi locali della topologia τ di V in basi locali di σ ; in particolare, π manda aperti in aperti. Se V è un F -spazio, o uno spazio di Fréchet, o di Banach (nel senso della Definizione 3.1.1), lo stesso vale per V/N .

Svolgimento. Si verifica immediatamente che σ è una topologia (ossia è chiusa sotto intersezioni numerabili ed unioni arbitrarie) perché lo è τ . Inoltre, i punti in N/V sono σ -chiusi, perché sono traslati dell'insieme N che si è assunto chiuso. Se W è un intorno dell'origine in V/N , in base al Lemma 3.1.9 esiste un intorno dell'origine in $U \subset V$ tale che $U + U \subset \pi^{-1}W$, quindi $\pi(U) + \pi(U) \subset W$: poiché π manda aperti di τ in aperti di σ , questo significa che la somma in V/N è σ -continua. Un argomento analogo vale per la moltiplicazione per scalari.

È chiaro che π manda basi locali in basi locali.

Supponiamo infine che V sia un F -spazio con metrica invariante d . Si verifichi immediatamente che la seguente definizione induce una metrica invariante δ su V/N (e non dipende dalla scelta dei rappresentanti v e w):

$$\delta(\pi(v), \pi(w)) = \inf_{n \in N} d(v - w, n).$$

Questa metrica induce su V/N la topologia σ , dal momento che π manda la r -palla in V di centro l'origine e raggio r nella δ -palla in N/V con centro l'origine di V/N e lo stesso raggio. Si noti che, se V è uno spazio normato, questa definizione induce su V/N una norma, detta *norma quoziente*:

$$\|\pi(v)\|_{V/N} = \inf_{n \in N} \|v + n\|_V. \quad (3.1)$$

Per completare l'esercizio basta mostrare che δ è una metrica completa se lo è d . Sia $\{u_n\}$ una successione di Cauchy in V/N (ossia rispetto a δ). Scegliamo una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che $\delta(u_{n_k}, u_{n_{k+1}}) < 2^{-k}$, e punti $v_k \in V$ tali che $\pi(v_k) = u_{n_k}$ e $d(v_k, v_{k+1}) < 2^{-k}$. Dalla formula di somma geometrica (Sezione 1.1) segue che la successione $\{v_k\}$ è di Cauchy in V , e quindi, per la completezza di d , essa converge a qualche $v \in V$. Poiché π è continua, $u_{n_k} = \pi(v_k)$ converge a $\pi(v)$. Quindi la successione di Cauchy $\{u_n\}$ ha una sottosuccessione convergente: ma allora è essa stessa convergente. \square

3.1.2 Interni bilanciati

Definizione 3.1.7. Un sottoinsieme $U \ni 0$ di uno spazio vettoriale si dice *bilanciato* (o anche *stellato*) se $\lambda U \subset U$ per ogni $|\lambda| \leq 1$.

***Lemma 3.1.8.** *In uno spazio vettoriale topologico, ogni intorno dell'origine contiene un intorno bilanciato, ed ogni intorno convesso dell'origine contiene un intorno convesso bilanciato. 3.1.7).*

Dimostrazione. Sia X uno spazio vettoriale topologico e U un intorno dell'origine. La continuità della operazione di moltiplicazione per scalari equivale a dire che esistono $\varepsilon = \varepsilon(U) > 0$ ed un intorno $J = J(U)$ dell'origine tale che $\alpha J \subset U$ per ogni $|\alpha| < \varepsilon$ (esercizio: mostrare che questa asserzione significa che la controimmagine, sotto l'operazione di moltiplicazione per scalari, di un aperto $U \subset X$ è un aperto in $\mathbb{R} \times X$). Allora poniamo $O = \cup_{|\alpha| < \varepsilon(U)} J(U)$: questo O è un aperto (perché unione di aperti), è contenuto in U ed è bilanciato, perché $\alpha O \subset O$ per ogni $|\alpha| \leq 1$.

Se inoltre U è convesso, poniamo $K = \cap\{\alpha U : |\alpha| = 1\}$. Notiamo che K è convesso (perché è intersezione di convessi), e che il fatto che O sia bilanciato implica che $\alpha^{-1}O \subset O$ per ogni $|\alpha| = 1$, e quindi per questi α si ha $O = \alpha O \subset \alpha U$. Questo significa che $O \subset K$: ma allora l'interno K^0 di K contiene un intorno dell'origine, e quindi è esso stesso un intorno aperto dell'origine. Inoltre K è bilanciato. Infatti, essendo un convesso che contiene l'origine, K è bilanciato nel senso reale, ovvero per ogni suo punto diverso dall'origine K contiene anche tutti i punti ottenuti contraendo il primo verso l'origine: $rK \subset K$ per ogni $0 < r < 1$. Ma allora K è bilanciato anche in senso complesso, perché, per ogni $|\lambda| \leq 1$, scrivendo $\lambda = re^{it}$ abbiamo

$$\lambda K = \cap_{|\alpha|=1} \lambda \alpha U = \cap_{|\alpha|=1} r \alpha U \subset \cap_{|\alpha|=1} \alpha U = K.$$

D'altra parte $K \subset U$ e U è aperto, quindi anche $K^0 \subset U$, e K^0 è convesso perché è l'interno di un convesso (e quindi contiene tutte le corde che congiungono due suoi punti qualsiasi). Rimane da dimostrare che K^0 è bilanciato, ma questo è chiaro visto che abbiamo provato che K è bilanciato. \square

Ecco una osservazione tanto utile quanto ovvia:

Lemma 3.1.9. *Sia V uno spazio vettoriale topologico e U un intorno aperto di 0 . Allora esiste un intorno aperto W di 0 tale che $W + W \subset U$. Esiste anche un intorno aperto W' di 0 tale che $W' + W' + W' + W' \subset U$. Gli interni W e W' si possono scegliere bilanciati.*

Dimostrazione. L'enunciato equivale a dire che l'operazione di somma, $(x, y) \mapsto x + y$, è una funzione continua. In effetti, proprio perché la somma è continua, dall'identità $0 + 0 = 0$ sappiamo che esistono intorno A, B di 0 tali che $A + B \subset U$. L'enunciato si ottiene se poniamo $W = A \cap B$. Il fatto che W si possa scegliere bilanciato segue dalla prima parte del precedente Lemma 3.1.8. Per ottenere W' come nell'enunciato basta applicare la stessa conclusione a W invece che a U , \square

3.1.3 Proprietà di separazione e di limitatezza

Abbiamo bisogno di questa semplice proprietà degli spazi vettoriali topologici, che rinforza la proprietà della parte (vi) della Proposizione 1.10.10:

Proposizione 3.1.10. *Sia V uno spazio vettoriale topologico. Allora, dati un insieme compatto K ed un chiuso C in V disgiunti, esiste un intorno W dell'origine tale che $K + W$ è disgiunto da $C + W$. Se V è localmente convesso, l'intorno W si può scegliere convesso.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in K$ esiste un intorno A_x di x disgiunto da C : infatti, se C intersecasse ogni intorno di x , allora x sarebbe un punto di chiusura di C e quindi apparterebbe a C perché C è chiuso, ma questo non è possibile perché K e C sono disgiunti. Scriviamo $A_x = x + U_x$, con U_x intorno aperto dell'origine (le traslazioni sono omeomorfismi, in uno spazio vettoriale topologico!). Per il precedente Lemma 3.1.9 sappiamo che ogni $x \in K$ è contenuto in un aperto $x + W_x + W_x + W_x + W_x$ con W_x intorno aperto bilanciato dell'origine e $W_x + W_x + W_x + W_x \subset U_x$. Se V è localmente convesso possiamo assumere che W_x , e quindi l'intersezione $W_x + W_x + W_x + W_x$, siano convessi. Ne segue che $x + W_x + W_x + W_x + W_x \cap C = \emptyset$: ma poiché $W_x = -W_x$ dal momento che W_x è bilanciato, ora sappiamo che $x + W_x + W_x + W_x \cap (C + W_x) = \emptyset$. Per semplicità scriviamo $S_x = W_x + W_x + W_x$.

D'altra parte K è compatto, e quindi dal ricoprimento aperto $\{x + S_x\}$ di K possiamo estrarre un sottoricoprimento finito $\{x_1 + S_{x_1}, \dots, x_n + S_{x_n}\}$. Pertanto $K = \cup_{i=1}^n (x_i + S_{x_i})$. Poniamo $W = \cap_{i=1}^n S_{x_i}$. Allora W è ancora un intorno aperto dell'origine, convesso perché lo sono gli aperti S_{x_j} (in particolare abbiamo visto che si possono assumere convessi se V è localmente convesso). Inoltre

$$K + W \subset \cup_{i=1}^n (x_i + S_{x_i} + W) \subset \cup_{i=1}^n (x_i + S_{x_i} + S_{x_i}) \subset \cup_{i=1}^n (x_i + U_{x_i}) = \cup_{i=1}^n A_{x_i}$$

e gli insiemi al lato di destra sono tutti disgiunti da $C + W \subset \bigcap_{i=1}^n (C + W_{x_j})$. \square

Corollario 3.1.11. *Ogni spazio vettoriale topologico è di Hausdorff (Definizione 1.10.2).*

Dimostrazione. Nella Definizione 3.1.1 di spazio vettoriale topologico abbiamo assunto che i punti siano chiusi (proprietà T_1 introdotta nella Proposizione 1.10.10). Pertanto la proprietà T_2 della Definizione 1.10.2 discende dal fatto assai più generale che, dati un chiuso C ed un compatto K in uno spazio vettoriale topologico, esistono intorni aperti disgiunti di C e K : o equivalentemente (grazie all'invarianza per traslazione della topologia), che esiste un intorno aperto W di 0 tale che l'aperto $C + W$ è disgiunto dall'aperto $K + W$. Questo fatto è stato dimostrato nella precedente Proposizione 3.1.10.

\square

***Corollario 3.1.12.** *Ogni aperto di una base locale di uno spazio vettoriale topologico contiene la chiusura di un altro aperto di base.*

Dimostrazione. Per l'invarianza della topologia, possiamo restringere l'attenzione ad una base locale all'origine. Nella Proposizione 3.1.10 specializziamo l'attenzione al caso particolare in cui il compatto K consista del solo punto 0 e C sia un chiuso che non contiene 0: ne segue che esiste un aperto V che contiene 0 ed è disgiunto da $C + V$ (ossia una versione lievemente più forte della proprietà (v) della Proposizione 1.10.10). D'altra parte, $C + V$ è aperto (ovvio, è unione di aperti, e precisamente traslati di V : lasciamo i dettagli per esercizio). Quindi anche \overline{V} è disgiunto da $C + V$, e pertanto anche da C . Per riportare questo fatto all'enunciato, sia U un intorno di 0 membro di una base locale della topologia, e chiamiamo C il suo complementare, che è chiuso: allora, per quanto appena visto, esiste un altro intorno V di 0 tale che \overline{V} è disgiunto da C , ossia contenuto in U . Se anche l'intorno V sta nella base locale, questo corrisponde all'enunciato; se no, V deve contenere un intorno W di 0 che sta nella base locale, e $\overline{W} \subset \overline{V} \subset U$. \square

Concludiamo questa Sezione con due utili osservazioni.

***Lemma 3.1.13.** *Se U è un intorno di 0 nello spazio vettoriale topologico V , allora ogni $v \in V$ appartiene ad un dilatato rU per $r > 0$ abbastanza grande: $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU$.*

Dimostrazione. Questo è vero perché la mappa $s \mapsto sv$ (da \mathbb{R} a V) è continua per definizione di spazio vettoriale topologico, quindi l'insieme $\{s : sv \in U\}$ è aperto in \mathbb{R} . Questo insieme deve contenere $s = 0$ perché U contiene l'origine. e pertanto contiene $1/r$ per r abbastanza grande: questo equivale a $v \in rU$ per r grande. \square

Definizione 3.1.14. Un intorno aperto U di 0 in uno spazio vettoriale topologico V si dice esaustivo se $V = \cup_{n \in \mathbb{N}} nU$.

Corollario 3.1.15. *In uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, esiste una base locale di intorni aperti di 0 convessi, bilanciati ed esaustivi.*

Dimostrazione. Per il Lemma 3.1.8, in uno spazio vettoriale localmente convesso esiste una base locale a 0 consistente di aperti convessi bilanciati U_α . Il fatto che U_α sia esaustivo segue dal Lemma 3.1.13. \square

***Lemma 3.1.16.** *Sia $\{v_n\}$ una successione di Cauchy in uno spazio vettoriale topologico V localmente limitato (definita, in questo contesto generale, come nella Definizione 3.1.1). Allora l'insieme $\{v_n\}$ costituito dai punti della successione è un insieme limitato.*

Proof. Per definizione di successione di Cauchy, per ogni intorno aperto U dell'origine esiste N tale che $v_n - v_N \in U$ per ogni $n \geq N$. In base al Lemma 3.1.9 esiste un intorno bilanciato W dell'origine tale che $W + W \subset U$. D'altra parte, per il precedente Lemma 3.1.13, $v_N \in sW$ per ogni $s > s_0$ abbastanza grande: o $v_N \in W$ ed allora possiamo scegliere $s_0 = 1$, o se no esiste un opportuno $s_0 > 1$. Allora, per ogni $n \geq N$ e $s > s_0 \geq 1$,

$$v_n \in v_N + W \subset sW + W \subset sW + sW \subset sU.$$

Questa inclusione mostra che i vettori v_n con $n \geq N$ appartengono tutti simultaneamente a sU per s abbastanza grande. Di nuovo per il precedente Lemma 3.1.13, i restanti punti v_1, \dots, v_{N-1} appartengono anch'essi a sU per s abbastanza grande. Quindi, per s abbastanza grande, tutto l'insieme $\{v_n\}$ è contenuto nel multiplo sU del generico intorno U di 0 , e questo equivale a dire che è limitato. \square

3.2 **Spazi vettoriali topologici che ammettono una metrica, o una norma

Questa Sezione studia gli spazi vettoriali topologici in maggiore generalità. Solo pochi di questi risultati sono necessari nelle Sezioni immediatamente successive, ma gli altri saranno necessari per le Sezioni più ambiziose 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23.

3.2.1 *Spazi vettoriali localmente limitati

Proposizione 3.2.1. *Se la topologia di uno spazio vettoriale è localmente limitata, essa ammette basi locali numerabili. Ad esempio, per ogni intorno limitato U di 0 e per ogni successione $c_n > 0$ che tende a zero, la famiglia $\{c_n U\}$ è una base locale a 0 (numerabile, e consistente di aperti limitati).*

Dimostrazione. Al solito, per l'invarianza per traslazione della topologia, basta costruire una base locale numerabile all'origine. In base alla definizione di base locale (ultima parte della Definizione 1.10.1) questo significa costruire una famiglia di intorni aperti di 0 tale che ogni intorno aperto di 0 ne contenga uno. Dal momento che lo spazio vettoriale V è localmente limitato, esiste un intorno limitato J dell'origine (questa terminologia è stata introdotta nella Definizione 3.1.1). Consideriamo una arbitraria successione decrescente di numeri reali $c_n \rightarrow 0^+$. Mostriamo che gli aperti $c_n J$ formano una base locale a 0 per la topologia. Basta provare che ogni intorno aperto U di 0 contiene uno degli aperti $c_n J$. D'altra parte, siccome J è limitato, esiste $s > 0$ tale che $J \subset tU$ per ogni $t > s$. Allora se n è sufficientemente grande che $1/c_n > s$, abbiamo $J \subset (1/c_n)U$, e quindi $U \supset c_n J$ per tutti gli n abbastanza grandi. \square

Corollario 3.2.2. *Se uno spazio vettoriale topologico V non è localmente limitato, esso non contiene alcun aperto limitato, e viceversa, se V è localmente limitato, V contiene aperti limitati.*

Dimostrazione. Se esiste un aperto limitato in V , ne esiste uno che contiene l'origine, per l'invarianza per traslazione della topologia. Allora, per la precedente Proposizione 3.2.1, esiste una base locale di aperti limitati, e quindi la topologia è localmente limitata. Il viceversa è ovvio. \square

3.2.2 Spazi metrizzabili

***Corollario 3.2.3.** *Sia X uno spazio vettoriale topologico con una base locale numerabile per la sua topologia (ad esempio se X è localmente limitato, Proposizione 3.2.1). Allora esiste una base locale di intorni dell'origine $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ tale che*

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n \quad (3.2)$$

per ogni n . Si noti, in particolare, che $V_{n+1} \subset V_n$.

Dimostrazione. Questa è una conseguenza ovvia del Lemma 3.1.9. \square

***Lemma 3.2.4.** *Sia X uno spazio vettoriale topologico con una base locale numerabile per la sua topologia. Sia $\{V_n\}$ la base locale all'origine ottenuta nel precedente Corollario 3.2.3. Sia D l'insieme dei razionali diadici, ossia delle somme finite $r = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r)/2^n$, dove le cifre binarie $c_n(r)$ valgono 0 oppure 1 e solo un numero finito di esse è non nullo (quindi $0 \leq r < 1$: gli stessi razionali diadici furono introdotti nella dimostrazione del lemma di Urysohn (Teorema 1.10.13)). Infine, di nuovo in maniera analoga alla dimostrazione del del lemma di Urysohn, costruiamo una famiglia di insiemi: per ogni $r \in D$ sia*

$$A(r) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(r)V_j; \quad (3.3)$$

qui naturalmente ci si riferisce alla somma di opportuni sottoinsiemi di X , che è un sottoinsieme di X , e per completezza poniamo $A(r) = X$ se $r \geq 1$. (Si noti, in particolare, che $V_n = A(2^{-n})$.)

Allora vale la seguente proprietà di subadditività per inclusione: per ogni $r, s \in D$,

$$A(r) + A(s) \subset A(r + s), \quad (3.4)$$

e al crescere di r gli $A(r)$ formano una successione crescente di intorni dell'origine.

Dimostrazione. Queste proprietà seguono dal comportamento delle cifre binarie della somma di due numeri. Conosciamo bene questo comportamento nel caso di cifre decimali. In effetti, scriviamo $c_n(r)$ per la n -sima cifra decimale di un qualsiasi numero r . Allora, dati due numeri r e s , si ha che $c_n(r + s) = c_n(r) + c_n(s) \pmod{10}$, e senza il modulo si ha $c_n(r + s) = c_n(r) + c_n(s)$ a meno che il secondo membro non raggiunga o superi 10, nel

qual caso l'uguaglianza diventa $c_n(r+s) = c_n(r) + c_n(s) - 10$, ma allora c'è un riporto: $c_{n-1}(r+s) = c_{n-1}(r) + c_{n-1}(s) + 1$. Però l'aggiungere la cifra 1 può far sì che ora si abbia $c_{n-1}(r+s) \geq 10$, ed in tal caso il riporto di 1 si trasferisce alla cifra precedente, e così via. Pertanto, alla *prima* cifra n alla quale $c_n(r+s) \neq c_n(r) + c_n(s)$, deve accadere $c_n(r+s) = c_n(r) + c_n(s) + 1$ e $c_n(r) + c_n(s) < 9$.

Se invece i numeri $c_n(r)$ e $c_n(s)$ rappresentano cifre binarie, allora invece che $c_n(r) + c_n(s) < 9$ avremo $c_n(r) + c_n(s) < 1$, ossia $c_n(r) = c_n(s) = 0$, e questa regola diventa:

alla prima cifra n alla quale $c_n(r+s) \neq c_n(r) + c_n(s)$, deve accadere $c_n(r+s) = 1$ e $c_n(r) = c_n(s) = 0$.

Se $r+s \geq 1$, allora $A(r+s) = X$ e (3.4) è banalmente verificata. Se invece $r+s < 1$, riscriviamo le cifre binarie come $a_n = c_n(r)$, $b_n = c_n(s)$, $d_n = c_n(r+s)$. Se $a_n + b_n = d_n$ per ogni n , allora, in base a (3.3), $A(r) + A(s) = A(r+s)$. Altrimenti, sia k il primo intero per cui $a_k + b_k \neq d_k$, e sia m la cifra più grande non nulla di $A(r)$ e $A(s)$ (la più grande fra le due). Abbiamo visto che allora $a_k = 0 = b_k$ e $d_k = 1$. Quindi (3.3) diventa

$$A(r) \subset \sum_{j=1}^{k-1} a_j V_j + \sum_{j=k+1}^{\infty} c_j(r) V_j \subset \sum_{j=1}^{k-1} a_j V_j + \sum_{j=k+1}^m V_j,$$

e lo stesso vale per $A(s)$, mentre

$$A(r+s) \supset \sum_{j=1}^{k-1} (d_j) V_j + V_k$$

perché $d_k = 1$. Ma (3.2) ed un ovvio argomento per induzione su m mostrano che

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+2}^m V_j &= \sum_{j=k+2}^{m-1} V_j + V_m \subset \sum_{j=k+2}^{m-1} V_j + V_{m-1} = \sum_{j=k+2}^{m-2} V_j + V_{m-1} + V_{m-1} \\ &\subset \sum_{j=k+2}^{m-2} V_j + V_{m-1} \subset \sum_{j=k+2}^{m-3} V_j + V_{m-2} + V_{m-2} \subset \dots V_{k+1}, \end{aligned}$$

e quindi si ha $\sum_{j=k+2}^{\infty} V_j \subset V_{k+1}$ e

$$A(r) \subset \sum_{j=1}^{k-1} a_j V_j + V_{k+1} + V_{k+1}$$

ed analogamente per $A(s)$. Ma allora

$$\sum_{j=1}^{k-1} (a_j + b_j)V_j + V_{k+1} + V_{k+1} \subset \sum_{j=1}^{k-1} d_j V_j + V_k \subset A(r + s).$$

Questo prova (3.4).

Ora, sia $r < s$ ed osserviamo che tutti gli $A(t)$ contengono 0, da cui $A(r) \subset A(r) + A(s - r)$: segue da (3.4) che $A(r) \subset A(r) + A(s - r) \subset A(s)$, e la dimostrazione è conclusa. \square

***Teorema 3.2.5.** *Uno spazio vettoriale topologico V con base locale numerabile per la sua topologia è metrizzabile, nel senso che esiste una metrica d su V che induce la stessa topologia ed è invariante per traslazione (ossia $d(u + w, v + w) = d(u, v)$ per ogni $u, v, w \in V$), e le sfere intorno all'origine sono bilanciate, nel senso della Definizione 3.1.7. Viceversa, ogni spazio vettoriale topologico metrizzabile ha basi locali numerabili.*

Dimostrazione. Dai Lemmi 3.1.8 e 3.2.3 sappiamo che esiste una base locale all'origine di intorni *bilanciati* $\{V_n\}$ tali che vale l'inclusione (3.2), e che, se X è localmente convesso, allora gli intorni di base $\{V_n\}$ si possono scegliere convessi.

Usiamo la notazione del precedente Lemma 3.2.4. Come nella dimostrazione del lemma di Urysohn (Teorema 1.10.13), ed in particolare della definizione (1.25) nella sua dimostrazione, poniamo

$$f(x) := \inf\{r \in D : x \in A(r)\}, \quad (3.5)$$

e definiamo una distanza $d(x, y) := f(x - y)$. È ovvio che questa d è invariante per traslazione. Mostriamo che d è una distanza, ossia che verifica le tre proprietà delle metriche (Definizione 1.2.3). Cominciamo con la proprietà (iii), la disuguaglianza triangolare. In base a (3.5), essa equivale alla disuguaglianza

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y) \quad (3.6)$$

per ogni $x, y \in V$. Poiché i valori di f sono minori o uguali a 1, questa disuguaglianza è sempre vera se il membro di destra è maggiore o uguale a 1, e quindi possiamo limitare l'attenzione a x e y tali che $f(x) + f(y) < 1$. Poiché i razionali diadici sono densi in $[0, 1]$ e l'operazione di somma è continua su \mathbb{R} , per ogni $\varepsilon > 0$ e x e y come sopra esistono r e s in D tali che $f(x) < r$,

$f(y) < s$ e $r + s < f(x) + f(y) + \varepsilon$. Le prime due di queste disuguaglianze equivalgono a $x \in A(r)$ e $y \in A(s)$, rispettivamente. Allora, per il Lemma 3.2.4, abbiamo $x + y \in A(r + s)$, e quindi

$$f(x + y) \leq r + s < f(x) + f(y) + \varepsilon.$$

Poiché ε è arbitrario, questo implica (3.6). È chiaro che $f(0) = 0$, e quindi $d(x, x) = 0$ per ogni x . Infine, mostriamo che $d(x, y) \geq 0$ (proprietà (i) della Definizione 1.2.3), e $d(x, y) = 0$ solo se $x = y$ (proprietà (ii) della stessa Definizione). Poiché gli insiemi $A(r)$ sono bilanciati, abbiamo che $f(x) = f(-x)$ per ogni x . Poiché i V_n formano una base locale all'origine, per ogni $x \neq 0$ esiste n tale che $x \notin V_n$. Ma dalla definizione degli $A(r)$ nella identità (3.3) vediamo che $V_n = A(2^{-n})$, e quindi $f(x) > 2^{-n} > 0$ grazie a (3.5). Questo completa la dimostrazione del fatto che d è una metrica. Mostriamo infine che essa induce la stessa topologia di V , ossia che ogni palla centrata all'origine in questa metrica è contenuta in qualcuno degli intorni della base locale $\{V_n\}$ e viceversa. Abbiamo appena visto che gli intorni della base locale $\{V_n\}$ sono le palle $A(2^{-n})$ in questa metrica. Inoltre la famiglia $A(r)$ è ordinata per inclusione ($A(r)$ cresce al crescere di r , Lemma 3.2.4), e per ogni altra palla B_ρ centrata nell'origine abbiamo $B_\rho := \{x : f(x) < \rho\} = \cup_{r < \rho} A(r)$ (perché $f(x) < \rho$ significa che c'è qualche $A(r)$ con $R < \rho$ che contiene x). Pertanto, se $\rho < 2^{-n}$, si ha $B_\rho \subset V_n$.

Viceversa, è ovvio che, se V è metrizzabile, le palle aperte intorno all'origine di raggio, diciamo, $1/n$, formano una base locale numerabile per la sua topologia. Infatti, per l'invarianza per traslazione della topologia, possiamo restringere l'attenzione ad aperti U che contengono 0. Per definizione di aperto, U deve contenere una palla con centro 0 e raggio $r > 0$, e quindi anche una palla di raggio $1/n$ se n è abbastanza grande. \square

Nota 3.2.6. Si noti che nell'ultima parte della precedente dimostrazione abbiamo implicitamente usato il fatto che in una metrica le palle che contengono all'origine sono automaticamente insiemi bilanciati: in uno spazio vettoriale non metrizzabile un argomento simile non vale per i dilatati di un qualsiasi intorno U di 0, e per questo tipo di asserzioni occorre richiedere che U sia limitato, come abbiamo fatto nella Proposizione 3.2.1. \square

Il seguente risultato segue immediatamente dal precedente Teorema 3.2.5 e dalla Proposizione 3.2.1. Vedremo che il viceversa non è vero (Corollario 3.2.2).

Corollario 3.2.7. *Ogni spazio vettoriale localmente limitato è metrizzabile.*

3.2.3 Spazi normabili

Definizione 3.2.8. (Seminorma.) Una funzione a valori reali su uno spazio vettoriale V si dice una *seminorma* se

- (i) p è subadditiva, ossia verifica la disuguaglianza triangolare $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$ per ogni u, v ;
- (ii) p è omogenea, nel senso che $p(\lambda v) = |\lambda|p(v)$;
- (iii) $p(v) \geq 0$ per ogni $v \in V$.

La nozione di seminorma sarà pesantemente utilizzata in relazione alla classe di Schwartz ed allo spazio delle distribuzioni (Capitoli 9 e 11), e per questo motivo verrà ivi ridefinita (Definizione 9.1.1).

Una seminorma, quindi, differisce da una norma solo perché non è in generale vero che $p(v) = 0$ solo se il vettore v è nullo (proprietà (i) della Definizione 1.2.8).

Definizione 3.2.9. Sia C un convesso in uno spazio vettoriale topologico V che contiene l'origine come punto interno. La *funzione di supporto* $p = p_C : V \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ è

$$p(v) = \inf\{\lambda > 0 : v/\lambda \in C\}. \quad (3.7)$$

(Questa funzione viene chiamata *funzionale di Minkowski* in [25].)

***Lemma 3.2.10.** In uno spazio vettoriale topologico V , la funzione di supporto P di un convesso C che contiene l'origine come punto interno soddisfa le proprietà seguenti:

- (i) $p(\lambda v) = \lambda p(v)$ per ogni $\lambda \geq 0$ e $v \in V$;
- (ii) $\{v : p(v) < 1\} \subset C \subset \{v : p(v) \leq 1\}$;
- (iii) $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$.

In particolare, p è una seminorma, secondo la Definizione 3.2.8. In generale $p(v) = 0$ non implica $v = 0$; ma se C è un insieme limitato, allora p è una norma.

Dimostrazione. Le prime due proprietà sono conseguenza immediata della definizione, la terza vale perché, se u/λ e v/μ sono in C , allora una loro combinazione convessa è

$$\frac{u+v}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{u}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{v}{\mu}$$

che quindi è anch'essa in C poiché C è convesso. Questo significa che $p(u+v) \leq \lambda + \mu$, da cui, prendendo gli estremi inferiori rispetto a λ e μ , otteniamo $p(u+v) \leq p(u) + p(v)$.

Ora aggiungiamo l'ipotesi che C sia limitato. In base alla Proposizione 3.2.1, gli aperti rC con $r > 0$ formano una base locale a 0 della topologia di V , la quale è di Hausdorff, quindi T_1 (Proposizione 1.10.10). In particolare, per ogni $v \neq 0$ esiste un aperto di base rC che non contiene v . In base alla definizione (3.7) che definisce p , questo equivale a dire che $p(v) > r$, e quindi in particolare $p(v) > 0$. \square

***Teorema 3.2.11.** *Uno spazio vettoriale topologico è normabile (ossia la sua topologia è indotta da una norma) se e solo se è localmente convesso e localmente limitato (terminologia come nella Definizione 3.1.1).*

Dimostrazione. Se V ammette una norma compatibile con la topologia, allora la palla unitaria B con centro l'origine è convessa, grazie alla disuguaglianza triangolare della norma (esercizio), ed è limitata, perché una base locale all'origine è data dagli aperti $B_r = rB$ con $r > 0$, e $\lambda B_r \supset B$ per ogni $|\lambda| > 1/r$.

Viceversa, sia U un intorno convesso limitato di 0 in V . Per il Lemma 3.1.8 U contiene un intorno convesso bilanciato J di 0, anch'esso limitato (perché sottoinsieme di un insieme limitato). Per $v \in V$ l'ultima asserzione del Lemma 3.2.10 fornisce una norma

$$\|v\| = p(v),$$

dove $p(v) := \inf\{t : v/t \in J\}$ è la funzione di supporto di J della Definizione 3.2.9.

Osserviamo che la definizione di p ed il fatto che J è aperto implicano che la palla $\{\|v\| < r\}$ coincida con rJ : basta dimostrarlo per $r = 1$, nel qual caso si ha $\|v\| = p(v) < 1$ se e solo se $\inf\{t : v/t \in J\} < 1$. Poiché la mappa $t \mapsto v/t$ è continua da \mathbb{R} a V , se $v \in J$ il numero 1 appartiene all'aperto

$\{t : v/t \in J\}$ e quindi questo estremo inferiore è inferiore a 1. Questo prova che $J \subset= \{p(v) < 1\} = \{\|v\| < 1\}$; il viceversa è ovvio perché J è bilanciato. In base alla dimostrazione dell'ultima parte della Proposizione 3.2.1, per $r > 0$ le palle rJ (ossia, come appena visto, le palle di norma r) formano una base locale a 0 per la topologia, e pertanto la topologia di V è quella indotta dalla norma. \square

3.2.4 **Appendice: seminorme, topologie localmente convesse e funzioni di supporto

In questa Appendice mostriamo che ogni spazio vettoriale topologico localmente convesso ammette una famiglia separatrice di seminorme continue, e viceversa, in uno spazio vettoriale in cui tale famiglia esiste, queste seminorme inducono una topologia che le rende continue.

Teorema 3.2.12. *Sia $\{O_\alpha\}$ una base locale all'origine di aperti convessi bilanciati in uno spazio vettoriale topologico V localmente convesso (essa esiste in base al Corollario 3.1.15). Sia p_α la funzione di supporto associata a O_α nel senso della Definizione 3.2.9. Allora $\{p_\alpha\}$ è una famiglia separatrice di seminorme continue su V , e, per ogni α , O_α è la palla unitaria della seminorma p_α , ossia $O_\alpha = \{v \in V : p_\alpha(v) < 1\}$.*

Dimostrazione. Sappiamo dal lemma 3.2.10 che p_α è una seminorma per ogni α . Poiché O_α è aperto, per ogni $v \in O_\alpha$ esiste $t < 1$ tale che $v/t \in O_\alpha$, e quindi $p_\alpha(v) < 1$; d'altro lato, se $v \notin O_\alpha$ allora $v/t \notin O_\alpha$, allora $x/t \notin O_\alpha$ per nessun $t < 1$, perché O_α è bilanciato. Quindi $O_\alpha = \{v \in V : p_\alpha(v) < 1\}$. Pertanto, se $v - u \in rO_\alpha$ per qualche $r > 0$, segue dalla disuguaglianza triangolare delle seminorme che $|p_\alpha(v) - p_\alpha(u)| \leq p_\alpha(v - u) < r$, e quindi p_α è continua. Infine, se $0 \neq w \in V$, esiste un aperto di base O_α tale che $w \notin O_\alpha$, e quindi $p_\alpha(w) \geq 1$: quindi la famiglia $\{p_\alpha\}$ separa i punti di V . \square

Teorema 3.2.13. *Sia $\{p_\alpha\}$ una famiglia separatrice di seminorme su uno spazio vettoriale V , $\{c_n\}$ una successione positiva decrescente con limite 0 e $O(\alpha, n) = \{v : p_\alpha(v) < c_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$). La famiglia \mathfrak{B} di tutte le intersezioni finite degli insiemi $O(\alpha, n)$ forma una base locale a 0 bilanciata e convessa di una topologia localmente convessa su V tale che ciascuna p_α è continua. Inoltre, in questa topologia, gli insiemi limitati sono tutti e soli quelli su cui ciascuna p_α è limitata.*

Dimostrazione. L'unione di traslati di insiemi di \mathfrak{B} forma una topologia invariante per traslazione, di cui \mathfrak{B} è una base locale a 0 convessa e bilanciata: quindi questa topologia è localmente convessa. Per mostrare che V risulta essere uno spazio vettoriale topologico, in base alla Definizione 3.1.1 dobbiamo mostrare che ogni suo punto forma un insieme chiuso e che le operazioni di somma e di moltiplicazione per scalari sono continue. Che i punti siano chiusi segue dal fatto che la famiglia di seminorme è separatrice. Infatti, grazie all'invarianza per traslazione della topologia, basta mostrare che $\{0\}$ è un insieme chiuso. Poiché le seminorme separano i punti, per ogni $v \neq 0$ esiste un indice α tale che $p_\alpha(v) > 0$. Sia allora n tale che $c_n < p_\alpha(v)$: allora $v \notin O(\alpha, n)$, e quindi v non appartiene alla chiusura dell'insieme $\{0\}$. Pertanto $\{0\}$ è chiuso.

Mostriamo che l'operazione di somma è continua. Ogni intorno U di 0 contiene un aperto di base $\bigcap_{j=1}^k O(\alpha_j, n_j)$. Sia n'_j tale che $c_{n'_j} < c_{n_j}/2$, e quindi $O(\alpha_j, n'_j) \subset O(\alpha_j, n_j)$: pertanto $W := \bigcap_{j=1}^k O(\alpha_j, n'_j) \subset U$. Grazie alla subaddittività delle seminorme, se $v_1, v_2 \in O(\alpha, n'_j)$ (ossia $p_\alpha(v_i) < c_{n'_j} < c_{n_j}/2$ per $i = 1, 2$), allora $p_\alpha(v_1 + v_2) < 2c_{n_j}$ e quindi $v_1 + v_2 \in O(\alpha, n_j)$. Pertanto $W + W \subset U$, e quindi la somma è una funzione continua da $V \times V$ a V . Una verifica analoga, basata questa volta sul fatto che W è un insieme bilanciato, mostra che la moltiplicazione per scalari è continua (esercizio: in caso di incertezza, si veda lo svolgimento, ad esempio, nella dimostrazione di [25, Theorem 1.37]). Quindi V è uno spazio vettoriale topologico. Poiché la base locale a 0 della topologia contiene le palle $O(\alpha, n) = \{v : p_\alpha(v) < c_n\}$, le seminorme p_α sono automaticamente continue a 0 in questa topologia. Ma per la disuguaglianza triangolare, per ogni $u, v \in V$ ogni seminorma p_α verifica $|p_\alpha(u) - p_\alpha(v)| \leq p_\alpha(u - v)$, e quindi, se è continua a 0, allora è continua anche ad ogni altro punto $v \in V$.

Infine, sia $E \subset V$ un insieme limitato. Poiché $O(\alpha, 1)$ è un intorno aperto di 0, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $E \subset kO(\alpha, 1)$: ma questo vuol dire che $p_\alpha(v) < k$ per ogni $v \in E$, ossia che p_α è limitata su E .

Viceversa, sia U un intorno di 0. Sappiamo che U contiene un aperto di base locale: $U \supset \bigcap_{j=1}^k O(\alpha_j, n_j)$. Se p_α è limitata su E per ogni α , esistono costanti A_1, \dots, A_k tali che $p_{\alpha_j}(v) < A_j$ per ogni $v \in E$ e per $j = 1, \dots, k$. Allora, $E \subset \{v : p_{\alpha_j}(v) < A_j, j = 1, \dots, k\}$. Ma per l'omogeneità delle seminorme, $\{v : p_{\alpha_j}(v) < A_j\} = (A_j/c_{n_j})\{v : p_{\alpha_j}(v) < c_j\} = (A_j/c_{n_j})O(\alpha_j, n_j) \subset U$. Quindi, se $r > A_j/c_{n_j}$ per $j = 1, \dots, k$, si ha $E \subset rU$, e quindi E è limitato (Definizione 3.1.1). \square

3.3 Operatori lineari e funzionali lineari continui

3.3.1 Operatori lineari continui

Definizione 3.3.1. (*Operatori lineari limitati su spazi vettoriali topologici.*) Siano V e W spazi vettoriali topologici e $T : V \rightarrow W$ un operatore lineare. Si dice che T è un operatore limitato se manda insiemi limitati in insiemi limitati (definiti nella Definizione 3.1.1).

Nota 3.3.2. Si noti che, come banale conseguenza della linearità e della Definizione 3.1.7, ogni operatore lineare manda insiemi bilanciati in insiemi bilanciati. \square

Nota 3.3.3. Mostriamo che, dall'invarianza per traslazione della topologia (Definizione 3.1.1), segue immediatamente che un operatore lineare su uno spazio vettoriale topologico è continuo se e solo se è continuo all'origine. Vale una proprietà ancora più forte: per ogni intorno U di 0_W c'è un intorno O di 0_V tale che, se $x - y \in O$, allora $Tx - Ty \in U$: ossia, T è uniformemente continuo. \square

Dimostrazione. Indichiamo con 0_V e 0_W le origini degli spazi V e W . Per ogni intorno U di 0_W , dal momento che T è continuo a 0_V , c'è un intorno O di 0_V tale che $T(O) \subset U$. Prendiamo x, y tali che $x \in y + O$, ossia $x - y \in O$: per linearità, $Tx - Ty \in U$, ovvero $T(y + O) \subset Ty + U$. Per l'invarianza della topologia, questo significa che ogni intorno di Ty contiene l'immagine di un intorno di y , perciò T è continuo ovunque. \square

Proposizione 3.3.4. *Siano V e W spazi vettoriali topologici localmente limitati. Ogni operatore lineare continuo $T : V \rightarrow W$ è limitato. Viceversa, se lo spazio vettoriale topologico V è metrizzabile, o equivalentemente, se la sua topologia ha una base locale numerabile (Definizione 1.10.1 e Teorema 3.2.5) e l'operatore lineare T è limitato, allora T è continuo. In particolare, questo vale se V è localmente limitato (Corollario 3.2.7).*

Dimostrazione. Sia $T : V \rightarrow W$ un operatore lineare continuo, $B \subset V$ un insieme limitato e $U \subset W$ un intorno aperto dell'origine. Poiché $T(0) = 0$ per linearità, la continuità assicura l'esistenza di un intorno O dell'origine in

V tale che $T(O) \subset U$. D'altra parte, dire che B è un insieme limitato significa che $B \subset \lambda O$ per tutti i $\lambda > 0$ sufficientemente grandi (Definizione 3.1.1). Pertanto, per tali λ abbiamo $T(B) \subset T(\lambda O) = \lambda T(O) \subset \lambda U$, e quindi $T(B)$ è un insieme limitato. Questo prova che T è un operatore limitato.

Viceversa, supponiamo che T sia un operatore limitato. Lo spazio V è localmente limitato e quindi la topologia di V ha una base locale numerabile, in base alla Proposizione 3.2.1. Vogliamo dimostrare che T è continuo. origini degli spazi V e W . Grazie alla Nota 3.3.3, basta dimostrare che T è continuo all'origine 0_V , ossia che, per ogni intorno aperto U di 0_W in W , $T^{-1}(U)$ contiene un intorno aperto O di 0_V in V , od in altre parole che per ogni intorno aperto U di 0_W esiste un aperto $O \ni 0_V$ in V tale che $T(O) \subset U$. Supponiamo per assurdo che questo sia falso: allora, data una base locale numerabile O_n di intorni di 0_V della topologia di V , per ogni n esiste $v_n \in O_n$ tale che $T(v_n) \notin U$. Quindi $v_n \rightarrow 0_V$ ma $T(v_n) \not\rightarrow 0_W = T(0_V)$. Pertanto T non è continuo per successioni all'origine, e quindi non è continuo, in base alla Proposizione 1.10.5, che qui si può applicare grazie al Lemma 3.1.11.

□

Però:

Proposizione 3.3.5. *Se un operatore lineare su un qualsiasi spazio vettoriale topologico è limitato su un intorno dell'origine (ossia, l'immagine di questo intorno è un insieme limitato), allora è continuo.*

Dimostrazione. Supponiamo che l'operatore lineare T sia limitato su un intorno U di 0 . Allora esiste $C > 0$ tale che $|T(v)| < C$ per ogni $v \in U$. Quindi, per ogni $r > 0$, $|T(u)| < r$ se v appartiene ad un opportuno dilatato di U , e precisamente $\frac{r}{C}U$. Ciò significa che T è continuo all'origine. Allora, per la Nota 3.3.3, è continuo ovunque. □

Nota 3.3.6. It does not follow from the previous Proposition that bounded operators in any topological vector space are continuous, because a neighborhood of the origin in general is not a bounded set: indeed, it is bounded only if the space is locally bounded (Corollary 3.2.2). □

Definizione 3.3.7. (Norma di un operatore lineare su uno spazio normato.) Siano V e W spazi normati. Segue dalla Definizione 3.3.1 che $T : V \rightarrow W$ è un operatore lineare limitato se e solo se l'immagine sotto T di palle centrate nell'origine è contenuta in palle centrate nell'origine. Denotando

con $\mathcal{B}(V, W)$ lo spazio vettoriale degli operatori limitati, per ogni operatore $T \in \mathcal{B}(V, W)$, definiamo la *norma* $\|T\|$ come l'estremo inferiore delle costanti $C > 0$ tali che, per ogni $v \in V$, si abbia $\|Tv\| \leq C\|v\|$. È elementare osservare che questo estremo inferiore coincide con quello che si avrebbe se la disuguaglianza fosse stretta (esercizio): in molti libri la definizione di norma di un operatore lineare è data a partire dalla disuguaglianza stretta.

È chiaro che gli operatori lineari limitati su spazi normati sono precisamente quelli di norma finita.

Esercizio 3.3.8. La norma di un operatore, introdotta nella precedente Definizione 3.3.7, soddisfa la definizione di norma sullo spazio vettoriale $\mathcal{B}(V, W)$ (ossia è non negativa, nulla solo per l'operatore nullo e verifica la disuguaglianza triangolare).

Svolgimento. La disuguaglianza triangolare per $\|T\|_{\mathcal{B}(V, W)}$ segue da $\|(T_1 + T_2)v\|_V \leq \|T_1v\|_V + \|T_2v\|_V$, da cui:

$$\begin{aligned} \|(T_1 + T_2)v\|_{\mathcal{B}(V, W)} &\leq \sup_{\|v\|_V=1} (\|T_1v\|_V + \|T_2v\|_V) \\ &\leq \sup_{\|v\|_V=1} \|T_1v\|_V + \sup_{\|v\|_V=1} \|T_2v\|_V = \|(T_1)_{\mathcal{B}(V, W)}\| + \|(T_2)_{\mathcal{B}(V, W)}\|. \end{aligned}$$

□

Nota 3.3.9. Osserviamo che la norma di un operatore lineare ha il seguente significato geometrico: è il raggio della più piccola sfera (nella norma di W) che contiene l'immagine sotto T della sfera unitaria nella norma di V . In altre parole, è il rapporto fra il raggio della sfera $S_W \subset W$ circoscritta all'immagine di una sfera $S_V \subset V$ ed il raggio di S_V . □

Corollario 3.3.10. *Dati due operatori lineari $A : V \rightarrow W$ e $B : U \rightarrow V$, indichiamo con $AB : U \rightarrow W$ l'operatore composto $A \circ B$. Allora*

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla associatività, grazie alla quale per ogni vettore $u \in U$ si ha

$$\|(AB)u\|_W = \|A(Bu)\|_W \leq \|A\| \|Bu\|_V \leq \|A\| \|B\| \|u\|_U$$

da cui l'enunciato. □

Proposizione 3.3.11. *Se V è uno spazio normato e W è uno spazio di Banach (ossia completo), allora lo spazio $\mathcal{B}(V, W)$, con la norma operatoriale introdotta nella Definizione 3.3.7, è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $\{T_n\}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{B}(V, W)$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ se $n, m > N$. Ma allora, per ogni $v \in V$, anche $\{T_nv\}$ è una successione di Cauchy in W , dal momento che

$$\|T_nv - T_mv\|_W \leq \|T_n - T_m\|_{\mathcal{B}(V, W)} \|v\|_V. \quad (3.8)$$

Allora, poiché W è uno spazio di Banach, per ogni $v \in V$, esiste il limite $\lim_n T_nv$, che indichiamo con Tv . È evidente che l'operatore $v \mapsto Tv$ è lineare.

Inoltre, sappiamo che $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ se $n, m > N$: quindi, in base alla disuguaglianza (3.8), $\|T_nv - T_mv\| < \varepsilon \|v\|$, e, passando al limite (nella norma di W) per $n \rightarrow \infty$, ne deduciamo che $\|Tv - T_mv\| \leq \varepsilon \|v\|$ se $m > N$. Allora fissiamo un $m > N$ e, dalla Definizione 3.3.7 di norma di T , abbiamo $\|Tv\| \leq (\|T_m\| + \varepsilon) \|v\|$. Quindi T è un operatore limitato e $\|T - T_m\| \leq \varepsilon$ per $m > N$. Questo equivale al fatto che $T_m \rightarrow T$ nella norma di $\mathcal{B}(V, W)$. \square

Proposizione 3.3.12. *Se V ha dimensione finita, $W = V$ e T è diagonalizzabile, allora*

$$\|T\| = \max \{|\lambda| : \lambda \text{ autovalore di } T\}.$$

Dimostrazione. Supponiamo che T sia diagonale (nella base canonica): cioè che gli autovettori siano $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, e che gli autovalori siano ordinati in modo che $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Allora

$$Tv = T\left(\sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mathbf{e}_i,$$

e quindi

$$\|Tv\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |v_i|^2 \leq |\lambda_1|^2 \sum_{i=1}^n |v_i|^2 = |\lambda_1|^2 \|v\|^2.$$

Perciò $\|T\| \leq |\lambda_1|$. D'altra parte, $T\mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1$, e quindi $\|T\| \geq |\lambda_1|$. Ne segue che

$$\|T\| = |\lambda_1| = \max \{|\lambda| : \lambda \text{ autovalore di } T\}.$$

Questo prova la prima parte dell'enunciato.

Se invece T è diagonalizzabile, cioè se esiste una base di v_1, \dots, v_n di V tale che T manda ogni vettore v_i in un suo multiplo $\lambda_i v_i$, allora l'operatore C di cambiamento di base che manda la base canonica nella base dei v_i diagonalizza T , nel senso che $C^{-1}TC$ è diagonale, e

$$\|T\| \leq \|C\| \|C^{-1}\| \max \{|\lambda| : \lambda \text{ autovalore di } T\} .$$

Ma poiché gli autovettori sono definiti solo a meno di multipli, possiamo rinormalizzarli, e quindi avere $\|C\| \|C^{-1}\| = 1$. Quindi l'enunciato segue dal caso diagonale e dal Corollario 3.3.10. \square

Esercizio 3.3.13. Se un operatore T non è diagonalizzabile, la sua norma in generale è maggiore del modulo del massimo autovalore. Ad esempio, su \mathbb{R}^2 si consideri, per ogni $x \in \mathbb{R}$, l'operatore T_x espresso nella base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $x \neq 0$, l'operatore T_x è espresso in forma canonica di Jordan e non è diagonalizzabile: ha l'unico autovalore 1 con molteplicità 2, e quindi se fosse diagonalizzabile sarebbe l'operatore identità. Si provi che la sua norma è maggiore di 1 e diverge al divergere di $|x|$.

Suggerimento: è facile calcolare direttamente la norma, ma lo è ancora di più utilizzare la Nota 3.3.9. \square

3.3.2 Funzionali lineari continui

Definizione 3.3.14. Un funzionale lineare F su uno spazio vettoriale topologico V (sul campo complesso) è un operatore lineare $F : V \rightarrow \mathbb{C}$.

Se V è uno spazio normato e F è continuo si definisce la sua norma in base alla Definizione 3.3.7:

$$\|F\| = \inf \{C > 0 : |Fv| \leq C\|v\| \forall v \in V\} . \quad (3.9)$$

Lo spazio dei funzionali continui su uno spazio vettoriale topologico V si chiama lo *spazio duale* di V , e si indica con V' . Sappiamo dall'Esercizio 3.3.8 che il duale di uno spazio normato è uno spazio normato e dalla Proposizione 3.3.11 che il duale di uno spazio di Banach è uno spazio di Banach.

Siccome i funzionali lineari sono casi particolari di operatori lineari, sappiamo dalla Proposizione 3.3.4 che un funzionale lineare limitato è continuo, e su uno spazio localmente metrizzabile è continuo se e solo se è limitato. Inoltre:

Proposizione 3.3.15. *Sia F un funzionale lineare su uno spazio vettoriale topologico localmente limitato V . Allora F è continuo se e solo se il suo nucleo $\text{Ker } F$ è chiuso in V .*

Dimostrazione. Se F è continuo, allora $\text{Ker } F$, essendo la controimmagine dell'insieme chiuso $\{0\}$ in \mathbb{C} , è chiuso.

Viceversa, supponiamo $\text{Ker } F$ chiuso e mostriamo che F è un funzionale limitato: questo e la Proposizione 3.3.4 implicano che F sia continuo. Possiamo supporre che $\text{Ker } F$ non sia denso in V , perché altrimenti, essendo chiuso, coinciderebbe con tutto V ed in tal caso $F = 0$ e l'enunciato vale automaticamente. Allora il complemento di $\text{ker } F$ ha interno non vuoto. Pertanto esiste un vettore $v \notin \text{Ker } F$ un cui intorno è disgiunto da $\text{ker } F$. Poiché, per l'invarianza per traslazione, gli intorni di v sono i traslati di intorni dell'origine, questo significa che esiste un intorno U dell'origine, che per il Lemma 3.1.8 possiamo scegliere bilanciato, tale che

$$(v + U) \cap \text{Ker } F = \emptyset. \quad (3.10)$$

Allora $F(U)$ è bilanciato in \mathbb{C} (Nota 3.3.2). Ma i sottoinsiemi bilanciati illimitati di \mathbb{C} sono evidentemente tutto \mathbb{C} . Pertanto ci sono due possibilità: o $F(U)$ è un sottoinsieme limitato di \mathbb{C} , ed in tal caso F è un funzionale limitato, oppure $F(U) = \mathbb{C}$. Ma nel secondo caso, deve esistere $w \in U$ tale che $F(w) = -F(v)$: allora $v + w$ appartiene a $F(v + U)$ ed anche a $\text{Ker } F$, il che contraddice (3.10). Quindi F è limitato su un intorno dell'origine, e perciò continuo, in base alla Proposizione 3.3.5. \square

3.4 * Assioma della scelta, prodotti cartesiani infiniti e principio di massimalità di Hausdorff

Questa Sezione, pur essendo indispensabile per il successivo Teorema di Hahn–Banach 3.5.3, presenta solo assiomi generali della matematica, i quali

quasi certamente sarebbero considerati ovvi da un qualsiasi lettore inesperto o non molto critico. Pertanto i lettori in tale condizione sono invitati ad astenersene, e per questo il titolo della Sezione è contrassegnato con una stelletta.

Un assioma fondamentale spesso assunto in molti campi della matematica è l'*assioma della scelta*, che informalmente dice che, data una qualsiasi famiglia di insiemi, si ottiene un nuovo insieme non vuoto scegliendone gli elementi ad uno ad uno dagli insiemi della famiglia. In altre parole, esiste un nuovo insieme non vuoto ciascuno dei cui elementi appartiene ad uno ed un solo insieme della famiglia di partenza, e ciascun insieme della famiglia contribuisce un elemento. Che questo nuovo insieme sia costruibile con una procedura iterativa è ovvio se la famiglia iniziale è finita o numerabile, ma non è ovvio se la famiglia è più che numerabile (per questo occorre un assioma!). Più formalmente:

Assioma 1. (*Assioma della scelta.*) Sia \mathcal{F} una famiglia di insiemi non vuoti. Esiste una funzione F definita su \mathcal{F} che ad ogni insieme $A \in \mathcal{F}$ associa un elemento $F(A) \in A$.

Grazie a questo assioma è possibile dare un senso al concetto di prodotto cartesiano di una famiglia di insiemi più che numerabile:

Definizione 3.4.1. Sia $\{A_\lambda\}$ una famiglia di insiemi indicizzata da un indice $\lambda \in \Lambda$, dove l'insieme di indici Λ non è necessariamente finito o numerabile. Allora il prodotto cartesiano $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ è l'insieme i cui elementi sono tutte le successioni generalizzate $\{a_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ (ovvero tutte le funzioni $\lambda \mapsto a_\lambda$) tali che $a_\lambda \in A_\lambda$ per ogni indice λ . (Queste funzioni esistono grazie all'assioma della scelta.)

Definizione 3.4.2. Una relazione \prec su un insieme A si chiama *antisimmetrica* se per ogni $a, b \in A$ tali che $a \prec b$ e $b \prec a$ si ha $a = b$. La relazione si chiama un *ordinamento parziale* se è antisimmetrica e *transitiva*: se a, b e c sono elementi di A tali che $a \prec b$ e $b \prec c$, allora $a \prec c$. Un tipico esempio è la relazione di inclusione \subset definita sulla famiglia di tutti i sottoinsiemi di un dato insieme. Se essa è anche esaustiva, nel senso che per *ogni* coppia $a, b \in A$ si ha $a \prec b$ oppure $b \prec a$, allora la relazione si dice un *ordinamento totale* (ad esempio la relazione di ordine su \mathbb{R}).

Un elemento $a \in A$ si dice *massimale* rispetto all'ordinamento parziale \prec se non esiste $b \in A$, $b \neq a$, tale che $a \prec b$; in maniera simmetrica si definisce un elemento *minimale*.

L'assioma della scelta ha parecchie altre formulazioni equivalenti, una delle quali, il principio di massimalità di Hausdorff, è importante nel resto di questo Capitolo. Lo enunciamo qui di seguito: per una dimostrazione dell'equivalenza con l'assioma della scelta si veda [15, pg. 31-36 e Appendice]. Per una deduzione più breve del principio di massimalità di Hausdorff a partire dall'assioma della scelta si veda [23, Appendice].

Assioma 2. (*Principio di massimalità di Hausdorff.*) Dato un qualsiasi insieme X munito di un ordinamento parziale \prec , ogni sottoinsieme totalmente ordinato di X (rispetto all'ordinamento \prec) è contenuto in un sottoinsieme totalmente ordinato S massimale (rispetto all'inclusione), ossia tale che, se $S \subset T \subset X$ e T è totalmente ordinato (rispetto a \prec), allora $S = T$.

Nota 3.4.3. L'applicazione tipica è quella in cui $X = \mathfrak{P}(A)$ è la famiglia di tutti i sottoinsiemi di un insieme A , parzialmente ordinata per inclusione. I sottoinsiemi totalmente ordinati sotto questo ordinamento parziale sono le famiglie $\{A_\alpha\}$ di sottoinsiemi di A *inscatolate*, ossia consistenti di insiemi inclusi uno nell'altro al crescere dell'indice. L'assioma asserisce che ogni sottofamiglia di questo tipo è inclusa in una famiglia massimale, ossia tale che non vi si possono aggiungere altri insiemi senza perdere l'ordinamento totale per inclusione. \square

3.5 Il teorema di Hahn–Banach

Questa Sezione riguarda funzionali lineari definiti su spazi vettoriali ma non necessariamente continui: anzi, gli spazi vettoriali in generali non sono spazi normati, non sono neppure spazi vettoriali topologici, e quindi la nozione di continuità non ha senso. Il problema è le estendibilità di un funzionale da un sottospazio S di V a tutto V . A questo scopo, la nozione di continuità rispetto ad una norma, ossia $|F(v)| \leq C\|v\|$, viene rimpiazzata con una maggiorazione con una funzione a valori reali e subadditiva:

Definizione 3.5.1. (Funzioni reali subaddittive e seminorme.) Sia V uno spazio vettoriale. Una funzione $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

- (i) *subadditiva* se $p(v_1 + v_2) \leq p(v_1) + p(v_2)$ per ogni $v_1, v_2 \in V$;
- (ii) *positivamente omogenea* se per ogni $v \in V$ e $\lambda \geq 0$ si ha $p(\lambda v) = \lambda p(v)$

In generale non è vero che $p(-v) = p(v)$. Quindi, quando una funzione F su V è maggiorata da una funzione positivamente omogenea e subadditiva, la maggiorazione è solo una maggiorazione per eccesso, ma F potrebbe essere illimitata inferiormente. Però, se F è un funzionale lineare maggiorabile *in modulo* con una funzione positivamente omogenea subadditiva, nel senso che $|F(v)| \leq p(v)$ per ogni $v \in V$, allora necessariamente $p(v) \geq 0$ per ogni $v \neq 0$, e $p(0) = 0$ per la condizione (ii) di omogeneità. Anche in questo caso, però, non è necessariamente vera l'identità $p(-v) = p(v)$, anche se naturalmente $|F(-v)| = |F(v)|$ per la linearità di F . In generale, tranne che non si usi $|F(v)| \leq p(v) \forall v$, non è neppure vero che $p \geq 0$. Quindi le norme e le seminorme sono funzioni subaddittive, ma in generale le funzioni subaddittive non sono seminorme. Però, al fine di queste maggiorazioni, le funzioni subaddittive più simili alle norme sono le seminorme che abbiamo introdotto nella Definizione 3.2.8.

Cominciamo con il mostrare un risultato preliminare sulla estendibilità di funzionali maggiorati da funzioni subaddittive positivamente omogenee. Si noti che, affinché un funzionale lineare sia maggiorato da una funzione a valori reali, per prima cosa occorre che il funzionale stesso sia a valori reali: a causa della linearità, ciò richiede che il campo di scalari su cui è definito lo spazio vettoriale sia \mathbb{R} e non \mathbb{C} (naturalmente ogni spazio vettoriale sui complessi si può reinterpretare come uno spazio vettoriale sui reali a dimensione doppia, ma occorre reinterpretarlo in questo modo per poter dare un senso ai prossimi enunciati). In seguito presenteremo una variante che si applica a spazi vettoriali sul campo complesso.

Lemma 3.5.2. *Sia S un sottospazio proprio di uno spazio vettoriale V sul campo reale, e consideriamo il sottospazio T di V generato da S e da un nuovo vettore $y \in V \setminus S$: chiaramente $S \subset T$ è un sottospazio proprio (di codimensione 1).*

Sia p una funzione subaddittiva positivamente omogenea definita su T e f un funzionale lineare su S (naturalmente a valori reali) tale che $f(s) \leq p(s)$ per ogni $s \in S$. Allora f si estende ad un funzionale lineare F su T (ossia $F|_S \equiv f$) che verifica su T la stessa maggiorazione: $F(t) \leq p(t)$ per ogni $t \in T$.

Dimostrazione. Lo spazio vettoriale (reale) T generato da S e y consiste delle combinazioni lineari $s + \lambda y$ con $s \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Ogni estensione lineare F di f da S a T deve quindi verificare $F(s + \lambda y) = F(s) + \lambda F(y) = f(s) + \lambda F(y)$.

Quindi dobbiamo solo scegliere $\alpha := F(y)$ in maniera compatibile con la condizione $F \leq p$.

Usiamo la linearità di F e la subadditività di p per stabilire quali vincoli sulla scelta di α questa condizione comporti: per ogni $s_1, s_2 \in S$ si ha $s_1 + s_2 = s_1 - y + y + s_2$, e quindi

$$f(s_1) + f(s_2) = f(s_1 + s_2) \leq p(s_1 + s_2) \leq (p(s_1 - y) + p(s_2 + y)).$$

Separando le variabili otteniamo $-p(s_1 - y) + f(s_1) \leq p(s_2 + y) - f(s_2)$, ossia la condizione

$$\sup_{s \in S} (-p(s - y) + f(s)) \leq \inf_{s \in S} (p(s + y) - f(s)).$$

Allora scegliamo α tra gli elementi separatori degli insiemi ai due membri, ossia in modo che

$$\sup_{s \in S} (-p(s - y) + f(s)) \leq \alpha \leq \inf_{s \in S} (p(s + y) - f(s)). \quad (3.11)$$

Occorre solo verificare che questa scelta di α verifica la disuguaglianza $F(s + \lambda y) \equiv f(s) + \lambda \alpha \leq p(s + \lambda y)$. A questo fine, per prima cosa osserviamo che, fissato $\lambda > 0$ arbitrario, dalla seconda disuguaglianza in (3.11), applicata al vettore s/λ invece di s , si ottiene, per ogni $s \in S$,

$$\alpha \leq p\left(\frac{s}{\lambda} + y\right) - f\left(\frac{s}{\lambda}\right), \quad (3.12)$$

mentre dalla prima si ottiene

$$\alpha \geq -p\left(\frac{s}{\lambda} - y\right) + f\left(\frac{s}{\lambda}\right). \quad (3.13)$$

Notiamo anche che, se si moltiplicano entrambi i membri di (3.12) per $\lambda > 0$ dalla omogeneità positiva di p si ottiene

$$\lambda \alpha \leq p(s + \lambda y) - f(s). \quad (3.14)$$

Invece, se si moltiplicano entrambi i membri di (3.13) per $-\lambda < 0$, si ottiene

$$-\lambda \alpha \leq p(s - \lambda y) - f(s). \quad (3.15)$$

Allora, da (3.14), ora abbiamo, per $\lambda > 0$,

$$f(s) + \lambda \alpha \leq p(s + \lambda y),$$

e da (3.15), per $\lambda < 0$

$$f(s) - \lambda\alpha \leq p(s - \lambda y).$$

Quindi, in entrambi i casi, abbiamo verificato la disuguaglianza richiesta. \square

Per ottenere l'estendibilità del funzionale da S a tutto V , e non soltanto ad un sottospazio che estende V di una (o di un numero finito) di dimensioni, dobbiamo ormai invocare solo il principio di massimalità di Hausdorff:

Teorema 3.5.3. (Teorema di Hahn–Banach per spazi vettoriali reali.) *Sia p un funzione subadditiva e positivamente omogenea su uno spazio vettoriale reale V , nel senso della precedente Definizione 3.5.1, sia S un sottospazio proprio di V e f un funzionale lineare su S che verifica $f(s) \leq p(s)$ per ogni $s \in S$. Allora esiste un funzionale lineare F definito su tutto V , che estende f nel senso che $F|_S \equiv f$, e che verifica la disuguaglianza $F(v) \leq p(v)$ per ogni $v \in V$.*

Dimostrazione. Sia Ξ l'insieme di tutti i funzionali lineari f definiti ciascuno su un qualche sottospazio $V_f \subset V$ e che verificano $f(v) \leq p(v)$ per ogni $v \in V_f$. Diciamo che un funzionale lineare g estende un altro funzionale lineare f se $V_f \subset V_g$ e $g|_{V_f} \equiv f$. L'estensione definisce un ordinamento parziale \prec su Ξ : per ogni $f, g \in \Xi$, $f \prec g$ se g estende f .

In base al principio di massimalità di Hausdorff (Assioma 2 della Sezione 3.4), esiste una famiglia massimale $\{g_\alpha\}$ totalmente ordinata di funzionali in Ξ che contiene f . Ora “cuciamo insieme” questi funzionali g_α per costruire un nuovo funzionale F che li estende tutti. Come dominio di F scegliamo $W := \cup_\alpha V_\alpha$, e per $v \in V_\alpha$ poniamo $F(v) = g_\alpha(v)$. Lo stesso vettore v può appartenere a più di un sottospazio V_α (poiché $\{g_\alpha\}$ è una famiglia totalmente ordinata, i domini V_α sono inscatolati), ma se $v \in V_\alpha \subset V_\beta$ allora g_β estende g_α e quindi $g_\beta(v) = g_\alpha(v)$: questo prova che la definizione di F è ben posta, ossia indipendente dalla scelta di α . Il dominio $W := \cup_\alpha V_\alpha$ di F è un sottospazio vettoriale di V perché i V_α sono inscatolati, o più precisamente perché, se $u, v \in W$, allora $u \in V_\alpha$ e $v \in V_\beta$ per qualche α, β , ma per l'ordinamento totale della famiglia dei g_α deve essere $g_\alpha \prec g_\beta$ o viceversa, ossia $V_\alpha \subset V_\beta$ o viceversa. Quindi entrambi u e v appartengono al più grande di questi due sottospazi, diciamo V_β , ma allora anche le loro combinazioni lineari vi appartengono, e quindi stanno in W . Inoltre, per ogni $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ si ha $F(\lambda u + \eta v) = g_\beta(\lambda u + \eta v) = \lambda g_\beta(u) + \eta g_\beta(v) = \lambda F(u) + \eta F(v)$, e quindi

F è un funzionale lineare, e per costruzione esso estende tutti i g_α , quindi in particolare f . Questa estensione di f è massimale, perché, se $F \prec G$, allora G estende tutti i g_α , però dal momento che la famiglia $\{g_\alpha\}$ è massimale questo significa che G è uno dei g_α : ma allora $G \prec F$ e quindi $G = F$ per la proprietà antisimmetrica dell'ordinamento (Definizione 3.4.2).

Rimane solo da dimostrare che $W = V$. Supponiamo per assurdo che esista $v \neq 0$, $v \in V \setminus W$. Grazie al precedente Lemma 3.5.2 sappiamo che esiste una estensione di F allo spazio generato da W e v che verifica ancora, su questo spazio più grande, $F \leq p$: allora F può essere esteso da un altro funzionale in Ξ e quindi non è massimale, una contraddizione. \square

Esempio 3.5.4. (Limite di Banach.) Sullo spazio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ delle successioni reali limitate $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, consideriamo la funzione $p_+(\{x_n\}) := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. Allora $p_+(\{\alpha x_n\}) = \alpha p_+(\{x_n\})$ per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$, e $p_+(\{x_n + y_n\}) \leq p_+(\{x_n\}) + p_+(\{y_n\})$. Quindi p_+ è una funzione omogenea subadditiva. Analogamente, la funzione $p_-(\{x_n\}) := \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ è omogenea, ma superadditiva: $p_-(\{x_n + y_n\}) \geq p_-(\{x_n\}) + p_-(\{y_n\})$. Ora consideriamo il sottospazio vettoriale $\ell \subset \ell^\infty$ delle successioni che hanno limite finito. La funzione $f(\{x_n\}) := \lim_n x_n$ è un funzionale lineare sullo spazio ℓ , e su questo sottospazio si ha $f = p_+ = p_-$. Quindi, grazie al Teorema 3.5.3, f si estende ad un funzionale lineare Lim su ℓ^∞ tale che $\text{Lim} \leq p_+$. D'altra parte, $-\text{Lim}(\{x_n\}) = \text{Lim}(\{-x_n\}) \leq \limsup\{-x_n\} = -\liminf\{x_n\}$, quindi $\text{Lim} \geq p_-$ su ℓ^∞ . Quindi $\liminf \leq \text{Lim} \leq \limsup$.

Sullo spazio delle successioni, sia λ_k l'operatore di traslazione di passo k , definito da $\lambda_k(\{x_n\}) = \{x_{n-k}\}_{j=1}^\infty$. È chiaro che p_+ e p_- sono invarianti per traslazione: $\limsup_n x_{n-k} = \limsup_n x_n$, ed analogamente per il minimo limite. Allora anche la loro estensione Lim è invariante per traslazione, perchè

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_n (\{x_n\} - \lambda_k \{x_n\}) = \liminf_n (x_n - x_{n-k}) \\ &\leq \text{Lim}_n (x_n - x_{n-k}) \leq \limsup_n (x_n - x_{n-k}) = 0 \end{aligned}$$

e quindi $\text{Lim} x_n = \text{Lim} x_{n-k}$, per ogni fissato k . Il funzionale Lim su ℓ^∞ si chiama il *limite di Banach*. \square

Proviamo ora una variante del Teorema di Hahn–Banach 3.5.3 per spazi vettoriali complessi:

Teorema 3.5.5. (Teorema di Hahn–Banach per spazi vettoriali complessi.) *Su uno spazio vettoriale V sul campo complesso, sia p una seminorma (come visto nella Definizione 3.5.1, una seminorma è una funzione reale subadditiva ed omogenea, nel senso che*

$$p(\alpha v) = |\alpha|p(v) \quad (3.16)$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ e $v \in V$). Sia S un sottospazio proprio di V e f un funzionale su S lineare complesso (ossia lineare rispetto alle combinazioni lineari a coefficienti complessi) e che verifica $|f(s)| \leq p(s)$ per ogni $s \in S$. Allora esiste un funzionale lineare (complesso) F definito su tutto V , che estende f nel senso che $F|_S \equiv f$, e che verifica la disuguaglianza $|F(v)| \leq p(v)$ per ogni $v \in V$.

Dimostrazione. Lo spazio complesso V è anche uno spazio vettoriale reale, ed ogni funzionale lineare complesso F è anche un funzionale lineare reale, ma il viceversa non è sempre vero, perché se F è un funzionale lineare reale allora $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ per scalari reali λ , ma non necessariamente per scalari complessi. Quei funzionali $F : V \rightarrow \mathbb{C}$ lineari in senso reale che sono lineari su V anche nel senso complesso sono quelli per cui, per ogni $v \in V$, si ha $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ anche quando $\lambda \in \mathbb{C}$: questo equivale a richiedere che valga l'identità $F(iv) = iF(v)$ per ogni vettore $v \in V$.

Allora consideriamo il funzionale f lineare in senso complesso su S , che pertanto soddisfa l'identità

$$f(is) = if(s) \quad (3.17)$$

per ogni $s \in S$. Poniamo $g = \operatorname{Re} f$ e $h = \operatorname{Im} f$. I funzionali g e h sono lineari in senso reale e $f = g + ih$. Segue da (3.17) che $g(is) + ih(is) = f(is) = if(s) = i(g(s) + ih(s)) = ig(s) - h(s)$, da cui, separando le parti reale ed immaginaria, si trova $g(is) = -h(s)$. In altre parole, per ogni $s \in S$,

$$f(s) = g(s) + ih(s) = g(s) - ig(is). \quad (3.18)$$

D'altra parte, $g(s) = \operatorname{Re} f(s) \leq |f(s)| \leq p(s)$. Allora, in base alla versione reale del Teorema di Hahn–Banach, esiste un funzionale lineare reale G su tutto V che soddisfa $G(v) \leq p(v)$ ed estende g . Allora poniamo $F(v) = G(v) - iG(iv)$. Sappiamo da (3.18) che $F(s) = f(s)$ per ogni $s \in S$, ovvero che F estende f . Inoltre F è lineare nel senso complesso, perché

$$F(iv) = G(iv) - iG(i^2v) = G(iv) + iG(v) = i(G(v) - iG(iv)) = iF(v).$$

Resta da provare la maggiorazione $|F| \leq p$. Scriviamo $F(v)$ nella forma polare, $F(v) = |F(v)|e^{it}$. Allora $F(e^{-it}v) = |F(v)|$ è un numero reale (non negativo), e quindi $F(e^{-it}v) = G(e^{-it}v)$. Dalla proprietà di omogeneità (3.16) ora segue che $|F(v)|F(e^{it}v) = G(e^{-it}v) \leq p(e^{-it}v) = p(v)$. \square

Una parte della dimostrazione precedente merita di essere menzionata separatamente per la seguente proprietà interessante:

Corollario 3.5.6. *Un funzionale lineare complesso su uno spazio vettoriale complesso è univocamente determinato dal funzionale reale dato dalla sua parte reale (e anche dal funzionale lineare reale dato dalla sua parte immaginaria). In particolare, sia W lo spazio vettoriale complesso dato dalla complessificazione di uno spazio vettoriale reale V , nel senso che i vettori in W sono del tipo $u + iv$ con $u, v \in V$, con l'operazione ovvia di moltiplicazione per scalari complessi (ad esempio la moltiplicazione per i manda $u \in V$ in $iu \in W$) e di addizione: $(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) = (u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2)$. Allora il duale (complesso) di W è la complessificazione del duale (reale) di V , nel senso che, per ogni $f \in W'$,*

$$f(u + iv) = \operatorname{Re} f(u) - \operatorname{Im} f(v) + i(\operatorname{Re} f(v) + \operatorname{Im} f(u)).$$

Dimostrazione. Scriviamo $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$. Allora segue da (3.17) che $\operatorname{Im} f(iv) = i \operatorname{Re} f(v)$, per ogni v . Quindi, una volta data la parte reale di f , la sua parte immaginaria è univocamente determinata. Il viceversa segue allo stesso modo dalla relazione $\operatorname{Re} f(iv) = \operatorname{Re}(if(v)) = -\operatorname{Im} f(v)$. Per l'ultima asserzione, sia f un funzionale complesso su W . Allora

$$\begin{aligned} f(u + iv) &= \operatorname{Re} f(u + iv) + i \operatorname{Im} f(u + iv) \\ &= \operatorname{Re} f(u) + \operatorname{Re}(if(v)) + i \operatorname{Im} f(u) + i \operatorname{Im}(if(v)) \\ &= \operatorname{Re} f(u) - \operatorname{Im} f(v) + i \operatorname{Im} f(u) + i \operatorname{Re} f(v). \end{aligned}$$

\square

Nota 3.5.7. Nella loro piena generalità i teoremi di Hahn–Banach consentono di estendere funzionali lineari reali maggiorati da funzioni subaddittive (Teorema 3.5.3) o funzionali complessi maggiorati in modulo da seminorme (Teorema 3.5.5). Un caso particolare è quello di funzionali lineari su uno spazio normato maggiorati in modulo dalla norma, ossia continui (Definizione 3.3.14). In tal caso il teorema di Hahn–Banach 3.5.5 permette costruire

un numero arbitrario di estensioni di un funzionale continuo f su un sottospazio S chiuso in V (nella norma di V) ad un funzionale continuo (con la stessa norma $\|f\|$) sull'intero spazio V . Ad esempio, in base al Lemma 3.5.2, sappiamo che se S ha codimensione finita d in V , è immediato vedere (esercizio per il lettore) che le estensioni di f sono in corrispondenza biunivoca con lo spazio quoziente V/S , e quindi sono uno spazio vettoriale di dimensione d . Naturalmente, se il sottospazio vettoriale S , invece di essere chiuso in V , è denso, allora esiste un'unica estensione continua di f , ovvero $f(v) = \lim_{s \rightarrow v} f(s)$. Un esempio tipico è se S è denso ma è chiuso in una norma più grande di quella di V e non equivalente, come per esempio nel caso di $S = L^p[0, 1]$ e $V = L^r[0, 1]$ con $r > p$: si rammentino i teoremi di inclusione e di densità per gli spazi L^p .

□

Ecco due esempi di interesse geometrico.

Proposizione 3.5.8. *Sia V uno spazio normato. Per ogni $v \neq 0 \in V$, esiste un funzionale lineare continuo f su V , di norma 1, tale che $f(v) = \|v\|$. Inoltre, se $U \subset V$ è un sottospazio chiuso proprio e $v \notin U$, allora esiste funzionale lineare continuo f su V , di norma 1, tale che $f(v) = 1$ e $f(u) = 0$ per ogni $u \in U$. (Naturalmente vale anche il viceversa: U è denso in V se e solo se il funzionale zero su U ha un'unica estensione ad un funzionale continuo su V).*

Dimostrazione. Sia S lo spazio unidimensionale generato da v , e poniamo $f(\lambda v) = \lambda\|v\|$ per ogni scalare λ . Allora f è un funzionale di norma 1 su S , e come notato nella Nota 3.5.7 esso si estende ad un funzionale di norma 1 su tutto V . Per la seconda asserzione dell'enunciato, si usa di nuovo la Nota 3.5.7: il funzionale nullo su U si estende ad un funzionale continuo sullo spazio vettoriale W generato da U e v che vale 1 su v , il quale esiste in base al Teorema di Hahn–Banach 3.5.5, e poi si estende questa funzionale a tutto V , ancora grazie allo stesso Teorema di Hahn–Banach. □

Nota 3.5.9. La seconda asserzione della precedente Proposizione 3.5.8 vale molto più in generale per sottospazi di spazi topologici localmente convessi, come vedremo nel Corollario 3.6.2 (che ha anche una dimostrazione più semplice, ma che dipende da una forma diversa del teorema di Hahn–Banach, Teorema 3.6.1). □

Corollario 3.5.10. *La norma di ogni vettore v in uno spazio normato V si ottiene con una formula duale a quella in (3.9), calcolando l'estremo dei valori assunti su v dai funzionali continui nella sfera unitaria dello spazio duale:*

$$\|v\|_V = \sup\{|f(v)| : f \in V', \|f\|_{V'} \leq 1\}.$$

Dimostrazione. Segue subito dalla precedente Proposizione 3.5.8 se osserviamo che, se $\|f\| \leq 1$, allora $|f(v)| \leq \|f\| \|v\| < \|v\|$, in base a (3.9).

□

Il prossimo enunciato mostra che i funzionali continui sugli spazi normati separano i sottospazi dai punti ad essi esterni:

Proposizione 3.5.11. *Sia V uno spazio normato e S un sottospazio. Sia $v \in V$ a distanza δ da S :*

$$\|v - s\| \geq \delta \quad \text{per ogni } s \in S. \quad (3.19)$$

Allora esiste un funzionale continuo f su V , di norma 1, tale che $f(s) = 0$ per ogni $s \in S$ ma $f(v) = \delta$.

Dimostrazione. Sia T il sottospazio di V generato da S e v . Per ogni vettore $t \in T$ si ha $t = \lambda v + s$ per qualche scalare λ e per qualche $s \in S$. Definiamo il seguente funzionale f su T : $f(\lambda v + s) = \lambda\delta$. È chiaro che f è lineare: $f(t_1 + t_2) = f(\lambda_1 v + s_1 + \lambda_2 v + s_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\delta = f(t_1) + f(t_2)$. Mostriamo che $\|f\| \leq 1$. Per questo basta provare che, per ogni α e s , si ha $|f(\alpha v + s)| := |\alpha|\delta \leq \|\alpha v + s\|$: ma questo è vero perché $\|\alpha v + s\| = |\alpha| \|v + s/\alpha\| \geq |\alpha|\delta$ in base a (3.19). Così abbiamo costruito un funzionale f su T tale che $f \equiv 0$ sul sottospazio S , $f(v) = \delta$ e $|f(t)| \leq \|t\|$ per ogni $t \in T$.

Ora, grazie al Teorema di Hahn–Banach, possiamo estendere f a tutto V in modo che si abbia $|f(v)| \leq \|v\|$ per tutti i v (si veda la Nota 3.5.7). Quindi $\|f\|_{V'} = 1$. □

3.6 Teorema di Hahn–Banach in forma geometrica e separazione tramite funzionali in spazi localmente convessi

Qui presentiamo una formulazione geometrica del Teorema di Hahn–Banach 3.5.3, enunciandolo in termini di funzionali continui che separano insiemi

convessi, e lo applichiamo per dedurre proprietà di separazione stretta tramite funzionali continui (Definizione 3.9.1) di insiemi convessi disgiunti muniti di opportune proprietà, ad esempio in spazi localmente convessi. Sappiamo dalla Nota 3.9.6 che per enunciati di questo tipo la convessità è una condizione indispensabile.

Teorema 3.6.1. (Teorema di Hahn–Banach in forma geometrica.)

Siano C_1 e C_2 due insiemi convessi non vuoti disgiunti in uno spazio vettoriale topologico V . Allora C_1 e C_2 sono separati da funzionali lineari continui nel modo seguente.

Se V è uno spazio vettoriale reale,

- (i) *se C_1 è aperto, esiste un funzionale continuo reale f ed un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che*

$$f(a) < \alpha \leq f(b)$$

per ogni $a \in C_1$ e $b \in C_2$;

- (ii) *se C_1 è compatto e C_2 è chiuso, e V è localmente convesso, esiste un funzionale continuo reale f e numeri $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$ tali che*

$$f(a) < \alpha < \beta < f(b)$$

per ogni $a \in A$ e $b \in B$.

Se invece V è uno spazio vettoriale complesso, le stesse disuguaglianze sono soddisfatte dal funzionale reale $\operatorname{Re} f$ per qualche funzionale complesso f (e quindi, più in generale, per il modulo $|f|$).

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare l'enunciato nel caso di spazi vettoriali reali, perché, se V è uno spazio complesso, esso è anche uno spazio reale, ed il funzionale reale f dell'enunciato per spazi reali si estende in unico modo ad un funzionale complesso g con $\operatorname{Re} g = f$ (Corollario 3.5.6), e quindi g verifica l'enunciato per spazi complessi.

Assumiamo allora che V sia uno spazio reale. La parte (i) si dimostra grazie ad un argomento simile a quello che nel seguito proverà la Proposizione 3.9.3 e che anticipiamo qui. Notiamo che il fatto che $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ equivale a $0 \notin C_1 - C_2$. Fissiamo $v_i \in C_i$ ($i = 1, 2$) e poniamo $v_0 = v_2 - v_1$. Allora $C := C_1 - C_2 + v_0$ è un intorno convesso di 0, la cui funzione di supporto p verifica $p(v_0) \geq 1$, perché $v_0 \notin C_1 - C_2 + v_0$, dal momento che $0 \notin C_1 - C_2$. Sullo spazio S generato da v_0 poniamo $f(\lambda v_0) = \lambda$. Allora, visto

che $p(v_0) \geq 1$ si ha $f(v) \leq p(v)$ se $v = \lambda v_0$ con $\lambda \geq 0$, mentre, per $\lambda < 0$, si ha $f(\lambda v_0) < 0 \leq p(\lambda v_0)$. Pertanto $f \leq p$ su S , e, siccome dal Lemma 3.2.10 sappiamo che la funzione di supporto p è una funzione subadditiva positivamente omogenea, segue dal Teorema di Hahn–Banach 3.5.3 che f ha una estensione a tutto V che verifica ancora $f \leq p$. Poiché sappiamo che $p \leq 1$ su C (parte (ii) del Lemma 3.2.10), anche $f \leq 1$ su C , ma per linearità si ha anche $f \geq -1$ su $-C$. Pertanto $|f| \leq 1$ su $C \cap (-C)$, che è un intorno aperto (convesso) di 0. Ma allora f è un funzionale continuo a 0, perché la controimmagine dell'aperto $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$ è un aperto in V , e per linearità lo stesso succede per ogni intorno aperto $(-\varepsilon, \varepsilon)$ di zero. Quindi f è continuo ovunque (Nota 3.3.3).

Ora, per ogni $u \in C_1$ e $v \in C_2$ si ha

$$f(u) - f(v) + 1 = f(u - v + v_0) \leq p(u - v + v_0). \quad (3.20)$$

Poiché $u - v + v_0 \in C$ l'ultimo membro è minore o uguale a 1, ma, dal momento che C è un aperto convesso, la semiretta uscente dall'origine che passa per il punto $u - v + v_0$ interseca la frontiera di C in un punto più lontano dall'origine di quanto sia $u - v + v_0$, e quindi $p(u - v + v_0) < 1$. Allora segue da (3.20) che $f(u) < f(v)$. Quindi

$$f(C_1) < f(C_2). \quad (3.21)$$

D'altra parte C_1 è aperto. Allora formuliamo la seguente *Asserzione*: *l'immagine tramite un funzionale lineare reale non nullo di un aperto è un aperto in \mathbb{R}* . Per provare questa asserzione, per linearità basta mostrare che questo è vero per un intorno aperto di $0 \in V$. Ma ciò equivale a provare che l'immagine di un tale intorno contiene, oltre a zero, anche un altro numero reale β : infatti in tal caso per linearità deve contenere tutto l'aperto $(-\beta, \beta)$. Basta quindi mostrare che, per qualche v vicino a 0, si ha $f(v) \neq 0$. per questo scopo, visto che f non è identicamente nullo, prendiamo un qualsiasi vettore y tale che $f(y) \neq 0$: ogni suo multiplo non nullo verifica la stessa disuguaglianza, ed i multipli sufficientemente piccoli sono nel prefissato intorno aperto dell'origine. Questo prova l'asserzione.

Dall'asserzione segue che $f(C_1)$ è aperto, e quindi $\alpha := \sup_{u \in C_1} f(u)$ verifica $f(x) < \alpha$ per ogni $x \in C_1$. Da questa disuguaglianza e (3.21) segue che α verifica la disuguaglianza della parte (i) dell'enunciato.

Veniamo alla parte (ii) ed assumiamo C_1 compatto. In base alla Proposizione 3.1.10, esiste un intorno convesso W di 0 in V tale che $(C_1 + W) \cap C_2 = \emptyset$.

Visto che $C_1 + W$ è un aperto, possiamo applicare la prima parte di questa dimostrazione e trovare un funzionale reale continuo f tale che $f(C_1 + W)$ e $f(C_2)$ sono convessi disgiunti in \mathbb{R} , e $f(C_1 + W) < f(C_2)$. D'altra parte, l'immagine continua di un insieme compatto è compatta, e quindi $f(C_1)$ è un sottoinsieme compatto di $f(C_1 + V)$: pertanto $\alpha := \max f(C_1) < \beta := \sup f(C_1 + V)$. Questo prova la parte (ii).

Infine, considerando il funzionale if invece di f , vediamo che le disuguaglianze delle parti (i) e (ii) valgono anche per la parte immaginaria $\text{Im } f$ di un opportuno funzionale complesso. Utilizzando combinazioni lineari di $\text{Re } f$ e $\text{Im } f$ ne segue immediatamente che le disuguaglianze valgono per il modulo di qualche funzionale complesso f . \square

Il Teorema di Hahn–Banach in forma geometrica è un enunciato che riguarda la separabilità di insiemi convessi tramite funzionali continui, una tematica importante che verrà estesa nella Sottosezione 3.9.1. Qui ci limitiamo a dedurre con facilità questa notevole generalizzazione della Proposizione 3.5.8:

Corollario 3.6.2. *Sia V uno spazio localmente convesso e $U \subset V$ un suo sottospazio. Per ogni $v \notin \bar{U}$, esiste un funzionale lineare continuo f su V tale che $f(v) = 1$ e $f(u) = 0$ per ogni $u \in U$. (Anche in questo caso vale anche il viceversa: U è denso in V se e solo se il funzionale zero su U ha un'unica estensione ad un funzionale continuo su V).*

Dimostrazione. Nella parte (ii) del teorema di Hahn–Banach in forma geometrica (Teorema 3.6.1 scegliamo $C_1 = \{x_0\}$ e $C_2 = \bar{U}$ (si noti che C_2 è un sottospazio di V , e quindi è un insieme convesso). Da quel teorema segue che $f(C_2)$ è un sottoinsieme del campo di base disgiunto da $f(C_1)$. Quindi $f(U) \subset f(C_2)$ è un sottoinsieme proprio del campo di base. Poiché f è lineare, questo sottoinsieme è un sottospazio proprio (sullo stesso campo), e quindi deve essere $\{0\}$. \square

3.7 *Compattezza e prodotto di spazi compatti

Teorema 3.7.1. (Teorema di Alexander della sottobase.) *Sia X uno spazio topologico con una sottobase (nel senso della Definizione 1.10.1) A tale*

che da ogni ricoprimento con aperti in \mathcal{A} si può estrarre un sottoricoprimento finito. Allora X è compatto.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che X non sia compatto, e mostriamo che allora X deve ammettere un ricoprimento con aperti in \mathcal{A} (o più brevemente, un \mathcal{A} -ricoprimento) senza sottoricoprimenti finiti.

Indichiamo con \mathfrak{C} la famiglia di tutti i ricoprimenti aperti di X che non ammettono sottoricoprimenti finiti. L'ipotesi che X non sia compatto equivale ad asserire che \mathfrak{C} non sia vuota. Ordiniamo \mathfrak{C} per inclusione e consideriamo una sottofamiglia massimale totalmente ordinata \mathfrak{P} (che esiste in base al principio di massimalità di Hausdorff, Assioma 2) della Sezione 3.4). Poniamo $\mathcal{U} = \cup\{\mathcal{B} : \mathcal{B} \in \mathfrak{P}\}$.

Proviamo la seguente Asserzione: \mathcal{U} è un ricoprimento aperto di X senza sottoricoprimenti finiti, ma è massimale con questa proprietà, nel senso che, per ogni aperto $V \notin \mathcal{U}$, la famiglia di aperti $\mathcal{U} \cup \{V\}$ è un ricoprimento di aperti che contiene un sottoricoprimento finito.

Infatti, poiché tutte gli elementi di $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{C}$ sono ricoprimenti aperti di X , è chiaro che anche \mathcal{U} lo è. Inoltre, dal momento che \mathfrak{P} è totalmente ordinato per inclusione, ogni sottofamiglia finita di \mathcal{U} è contenuta in qualche elemento di \mathfrak{P} (ossia in qualche ricoprimento aperto senza sottoricoprimenti finiti), e quindi \mathcal{U} non ammette sottoricoprimenti finiti. D'altra parte, dal momento che \mathfrak{P} è massimale, se a \mathcal{U} si aggiungiamo un aperto otteniamo un ricoprimento aperto di X che deve contenere un sottoricoprimento finito. Questo prova l'asserzione.

Ora poniamo $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \mathcal{A}$. Poiché \mathcal{V} consiste di aperti che sono contenuti in \mathcal{U} , sappiamo dalla prima parte dell'Asserzione precedente che \mathcal{V} non contiene sottoricoprimenti finiti. Allora completiamo la dimostrazione per assurdo mostrando che \mathcal{V} è un ricoprimento di X (ovviamente, un \mathcal{A} -ricoprimento). Infatti, supponiamo (una seconda volta per assurdo) che esista $x \in X$ non ricoperto da \mathcal{V} , ossia non appartenente ad alcun aperto in \mathcal{V} . Però, per la prima parte dell'Asserzione, $x \in O$ per qualche aperto $O \in \mathcal{U}$. Ma rammentiamo che \mathcal{A} è una sottobase, ossia esiste un numero finito di aperti $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{A}$ tali che $x \in \cap V_i \subset O$. Nessuno di questi aperti V_i può appartenere alla famiglia \mathcal{V} , perché altrimenti x sarebbe ricoperto da \mathcal{V} . Allora, per la seconda parte dell'Asserzione, esistono n ricoprimenti aperti finiti di X del tipo $\{W_{11}, W_{21}, \dots, W_{m_1 1}, V_1\}, \dots, \{W_{1n}, W_{2n}, \dots, W_{m_n n}, V_n\}$, con tutti gli aperti W_{ij} in \mathcal{U} . per semplicità, per $1 \leq k \leq n$ scriviamo $D_k = \cap_{j=1}^{m_k} W_{jk}$: ogni D_k è unione *finita* di aperti in \mathcal{U} . Quanto abbiamo osservato equivale a

scrivere $X \subset D_k \cup V_k$ per ogni tale k . Allora

$$X \subset D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n \cup \bigcap_{k=1}^n V_k. \quad (3.22)$$

Ma $H := \bigcap_{k=1}^n V_k$ è un aperto, e l'inclusione (3.22) asserisce che, se aggiungiamo l'aperto H a \mathcal{U} , otteniamo un ricoprimento che ammette un sottoricoprimento finito (il sottoricoprimento al lato destro di (3.22)). Questo contraddice la seconda parte della precedente Asserzione: tale contraddizione completa la dimostrazione per assurdo. \square

Definizione 3.7.2. Abbiamo introdotto nella Definizione 3.4.1 la nozione di prodotto cartesiano di una famiglia di insiemi *arbitraria* (non necessariamente numerabile). Sul prodotto cartesiano $A = \prod A_\lambda$ definiamo le *proiezioni canoniche* π_α nel modo ovvio: se $a = \{a_\lambda\}$ è un elemento di A , poniamo $\pi_\alpha(a) = a_\alpha$. Definiamo la topologia prodotto come la più debole topologia che rende continue tutte le proiezioni canoniche.

Nota 3.7.3. In base alla parte (i) dell'Esercizio 1.13.7, una sottobase per la topologia prodotto è costituita dalla famiglia $\mathcal{S} := \bigcup_\lambda \mathcal{S}_\lambda$, dove \mathcal{S}_λ è la famiglia di tutte le controimmagini $\pi_\lambda^{-1}(V_\lambda)$ al variare di V_λ fra gli aperti in A_λ . (*Attenzione:* \mathcal{S}_λ è la famiglia di insiemi $\{U_\alpha, : \alpha \in \Lambda\}$ che coincidono con A_α se $\alpha \neq \lambda$ e con $\pi_\lambda^{-1}(V_\lambda)|_{A_\lambda}$ se $\alpha = \lambda$). \square

Teorema 3.7.4. (Tychonoff, Cech.) *Sia A il prodotto cartesiano di una famiglia infinita qualsiasi di spazi compatti A_λ , al variare di λ in un insieme qualsiasi di indici Λ . Allora A è compatto nella topologia prodotto della Definizione 3.7.2.*

Dimostrazione. Sia \mathcal{S} la sottobase della topologia prodotto considerata nella precedente Nota 3.7.3, e \mathcal{C} un ricoprimento di A consistente di aperti in questa sottobase. Consideriamo le "restrizioni" $\mathcal{C}_\lambda := \mathcal{C} \cap \mathcal{S}_\lambda$ (attenzione: non si tratta di vere di restrizioni, perché, come osservato nella Nota 3.7.3, gli aperti in \mathcal{C}_λ , quando $\alpha \neq \lambda$, non sono vuoti, bensì coincidono con tutta A_α). Allora $\mathcal{C} = \bigcup_\lambda \mathcal{C}_\lambda$. Dimostriamo anzitutto che \mathcal{C}_α è un ricoprimento di A per almeno un indice α (consigliamo al lettore di ritornare alla precedente Nota 3.7.3 e rendersi conto che \mathcal{C}_α copre automaticamente il prodotto di tutti gli insiemi A_λ con $\lambda \neq \alpha$). Se non fosse così, per ogni λ esisterebbe un punto $a_\lambda \in A_\lambda$ tale che \mathcal{C}_λ consisterebbe di aperti disgiunti da $\pi_\lambda^{-1}(a_\lambda)$. Allora consideriamo il punto $a \in A$ tale che $\pi_\lambda(a) = a_\lambda$ per ciascun $\lambda \in \Lambda$: abbiamo

appena visto che nessun \mathcal{C}_λ copre il punto a . Rammentando che \mathcal{C} è l'unione dei \mathcal{C}_λ , deduciamo che a non appartiene ad alcun elemento del ricoprimento \mathcal{C} . Ma questo contraddice il fatto che \mathcal{C} sia un ricoprimento di A .

Allora almeno un \mathcal{C}_α deve coprire A . Rammentiamo ancora una volta che \mathcal{C}_α consiste di collezioni di aperti, indicizzate dall'indice λ , che consistono di tutto A_λ per ogni $\lambda \neq \alpha$. Allora il fatto che \mathcal{C}_α copra A equivale a dire che la componente α delle collezioni di aperti in \mathcal{C}_α copre A_α .

Però A_λ è compatto, e quindi esiste un sottoricoprimento finito di \mathcal{C}_α che copre A_α , ossia, per quanto appena visto, un sottoricoprimento finito di A consistente di aperti che appartengono a \mathcal{C}_α . Poiché gli aperti che compongono \mathcal{C}_α sono contenuti come sottoinsiemi in aperti di \mathcal{C} , questo significa che \mathcal{C} ha un sottoricoprimento finito. Poiché \mathcal{C} è costruito a partire dalla sottobase \mathcal{S} , segue dal Teorema della sottobase di Alexander 3.7.1 che A è compatto. \square

3.8 Dualità su spazi vettoriali topologici

Notazione 3.8.1. Indicheremo spesso con v i punti di uno spazio vettoriale topologico V , con x' i punti dello spazio duale, ossia i funzionali lineari continui (Definizione 3.3.14), e scriveremo $\langle v, x' \rangle$ invece di $x'(v)$. In questo modo l'azione di V' su V è espressa da un funzionale bilineare $\langle \cdot, \cdot \rangle : V' \times V \rightarrow \mathbb{C}$, che indichiamo con il termine *dualità*.

Siamo anzitutto interessati a studiare la topologia debole indotta su uno spazio vettoriale topologico V dai suoi funzionali lineari (Definizione 1.13.3). Premettiamo un lemma.

Lemma 3.8.2. *La topologia debole τ_w indotta su uno spazio vettoriale V dalla famiglia di tutti i suoi funzionali lineari è invariante per traslazione (traslando una base locale ad un punto si ottiene una base locale al punto traslato), localmente convessa e di Hausdorff (Definizioni 3.1.1 e 1.10.2), ed in essa le operazioni di somma e di moltiplicazione per scalare sono continue.*

Dimostrazione. È chiaro che τ_w è invariante per traslazione, perché la sua base locale al punto y data dagli aperti

$$O_y = O_y(\varepsilon; x'_1, \dots, x'_n) = \{v : |\langle x'_i, v \rangle - \langle x'_i, y \rangle| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$$

della parte (i) dell'Esercizio 1.13.7 viene mandata dalla traslazione λ_z nella corrispondente base locale al punto traslato $\lambda_z(y) = y - x$, grazie alla linearità dei funzionali x'_i (esercizio!). Sappiamo anche che τ_w è una topologia localmente convessa, perché questa base locale, grazie alla linearità dei funzionali x'_i , consiste di insiemi convessi. Ora la proprietà di Hausdorff segue direttamente dalla proprietà di separazione della Proposizione 3.1.10, ossia dal fatto che i funzionali lineari separano i punti di V (si veda anche il Teorema di Hahn–Banach 3.6.1), e dalla parte (ii) dell'Esercizio 1.13.7.

Per mostrare che la somma è continua, basta osservare che, se tre vettori in V soddisfano $x = y + z$, allora la controimmagine sotto l'operazione di somma di un aperto di base $O_x(\varepsilon)$ contiene l'aperto $O_y(\varepsilon/2) \times O_z(\varepsilon/2)$, visto che, di nuovo per la linearità dei funzionali x'_i , vale l'identità $O_y(\varepsilon/2) + O_z(\varepsilon/2) = O_{y+z}(\varepsilon)$.

Analogamente, per mostrare che la moltiplicazione per scalari è continua, prendiamo un aperto della base locale all'origine, $O = \{v \in V : |\langle x'_i, v \rangle| < \varepsilon\}$. Per ogni $v \in V$ si ha $v/s \in O_\varepsilon$ per tutti gli $s \in \mathbb{R}_+$ così grandi che si abbia $|\langle x'_i, v \rangle| < s\varepsilon$ per tutti gli indici $i = 1, \dots, n$. Allora fissiamo $v \in V$ e $\alpha > 0$, e β tale che $\beta - \alpha$ sia piccolo, ovvero che verifichi

$$|\beta - \alpha| < r. \quad (3.23)$$

Scegliamo y corrispondentemente vicino a v : $y - v \in rO_\varepsilon$. Allora

$$y \in (r + s)O_\varepsilon, \quad (3.24)$$

visto che $v \in rO_\varepsilon$. Scriviamo $\alpha v - \beta y = (\beta - \alpha)y + \alpha(y - v)$. Allora, in base a (3.23) e (3.24), $(\beta - \alpha)y \in r(r + s)O_\varepsilon$, mentre $\alpha(y - v) \in |\alpha|rO_\varepsilon$. Ponendo $\gamma := r(r + s) + |\alpha|r$, da queste inclusioni segue che $\alpha v - \beta y \in \gamma O_\varepsilon$. Poiché r è arbitrario, scegliamolo così piccolo che si abbia $\gamma < 1$. Allora, fissato $\alpha > 0$ e $v \in V$, esiste un intorno di α in \mathbb{R} (di raggio r) ed un intorno di rO_ε di v in V tali che $\alpha v - \beta y$ appartiene all'intorno O_ε dell'origine per ogni β e y in questi due rispettivi intorni. Ciò equivale a dire che la moltiplicazione per scalari è una operazione continua su $\mathbb{R} \times V$. \square

***Proposizione 3.8.3.** *Sia V uno spazio vettoriale e \mathcal{F} uno spazio vettoriale di funzionali lineari su V che separano i punti di V , nel senso della Definizione 1.13.5. Allora la topologia debole indotta da \mathcal{F} rende V uno spazio vettoriale topologico localmente convesso con duale $V' = \mathcal{F}$.*

Dimostrazione. In base alla Definizione 3.1.1, affinché la topologia debole τ_w indotta da \mathcal{F} renda V uno spazio vettoriale topologico occorre che i punti siano chiusi (questa è la proprietà di separazione T_1 , in base alla parte (i) della Proposizione 1.10.10) e che le operazioni di spazio vettoriale siano continue. Dal momento che una topologia di Hausdorff è necessariamente T_1 (come osservato nella parte (ii) della Proposizione 1.10.10), il lemma 3.8.2 mostra che questi requisiti sono soddisfatti, e che con questa topologia V diventa uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. Per la definizione di topologia debole (Definizione 1.13.4), in questa topologia tutti i funzionali lineari in \mathcal{F} sono continui. Quindi $\mathcal{F} \subset V'$.

Viceversa, mostriamo che $V' \subset \mathcal{F}$. Sia x' un funzionale lineare τ_w -continuo su V : dobbiamo mostrare che x' appartiene a \mathcal{F} . Per linearità, questo equivale a dire che x' è continuo a 0, ossia che la controimmagine sotto x' di un intorno di base $(-a, a)$ di $0 = x'(0)$ contiene un aperto di base locale al vettore 0, ossia un aperto del tipo $O = O_\varepsilon(x'_1, \dots, x'_n)$ per opportuni $x'_1, \dots, x'_n \in \mathcal{F}$: in altre parole, $|\langle x', v \rangle| < a$ per ogni $t \in O$. Quindi, in particolare, se $\langle x'_i, v \rangle = 0$ per $i = 1, \dots, n$, allora $|\langle x'_i, v \rangle| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, ossia $\langle x'_i, v \rangle = 0$. Quindi l'intersezione dei nuclei $N := \{v : \langle x'_i, v \rangle = 0\}$ per tutti gli indici $i = 1, \dots, n$ è contenuta nel nucleo di x' . Allora definiamo una applicazione lineare $\pi : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ (oppure $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ se V è uno spazio vettoriale sul campo reale) nel modo seguente:

$$\pi(v) := (\langle x'_1, v \rangle, \dots, \langle x'_n, v \rangle).$$

Il nucleo di questa operatore lineare è N , ovvero $\pi(v_1) = \pi(v_2)$ se $\langle x'_i, v_1 \rangle = \langle x'_i, v_2 \rangle$ per ogni i . Ma allora, visto che N è anche contenuto nel nucleo di x' per quanto appena osservato, si ha $\pi(v_1) = \pi(v_2)$ se $\langle x', v_1 \rangle = \langle x', v_2 \rangle$. Questo significa che x' si fattorizza rispetto a π , ossia $x' = L \circ \pi$ per qualche funzione $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ (oppure $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se V è uno spazio vettoriale reale). Poiché x' e π sono applicazioni lineari, deve esserlo anche L . Quindi esistono numeri c_i nel campo di base (\mathbb{C} oppure \mathbb{R}) tali che $L(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n c_i t_i$. Quindi

$$x'(v) = L(\pi(v)) = L(\langle x'_1, v \rangle, \dots, \langle x'_n, v \rangle) = \sum_{i=1}^n c_i \langle x'_i, v \rangle.$$

In altre parole, il generico funzionale $x' \in V'$ è combinazione lineare di opportuni funzionali $x'_i \in \mathcal{F}$. Poiché abbiamo assunto che \mathcal{F} sia uno spazio vettoriale, da questo segue che x' appartiene a \mathcal{F} . \square

Supponiamo ora che V sia uno spazio vettoriale topologico con una topologia τ , e consideriamo la topologia debole τ_w indotta dai funzionali lineari in V' , ossia i funzionali che sono continui rispetto a τ . Sappiamo che $\tau_w \subset \tau$ (Esercizio 1.13.4). Sappiamo inoltre, dalla parte (iv) dell'Esercizio 1.13.7, che la topologia debole indotta dalla famiglia di *tutte* le funzioni continue coincide con la topologia originale τ se in essa lo spazio V verifica la proprietà di separazione T_3 della Definizione 1.10.2 e le funzioni continue separano i punti dai chiusi: ma qui stiamo considerando la famiglia dei funzionali lineari continui, che sono molti meno di tutte le funzioni continue, e quindi la topologia debole τ_w indotta da essi può essere più debole della topologia originale. Mostriamo che in effetti di solito è così:

Nota 3.8.4. Una base locale (Definizione 1.10.1) di intorno dell'origine della topologia debole indotta da V' consiste degli aperti $O_\varepsilon := \{x : \langle x'_i, v \rangle | < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$, al variare di x'_1, \dots, x'_n in V' (si veda la parte (i) dell'Esercizio 1.13.7). Fissiamo questi funzionali e sia N l'intersezione dei loro nuclei: $N := v \in V : \langle x'_i, v \rangle = 0, i = 1, \dots, n$. La mappa $v \mapsto (\langle x'_1, v \rangle, \dots, \langle x'_n, v \rangle)$ è un operatore lineare da V a \mathbb{C}^n ed il suo nucleo è N . Quindi $\dim V \leq n + \dim N$, e pertanto N ha dimensione infinita se questo è vero per V . D'altra parte, $N \subset O_\varepsilon$, e quindi ogni intorno di base dell'origine contiene qualche sottospazio di dimensione infinita, se V è uno spazio vettoriale topologico a dimensione infinita. In particolare, in tal caso τ_w non è una topologia localmente limitata (Definizione 3.1.1). Quindi, in base alla Nota 3.1.2, in tutti gli spazi normati a dimensione infinita la topologia debole è strettamente più debole della topologia originale, che d'ora in poi chiameremo *topologia forte*. \square

Notazione 3.8.5. D'ora in poi riserviamo il nome di *topologia debole* su uno spazio vettoriale topologica V per la topologia più debole che rende continui tutti i funzionali lineari su V .

Abbiamo visto nella Nota 3.8.4 che, in generale, la topologia debole è strettamente più debole della topologia forte. A questo punto, però, il Teorema di Hahn–Banach 3.6.1 implica una conseguenza che mitiga questa differenza fra le due topologie:

****Proposizione 3.8.6.** *Sia V uno spazio vettoriale localmente convesso ed E un sottoinsieme convesso. Allora la chiusura di E nella topologia debole τ_w coincide con la chiusura nella topologia forte τ (ossia la topologia originale).*

Dimostrazione. Poiché $\tau_w \subset \tau$, ogni aperto in τ_w è già in τ , e quindi anche ogni chiuso. Pertanto la chiusura debole di \overline{E}_w di E è, essendo un insieme chiuso nella topologia debole, è un insieme chiuso anche nella topologia τ . Ma la chiusura \overline{E} di E in τ è l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi in τ che contengono E , e quindi $\overline{E} \subset \overline{E}_w$. Questa inclusione non richiede l'ipotesi di convessità di E : ma il viceversa sì.

In effetti, il viceversa equivale a dimostrare che il complemento di \overline{E} è un aperto nella topologia debole. Sia $v_0 \notin \overline{E}$. Poiché E è convesso, per il Teorema di Hahn–Banach 3.6.1 esistono un funzionale $x' \in V'$ ed un elemento separatore $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $v \in \overline{E}$, si ha $\operatorname{Re} x'(v_0) < \alpha < \operatorname{Re} x'(v)$ per ogni $v \in \overline{E}$. Pertanto l'insieme $\{u \in V : \operatorname{Re} x'(u) < \alpha\}$, che è un aperto nella topologia debole, è un intorno di v_0 in τ_w disgiunto da \overline{E} . Così ogni punto nel complemento di \overline{E} ha un intorno debole disgiunto da \overline{E} , e quindi $\mathbb{C}\overline{E}$ è aperto in τ_w . pertanto \overline{E} è chiuso in τ_w , e da questo, analogamente a prima, segue l'inclusione $\overline{E}_w \subset \overline{E}$. \square

Poiché ogni spazio vettoriale è un insieme convesso, da questo segue:

****Corollario 3.8.7.** *Un sottospazio di uno spazio vettoriale localmente convesso V è chiuso nella topologia forte se e solo se lo è nella topologia debole. Un convesso in V è denso nella topologia forte se e solo se lo è in quella debole.*

3.9 *Spazi localmente convessi e teorema di Krein–Milman

3.9.1 *Separazione di insiemi convessi tramite funzionali

I teoremi di Hahn–Banach della Sezione 3.5 hanno conseguenze importanti circa la separabilità di insiemi convessi in spazi vettoriali tramite funzionali lineari.

Definizione 3.9.1. Si dice che due sottoinsiemi A, B di uno spazio vettoriale V sono *separati* da un funzionale lineare reale $f \in V'$ se $\sup_{v \in A} f(v) \leq \inf_{v \in B} f(v)$ o viceversa; si dice che i due insiemi sono *strettamente separati* da f se la disuguaglianza vale in senso stretto.

Due insiemi sono separati da un funzionale complesso f se sono separati, nel senso appena indicato, dal funzionale reale $\operatorname{Re} f$.

Abbiamo bisogno di una premessa.

Nota 3.9.2. Rammentiamo che un punto v è interno ad un insieme E se esiste un aperto $O \subset E$ tale che $v \in O$. Se E è un sottoinsieme di uno spazio vettoriale topologico V , allora questo implica la proprietà seguente: *l'intersezione con E di ogni retta che passa per v contiene un intervallo aperto.* Infatti, se parametrizziamo la retta come $\lambda \mapsto v + \lambda x$, allora questa è una funzione continua di λ e la controimmagine di O deve essere aperta. È facile dimostrare che un punto che verifica questa proprietà in un insieme convesso C è interno a C nel senso usuale (esercizio per il lettore; cautela: senza la condizione di convessità i punti che verificano questa proprietà non sono necessariamente interni nel senso usuale). Poiché nel seguito di questa Sezione restringiamo l'attenzione a questa proprietà solo su insiemi convessi, indichiamo i punti che la verificano semplicemente come punti interni.

□

Proposizione 3.9.3. *Siano C_1 e C_2 due insiemi convessi disgiunti in uno spazio vettoriale topologico V , uno dei quali contiene un punto interno. Allora esiste un funzionale lineare f non nullo che separa C_1 e C_2 , nel senso della Definizione 3.9.1.*

Dimostrazione. Diciamo che sia C_1 a contenere un punto interno v_1 . Allora $C_1 - C_2$ (l'insieme dei vettori differenza) è convesso (esercizio!) e, per ogni fissato $v_2 \in C_2$, il punto $v_0 := v_1 - v_2$ è interno a $C_1 - C_2$. Allora l'insieme $C := C_1 - C_2 - v_0$ è un convesso che contiene l'origine. Però $-v_0 \notin C$ perché $0 \notin C_1 - C_2$, dal momento che C_1 e C_2 sono disgiunti.

Allora la funzione di supporto p di C verifica

$$p(-v_0) \geq 1 \tag{3.25}$$

per la proprietà (ii) del Lemma 3.2.10. Sullo spazio S generato da v_0 definiamo il funzionale lineare reale $f(\lambda v_0) = -\lambda$, per λ reale (ed anche per λ complesso, ma in questo secondo caso si ottiene un funzionale complesso di cui sarà la parte reale a soddisfare l'enunciato, il che è quanto comunque contemplato nella Definizione 3.9.1 di separabilità tramite funzionali complessi: per semplicità quindi, e senza perdita di generalità, limitiamo l'attenzione ad un funzionale reale f). Dalla linearità di f , dalla proprietà (i) del Lemma 3.2.10 e da (3.9.3) segue $f \leq p$ su S . D'altra parte, le proprietà (i) e (iii) del Lemma 3.2.10 dicono che p è una funzione subadditiva positivamente

omogenea, e quindi possiamo ora applicare il Teorema di Hahn–Banach 3.5.3 per estendere f ad un funzionale lineare reale su tutto V che verifica ancora $f \leq p$. Quindi, in particolare, $f \leq 1$ su C , per la proprietà (ii) del Lemma 3.2.10.

Siano ora $u \in C_1$ e $v \in C_2$. Allora $u - v - v_0 \in C$ e $1 \geq p(u - v - v_0) \geq f(u - v - v_0) - f(u) - f(v) - f(v_0)$. Ma $f(v_0) = -1$, e quindi l'ultima disuguaglianza diventa $f(u) \leq f(v)$. Prendendo l'estremo superiore rispetto a $u \in C_1$ e l'estremo inferiore rispetto a $v \in C_2$ si trova che il funzionale non nullo f separa C_1 e C_2 . \square

Se lo spazio vettoriale è localmente convesso (Definizione 3.1.1), allora valgono proprietà di separazione stretta. Il prossimo è un esempio: dice che i punti sono strettamente separati dai chiusi convessi.

Proposizione 3.9.4. *Sia V uno spazio vettoriale localmente convesso e $v_0 \in V$. Sia C un insieme chiuso convesso che non contiene v_0 . Allora esiste un funzionale lineare reale continuo f che separa strettamente $\{v_0\}$ e C , nel senso della Definizione 3.9.1: ovvero, $f(v_0) < \inf_{v \in C} f(v)$. Equivalentemente, esiste un funzionale continuo complesso F tale che $\operatorname{Re} f(v_0) < \inf_{v \in C} \operatorname{Re} f(v)$.*

Dimostrazione. Una volta dimostrato l'enunciato per funzionali reali, quello per funzionali complessi segue dal Corollario 3.5.6. Quindi nel resto della dimostrazione restringiamo l'attenzione a funzionali reali.

Senza perdita di generalità, tramite una traslazione riduciamo l'enunciato al caso in cui $v_0 = 0$. Poiché V è localmente convesso e $0 \notin C$, esiste un intorno aperto convesso A di 0 . Simmetrizziamo prendendo $U = A \cap (-A)$, che è ancora un intorno aperto convesso di 0 , ma invariante per riflessione intorno all'origine: $-U = U$. La precedente Proposizione 3.9.3 fornisce un funzionale lineare non nullo tale che

$$\sup_{v \in U} f(v) \leq \inf_{c \in C} f(c) := \alpha \quad (3.26)$$

(in particolare α è finito). Allora $f(v) \leq \alpha$ per ogni $v \in U$, quindi anche per $-v$, da cui, per la linearità di f , anche $-f(v) = f(-v) \leq \alpha$. Ne segue che $-\alpha \leq f(v) \leq \alpha$ per ogni $v \in U$. Allora dilatiamo U , prendendo in sua vece $U' = \frac{\varepsilon}{\alpha}U$. Di nuovo per linearità, $|f(v)| < \varepsilon$ in U' . Questo significa che, per ogni $\varepsilon > 0$, abbiamo costruito un intorno aperto U' di 0 in cui $|f| < \varepsilon$: perciò il funzionale f è continuo nell'origine. Per linearità (e per la continuità dell'operazione di traslazione) f è continuo ovunque: $f \in V'$.

Per completare la dimostrazione occorre solo provare che $0 = f(0) < \alpha := \inf_{v \in C} f(v)$, ovvero che $\alpha > 0$. Sappiamo che il funzionale f non è identicamente nullo: scegliamo $w \in V$ tale che $f(w) > 0$, e comprimiamolo in modo che finisca dentro l'aperto O , ossia scegliamo uno scalare reale λ tale che $\lambda w \in O$ (questo è possibile perché l'origine è un punto interno di O : si veda la Nota 3.9.2). Allora, in base a (3.26), $f(\lambda w)$ deve essere minore di α e pertanto $0 < \lambda f(w) = f(\lambda w) < \alpha$. \square

In seguito ci servirà questa variante della precedente Proposizione 3.9.4, nella quale assumiamo non che lo spazio sia localmente convesso ma solo che i funzionali separano i punti, e mostriamo che allora la stessa proprietà di separazione geometrica vale se il convesso è anche compatto:

Proposizione 3.9.5. *Sia V uno spazio vettoriale su cui i funzionali continui separano i punti e $v_0 \in V$. Sia C un insieme compatto convesso che non contiene v_0 . Allora esiste un funzionale lineare reale continuo f che separa strettamente $\{v_0\}$ e C , nel senso della Definizione 3.9.1: ovvero, $f(v_0) < \inf_{v \in C} f(v)$. Equivalentemente, esiste un funzionale continuo complesso F tale che $\operatorname{Re} f(v_0) < \inf_{v \in C} \operatorname{Re} f(v)$.*

Dimostrazione. L'insieme C è compatto nella topologia forte di V , ed a maggior ragione lo è nella topologia debole τ_w . ma in questa topologia V è localmente convesso (Proposizione 3.8.3), e quindi possiamo applicare la precedente Proposizione 3.9.4 per ottenere la disuguaglianza desiderata per un opportuno funzionale continuo x' rispetto alla topologia debole τ_w . D'altra parte, di nuovo per la Proposizione 3.8.3, l'insieme dei funzionali continui su V munito della topologia debole coincide con il duale ordinario V' . Quindi $x' \in V'$.

Nota 3.9.6. L'enunciato della Proposizione 3.9.4 è palesemente falso senza l'ipotesi di convessità: se C è un insieme connesso ma non convesso, esistono punti $v \notin C$ che sono combinazioni convesse di punti di C , ed i funzionali lineari, essendo costanti su iperpiani, non possono separare tali punti v da C . \square

Corollario 3.9.7. *Su uno spazio vettoriale localmente convesso, i funzionali continui separano i punti (in particolare, quindi, questo capita per gli spazi normati e per gli spazi di Fréchet: si vedano la Definizione 3.1.1 e la Nota 3.1.2).*

Le proprietà di separazione tramite funzionali su spazi vettoriali localmente convessi sono ancora più forti. Esse si basano su una versione geometrica

del teorema di Hahn–Banach, che in quest’opera non serve: per completezza presentiamo questi risultati in una Sezione apposita (Sezione 3.6).

3.9.2 *Punti estremi e teorema di Krein–Milman

Definizione 3.9.8. Sia C un insieme convesso in uno spazio vettoriale V . Un punto $v \in C$ è un punto *estremo* di C se non è un punto interno di alcun segmento contenuto in C , ossia se, per ogni coppia $x, y \in V$ tali che $v = \lambda x + (1 - \lambda)y$ per qualche $0 < \lambda < 1$, almeno uno fra x e y non appartiene a C .

Definizione 3.9.9. Dato un sottoinsieme convesso A di uno spazio vettoriale, un sottoinsieme chiuso convesso $S \subset A$ si dice un insieme *estremale per A* se nessun punto $v \in A$ è un punto interno di un segmento i cui punti estremi sono in A ma non in S : in altre parole, se

$$x, y \in A \quad \text{e} \quad v = \lambda x + (1 - \lambda)y \quad \text{per qualche} \quad 0 < \lambda < 1 \Rightarrow x, y \in S. \quad (3.27)$$

In particolare, i punti estremi di A introdotti nella precedente Definizione 3.9.8 sono gli insiemi estremali per A che consistono di un solo punto.

Un insieme si dice *estremale* se è estremale per l’intero spazio vettoriale V . Si noti che se $S \subset V$ è estremale (per V), allora è estremale anche per qualsiasi insieme A tale che $S \subset A \subset V$.

Corollario 3.9.10. (i) *Se l’intersezione di una famiglia non vuota di insiemi estremali è non vuota, allora è estremale.*

(ii) *Siano $A \subset B \subset C$ tre insiemi convessi. Se A è un insieme estremale per B e B è estremale per C , allora A è estremale anche per C .*

(iii) *Se $S \subset V$ è un insieme estremale per un chiuso convesso K e f è un funzionale lineare continuo su V , allora il sottoinsieme di S in cui $\operatorname{Re} f$ assume il suo valore massimo è ancora un insieme estremale.*

(iv) *Sia V uno spazio vettoriale su cui i funzionali continui separano i punti (ad esempio uno spazio localmente convesso, in base al Corollario 3.9.7), e $S \subset K$ un insieme (non vuoto) estremale per un compatto convesso $K \subset V$. Supponiamo che S sia minimale (ossia che non contenga sottoinsiemi propri estremali per K non vuoti). Allora S consiste di un solo punto (e quindi è un punto estremo di K , come osservato nella Definizione 3.9.9).*

Dimostrazione. Le parti (i) e (ii) seguono direttamente dalla Definizione 3.9.9. Dimostriamo la parte (iii). Sia $m = \max_{v \in S} \operatorname{Re} f(v)$ e $S_f = \{v \in S : \operatorname{Re} f(v) = m\}$. Sia $v \in S_f$ con $v = \lambda x + (1 - \lambda)y$ per qualche $0 < \lambda < 1$ e $x, y \in V$. Poiché S è estremale, x e y appartengono a S , e quindi $\operatorname{Re} f(x)$ e $\operatorname{Re} f(y)$ sono minori o uguali a m . Poiché $\operatorname{Re} f(z) = m$, per linearità $\operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} f(y) = m$, ossia $x, y \in S_f$. Pertanto S_f è un insieme estremale, e (iii) è provato. Ora dimostriamo la parte (iv). Osserviamo anzitutto che S è chiuso (per la Definizione 3.9.9 di insieme estremale) nel compatto K , e quindi è anch'esso un insieme compatto (Sezione 1.1). Se u, v appartengono a S , esiste un funzionale continuo f su V tale che $\operatorname{Re} f(u) > \operatorname{Re} f(v)$ (Corollario 3.9.7). Il sottoinsieme $S_f \subset S$ dove $\operatorname{Re} f$ assume il proprio valore massimo è non vuoto (per il teorema di Weierstrass sull'esistenza dei massimi delle funzioni continue sul compatto S (Sezione 1.1)) ed estremale in S per la parte (iii). Quindi S_f è un insieme estremale che contiene u ma non v , e pertanto un insieme estremale minimale non può contenere due punti diversi.

□

Esercizio 3.9.11. Mostrare che l'unione di una famiglia arbitraria di insiemi estremali soddisfa la proprietà 3.27 ed è un insieme convesso; in generale però non è estremale perché non è chiuso. □

Definizione 3.9.12. Sia V uno spazio vettoriale. L'intersezione $H(E)$ di tutti gli insiemi convessi che contengono un insieme $E \subset V$ è un convesso che contiene E ed è minimale rispetto a questa proprietà (ossia, è contenuto in ogni convesso che contiene E). $H(E)$ si chiama l'*inviluppo convesso* di E . L'intersezione $\overline{H}(E)$ di tutti i convessi chiusi che contengono E è un convesso chiuso che contiene E ed è minimale rispetto a questa proprietà: esso si chiama l'*inviluppo convesso chiuso* di E .

Teorema 3.9.13 (Krein–Milman). (i) *Sia V uno spazio vettoriale su cui i funzionali continui separano i punti (ad esempio uno spazio localmente convesso, in base al Corollario 3.9.7) e $K \subset V$ un sottoinsieme compatto convesso non vuoto. Allora K è l'inviluppo convesso chiuso dei suoi punti estremi (introdotto nella Definizione 3.9.12).*

(ii) *Sia V uno spazio localmente convesso, K un compatto in V e E l'insieme dei punti estremi di K in V . Allora K è contenuto nell'inviluppo convesso chiuso di E : in altre parole, K e E hanno lo stesso inviluppo convesso chiuso.*

Dimostrazione. La famiglia \mathcal{F} di tutti gli insiemi estremali non vuoti per K è parzialmente ordinata per inclusione. Fissato un insieme estremo non vuoto S per K , per il principio di massimalità di Hausdorff (Assioma 2 della Sezione 3.4) esiste una sottofamiglia \mathcal{F}' di \mathcal{F} che contiene S ed è totalmente ordinata per inclusione. Poiché K è compatto, segue dalla proprietà dell'intersezione finita (Nota 1.9.7) che l'intersezione T di tutti i membri della famiglia \mathcal{F}' è non vuota. Allora, per la parte (i) del Corollario 3.9.10, T è anch'esso un insieme estremo per K : inoltre deve essere un insieme estremo minimale in K , perché se esistesse un sottoinsieme proprio di $T' \subset T$ che fosse un estremo per K , allora T' non potrebbe appartenere alla famiglia \mathcal{F}' (visto che è propriamente contenuto nella sua intersezione) e quindi \mathcal{F}' non sarebbe una famiglia massimale secondo il principio di Hausdorff. Questo significa che ogni estremo non vuoto S in K contiene un estremo minimale non vuoto. In base alla parte (iv) del Corollario 3.9.10, questo estremo consiste di un unico punto, e quindi è un punto estremo di K . Abbiamo così provato che ogni compatto convesso non vuoto K , ed anche ogni suo sottoinsieme estremo non vuoto, contiene almeno un punto estremo. D'altra parte, sappiamo dalla parte (iii) del Corollario 3.9.10 che i punti di K in cui i funzionali reali assumono il proprio massimo sono estremali, ed a loro volta, per linearità, su questi insiemi estremali i punti di massimo dei funzionali lineari devono essere assunti su punti estremi. Quindi il valore massimo della parte reale di ogni funzionale continuo f su K coincide con il valore massimo sull'insieme E dei punti estremi di K : $\max_K \operatorname{Re} f = \max_E \operatorname{Re} f$. Sia C l'involucro convesso chiuso di E , introdotto nella precedente Definizione 3.9.12. Assumiamo, come nella parte (i), che K sia convesso. Allora $C \subset K$ dal momento che K è convesso e chiuso (la topologia di uno spazio vettoriale topologico è di Hausdorff, per il Lemma 3.1.11, ed i compatti in uno spazio di Hausdorff sono chiusi, per la seconda parte del Lemma 1.10.6). Quindi C è un sottoinsieme chiuso di un compatto, e pertanto è compatto, per la prima parte del Lemma 1.10.6. Pertanto, visto che le funzioni continue sui compatti hanno massimo (teorema di Weierstrass, Sezione 1.1), esiste finito il numero $\max_C \operatorname{Re} f$. Di nuovo per linearità, $\max_E \operatorname{Re} f = \max_C \operatorname{Re} f$, e quindi, combinando queste due osservazioni, troviamo

$$\max_K \operatorname{Re} f = \max_C \operatorname{Re} f. \quad (3.28)$$

Per assurdo, supponiamo che esista un punto $k \in K$ tale che $k \notin C$. Poiché C è convesso e chiuso, in base alla Proposizione 3.9.4 esiste un funzionale

continuo $f \in V'$ tale che $f(k) > \max_C \operatorname{Re} f$. Ora segue dalla disuguaglianza (3.28) che $x \notin K$, una contraddizione. Quindi $K = C$. Questo prova la parte (i) dell'enunciato.

La stessa argomentazione vale se si assume che V non sia localmente convesso ma solo che il suo duale separi i punti di V : basta applicare, subito sopra, la Proposizione 3.9.5 invece della Proposizione 3.9.4. Questo prova la parte (ii). \square

L'enunciato del Teorema di Krein–Milman 3.9.13 implica evidentemente l'esistenza di punti estremi in ogni convesso compatto, che riassumiamo qui di seguito come enunciato separato: rammentiamo comunque che un punto estremo di ogni insieme convesso è stato *costruito* nella dimostrazione del suddetto teorema. Anticipiamo il fatto che questa conclusione è falsa in spazi non localmente convessi (si veda l'esempio costruito nella Sottosezione 3.23.2).

Corollario 3.9.14. *Ogni insieme compatto non vuoto in uno spazio localmente convesso ammette punti estremi.*

3.9.3 *Esempi di punti estremi di sfere unitarie in spazi di Banach

Esempio 3.9.15. (Punti estremi delle sfere unitarie di L^∞ e C .) Studiamo ora i punti estremi nella palla unitaria (o equivalentemente, nella sfera unitaria) degli spazi di Banach $L^\infty[a, b]$ e $C[a, b]$ (spazi vettoriali sul campo complesso, quindi costituiti di funzioni a valori complessi): il caso di intervalli illimitati, ad esempio $L^\infty(\mathbb{R})$ e $C(\mathbb{R})$, è analogo.

Una funzione f nella palla unitaria di questi spazi è tale che $|f(t)| \leq 1$ (quasi ovunque nel caso di L^∞), e quindi si può pensare come una curva misurabile da $[a, b]$ al disco unitario D di \mathbb{C} (per quasi ogni $t \in [a, b]$ nel caso di L^∞). Nel caso di $f \in C[a, b]$ si tratta di una curva continua.

Ora occorre notare che i punti x che giacciono sulla circonferenza di raggio 1 sono punti estremi del disco unitario D , perché ogni segmento in \mathbb{C} che contiene x come punto interno, comunque corto lo si scelga, ha almeno un punto estremo fuori di D (ed entrambi nel caso il segmento sia tangente a D , a causa della convessità di D). Invece ogni punto x nel disco unitario *aperto* di \mathbb{C} è combinazione convessa di punti estremi del disco (ossia sulla sua frontiera). Si può anzi esprimere x come media aritmetica di due punti di frontiera: se $x \neq 0$ si tratta dei due punti di intersezione sulla circonferenza

unitaria della retta che passa per x ed è perpendicolare al raggio dall'origine a x (invece il punto $x = 0$ è combinazione convessa di due qualsiasi punti antipodali sulla frontiera). Si noti che questi due punti dipendono con continuità da x . Questo significa che f è la media aritmetica di due funzioni continue u e v di modulo 1: $f(t) = (u(t) + v(t))/2$. Se invece f non è continua ma solo misurabile, i due punti $u(t)$ e $v(t)$ sono funzioni misurabili di t .

Da questi argomenti segue che una funzione f nella sfera unitaria dello spazio delle funzioni continue è un punto estremo di questa sfera se e solo se $|f(t)| = 1$ per ogni t ; analogamente, f è un punto estremo della sfera unitaria di L^∞ se e solo se $|f(t)| = 1$ quasi ovunque.

Diverso è il caso dello spazio delle funzioni continue a valori reali. In questo ambito la condizione per l'estremalità resta ovviamente la stessa, $|f(t)| = 1$ per ogni t , ma nel caso reale una tale funzione è continua se e solo se vale costantemente 1 o -1 . Pertanto i punti estremi della sfera unitaria in questo spazio sul campo reale sono solo le funzioni costanti ± 1 . La stessa conclusione vale per lo spazio sul campo \mathbb{R} delle funzioni continue su un compatto in \mathbb{R} , tranne nel caso banale in cui il compatto consista di un insieme finito di punti, nel qual caso lo spazio delle funzioni continue è a dimensione finita. Analogamente, su uno spazio topologico X non totalmente sconnesso (ossia nel quale esistono componenti connesse che non si riducono ad un unico punto), i punti estremi della sfera unitaria di $C(X)$ a valori reali sono tutte le funzioni di modulo 1, e pertanto sono le funzioni costanti con valori ± 1 su ciascuna componente connessa dello spazio (e sono invece le *successioni* di modulo 1, se lo spazio consiste di un insieme numerabile). \square

Corollario 3.9.16. *La palla unitaria nello spazio di Banach (sul campo \mathbb{R}) delle funzioni continue a valori reali su uno spazio di Hausdorff X non totalmente sconnesso non è l'involucro convesso dei propri punti estremi (nel senso della Definizione 3.9.12).*

Dimostrazione. Nel precedente Esempio 3.9.15 abbiamo visto che la palla unitaria di $C(X)$ a valori reali, ristretta ad una componente connessa di X , contiene solo due punti estremi, le costanti ± 1 , il cui involucro convesso è quindi un segmento (ossia una palla *unidimensionale*). Ma per ogni coppia di punti x, y in uno spazio topologico di Hausdorff esistono aperti disgiunti $O_x \ni x$ e $O_y \ni y$, e quindi una funzione continua che assume valori diversi su x e y . Quindi su ogni componente connessa di X la palla unitaria delle funzioni continue a valori reali include funzioni che non sono combinazioni convesse di punti estremi della palla. \square

Esempio 3.9.17. (Punti estremi delle sfere unitarie di L^p .) Consideriamo adesso le sfere (o equivalentemente, le palle) unitarie in $L^p[a, b]$. Poiché chiaramente i punti estremi rimangono invariati se si dilata la sfera, senza perdita di generalità possiamo assumere che la misura di Lebesgue sia stata normalizzata in maniera che la misura totale di $[a, b]$ valga 1: ossia, $dm = dx/(b - a)$. Per evitare di scrivere il fattore di normalizzazione in ogni passaggio, consideriamo il caso di $L^p[0, 1]$ (di nuovo senza perdita di generalità, perché i punti estremi rimangono invariati se si dilata o trasla l'intervallo $[a, b]$).

È evidente che nessuna f con $\|f\|_p < 1$ è un punto estremo (è una combinazione convessa delle due funzioni *antipodali* di norma 1 date da $\pm f/\|f\|_p$: questo argomento vale per ogni sfera unitaria in qualunque spazio di Banach), quindi d'ora in poi limiteremo l'attenzione a funzioni di norma 1.

Consideriamo dapprima L^1 . Sia $f \in L^1[0, 1]$ tale che $\|f\|_1 = 1$. Allora esiste un sottoinsieme proprio $E \subsetneq [0, 1]$ di misura positiva tale che $0 < \int_E |f| < 1$ quasi ovunque in E . Poniamo $m_1 = \int_E |f|$ e $m_2 = 1 - m_1 = \int_{[0,1] \setminus E} |f|$. Poniamo poi $f_1(x) = f(x)/m_1$ se $x \in E$, $f_1(x) = 0$ se $x \notin E$, ed analogamente $f_2(x) = 0$ se $x \in E$ e $f_2(x) = f(x)/m_2$ se $x \notin E$. Allora f_1 e f_2 hanno supporto disgiunto e f è la loro combinazione convessa $f = m_1 f_1 + m_2 f_2$. Notiamo che $\|f_1\|_1 = \int_E |f|/m_1 = 1$, e per la stessa ragione anche $\|f_2\|_1 = 1$. Quindi f non è un punto estremo: *la sfera unitaria di L^1 rispetto alla misura di Lebesgue non ha punti estremi*. Più in generale, lo stesso argomento vale per lo spazio $L^1(\mu)$ rispetto a qualsiasi misura non puramente atomica, e porta a concludere che ciascun punto estremo della sfera unitaria di $L^1(\mu)$ devono avere supporto in un atomo, ed ovviamente vale anche il viceversa: le funzioni caratteristiche di atomi, se normalizzate, sono punti estremi della sfera unitaria (rammentiamo che una misura non ha atomi se ogni insieme di misura positiva contiene un sottoinsieme di misura strettamente inferiore ma ancora positiva: Definizione 1.9.11).

lo stesso argomento non funziona però per L^p con $1 < p < \infty$. Infatti, proviamo a generalizzarlo, ponendo ora $f \in L^p[0, 1]$ con $\|f\|_p = 1$, $m_1 = (\int_E |f|^p)^{1/p}$ e $m_2 = (\int_{[0,1] \setminus E} |f|^p)^{1/p}$. Ora $m_1^p + m_2^p = \int_E |f|^p dx + \int_{\complement E} |f|^p dx = 1$, e quindi $(m_1 + m_2)^p \Rightarrow m_1^p + m_2^p = 1$ per il Lemma 1.7.5. Pertanto ora la combinazione lineare $m_1 f_1 + m_2 f_2$ non è più una combinazione convessa, ed il precedente argomento non si applica.

D'altra parte, è facile provare che, se $p > 1$ e $\|f\|_p = 1$, allora f è un punto estremo della sfera unitaria di L^p . Infatti, se $p > 1$ e $f = \alpha g + (1 - \alpha)h$

con $0 < \alpha < 1$ e $\|g\|_p = \|h\|_p = 1$, allora almeno una fra g e h ha norma L^p maggiore di 1. Infatti, dal momento che per $p > 1$ la funzione $t \mapsto t^p$ è strettamente convessa in \mathbb{R}^+ (ha derivata seconda strettamente positiva!), se $\|g\|_p = \|h\|_p = 1$ si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\alpha g(x) + (1 - \alpha)h(x)|^p dx &< \int_0^1 (\alpha|g(x)|^p + (1 - \alpha)|h(x)|^p) dx \\ &= \alpha\|g\|_p^p + (1 - \alpha)\|h\|_p^p = 1. \end{aligned}$$

□

Esempio 3.9.18. (Misure atomiche μ , delta di Dirac e punti estremi della sfera unitaria di $L^1(\mu)$.) Per quali misure di Borel μ sull'intervallo $[a, b]$ (o su un insieme misurabile in \mathbb{R} di misura finita) esistono punti estremi nella palla (o equivalentemente, nella sfera) unitaria di $L^1(\mu)$? Come nell'Esempio 3.9.17, possiamo assumere μ normalizzata da $\mu[a, b] = 1$, e possiamo assumere $[a, b] = [0, 1]$. Evidentemente occorre che non si applichi il ragionamento dell'Esempio 3.9.17, che porta alla inesistenza di punti estremi nella palla unitaria di $L^1(m)$ ove m è la misura di Lebesgue: in particolare, rivedendo quell'argomento, ci accorgiamo che, per qualche $f \in L^1(\mu)$ di norma 1, non deve esistere un sottoinsieme proprio $E \subsetneq [0, 1]$ di misura positiva tale che $0 < \int_E |f| < 1$ quasi ovunque in E . Questo equivale a richiedere che ogni sottoinsieme di $[0, 1]$ abbia μ -misura uguale a 0 o a 1, o equivalentemente che la misura μ sia *puramente atomica*, ossia esistano punti $x_k \in [0, 1]$ tali che, per ogni sottoinsieme misurabile $E \subset [0, 1]$, si abbia $\mu(E) = 0$ se E non contiene alcuno dei punti x_k (si rivedano la Definizione 1.9.11 e l'Esempio 1.9.22). Se c'è un solo atomo x_0 la misura μ si chiama la *delta di Dirac* al punto x_0 , e si indica con δ_{x_0} . Reintrodurremo la delta di Dirac nel contesto più generale delle distribuzioni nella parte (iii) dell'Esempio 11.5.4 e ne studieremo in grande dettaglio le proprietà nel resto del Capitolo 11 e poi nei Capitoli 12 e 13.

Le funzioni di norma 1 in $L^1(\delta_{x_0})$ sono quelle che valgono 1 al punto x_0 . Due funzioni che coincidono al punto x_0 sono nella stessa classe di Lebesgue rispetto alla misura δ_{x_0} . Quindi, se una funzione f di norma 1 in $L^1(\delta_{x_0})$ è combinazione convessa di due funzioni g e h di norma 1, necessariamente le classi di Lebesgue di f , g e h coincidono: quindi ogni funzione di norma 1 è un punto estremo.

Se invece la misura μ ha due atomi x_0 e x_1 , ossia se $\mu = \alpha\delta_{x_0} + (1 - \alpha)\delta_{x_1}$,

allora le funzioni $f \in L^1(\mu)$ di norma 1 sono le funzioni per le quali $\alpha|f(x_0)| + (1 - \alpha)|f(x_1)| = 1$, e fra queste funzioni i punti estremi della sua sfera unitaria L^1 sono quelle per cui $|f(x_0)| = 0$ oppure $|f(x_1)| = 0$.

Estendendo questo argomento, vediamo che, in presenza di una successione di atomi $\{x_k\}$ per una misura puramente atomica μ , i punti estremi della sfera unitaria sono le funzioni nulle su ogni atomo tranne uno. Se tutti gli atomi hanno la stessa μ -misura (nel qual caso sono un numero finito oppure μ è una misura di variazione totale infinita), allora i punti estremi della sfera unitaria in $L^1(\mu)$ sono le funzioni che, prese in modulo, coincidono con le successioni e_k tali che $e_k(x_j) = \delta_{kj} = 1$ se $j = k$ e zero altrimenti (il resto del dominio, $[0, 1] \setminus \{x_k\}$, non conta perché è un insieme di μ -misura zero). \square

Esempio 3.9.19. (Punti estremi della sfera unitaria di ℓ^p .) In particolare, se nel precedente Esempio 3.9.18 μ è la misura che conta su \mathbb{Z} (introdotta nell'Esempio 1.9.22), allora $L^p(\mu)$ è isometricamente isomorfo allo spazio ℓ^p delle successioni la cui potenza p dà luogo ad una serie assolutamente convergente, introdotto nella Definizione 1.7.1, e le successioni e_k giocano un ruolo analogo ai vettori della base canonica nello spazio ℓ^p su n punti, isomorfo a \mathbb{C}^n .

Analogamente, per la misura con infiniti atomi di identica massa, lo spazio L^p è isometricamente isomorfo a ℓ^p (se gli atomi hanno masse differenti si ottengono invece spazi ℓ^p con peso). Da quanto visto prima ora sappiamo che tutte le successioni nella sfera unitaria di ℓ^p sono punti estremi di questa sfera se $1 < p < \infty$, mentre per $p = 1$ i punti estremi sono solo le successioni canoniche e_k (che in questo contesto discreto sono delte di Dirac) moltiplicate per un generico numero complesso di modulo 1, e per $p = \infty$ i punti estremi sono tutte le successioni di modulo 1.

Naturalmente, nel caso particolare di sottospazi a dimensione finita di ℓ^p dati da successioni nulle dopo l'indice n , questo significa che la sfera unitaria di ℓ^p è un solido strettamente convesso se $1 < p < \infty$, mentre non lo è per $p = 1$ o ∞ : in tal caso i punti estremi di questo solido sono i vettori che (limitando l'attenzione al modulo delle loro coordinate) giacciono rispettivamente sugli assi cartesiani o sulle bisettrici dei vari ottanti. per il calcolo esplicito ed il disegno di queste sfere unitarie nel caso bidimensionale rinviamo il lettore all'Esempio 1.7.10. \square

3.10 Topologia debole* sul duale di uno spazio vettoriale topologico e teorema di Banach–Alaoglu

Definizione 3.10.1. Per la Proposizione 3.3.11, il duale V' di uno spazio di Banach V è anch'esso uno spazio di Banach, e quindi lo è anche il duale V'' di V' , che indichiamo come il *biduale* di V .

Proposizione 3.10.2. (Immersione di uno spazio vettoriale topologico nel suo biduale.) *Sia V uno spazio vettoriale topologico con duale V' . La mappa*

$$\iota[v](x') = x'(v) := \langle x', v \rangle$$

è una applicazione lineare di V allo spazio $W := \text{Hom}(V', \mathbb{C})$ dei funzionali lineari su V' che separa i punti di V' . Questa mappa è iniettiva se e solo se V' separa i punti di V (ad esempio se V è localmente convesso: Corollario 3.9.7).

Dimostrazione. La linearità è evidente. Mostriamo che ι separa i punti di V' : $\iota(x') = \iota(y')$ se e solo se $\langle x', v \rangle = \langle y', v \rangle$ per ogni $v \in V$, ossia se e solo se $x' = y'$.

Infine, V' separa i punti di V se e solo se per ogni $v_1 \neq v_2 \in V$ esiste x' tale che $\langle x', v_1 \rangle \neq \langle x', v_2 \rangle$, ossia $\iota(v_1) \neq \iota(v_2)$. \square

Definizione 3.10.3. (Topologia debole*.) La topologia debole indotta su V' dalla famiglia di funzionali continui in V'' data dall'immagine dell'immersione ι della precedente Proposizione 3.10.2 si chiama la *topologia debole** τ_{w^*} di V' . Si noti che, in base alla definizione di topologia debole (Notazione 3.8.5), la topologia debole* di V' è la topologia più debole nella quale tutti i funzionali $w \in V''$ al variare di v in V sono continui.

Da questa Definizione e dalla Proposizione 3.8.3 otteniamo immediatamente il fatto seguente:

Corollario 3.10.4. *La topologia debole* è localmente convessa, ed ogni funzionale τ_{w^*} -continuo su V' è del tipo $x' \rightarrow \iota[v](x') = \langle x', v \rangle$ per qualche $v \in V$.*

Nota 3.10.5. Una questione terminologica: nella Proposizione 3.10.2 facciamo riferimento a $W = \text{Hom}(V', \mathbb{C})$ (lo spazio dei funzionali lineari su V') invece che al duale V'' (lo spazio dei funzionali lineari *continui* su V'), perchè la continuità in generale non ha senso: il duale di uno spazio vettoriale topologico non è necessariamente uno spazio vettoriale topologico. Proprio tramite la costruzione a cui stiamo procedendo introdurremo su di esso una topologia. Però abbiamo visto che il duale di uno spazio normato è invece in maniera naturale uno spazio normato, anzi di Banach (Proposizione 3.3.11), e quindi, nel contesto più ristretto degli spazi normati, la topologia debole* verrà paragonata alla topologia della norma, detta topologia forte: questo paragone sarà necessario in vari enunciati della Sezione 3.11. \square

La topologia debole* è un esempio di topologia debole, e come tale è, in effetti, piuttosto magra, come osservato nella Nota 3.8.4. Ora mostriamo un fatto sorprendente: la topologia debole* è così magra che in essa, in uno spazio normato, la sfera unitaria è compatta. Premettiamo un lemma tecnico.

Lemma 3.10.6. *Sia U un intorno dell'origine in uno spazio vettoriale topologico V e \mathcal{F} l'insieme dei funzionali lineari x' su V che verificano $|\langle x', v \rangle| \leq C$ per qualche $C > 0$ e per ogni $v \in U$. Allora:*

- (i) *per ogni $v \in V$, esiste una costante $c_v > 0$ tale che $|\langle x', v \rangle| \leq c_v$ per ogni $x' \in \mathcal{F}$, e quindi \mathcal{F} è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $Z := \prod_{v \in V} D_v$, dove D_v è la palla di raggio c_v/C nel campo di base su cui è definito V (reale o complesso);*
- (ii) *nella topologia prodotto τ di Z , la chiusura $\overline{\mathcal{F}}$ è tale che ogni $f \in \overline{\mathcal{F}}$ è un funzionale lineare su V .*

Dimostrazione. Dato $v \neq 0$ in V , la retta parametrica che passa per l'origine e per V deve intersecare l'aperto U in un aperto di \mathbb{R} (perchè la moltiplicazione per scalari è continua in uno spazio vettoriale topologico: questa stessa osservazione è stata già esposta nella Definizione 3.9.2). Pertanto, per ogni v deve esistere un fattore di scala c_v tale che $v \in c_v U$. Allora, vista la definizione di \mathcal{F} data nell'enunciato, $|\langle x', v \rangle| \leq c_v$ per ogni $x' \in \mathcal{F}$: quindi \mathcal{F} è l'insieme delle funzioni x' su V definite da $v \mapsto x'(v) \in D_v$, ossia un sottoinsieme del prodotto cartesiano $Z := \prod_{v \in V} D_v$ (Definizione 3.4.1). Questo prova la parte (i).

Ora consideriamo $f \in \overline{\mathcal{F}}$, λ_1, λ_2 scalari, $v_1, v_2 \in V$ e $\varepsilon > 0$ arbitrari.

L'insieme

$$W := \{x' \in Z : |x'(v_i) - f(v_i)| < \varepsilon \\ \text{e } |x'(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)| < \varepsilon, i = 1, 2\}$$

è un aperto nella topologia prodotto τ di Z (che, per la Definizione 3.7.2, altro non è se non la topologia debole su Z indotta dalla famiglia di *tutte* le funzioni $v \mapsto g(v) \in D_v$). Per definizione di chiusura, \mathcal{F} deve intersecare questo aperto W . Sia $x' \in W \cap \mathcal{F}$. Poichè x' è stato assunto lineare, ora abbiamo

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - \lambda_1 f(v_1) - \lambda_2 f(v_2) = \\ (f - x')(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - \lambda_1 (f - x')(v_1) - \lambda_2 (f - x')(v_2),$$

e quindi

$$|f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) - \lambda_1 f(v_1) - \lambda_2 f(v_2)| < (1 + |\lambda_1| + |\lambda_2|)\varepsilon.$$

Poichè ε è arbitrario, da questo segue che f è lineare. \square

Teorema 3.10.7 (Banach–Alaoglu). *Come nel precedente Lemma 3.10.6, sia U un intorno dell'origine in uno spazio vettoriale topologico V e \mathcal{F} l'insieme dei funzionali lineari x' su V che verificano $|\langle x', v \rangle| \leq C$ per qualche $C \geq 0$ e per ogni $v \in U$. Allora \mathcal{F} è un sottoinsieme di V' (ossia i funzionali in \mathcal{F} sono necessariamente continui) ed è compatto nella topologia debole*.*

In particolare, se V è uno spazio normato, allora la sua sfera unitaria è debolmente compatta (e lo è anche qualsiasi altra sfera di raggio finito, il che è equivalente vista l'invarianza della topologia per traslazione e dilatazione, Definizione 3.1.1).*

Dimostrazione. È ovvio dalla Proposizione 3.3.4 che i funzionali in \mathcal{F} sono continui, visto che essi sono limitati perchè mandano l'intorno aperto U di 0 in V in una sfera limitata nel campo di base. Quindi $\mathcal{F} \subset V'$.

Sappiamo dalla parte (i) del precedente Lemma 3.10.6 che \mathcal{F} è immerso nel prodotto cartesiano Z definito in quel Lemma. Dalla parte (ii) del Lemma 3.10.6 \mathcal{F} è τ -chiuso in Z . Ma Z è compatto per il Teorema di Tychonoff 3.7.4, e quindi è τ -compatto per la prima parte del Lemma 1.10.6.

Da queste due considerazioni segue $\mathcal{F} \subset V' \cap Z$, e quindi \mathcal{F} eredita da V' la topologia debole* τ_w indotta da V , e da Z la topologia prodotto τ . Il prossimo

passo consiste nel dimostrare che queste due topologie su \mathcal{F} coincidono. Fissati arbitrariamente $\varepsilon > 0$, $x'_0 \in \mathcal{F}$ e $v_1, \dots, v_n \in V$, consideriamo i seguenti due intorni di base locale a x'_0 rispettivamente in τ_w e τ :

$$W_1 := \{x' \in V' : |\langle x', v_i \rangle - \langle x'_0, v_i \rangle| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\},$$

$$W_2 := \{f \in Z : |f(v_i) - \langle x'_0, v_i \rangle| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

Poichè abbiamo visto che $\mathcal{F} \subset V' \cap Z$, ogni $x' \in W_1 \subset V'$ che appartiene a \mathcal{F} deve appartenere anche a Z , e quindi la definizione di W_1 e W_2 implica che questo funzionale x' sta in W_2 : quindi $W_1 \cap \mathcal{F} \subset W_2$. Lo stesso argomento dimostra il viceversa, $W_2 \cap \mathcal{F} \subset W_1$. In altre parole, $W_1 \cap \mathcal{F} = W_2 \cap \mathcal{F}$. Pertanto le basi delle due topologie τ e τ_w , ristrette a \mathcal{F} , coincidono, e quindi le due topologie coincidono su \mathcal{F} .

Ma allora \mathcal{F} , che poco sopra abbiamo provato essere compatto nella topologia τ , lo è anche nella topologia τ_w . Questo completa la dimostrazione. \square

Corollario 3.10.8. (i) *Lo spazio delle funzioni continue su uno spazio topologico di Hausdorff X (Definizione 1.10.2) non totalmente sconnesso non è il duale di uno spazio vettoriale topologico. (Si noti che, invece, lo spazio $L^\infty(\mu)$ rispetto ad una qualsiasi misura di Borel μ su \mathbb{R} è il duale di $L^1(\mathbb{R}, \mu)$: si veda l'Esempio 3.12.1 nel seguito).*

(ii) *Lo spazio $L^1(X, \mu)$ rispetto ad una misura non puramente atomica non è il duale di uno spazio vettoriale topologico. (Vedremo invece nel seguito che, invece, se μ è una qualsiasi misura di Borel puramente atomica con un insieme numerabile di atomi nei punti, diciamo, x_n , allora lo spazio $L^1(\mu)$ è il duale dello spazio c_0 delle successioni che tendono a zero all'infinito (pensate come funzioni definite su $\{x_n\}$: si riveda la fine dell'Esempio 3.12.4). Vedremo altresì che, se $p > 1$, $L^p(\mu)$ rispetto ad una qualsiasi misura di Borel μ , con $1 < p \leq \infty$, è il duale di $L^q(\mu)$, dove q è l'indice coniugato di p nel senso della Definizione 1.16.4 (Esempio 3.12.2)).*

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso dello spazio $C(X)$ delle funzioni continue a valori reali (uno spazio sul campo \mathbb{R}). Se $C(X)$ fosse il duale di uno spazio vettoriale topologico, la sua sfera unitaria sarebbe compatta nella topologia debole* in base al Teorema di Banach–Alaoglu 3.10.7, e quindi sarebbe l'involucro convesso dei propri punti estremi in base al Teorema di Krein–Milman 3.9.13 (si noti che il fatto che un punto sia estremo non

dipende dalla topologia, forte o debole che essa sia). Invece non è così, come abbiamo visto nell'Esempio 3.9.15: in effetti, in tale Esempio abbiamo mostrato che, se la topologia non è totalmente sconnessa, i punti estremi sono funzioni costanti su ogni componente connessa, e quindi l'involucro convesso chiuso dei punti estremi è uno spazio vettoriale di funzioni costanti sulle componenti connesse, pertanto in generale assai più piccolo di $C(X)$, a meno che, appunto, le componenti connesse siano singoli punti, ossia X sia totalmente sconnesso: infatti, la proprietà di separazione T_2 (Definizione 1.10.2) implica che su uno spazio di Hausdorff, per ogni due punti diversi, esiste una funzione continua che li separa, ossia che assume su di essi valori diversi.

Ora passiamo al caso delle funzioni continue a valori complessi (uno spazio sul campo \mathbb{C}). Se una funzione f appartiene alla sfera unitaria di $C(X)$, vi appartengono anche $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$. Quindi lo stesso argomento mostra che, se lo spazio topologico X è uno spazio di Hausdorff non totalmente sconnesso, l'involucro convesso chiuso dei punti estremi della sfera unitaria di $C(X)$ è lo spazio vettoriale sul campo \mathbb{C} delle funzioni costanti in ciascuna componente connessa di X , che non è tutta la sfera unitaria di $C(X)$, la quale contiene funzioni non costanti su queste componenti connesse.

Esattamente per lo stesso argomento, lo spazio $L^1(X, \mu)$, rispetto ad una misura di Borel μ non puramente atomica su uno spazio di misura X , non può essere il duale di uno spazio vettoriale topologico, perché non esistono punti estremi della sua sfera unitaria tranne quelli con supporto in un atomo (qui si usa l'Esempio 3.9.17). Questo prova la parte (ii). \square

3.11 Duali di spazi normati e loro topologia debole*; spazi riflessivi

Sappiamo dall'Esercizio 3.3.8 che gli operatori lineari da uno spazio normato V ad un altro spazio normato W formano uno spazio normato con la norma della Definizione 3.3.7, che qui ripetiamo:

$$\|T\| := \sup\{|T(v)| : \|v\|_V \leq 1\}, \quad (3.29)$$

Inoltre, segue dalla Proposizione 3.3.11 che se W è uno spazio di Banach allora lo spazio normato degli operatori lineari da V a W risulta uno spazio di Banach. Allora, come già osservato alla fine della Definizione 3.3.14, il duale

di uno spazio normato è uno spazio normato e dalla Proposizione 3.3.11 che il duale di uno spazio di Banach è uno spazio di Banach. Più precisamente:

Corollario 3.11.1. *Sia V uno spazio normato (reale o complesso), e B la sua palla unitaria chiusa. Per ogni $v' \in V'$ (duale reale o complesso) abbiamo posto in (3.9):*

$$\|v'\| := \sup\{|\langle v', v \rangle| : v \in B\}.$$

Questo definisce su V' una norma rispetto alla quale V' è uno spazio di Banach.

Si noti che quindi

$$|\langle v', v \rangle| \leq \|v\| \|v'\| \quad (3.30)$$

per ogni $v \in V$ e $v' \in V'$ (questo è stato già implicitamente osservato nella dimostrazione del Corollario 3.5.10).

Dimostrazione. La prima asserzione discende immediatamente dall'identità 3.29 e dai commenti che la accompagnano, visto che \mathbb{R} e \mathbb{C} sono spazi di Banach. Ne segue immediatamente la disuguaglianza (3.30) per $v \in B$, ed allora, per linearità, anche per ogni $v \in V$. \square

Rammentiamo anche il Corollario 3.5.10, che ripetiamo ed estendiamo qui:

Corollario 3.11.2. *Vale la identità duale di quella del precedente Corollario 3.11.1: se V uno spazio normato (reale o complesso), e B^* la palla unitaria chiusa del suo duale, allora per ogni $v \in V$ abbiamo*

$$\|v\| := \sup\{|\langle x', v \rangle| : x' \in B^*\}.$$

In altre parole, la mappa $x' \mapsto \langle x', v \rangle$ è un funzionale lineare continuo su V' di norma $\|v\|$.

Infine, B^ è compatto nella topologia debole* di V' (Definizione 3.10.3).*

Dimostrazione. L'unica asserzione nuova è la compattezza, che ora dimostriamo. Siano B la palla unitaria chiusa di V e U la palla unitaria aperta. Allora B è la chiusura di U , e quindi, grazie alla formula per la norma di x' come estremo superiore su B data nel precedente Corollario 3.11.1, se ne deduce che un funzionale x' continuo ha norma 1, ovvero è in B^* , se e solo se $|\langle v, x' \rangle| \leq 1$ per ogni $v \in U$. Ora la compattezza di B^* segue dal Teorema di Banach–Alaoglu 3.10.7. \square

Corollario 3.11.3. *Se V è uno spazio normato di dimensione infinita, la topologia debole* del suo duale V' è strettamente più debole della topologia della norma di V' , discussa nel Corollario 3.11.1. (In dimensione finita ogni spazio vettoriale è isomorfo e topologicamente omeomorfo al suo duale, e quindi le due topologie coincidono).*

Dimostrazione. La topologia debole* è la topologia più debole nella quale tutti i funzionali $v'' : x' \mapsto \langle x', v \rangle$ sono continui: allora il precedente Corollario 3.11.2 asserisce che la topologia della norma di V' è più forte della topologia debole*. Il fatto che a dimensione infinita essa sia strettamente più forte segue dalla Nota 3.8.4, dal momento che V' , come spazio normato, è ovviamente localmente limitato (basta considerare le palle aperte intorno all'origine, che sono limitate). \square

L'identità duale del Corollario 3.11.2 si trasporta alla riformulazione della definizione di norma di operatore lineare limitato fra spazi normati:

Corollario 3.11.4. *Siano V, W spazi normati e $T : V \rightarrow W$ un operatore lineare limitato. Allora la norma di T in $\mathcal{B}(V, W)$ si può esprimere come*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tv, w' \rangle| : \|v\|_V \leq 1, \|w'\|_{W'} \leq 1\}.$$

Dimostrazione. Sappiamo dalla Definizione 3.3.7 che $\|T\| := \sup\{\|Tv\|_W : \|v\|_V \leq 1\}$. D'altra parte, sappiamo dal Corollario 3.11.2 che $\|Tv\|_W = \sup\{|\langle Tv, w' \rangle| : \|w'\|_{W'} \leq 1\}$. Combinando queste due identità otteniamo quella nell'enunciato. \square

Nota 3.11.5. Rammentiamo quanto osservato nella Proposizione 3.10.2: in base al Corollario 3.11.2 che ogni $v \in V$ definisce un (unico) $\iota(v) \in V''$ nel modo seguente:

$$\langle v, v' \rangle := \langle v', \iota(v) \rangle.$$

Questa immersione $\iota : V \rightarrow V''$ è lineare, e gli elementi di $\iota(V)$ sono esattamente i funzionali lineari continui su V' rispetto alla sua topologia debole*. Inoltre, sempre dal Corollario 3.11.2, segue che $\|\iota(v)\|_{V''} = \|v\|_V$, ossia che ι è una isometria di V in un sottospazio di V'' . Se (e solo se) V è uno spazio di Banach, ossia completo, l'immagine isometrica $\iota(V) \subset V''$ è un sottospazio completo di V'' , quindi è chiusa. Di solito si identifica V con $\iota(V) \subset V''$ e si scrive semplicemente $V \subset V''$. Dal momento che la topologia della norma di V' è più forte della topologia debole* (Corollario 3.11.3), i funzionali continui rispetto a quest'ultima possono essere strettamente di meno, e quindi in generale $V \subsetneq V''$. \square

Per futura memoria, presentiamo come enunciato separato l'asserzione provata nella precedente Nota 3.11.5 circa il fatto che ιV sia chiuso:

Corollario 3.11.6. *Sia V uno spazio normato. Allora ιV è un sottospazio chiuso di V'' se e solo se V è uno spazio di Banach.*

Definizione 3.11.7. (Spazi normati riflessivi.) Uno spazio normato in cui l'immersione isometrica ι appena richiamata è surgettiva, ossia $V := \iota(V) = V''$, si dice *riflessivo*.

Nota 3.11.8. (Riflessività degli spazi L^p con $1 \leq p < \infty$.) Segue dagli esempi della Sezione 3.12 che gli spazi L^p e ℓ^p , per $1 \leq p < \infty$, sono riflessivi. Infatti, vedremo negli Esempi 3.12.2 e 3.12.4 che il loro duale coincide con lo spazio L^q (rispettivamente, ℓ^q) con p e q indici coniugati (Definizione 1.16.4). Dal momento che la relazione di coniugazione, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, è simmetrica in p e q , si ottiene che questi spazi coincidono con il proprio biduale.

Invece, L^∞ e ℓ^∞ non sono riflessivi, e neppure lo sono i loro sottospazi chiusi dati rispettivamente dalle funzioni continue e limitate $C \cap L^\infty$ (ed anche dalle funzioni continue che tendono a zero all'infinito, C_0) e dalle successioni che tendono a zero all'infinito, c_0 . Nei sopracitati Esempi accenniamo al caso di $L^\infty[0, 1]$ e $C[0, 1]$: il caso generale di spazi di misura qualsiasi, ad esempio infinita, viene lasciato come esercizio al lettore (nel caso di ℓ^p si veda anche [25, Esercizio 5 del Capitolo 3]). Si noti che il caso di misura infinita include anche l'esempio di ℓ^∞ , che è lo spazio $L^\infty(\mu)$ rispetto alla misura discreta che conta gli interi introdotta nell'Esempio 1.9.22. In questo caso sappiamo già che il duale di ℓ^∞ è strettamente più grande di ℓ^1 , a causa dell'esistenza di un funzionale lineare continuo su ℓ^∞ che non proviene da ℓ^1 , il limite di Banach studiato nell'Esempio 3.5.4. \square

Proposizione 3.11.9. *Se X è uno spazio normato riflessivo, allora il suo duale X' è uno spazio normato riflessivo.*

Dimostrazione. Sappiamo dal Corollario 3.11.1 che X' è uno spazio normato (con la norma del duale). Siano $\iota : X \mapsto X''$ e $\iota' : X' \mapsto X'''$ le rispettive immersioni canoniche. È chiaro che la riflessività implica che $X \sim X''$ e quindi $X' \sim X'''$, ma questo non basta, perché occorre provare che l'isomorfismo isometrico fra X' e X''' è stabilito dall'immersione canonica ι' , ossia che ι' è surgettiva su X''' .

Per questo fine, scegliamo $x''' \in X'''$ ed osserviamo che, essendo X riflessivo,

$\iota : X \mapsto X''$ è surgettiva e quindi per ogni $x'' \in X''$ esiste $x = \iota^{-1}x'' \in X$. Allora

$$\langle x''', x'' \rangle = \langle x''', \iota x \rangle = \langle x''' \circ \iota, x \rangle = \langle x'', x''' \circ \iota \rangle.$$

Questo equivale a dire che, per ogni $x''' \in X'''$, si ha $x'' = \iota'(x''' \circ \iota)$, e quindi ι' è surgettiva. \square

Proposizione 3.11.10. *Siano X, Y spazi normati. Se $J : X \mapsto Y$ è un isomorfismo e X è riflessivo, anche Y è riflessivo.*

Dimostrazione.

Sia $J' : Y' \mapsto X'$ l'operatore lineare definito da $J'y' = y' \circ J$, e $J'' : X'' \mapsto Y''$ quello definito da $J''x'' = x'' \circ J'$. Segue direttamente dal Corollario 3.11.4 che questi operatori lineari sono limitati, e segue dalla surgettività di J che J' è iniettivo, e dalla sua iniettività che J' è surgettivo (lasciamo questa verifica al lettore come esercizio). Perciò J' è un isomorfismo. A questo punto, per lo stesso argomento, anche J'' è un isomorfismo. Siano $\iota_X : X \mapsto X''$ e $\iota_Y : Y \mapsto Y''$ le immersioni canoniche. Poiché J'' è un isomorfismo, per ogni $y'' \in Y''$ esiste $x'' \in X''$ tale che $y'' = J''x'' = J''\iota_X x$ per qualche $x \in X$ (che esiste perché X è riflessivo). Allora, per ogni $y' \in Y'$,

$$\langle y'', y' \rangle = \langle J''\iota_X x, y' \rangle = \langle \iota_X x, J'y' \rangle = \langle J'y', x \rangle = \langle y', Jy \rangle,$$

e quindi $y'' = \iota_Y Jy$. Pertanto ι_Y è surgettiva, e quindi, per la Definizione 3.11.7, Y è uno spazio riflessivo. \square

3.11.1 Annichilatori; duali di sottospazi e di quozienti

Definizione 3.11.11. (*Annichilatori.*) Sia X uno spazio vettoriale topologico ed X' il suo duale. Dati due sottoinsiemi $V \subset X$ e $W \subset X'$, ne definiamo gli annichilatori

$$V^\perp := \{x' \in X' : \langle x', v \rangle = 0 \text{ per ogni } v \in V\},$$

$${}^\perp W := \{x \in X : \langle w, x \rangle = 0 \text{ per ogni } w \in W\}.$$

Corollario 3.11.12. *Siano X uno spazio normato e $V \subset X$ e $W \subset X'$ sottoinsiemi non necessariamente chiusi. Allora V^\perp è un sottospazio chiuso di X' (nella topologia debole* (e quindi, a maggior ragione, è anche chiuso nella norma duale introdotta nel Corollario 3.11.1, che è più forte della topologia debole*). Analogamente ${}^\perp W$ è un sottospazio chiuso di X (nella topologia della norma).*

Dimostrazione. Si verifica banalmente che V^\perp e ${}^\perp W$ siano sottospazi lineari di X' e di X , rispettivamente.

Per definizione, V^\perp è l'intersezione dei nuclei dei funzionali $w \in X''$ con $v \in V$. Osserviamo che tali funzionali sono continui sullo spazio normato X' (munito della norma duale), i loro nuclei sono chiusi (nella topologia della norma), e quindi V^\perp è l'intersezione di una famiglia di chiusi, e pertanto è chiuso. Ma questi funzionali sono anche continui nella topologia debole*, proprio per la Definizione 3.10.3 di tale topologia, e quindi lo stesso ragionamento mostra che, più in generale, V^\perp è chiuso in X' nella topologia debole*. Se $x_\alpha \in {}^\perp W$ e $x_\alpha \rightarrow x$, allora, in base alla disuguaglianza (3.30), per ogni $w \in W$ si ha $|\langle x_\alpha - x, w \rangle| \leq \|x_\alpha - x\| \|w\| \rightarrow 0$, e quindi $\langle x, w \rangle = \lim_\alpha \langle x_\alpha, w \rangle$. Ma $\langle x_\alpha, w \rangle = 0$ per $x_\alpha \in {}^\perp W$ e $w \in W$, e quindi $\langle x, w \rangle = 0$ per ogni $w \in W$ e $x \in {}^\perp W$: questo prova che ${}^\perp W$ è chiuso in norma. \square

Corollario 3.11.13. *Per ogni spazio normato X e sottoinsiemi $V \subset X$ e $W \subset X'$,*

- (i) ${}^\perp(V^\perp)$ è la chiusura in norma del sottospazio lineare generato da V in X (e quindi ne è anche la chiusura debole, in base alla Proposizione 3.8.6);
- (ii) $({}^\perp W)^\perp$ è la chiusura debole* del sottospazio lineare generato da W in X' .

Dimostrazione. Per comodità, in questa dimostrazione denotiamo con \tilde{V} il sottospazio lineare di X generato da V , ed analogamente per \tilde{W} in X' . Anzitutto osserviamo che $\tilde{V} \subset {}^\perp(V^\perp)$ perché se $v \in V$ allora $\langle v, x' \rangle = 0$ per ogni $x' \in V^\perp$. D'altra parte, ${}^\perp(V^\perp)$ è un sottospazio di X chiuso in norma, per il precedente Corollario 3.11.12. Quindi la chiusura $\overline{\tilde{V}}$ verifica $\overline{\tilde{V}} \subset {}^\perp(V^\perp)$. D'altra parte, segue dal Teorema di Hahn–Banach 3.6.1 che, per ogni $x \in X$, $x \notin \overline{\tilde{V}}$, esiste $x' \in X'$ tale che $\langle x', x \rangle \neq 0$: pertanto $x \notin {}^\perp(V^\perp)$. Riassumendo, si ha $\overline{\tilde{V}} = {}^\perp(V^\perp)$, e la parte (i) è dimostrata.

Procediamo in maniera analoga per la parte (ii). Per ciascun $w \in W \subset X'$ si ha $\langle x, w \rangle = 0$ per ogni $x \in {}^\perp W \subset X$, quindi $w \in ({}^\perp W)^\perp$. Ma, in base al precedente Corollario 3.11.12, quest'ultimo sottospazio di X' è chiuso nella topologia debole*, e pertanto abbiamo dimostrato che la chiusura debole* $\overline{\tilde{W}}$ è contenuta in $({}^\perp W)^\perp$. D'altra parte, se $x' \in X'$ e $x' \notin \overline{\tilde{W}}$, possiamo applicare il Teorema di Hahn–Banach 3.6.1 allo spazio duale X' visto come spazio localmente convesso munito della sua topologia debole* per concludere

che esiste $x \in {}^\perp W$ tale che $\langle x', x \rangle \neq 0$. Ciò equivale a dire che $x' \notin ({}^\perp W)^\perp$. Segue da questi due fatti che $\overline{W^\sim} = ({}^\perp W)^\perp$. \square

Sappiamo dalla Definizione 3.1.5 che, se X è uno spazio normato e V un sottospazio chiuso, allora lo spazio quoziente X/V è anch'esso uno spazio normato, con la norma quoziente introdotta in (3.1), e se X è uno spazio di Banach allora anche X/V è di Banach nella norma quoziente. L'essenza del prossimo enunciato è che per i duali valgono gli isomorfismi $V' \sim X'/V^\perp$ e $(X/V)' \sim V^\perp$.

Teorema 3.11.14. (Duali di sottospazi e di quozienti.) *Sia $V \subset X$ un sottospazio chiuso di uno spazio di Banach X . Per ogni $v' \in V'$ sia $x' = \tilde{v}' \in X'$ una qualunque estensione di v' ad un funzionale continuo su X data dal Teorema di Hahn–Banach 3.5.5.*

- (i) *Sia $\pi' : X' \mapsto X'/V^\perp$ la proiezione canonica, $\pi'[x'] = x' + V^\perp$, e sia $\eta[v'] = \pi'[\tilde{v}'] = \pi[x'] = x' + V^\perp$. Allora η è ben definito, ossia non dipende dalla scelta dell'estensione di Hahn–Banach x' di v' , ed è un isomorfismo isometrico di V' su X'/V^\perp .*
- (ii) *Sia $\pi : X \mapsto X/V$ la proiezione canonica, $\pi[x] = x + V$, e per ogni funzionale lineare continuo u' sullo spazio quoziente X/M sia $\zeta[u'] = u' \circ \pi \in X'$, ossia $\zeta[u'](x) = u'(x + V)$. Allora $\zeta[u'](x)$ assume valore costante su tutti i vettori della classe laterale $x + V \subset X$ (ovvero, non dipende dalla scelta del rappresentante della classe laterale), quindi $\zeta[u'] \in V^\perp$, ed inoltre ζ è un isomorfismo isometrico di $(X/V)'$ su V^\perp .*

Dimostrazione. Per la parte (i), è chiaro che η è ben definito, perché asserire che x'_1 e x'_2 sono due diverse estensioni di Hahn–Banach di $v' \in V'$ significa dire che $x'_1 - x'_2$ si annulla su V , ossia $x'_1 - x'_2 \in V^\perp$, e quindi $x'_1 + V^\perp = x'_2 + V^\perp$. Il fatto che η sia una mappa lineare è banalmente verificato. Ogni classe laterale $x' + V^\perp$ nel quoziente X'/V^\perp è (in corrispondenza biunivoca con) un funzionale su V , dato dalla restrizione di x' a V . Ma x' è l'estensione di Hahn–Banach di v' , quindi x' ristretto a V coincide con v' , e pertanto, al variare di v' in V' , $\eta[v']$ copre tutto X'/V^\perp : abbiamo dimostrato che η è surgettivo.

Per definizione di estensione di un funzionale, è chiaro che l'estensione di Hahn–Banach x' di v' verifica $\|v'\| \leq \|x'\|$. D'altra parte, per la definizione

(3.1) di norma quoziente,

$$\begin{aligned}\|\eta[v']\| &= \sup\{\|x' + y'\| : x' \in X', x'|_V = v', y' \in V^\perp\} \\ &= \inf\{\|x' + y'\| : x' \in X', x'|_V = v', y'|_V = 0\},\end{aligned}$$

e quindi, per ogni estensione di Hahn–Banach $u' \in X'$ di v' , si ha $\|v'\| \leq \|\eta[v']\| \leq \|u'\|$. Ma sappiamo dal Teorema di Hahn–Banach 3.5.5 che esiste una tale estensione u' che verifica $\|u'\| = \|v'\|$. Quindi $\|\eta[v']\| = \|v'\|$, e pertanto η è una isometria.

Sia $x \in X$ e $u' \in (X/V)'$: allora $\pi[x] = x + V \in X/V$, e quindi $u' \circ \pi$ è un funzionale lineare continuo su X che si annulla su V , ossia è costante sui vettori delle classi laterali modulo V . Questo dimostra che $\zeta[u'] \in V^\perp$. Di nuovo, la linearità di ζ è ovvia.

I funzionali lineari $x' \in V^\perp$ sono quelli che si annullano su V , e quindi sono lifting a X di funzionali su X/V : in altre parole, per ogni $x' \in V^\perp$ esiste un funzionale lineare y' su X/V tale che $y' \circ \pi = x'$ (non stiamo per ora asserendo che y' sia continuo, ma certamente è lineare). Scriviamo $N = \ker x'$: allora N è un sottospazio chiuso di X , e quindi $\ker y' = \pi[N]$ è un sottospazio chiuso di X/V dal momento che la proiezione canonica è un omeomorfismo, per la Definizione 3.1.5 di topologia quoziente. Pertanto, in base alla proposizione 3.3.15, y' è continuo, ossia $y' \in (X/V)'$. Ora si ha $\zeta[y'] = y' \circ \pi = x'$, e quindi ogni $x' \in X'$ è nell'immagine di ζ : abbiamo provato la surgettività.

Infine, dimostriamo che ζ è una isometria. Sia B la palla unitaria aperta in X : per definizione di topologia quoziente, $\pi[B]$ è la palla unitaria aperta in X/V . Ora consideriamo un generico funzionale continuo $y' \in (X/V)'$. Per definizione, $\zeta[y'] = y' \circ \pi$, e quindi (ovviamente calcolando le norme in base alla Proposizione 3.3.7),

$$\begin{aligned}\|\zeta[y']\| &= \|y' \circ \pi\| = \sup\{|\langle x, y' \circ \pi \rangle| : x \in B\} = \sup\{|\langle \pi[x], y' \rangle| : x \in B\} \\ &= \sup\{|\langle y, y' \rangle| : y \in \pi[B]\} = \|y'\|,\end{aligned}$$

ovvero la mappa ζ è isometrica. □

3.11.2 Annichilatori e riflessività

Lemma 3.11.15. *Sia V un sottospazio di uno spazio normato X , e come sempre $\iota : X \mapsto X''$ l'immersione canonica della Proposizione 3.10.2. Allora V è riflessivo se e solo se $\iota V = V^{\perp\perp}$.*

Dimostrazione. In base alla parte (i) del Teorema 3.11.14, identifichiamo V' con il quoziente X'/V^\perp , e quindi, in base alla parte (ii) dello stesso Teorema, identifichiamo V'' con $V^{\perp\perp}$. Allora a prima vista sembrerebbe si possa concludere che V è riflessivo se e solo se $\imath V \sim V'' \sim V^{\perp\perp}$, che è il nostro enunciato. Questo argomento però non è corretto, perché, in base alla Definizione 3.11.7 di riflessività, occorre anche mostrare che l'isomorfismo $V \sim V''$ sia implementato dall'immersione canonica \imath , e nell'argomento che abbiamo accennato questo non è chiaro perché vi si intrecciano due isomorfismi diversi. Quindi forniamo una dimostrazione più accurata.

Scriviamo l'identificazione fra V'' e $V^{\perp\perp}$ indicando esplicitamente con v'' il funzionale in V'' che corrisponde a $v^{\perp\perp} \in V^{\perp\perp}$. Supponiamo V riflessivo. È chiaro che, per ogni $v \in V$, si ha $\langle v, x' \rangle = \langle x', v \rangle = 0$ se $x' \in V^\perp$, perciò $\imath V \subset V^{\perp\perp}$. Proviamo ora l'inclusione opposta. Ora notiamo che, se $v^{\perp\perp} \in V^{\perp\perp}$, l'ipotesi che V sia riflessivo assicura l'esistenza di un vettore $v \in V$ tale che, per ogni $x' \in X'$, si ha

$$v^{\perp\perp}(x') = v^{\perp\perp}(x' + V^{\perp\perp}) = \langle v'', x' + V^{\perp\perp} \rangle = \langle x' + V^{\perp\perp}, v = x'(v) \rangle.$$

Questo significa che $v^{\perp\perp}(x') = v$, e quindi $\imath V \supset V^{\perp\perp}$. Pertanto $\imath V = V^{\perp\perp}$.

Viceversa, supponiamo ora $\imath V = V^{\perp\perp}$ e deduciamo che V è riflessivo. Allora, se come prima v'' indica un generico funzionale in V'' e $v^{\perp\perp}$ il corrispondente vettore in $V^{\perp\perp}$, deve esistere $v \in V$ tale che $v = v^{\perp\perp}$, e quindi, per ogni classe laterale $x' + V^\perp \in X'/V^\perp \sim V'$,

$$\langle v'', x' + V^\perp \rangle = v^{\perp\perp}(x') = \langle x', v \rangle = \langle x' + V^\perp, v \rangle,$$

ossia $\imath V \supset V''$. Naturalmente si ha sempre $\imath V \subset V''$, e quindi V è riflessivo. \square

Proposizione 3.11.16. *Sottospazi chiusi di spazi normati riflessivi sono riflessivi.*

Dimostrazione. Sia V un sottospazio chiuso di uno spazio normato riflessivo X . Osserviamo che, per ogni $v' \in V^\perp$ e $x \in {}^\perp(V^\perp)$, si ha $\langle \imath x, v' \rangle = \langle v', x \rangle = 0$, quindi $\imath({}^\perp(V^\perp)) = V^{\perp\perp}$. D'altra parte sappiamo dalla parte (i) del Corollario 3.11.13 che ${}^\perp(V^\perp) = \overline{V} = V$ (dal momento che V è chiuso). Quindi $\imath V = V^{\perp\perp}$, e l'enunciato ora segue dal precedente Lemma 3.11.15. \square

Teorema 3.11.17. *Sia V un sottospazio di uno spazio di Banach X , e sia come sempre $\imath : X \mapsto X''$ l'immersione canonica. Allora V è riflessivo se e solo se $\imath V$ è riflessivo.*

Dimostrazione. Il fatto che X' sia riflessivo se X è riflessivo è stato già provato, più in generale, per spazi normati, nella Proposizione 3.11.9. Viceversa, supponiamo che X sia uno spazio di Banach e X' sia riflessivo. Allora X'' è riflessivo, come appena osservato, e X è isomorfo a ιX , che, per il Corollario 3.11.6, è un sottospazio chiuso di X'' . Ma un sottospazio chiuso di uno spazio riflessivo è riflessivo, e quindi ιX è riflessivo. Pertanto X è isomorfo ad uno spazio riflessivo, e quindi è riflessivo per la Proposizione 3.11.10. \square

Proposizione 3.11.18. *I quozienti di spazi normati riflessivi sono riflessivi.*

Dimostrazione. Sia V un sottospazio chiuso di uno spazio normato riflessivo X . Sappiamo dal Corollario 3.11.12 che V^\perp è un sottospazio chiuso di X' (inteso come spazio normato nella topologia della norma duale: Corollario 3.11.1). Ma abbiamo provato nella Proposizione 3.11.9 che X' è riflessivo, ed allora il suo sottospazio chiuso V^\perp è anch'esso riflessivo per la prima parte della presente dimostrazione. In base al Teorema 3.11.14 (ii), $(X/V)'$ è isomorfo a V^\perp , e quindi è riflessivo, per la Proposizione 3.11.10. Allora anche X/V è riflessivo, per il precedente Teorema 3.11.17. \square

3.12 Esempi di dualità fra spazi di Banach

Dedichiamo questa Sezione a presentare alcuni esempi importanti di dualità fra spazi di Banach. Questi esempi sono necessari per chiarire il contesto dell'uso della dualità nel Capitolo 11 sulle distribuzioni: in ogni caso, verranno riassunti in quel Capitolo (nella Sezione 11.3).

Qui rivediamo ed espandiamo alcuni esempi già discussi nelle Sezioni 1.16, 1.17, 1.18, 1.19 e 1.7.

Cominciamo con gli spazi normati $L^2[0, 1]$ e $L^1[0, 1]$ (Sezione 1.16). Qui ed in seguito scegliamo l'intervallo $[0, 1]$ per comodità nella normalizzazione degli integrali, ma tutti i risultati che presenteremo valgono, a meno di una opportuna costante di normalizzazione, per un qualunque intervallo finito $[a, b]$, od anche, laddove indicato, per l'intera retta reale.

Sappiamo che $L^2[0, 1] \subset L^1[0, 1]$: più precisamente, per ogni $f \in L^2[0, 1]$ si ha $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$, perché

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &= \int_0^1 |f(t)| dt = (|f|, 1) \\
&\leq \|f\|_2 \|1\|_2 \\
&= \|f\|_2 \left(\int_0^1 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_2,
\end{aligned}$$

per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz in L^2 (si veda la Proposizione 4.5.1) oppure per la disuguaglianza di Hölder (Teorema 1.16.6). D'altra parte, $L^2[0, 1]$ è denso in $L^1[0, 1]$, perché contiene il sottospazio $C[0, 1]$ delle funzioni continue, e questo spazio è un sottospazio denso in $L^1[0, 1]$ (Proposizione 1.18.6), od anche come conseguenza del teorema di convergenza di identità approssimate in L^1_* (che presenteremo in seguito come Teorema 6.1.10): questo fatto verrà anche usato nella dimostrazione del Corollario 5.13.8.

Esempio 3.12.1. ($(L^1)' = L^\infty$.) Il duale di $L^1[0, 1]$ è (isometricamente) isomorfo a $L^\infty[0, 1]$ (la stessa dimostrazione vale, parola per parola, per lo spazio L^1 rispetto a qualsiasi altra misura di Borel). Spieghiamo brevemente perché. Ogni $\phi \in L^\infty[0, 1]$ dà luogo ad un funzionale continuo su $L^1[0, 1]$ nel modo che vedremo anche nell'Esempio 11.2.2: $T_\phi(f) = \langle \phi, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)f(t) dt$. Questo funzionale è continuo su L^1 perché $\left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)f(t) dt \right| \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_1$, quindi $\|T\|_{(L^1)'} \leq \|\phi\|_\infty$. È facile vedere che $\|T_\phi\|_{(L^1)'} = \|\phi\|_\infty$: scegliamo una successione di punti $x_n \in \mathbb{R}$ sui quali ϕ approssima sempre meglio il suo estremo superiore (o un x su cui ϕ raggiunge il proprio massimo assoluto, se lo ha), ed al posto di f prendiamo identità approssimate in L^1 centrate a questi punti x_n (per ogni x_n prendiamo un traslato $\lambda_{x_n}\psi_n$ di una identità approssimata ψ_n con n via via più grande, ossia con grafico più stretto ed alto). Allora segue dal teorema di convergenza di identità approssimate nella norma L^∞ (che presenteremo in seguito come Teorema 6.1.8), che

$$\|T_\phi\| = \sup \{ |\langle \phi, f \rangle| : \|f\|_1 = 1 \} = \|\phi\|_\infty.$$

Abbiamo a suo tempo dimostrato (nella dimostrazione del Teorema 1.19.6) che ogni funzionale continuo su L^1 è rappresentabile come integrale pesato con una funzione. Quindi $(L^1[0, 1])'$ è isometricamente isomorfo a $L^\infty[0, 1]$. Questo fatto è un caso particolare del Teorema 1.19.6.

Abbiamo già osservato che lo stesso argomento vale per L^1 rispetto a qualsiasi altra misura di Borel, in particolare per funzioni su \mathbb{R} invece che su un intervallo compatto come $[0, 1]$. In questo caso, un'altra dimostrazione fa uso del teorema di convergenza di identità approssimate su \mathbb{R} (che presenteremo in seguito: Teorema 6.1.16), e prova che il duale di $L^1(\mathbb{R})$ è isometricamente isomorfo a $L^\infty(\mathbb{R})$. Anche questo è un caso particolare del Teorema 1.19.6. \square

D'altra parte, per il Teorema 11.2.1 di rappresentazione di Riesz (che presenteremo in seguito) si ha che $L^2[0, 1]'$ è (isometricamente) isomorfo a $L^2[0, 1]$. Ma abbiamo appena visto che $L^2[0, 1] \subset L^1[0, 1]$ ed è ovvio che $L^\infty[0, 1] \subset L^2[0, 1]$ (esercizio). Quindi abbiamo la catena di inclusioni

$$L^\infty[0, 1] \subset L^2[0, 1] \subset L^1[0, 1]$$

e

$$L^1[0, 1] \cong L^\infty[0, 1] \subset L^2[0, 1] \cong L^2[0, 1]'$$

Ecco quindi che, in questo caso nel quale i sottospazi non sono chiusi (anzi sono densi, in base al Teorema di convergenza di identità approssimate (che presenteremo in seguito), Teorema 6.1.10), la dualità rovescia la relazione di inclusione.

Esempio 3.12.2. ($(L^p)' = L^q$ se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.) Più in generale, prendiamo *indici coniugati* $1 \leq p < \infty$, $1 < q \leq \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Definizione 1.16.4; conveniamo come sempre che, se $p = 1$ e $q = \infty$, valga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, però qui consideriamo solo il caso $p = 1$, $q = \infty$, non il viceversa). Rammentiamo la disuguaglianza di Hölder per funzioni su \mathbb{R} (Teorema 1.16.6): per $\phi \in L^q[0, 1]$ e $f \in L^p[0, 1]$ (o rispettivamente per $\phi \in L^q(\mathbb{R})$ e $f \in L^p(\mathbb{R})$), si ha $|\int \phi(t)f(t) dt| \leq \|\phi\|_q \|f\|_p$. Ne segue:

$$|T_\phi(f)| = |\langle \phi, f \rangle| \leq \|\phi\|_q \|f\|_p. \quad (3.31)$$

Di nuovo grazie al teorema (che presenteremo in seguito) di convergenza di identità approssimate, questa volta nella norma di L^p (Teorema 6.1.10 nel caso di un intervallo finito, e rispettivamente Teorema 6.1.16 nel caso di funzioni su \mathbb{R}), si ha come prima che la mappa $\phi \mapsto T_\phi$ descrive un isomorfismo isometrico di L^q sul duale di L^p :

$$\sup \{ |\langle \phi, f \rangle| : \|f\|_{L^p} = 1 \} = \|\phi\|_q. \quad (3.32)$$

In realtà non c'è neppure bisogno del teorema sulle identità approssimate: fissata ϕ in L^q , la norma di T_ϕ è l'estremo superiore di $|T_\phi(f)|$ al variare di f nella norma unitaria di L^p , ma questo estremo superiore in realtà è un massimo, raggiunto esattamente (come si verifica facilmente) quando f è, a meno di normalizzazione, data da $f(x) = e^{-i\theta(x)}|\phi(x)|^{q/p}$. (Qui l'argomento $\theta(x)$ è la fase della decomposizione polare del numero complesso $\phi(x)$, cioè l'angolo all'esponente nell'espressione $\phi(x) = |\phi(x)|e^{i\theta(x)}$). Pertanto l'argomento sviluppato in questo Esempio vale anche per lo spazio L^p rispetto a qualsiasi altra misura di Borel.

Accenneremo nel prossimo Esempio 3.12.3 che il duale di L^∞ non si ottiene in questo modo: esso è più grande di L^1 . \square

Esempio 3.12.3. (Dualità ed inclusioni per spazi $L^p[0, 1]$.) Abbiamo appena visto che, se p e q sono indici coniugati (nel senso del precedente Esempio 3.12.2), allora

$$L^p[0, 1]' \cong L^q[0, 1]$$

(isomorfismo isometrico). Si noti che, se $1 < p < r < \infty$, la relazione degli indici coniugati $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ rovescia la disuguaglianza quando si passa agli indici coniugati, e pertanto per $1 < p < r < \infty$ si ha

$$L^\infty[0, 1] \subsetneq L^r[0, 1] \subsetneq L^p[0, 1] \subsetneq L^1[0, 1]$$

ma

$$L^1[0, 1]' \subsetneq L^p[0, 1]' \subsetneq L^r[0, 1]' \subsetneq L^\infty[0, 1]'$$

(Il duale di $L^\infty[0, 1]$ non viene discusso qui: esso consiste dello spazio delle misure finitamente additive in $[0, 1]$. In particolare $L^\infty[0, 1]' \supsetneq L^1[0, 1]'$, come anticipato nel precedente Esempio 3.12.2. Per maggiori dettagli sulla dualità per gli spazi L^p si consulti [22].) \square

Esempio 3.12.4. (Dualità ed inclusioni per spazi ℓ^p .) Simmetricamente, per gli spazi ℓ^p si ha (Proposizione 1.7.7):

$$\ell^1 \subsetneq \ell^p \subsetneq \ell^r \subsetneq \ell^\infty$$

se $1 < p < r < \infty$, e

$$\ell^\infty = (\ell^1)' \supsetneq \ell^q = (\ell^p)' \supsetneq \ell^s = (\ell^r)'$$

dove $s \leq q$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \frac{1}{s} + \frac{1}{r}$ (indici coniugati, nel senso della Definizione 1.16.4). Ciascuno spazio ℓ^p è denso in ogni spazio ℓ^r se $1 \leq p < q < \infty$, e le

inclusioni si rovesciano passando agli spazi duali. Anche questi risultati sugli spazi ℓ^p seguono, come prima, dalla disuguaglianza di Hölder, ma questa volta formulata per successioni numeriche invece che per funzioni. Data una successione $x = \{x_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^q$ ed un'altra successione $y = \{y_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^p$, la disuguaglianza di Hölder per successioni (Corollario 1.16.8) asserisce che, ponendo

$$T_x(y) \equiv \langle x, y \rangle \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n y_n,$$

abbiamo

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_{\ell^q} \|y\|_{\ell^p} \quad (3.33)$$

(Corollario 1.16.8 (i)). Da qui, come prima nel caso di una variabile reale invece che intera, segue che la norma ℓ^p di una successione x è l'estremo superiore della sua norma come funzionale su ℓ^q (Corollario 1.16.8 (ii)), ossia

$$|T_x(y)| = \sup\{|\langle x, y \rangle| : \|y\|_{\ell^p} = 1\} = \|x\|_{\ell^q}. \quad (3.34)$$

e quindi la mappa $x \mapsto T_x$ è un isomorfismo isometrico di ℓ^q sul duale di ℓ^p .

Si noti invece che $C[0, 1]$ è contenuto in $L^\infty[0, 1]$ come sottospazio chiuso, non denso: infatti la norma in questi due spazi è la stessa (la norma uniforme). In questo caso abbiamo già accennato che la dualità preserva l'inclusione, ed infatti si ha che $C[0, 1]'$ è lo spazio delle misure finite umerabilmente additive su $[0, 1]$, mentre, come già osservato nell'Esempio 3.12.3, $L^\infty[0, 1]'$ è lo spazio delle misure che sono solo finitamente additive: il primo è un sottospazio chiuso del secondo. Qui, confidando che il lettore sia familiare con l'esempio particolare della misura di Lebesgue, rinviamo alla Definizione 1.9.29 per la norma nello spazio delle misure (norma della variazione totale): per maggiori dettagli sulla teoria della misura si consulti ancora [22].

Lo stesso argomento vale per lo spazio c_0 delle successioni che tendono a zero all'infinito: in tal caso le misure finite si intendono sugli interi, e quindi costituiscono lo spazio ℓ^1 delle serie assolutamente convergenti. \square

3.13 Il teorema di categoria di Baire

3.13.1 Teorema di Baire

Questa Sottosezione è incidentale, perché è dedicata a proprietà degli spazi topologici, non degli spazi vettoriali topologici: pur tuttavia, essa ha applicazioni fondamentali all'analisi funzionale su spazi vettoriali topologici.

Osserviamo anzitutto che i rapporti fra le nozioni topologiche e metriche (come ad esempio la densità) e la teoria della misura sono talvolta un po' sottili, persino negli spazi vettoriali a dimensione finita. Ad esempio, sappiamo che esistono insiemi numerabili densi in \mathbb{R} ma di misura zero, come i razionali. È facile costruire sottoinsiemi densi in \mathbb{R} ed aperti, quindi di misura positiva, ma piccola. Ecco un modo: si numerino i razionali, in maniera da scrivere \mathbb{Q} come una successione $\{q_1, q_2, \dots\}$, e si consideri l'intervallo aperto J_n di lunghezza, diciamo, 2^{-n} centrato in q_n . Allora $E = \cup_n J_n$ è denso in \mathbb{R} perché contiene \mathbb{Q} ma ha misura minore o uguale ad 1. Considerando intervalli J_n di misura opportunamente piccola e scartando nel corso della costruzione ogni razionale che appartiene ad uno degli intervalli J_n già considerati otteniamo una variante di E che consiste di una *unione numerabile di intervalli aperti disgiunti che è densa in \mathbb{R} ma di misura arbitrariamente piccola*.

Consideriamo quest'ultimo insieme E e trasliamolo di un passo η per ottenere un nuovo insieme E_η con le stesse proprietà. Definitivamente si ha $m(J_n) < \eta/2$: per tutti questi valori di n , J_n è disgiunto dal suo traslato $\lambda_\eta J_n$, ma interseca comunque altri traslati $\lambda_\eta J_m$ a causa della densità. In particolare, ogni razionale q_n deve distare meno di una quantità δ_n da uno dei traslati $\lambda_\eta J_m$, e quindi da E_η , con $\lim_n \delta_n = 0$. Poiché i razionali sono densi, anche l'intersezione $E \cap E_\eta$ continua ad essere un insieme denso, per ogni $\eta > 0$, ed è anche aperta perché è intersezione di due unioni numerabili disgiunte di intervalli aperti, e l'intersezione di due intervalli aperti, se non è vuota, è un aperto. Questa osservazione ha a che fare con proprietà topologiche o metriche più che della misura: essa lega la densità dell'intersezione di due sottoinsiemi con una proprietà puramente topologica, il fatto di essere aperti. Se gli insiemi non sono aperti l'intersezione di solito è vuota: si pensi a \mathbb{Q} ed ad un suo traslato \mathbb{Q}_η di passo irrazionale (in questo caso i due insiemi hanno misura zero, ma è facile adattare l'esempio in modo che uno dei due abbia misura zero e l'altro no (ad esempio, scegliendo \mathbb{Q} ed un sottoinsieme dell'insieme E_η di prima ottenuto scavando da E_η un insieme come E di prima ma di misura inferiore a quella di E_η).

Di questa proprietà topologica di intersezione esiste una formulazione molto più generale, che vale per opportuni spazi topologici che non sono necessariamente spazi *vettoriali* topologici:

Teorema 3.13.1 (Baire). *Sia V uno spazio metrico completo, oppure uno spazio di Hausdorff localmente compatto. Allora l'intersezione di ogni famiglia numerabile di sottoinsiemi aperti densi è un sottoinsieme denso (ovviamente di solito non aperto) di V .*

Dimostrazione. Sia $\{E_j : j = 1, \dots\}$ una successione di sottoinsiemi aperti densi in V . Dobbiamo dimostrare che ogni sottoinsieme aperto non vuoto $O_0 \subset V$ interseca $\cap_n E_n$.

Grazie alla densità di E_n , l'intersezione di E_n con qualsiasi aperto non vuoto è non vuota: quindi possiamo costruire una successione di aperti non vuoti O_n tali che $\overline{O_n} \subset E_n \cap O_{n-1}$. Se V è uno spazio metrico possiamo scegliere per O_n una palla di raggio che tende a zero, ad esempio inferiore a $1/n$; se invece V è uno spazio localmente compatto e di Hausdorff, possiamo scegliere $\overline{O_n}$ compatto, in base alla parte (vii) della Proposizione 1.10.10. In tal modo, tutti gli $\overline{O_n}$ sono contenuti in O_0 , e $\cap_n \overline{O_n} \subset \cap_n E_n$. Basta quindi mostrare che $\cap_n O_n \neq \emptyset$. Nell'ipotesi in cui V è uno spazio metrico, abbiamo scelto i raggi delle palle inscatolate O_n in modo che tendano a zero, ed allora i centri di queste formano una successione di Cauchy (esercizio): poiché abbiamo anche assunto V completo, questa successione converge ad un punto che appartiene necessariamente alla chiusura di tutti gli O_n , e quindi $\cap_n \overline{O_n} \neq \emptyset$. Invece, nell'ipotesi che V sia localmente compatto di Hausdorff, abbiamo scelto gli $\overline{O_n}$ compatti, ed allora l'intersezione è non vuota in base alla proprietà dell'intersezione finita (Nota 1.9.7). \square

Nota 3.13.2. Osserviamo che il complemento di un aperto denso E è un chiuso con interno vuoto, e viceversa: infatti ogni aperto non vuoto O ha intersezione non vuota con l'insieme denso E , e quindi non può essere contenuto in $\mathbb{C}E$.

3.13.2 Insiemi di prima e di seconda categoria

La prossima definizione aiuta a chiarire la differenza topologica fra insiemi densi ma numerabili, come i razionali, ed insiemi densi ma più ricchi, come gli irrazionali.

Definizione 3.13.3. Si dice che un sottoinsieme di uno spazio topologico V è *non denso da nessuna parte* se la sua chiusura non contiene aperti. Un

insieme si dice *magro*, o di *prima categoria* in V , se è unione numerabile di insiemi non densi da nessuna parte; altrimenti, l'insieme si dice *pieno*, o di *seconda categoria*.

Nota 3.13.4. In base alla precedente Nota 3.13.2, un insieme è non denso da nessuna parte se e solo se il complemento della sua chiusura è un aperto denso

Ad esempio, gli interi non sono densi da nessuna parte in \mathbb{R} , e quindi i razionali, che sono unione numerabile di dilatati degli interi, sono di seconda categoria. Invece gli irrazionali non sono una unione numerabile di insiemi non densi da nessuna parte.

Corollario 3.13.5. *Gli spazi metrici completi, e gli spazi localmente compatti e di Hausdorff, sono di seconda categoria in sé stessi.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che uno spazio V come nell'enunciato non è unione numerabile di sottoinsiemi E_n non densi da nessuna parte. In effetti, se per assurdo $V = \cup_n E_n$, allora $\cap_n \mathcal{C}E_n = \mathcal{C}V = \emptyset$. Ma la chiusura di E_n non contiene aperti, e quindi $\mathcal{C}\overline{E_n}$ è un aperto denso, in base alla Nota 3.13.4. Allora segue dal Teorema di Baire 3.13.1 che $\cap_n \mathcal{C}E_n$ non può essere vuoto. \square

Elenchiamo alcune osservazioni ovvie che ci serviranno nella prossima Sezione 3.14:

Nota 3.13.6. Le unioni numerabili ed i sottoinsiemi di insiemi di prima categoria sono di prima categoria. Gli omeomorfismi (mappe continue ed invertibili con inversa continua) preservano la categoria.

3.13.3 **Basi di Hamel

Definizione 3.13.7. Una famiglia di vettori Γ in uno spazio vettoriale V è una *base di Hamel* se è un insieme massimale linearmente indipendente.

Corollario 3.13.8. Γ è una base di Hamel nello spazio vettoriale V se e solo se ogni vettore $v \in V$ si decompone in modo unico come combinazione lineare finita di elementi di Γ .

Dimostrazione. Se Γ è una base di Hamel, ossia un insieme massimale linearmente indipendente, allora ogni $v \notin \Gamma$, aggiunto a Γ , dà luogo ad

un insieme linearmente dipendente, e quindi esiste una combinazione lineare $\lambda_0 v + \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_i = 0$ con coefficienti λ_i non tutti nulli. Poiché però $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ sono linearmente indipendenti, deve essere $\lambda_0 \neq 0$, e dividendo la precedente identità per λ_0 si ottiene $v = \sum_{i=1}^n c_i \gamma_i$, con $c_i = -\lambda_i/\lambda_0$. Di nuovo per il fatto che $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ sono linearmente indipendenti, questa combinazione lineare deve essere unica. Se invece v appartiene già a Γ , l'indipendenza lineare di Γ assicura che v non si può scrivere come combinazione lineare di altri elementi di Γ , e quindi anche in questo caso si ha unicità.

Viceversa, se ogni vettore $v \in V$ si decompone in modo unico come combinazione lineare finita di elementi di Γ , allora in particolare questo accade per gli elementi di Γ , e quindi, in base all'argomento appena visto, Γ è un insieme linearmente indipendente; inoltre è massimale, perché se vi aggiungiamo un elemento v , questo elemento si scriverebbe come combinazione lineare di elementi di Γ ma anche nel modo banale $v = v$, e quindi non si ha più l'unicità dello sviluppo. \square

Lemma 3.13.9. *Ogni sottospazio di dimensione finita di uno spazio vettoriale topologico è chiuso.*

Dimostrazione. Sia V uno spazio vettoriale topologico, diciamo sul campo \mathbb{C} , X un sottospazio di dimensione n e $F : \mathbb{C}^n \rightarrow X$ un isomorfismo. Essendo un operatore lineare a dimensione finita (definito su \mathbb{C}^n), F è continuo, e, indicando con B la sfera unitaria aperta in \mathbb{C}^n , l'immagine $K = F(S)$ della sfera unitaria chiusa $S = \partial B$ è compatta in V . Poiché $0 \notin K$ e V è di Hausdorff, esiste un intorno O di 0 in V disgiunto da K . Per continuità, possiamo anche scegliere O così piccolo che $O \subset F(B)$. Sia x un vettore nella chiusura di X : in base al Lemma 3.1.13, $x \in rO$ se r è abbastanza grande, quindi x appartiene alla chiusura di $X \cap rO \subset F(rB) = F(r\overline{B})$. D'altra parte, \overline{B} è compatto in \mathbb{C}^n e F è continua, quindi $F(r\overline{B})$ è compatto in V , e pertanto è chiuso per il Lemma 1.10.6 perché V è di Hausdorff (Corollario 3.1.11). Pertanto $x \in F(r\overline{B}) \subset X$, e quindi X è chiuso. \square

Proposizione 3.13.10. *Se V è uno spazio vettoriale, $W_n \subset V$ sono sottospazi di dimensione finita e $V = \cup_n W_n$, allora V è di prima categoria in sé stesso (nel senso della Definizione 3.13.3).*

Dimostrazione. In base al Lemma 3.1.13, se V ha dimensione infinita il sottospazio W_n di dimensione finita non possono contenere aperti, e quindi $\overline{W_n}$

è un aperto denso, in base alla Nota 3.13.2. D'altra parte, W_n è chiuso per il precedente Lemma 3.13.9, e quindi $\mathbb{C}W_n$ è un aperto denso, ossia W_n non è denso da nessuna parte, ed allora $\cup_n W_n$ è un insieme di prima categoria (Definizione 3.13.3). \square

Allora dal Corollario 3.13.5 del teorema di Baire segue immediatamente:

Corollario 3.13.11. *Sia V un F -spazio a dimensione infinita (ossia uno spazio vettoriale a dimensione infinita, munito di una topologia completa indotta da una metrica, necessariamente invariante per traslazione: Definizione 3.1.1). Allora V non ammette basi di Hamel numerabili.*

3.14 Il teorema di uniforme limitatezza

La prossima definizione è la consueta definizione di equicontinuit , per  qui specializzata al caso di mappe lineari F , per le quali $F(x)$ si avvicina a $F(y)$ se e solo se $F(x - y)$ si avvicina all'origine, e quindi, in base all'invarianza della topologia per traslazione, basta verificare la condizione di continuit  all'origine per averla dappertutto:

Definizione 3.14.1. Una famiglia \mathcal{F} di mappe lineari fra due spazi vettoriali topologici X e Y si dice *equicontinua* se per ogni intorno B di 0 in Y esiste un intorno A di 0 in X tale che $F(A) \subset B$ per ogni $F \in \mathcal{F}$.

Mostriamo che dalla equicontinuit  segue la equilimitatezza (gli insiemi limitati in uno spazio vettoriale topologico sono stati introdotti nella Definizione 3.1.1, e gli operatori limitati fra spazi vettoriali topologici nella Definizione 3.3.1):

Proposizione 3.14.2. *Ogni famiglia equicontinua di operatori lineari fra spazi vettoriali topologici   equilimitata: ossia, per ogni famiglia equicontinua \mathcal{F} da X a Y , e per ogni insieme limitato $A \subset X$, esiste un insieme limitato $B \subset Y$ tale che $F(A) \subset B$ per ogni $F \in \mathcal{F}$.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che l'insieme $B = \cup\{F(E) : F \in \mathcal{F}\}$   limitato.

Sia V un intorno dell'origine in Y . Poich  \mathcal{F}   una famiglia equicontinua, esiste un intorno U dell'origine in X tale che $F(U) \subset V$ per ogni $F \in \mathcal{F}$. Dal momento che A   limitato, esiste $r > 0$ tale che $E \subset rU$. Allora $F(E) \subset$

$F(rU) = rF(U) = rV$ per ogni $F \in \mathcal{F}$. l'insieme B verifica $B \subset rV$, e quindi è limitato. \square

Teorema 3.14.3 (Banach–Steinhaus). *Siano X e Y spazi vettoriali topologici e \mathcal{F} una famiglia di operatori lineari continui da X a Y . Sia U l'insieme dei vettori x tali che l'orbita $\mathcal{F}_x := \{F(x) : F \in \mathcal{F}\}$ è un insieme limitato in Y . Se U è di seconda categoria in X , allora $U = X$ (ossia gli operatori F in \mathcal{F} sono puntualmente equilimitati, e la famiglia \mathcal{F} è equicontinua (e quindi equilimitata, per la precedente Proposizione 3.14.2)).*

Dimostrazione. Siano V e W intorni bilanciati dell'origine in Y tali che $\bar{V} + \bar{V} \subset W$. Poiché tutte le $F \in \mathcal{F}$ sono continue, l'insieme $C = \bigcap \{F^{-1}(\bar{V}) : F \in \mathcal{F}\}$ è intersezione di chiusi in X e quindi è chiuso. Per ogni $x \in U$ abbiamo assunto che l'orbita \mathcal{F}_x sia limitata, quindi contenuta nell'aperto nV per qualche intero n . Questo significa che $x \in F^{-1}(nV)$ per tutti gli $F \in \mathcal{F}$, e quindi $x \in nC$. In altre parole, $U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nC$.

Ora usiamo l'ipotesi che U sia di seconda categoria in X : allora almeno uno degli insiemi nC deve essere di seconda categoria, perché altrimenti U sarebbe unione numerabile di insiemi di prima categoria e quindi anch'esso di prima categoria (Nota 3.13.6). Ma la moltiplicazione per n è un omeomorfismo, e quindi, per la stessa Nota, anche C è di seconda categoria. Allora C non può essere non denso da nessuna parte (Definizione 3.13.3), e siccome abbiamo visto che C è chiuso, deve avere almeno un punto interno z , in base alla Nota 3.13.2. Allora $z - C$ contiene un intorno aperto A dell'origine in X , e per ogni $F \in \mathcal{F}$ si ha $F(A) \subset F(z) - F(C) \subset \bar{V} - \bar{V} \subset W$ (la prima inclusione vale perché $z \in U$, la seconda per la definizione di C). Quindi \mathcal{F} è una famiglia equicontinua.

Ora, in base alla Proposizione 3.14.2, la famiglia \mathcal{F} è equilimitata: quindi, per ogni $x \in X$, l'orbita \mathcal{F}_x è un insieme limitato in Y . Ciò significa che $U = X$. \square

Grazie al Corollario 3.13.5 del teorema di Baire, il Teorema di Banach–Steinhaus 3.14.3 assume la forma abituale seguente:

Corollario 3.14.4. (Principio di uniforme limitatezza per F-spazi.)

Siano X è un F -spazio (uno spazio vettoriale con una topologia completa indotta da una metrica: questo include tutti gli spazi di Fréchet e di Banach), e \mathcal{F} una famiglia di operatori lineari da X ad uno spazio vettoriale topologico Y . Se le orbite $\mathcal{F}_x := \{F(x) : F \in \mathcal{F}\}$ sono limitate in Y per ogni $x \in X$, allora \mathcal{F} è una famiglia equicontinua.

Corollario 3.14.5. (Il limite puntuale preserva la continuità degli operatori.) Sia $\{F_n\}$ una successione di operatori lineari continui da un F -spazio X ad uno spazio vettoriale topologico Y , e supponiamo che per ogni $x \in X$ esista il limite $F(x) = \lim_n F_n(x)$. Allora il limite F è un operatore lineare (ovviamente!) e continuo.

Dimostrazione. Il precedente Corollario 3.14.4 implica che la successione $\{F_n\}$ è equicontinua. Perciò, per ogni intorno V dell'origine in Y , esiste un intorno U dell'origine in X tale che $F_n(U) \subset V$ simultaneamente per tutti gli n . Pertanto $F(U) \subset V$, e quindi F è continuo all'origine, e pertanto ovunque, essendo lineare (si veda la seguente Nota di richiamo 3.14.6).

□

Nota 3.14.6. Grazie all'invarianza per traslazione della topologia degli spazi vettoriali topologici, una mappa fra spazi vettoriali topologici è continua se e solo se è continua all'origine, ed è aperta se e solo se è aperta all'origine.

Come osservato nel suo enunciato, il Teorema di Banach–Steinhaus 3.14.3 asserisce che una condizione di limitatezza puntuale per una famiglia di operatori lineari su opportuni spazi vettoriali topologici diventa uniforme. Riformuliamo questa proprietà nel caso più consueto di spazi di Banach.

Corollario 3.14.7. (Principio di uniforme limitatezza per spazi di Banach.) Siano X e Y spazi di Banach e \mathcal{F} una famiglia di operatori lineari da X a Y puntualmente limitata, nel senso che, per ogni $x \in X$, si ha $\sup_{\mathcal{F}} \|F(x)\| < \infty$. Allora \mathcal{F} è equicontinua, nel senso che vale la seguente maggiorazione uniforme sulla sfera unitaria di X : esiste una costante $M > 0$ tale che, per ogni x con $\|x\| \leq 1$, si ha $\|F(x)\| \leq M$ per ogni $F \in \mathcal{F}$. Quindi, per linearità, gli operatori in \mathcal{F} sono uniformemente limitati: per ogni $x \in X$ e $F \in \mathcal{F}$,

$$\|F(x)\| \leq M\|x\|.$$

3.15 Il teorema dell'applicazione aperta

Definizione 3.15.1. Una applicazione F fra spazi topologici X e Y si dice *aperta ad un punto* $x \in X$ se l'immagine di ogni intorno di x contiene un intorno di $F(x)$. L'applicazione F si dice *aperta* se è aperta ad ogni punto, ossia se l'immagine di ogni aperto in X è un aperto in Y .

Nota 3.15.2. (i) Evidentemente, se una applicazione aperta F è invertibile, l'applicazione inversa è continua, e viceversa: la continuità equivale proprio al fatto che la controimmagine degli aperti sotto F^{-1} sia aperta.

(ii) Come al solito, grazie alla linearità ed all'invarianza per traslazione della topologia, una applicazione *lineare* F fra spazi topologici è aperta se e solo se è aperta all'origine.

Teorema 3.15.3. (Teorema dell'applicazione aperta.) *Sia F un operatore lineare continuo da un F -spazio X ad uno spazio vettoriale topologico Y tale che l'immagine $F(X)$ sia di seconda categoria in Y . Allora anche Y è un F -spazio, e F è surgettiva ed aperta.*

Dimostrazione. Se dimostriamo che F è aperta, ne segue che è surgettiva, perché, essendo aperta e lineare, deve mandare X in un *sottospazio* aperto di Y , ma l'unico sottospazio aperto di Y è Y stesso, come conseguenza del Lemma 3.1.13.

Allora dimostriamo che F è aperta, ossia, per la parte (ii) della Nota 3.15.2, che l'immagine $F(V)$ di ogni intorno V di $0 \in X$ contiene un intorno di $0 \in Y$. A tal fine basta dimostrare la seguente *asserzione*: sia $r > 0$ abbastanza piccolo che la palla aperta V_0 di raggio r e centro 0 sia contenuta in V , e, per $n \in \mathbb{N}$, sia V_n la palla di centro 0 e raggio $2^{-n}r$: allora esiste un intorno W di 0 tale che

$$W \subset \overline{F(V_1)} \subset F(V_0). \quad (3.35)$$

Dimostriamo tale asserzione. Dal momento che $V_2 - V_2 \subset V_1$, segue dalla parte (i) dell'Esercizio 3.1.3 che

$$\overline{F(V_2) - F(V_2)} \subset \overline{F(V_2) - F(V_2)} \subset \overline{F(V_1)}.$$

Perciò, per provare la prima inclusione di (3.35), basta mostrare che $\overline{F(V_1)}$ ha interno non vuoto. Questo segue dal Lemma 3.1.13, in base al quale $F(X) = \cup_n nF(V_2)$, e quindi uno dei dilatati $nF(V_2)$ deve essere di seconda categoria in Y : ma allora, poiché la dilatazione è un omeomorfismo, anche V_2 è di seconda categoria (Nota 3.13.6), e quindi la sua chiusura ha interno non vuoto (Nota 3.13.4).

Ora proviamo la seconda inclusione di (3.35). Vogliamo provare che ogni $y_1 \in \overline{F(V_1)}$ appartiene a $F(V_1)$. A questo scopo costruiamo iterativamente una successione appropriata, come segue. Osserviamo che, esattamente come appena dimostrato per $F(V_1)$, anche $\overline{F(V_{n+1})}$ ha interno non vuoto. Allora,

per ogni $y_n \in \overline{F(V_n)}$, $y_n - \overline{F(V_{n+1})}$ contiene un intorno dell'origine in Y , e quindi $(y_n - \overline{F(V_{n+1})}) \cap \overline{F(V_n)}$ è non vuoto. Pertanto esiste $x_n \in V_n$ tale che $F(x_n) \in y_n - \overline{F(V_{n+1})}$. Se ora poniamo $y_{n+1} = y_n - F(x_n)$, questo significa che $y_{n+1} \in \overline{F(V_{n+1})}$. Ma x_n tende a zero a velocità esponenziale: $d(x_n, 0) < 2^{-n}r$ perché x_n sta nella palla V_n che ha questo raggio. Quindi, in base alla formula di somma geometrica (Sezione 1.1), le somme parziali $\sum_{n=1}^k x_n$ sono una successione di Cauchy in X . Poiché X è un F -spazio (ossia completo), questa successione converge a qualche $x \in X$, e di nuovo la formula di somma geometrica rivela che $d(x, 0) < r$, ossia $x \in V_0$. D'altra parte,

$$F(x) = \sum_{n=1}^k F(x_n) = \sum_{n=1}^k (y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{m+1}. \quad (3.36)$$

D'altra parte, x_n tende a zero, e quindi anche $y_n = F(x_n)$ perché F è continua. Quindi segue da 3.36 che $x = F(y_1) \in F(V_0)$. Questo prova la seconda inclusione in (3.35), e quindi l'asserzione, e come conseguenza il fatto che F sia una applicazione aperta.

Resta da dimostrare che anche Y è un F -spazio. Sia N il nucleo di F . Sappiamo dall'Esercizio 3.1.6 che X/N è un F -spazio: quindi basta trovare una *immersione*, ossia un isomorfismo lineare $I : X/N \rightarrow Y$, che sia anche un omeomorfismo. Questo isomorfismo è $I(x + N) = F(x)$. Infatti, è ovvio che questo è un isomorfismo lineare e che si fattorizza rispetto alla proiezione canonica sul quoziente (Definizione 3.1.4): $F(x) = I(\pi(x))$. Mostriamo che i è continuo: per ogni aperto $V \subset Y$, la controimmagine $I^{-1}(V)$ è aperta perché $I^{-1}(V) = \pi(F^{-1}(V))$ (per definizione di I) e π è aperta (Esercizio 3.1.6) e F è continua. Infine, mostriamo che I è una applicazione aperta. Per definizione di I , per ogni aperto $O \subset X/N$, abbiamo che $I(O) = F(\pi^{-1}(O))$ è aperto, perché π è continua (per la Definizione 3.1.5 di topologia quoziente) e, come appena visto, F è aperta. \square

Corollario 3.15.4. *Siano X e Y F -spazi e $F : X \rightarrow Y$ un operatore lineare surgettivo e continuo: allora F è aperto, e quindi, se F è iniettivo, anche F^{-1} è continuo. In particolare, se X e Y sono spazi di Banach e $F : X \rightarrow Y$ è un operatore lineare iniettivo, surgettivo e continuo, allora per ogni $x \in X$ non solo esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\|F(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$$

(la più piccola tale costante essendo naturalmente $\|F\|$: Definizione 3.3.7), ma esiste anche un'altra costante $c > 0$ tale che

$$\|x\|_X \leq c \|F(x)\|_Y$$

(la più piccola tale costante essendo ovviamente $\|F^{-1}\|$).

Dimostrazione. Lo F -spazio Y è di seconda categoria in sé stesso, per il Corollario 3.13.5 del teorema di Baire. Allora segue dal Teorema dell'applicazione aperta 3.13.5 segue che F è aperto, e quindi, se invertibile, che F^{-1} è continuo. Se la topologia di X e di Y è indotta da una norma, ciò equivale alle disuguaglianze dell'enunciato. \square

Definizione 3.15.5. (*Nucleo e range di un operatore lineare.*) Si denotano rispettivamente con kernel (o nucleo) e range (o immagine) dell'operatore $T : X \mapsto Y$ gli spazi

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in X : Tx = 0\},$$

$$\mathcal{R}(T) = \{y \in Y : y = Tx \text{ per qualche } x \in X\}.$$

Corollario 3.15.6. *Siano X e Y F -spazi e $F : X \rightarrow Y$ un operatore lineare. Allora T è invertibile da Y a X con inverso continuo se e solo se $\mathcal{R}(T) = Y$ e $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.*

Dimostrazione. È evidente che T è invertibile se e solo se è iniettivo e surgettivo, e questo equivale alle condizioni dell'enunciato. Inoltre, per il Corollario 3.15.4, queste condizioni assicurano anche che T^{-1} sia continuo. \square

Corollario 3.15.7. *La topologia di un F -spazio è massimale, nel senso seguente: se X è un F -spazio nella topologia τ_- ed anche in una topologia più forte τ_+ , allora τ_+ coincide con τ_- .*

Dimostrazione. Basta applicare il Corollario 3.15.4 alla mappa identità da (X, τ_+) a (X, τ_-) , che è continua visto che $\tau_+ \supset \tau_-$. \square

Esercizio 3.15.8. (*Sottospazi chiusi di $L^p[0, 1]$.*) Siano $1 \leq p < \infty$ e S un sottospazio di $C[0, 1] \subset L^p[0, 1]$ chiuso come sottospazio di $L^p[0, 1]$ (ossia nella norma di L^p). Si provino i seguenti risultati.

- (i) Esiste una costante $C > 0$ tale che, per ogni $f \in S$, $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \leq C \|f\|_p$.

- (ii) S è chiuso come sottospazio di $C[0, 1]$ (ossia nella norma uniforme).
- (iii) Sia q l'indice coniugato di p , ossia $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ (Definizione 1.16.4). Allora, per ogni $x \in [0, 1]$, esiste un *nucleo riprodotte* $g_x \in L^q[0, 1]$ tale che, per tutte le funzioni $f \in S$, si ha

$$f(x) = \int_0^1 f(t) g_x(t) dt.$$

- (iv)* Se $f_n \in S$ converge debolmente in L^p ad una funzione $f \in S$, allora f_n converge a f puntualmente ovunque in $[0, 1]$.
- (v)* Se $f_n \in S$ converge debolmente in L^p ad una funzione $f \in S$, allora f_n ammette una sottosuccessione che converge a f nella norma di L^p (ed in tutte le norme L^r con $1 \leq r < \infty$).
- (vi)* D'ora in poi limitiamo l'attenzione al caso particolare $p = 2$. Lo spazio S con le proprietà della parte (i) è un sottospazio localmente compatto di $L^2[0, 1]$.
- (vii)* Sempre nel caso $p = 2$, S ha dimensione finita.

Svolgimento. È ovvio che $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ per ogni f in $L^p[0, 1]$, quindi anche per $f \in S$. Inoltre, $S \subset C[0, 1] \subset L^p[0, 1]$ è chiuso in $L^p[0, 1]$, e l'identità è una applicazione lineare ed iniettiva da S a $L^p[0, 1]$, ed è continua perché sui compatti la convergenza uniforme implica quella in L^p . Pertanto la disuguaglianza $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_p$ segue per ogni $f \in S$ dal Corollario 3.15.4. Questo prova (i), e prova anche che le norme $\|f\|_\infty$ e $\|f\|_p$ su S sono equivalenti, e quindi che S è anche chiuso nella norma uniforme, ossia (ii).

Per ogni $x \in [0, 1]$ il funzionale $\delta_x(f) = f(x)$ è un funzionale lineare su $C[0, 1]$ evidentemente continuo nella norma uniforme (perché $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$), e quindi anche nella norma di L^p , per la parte (ii). Allora δ_x si estende ad un funzionale continuo su tutto $L^p[0, 1]$, per il teorema di Hahn–Banach (Teorema 3.5.5). Abbiamo visto nell'Esempio 3.12.2 che tutti questi funzionali, e quindi in particolare δ_x , si rappresentano come nella parte (iii) tramite una funzione $g_x \in L^q[0, 1]$ come $T(f) = \int_0^1 f(t) g_x(t) dt$. Questo prova (iii). Si noti che T è l'estensione di Hahn–Banach su tutto $L^p[0, 1]$ di δ_x che era definito su S come $\delta_x(f) = f(x)$: quindi per $f \in L^p \setminus S$ non è detto che si abbia $T(f) = f(x)$, anzi in generale l'ultimo membro non ha senso per funzioni discontinue, perché, per ogni fissato x , dipende dalla scelta del rappresentante

nella classe di Lebesgue di f , e non c'è un rappresentante privilegiato per cui il valore puntuale abbia senso.

Per dimostrare (iv), osserviamo anzitutto che se $f_n \in S$ converge debolmente in L^p ad una funzione $f \in L^p[0, 1]$, allora, per (iii), per ogni $x \in [0, 1]$ abbiamo

$$f_n(x) = \int_0^1 f_n(t) g_x(t) dt \rightarrow \int_0^1 f(t) g_x(t) dt = \delta_x(f) = f(x).$$

Questo prova (iv).

Ora supponiamo che $f_n \in S$ converga a $f \in S$ nella topologia debole di L^p . Dalla parte (iv) sappiamo che f_n converge a f puntualmente. Sia x_n il punto in cui $|f_n|$ raggiunge il proprio massimo. Dal momento che $[0, 1]$ è compatto, esiste una sottosuccessione di x_{n_k} di x_n che converge a un punto $x_0 \in [0, 1]$: ne ricaviamo da (iv) che $\|f_{n_k}\|_\infty \rightarrow f(x_0)$. Ma allora $\|f_{n_k}\|_\infty$ è una successione numerica limitata, ossia la sottosuccessione $f_{n_k}(x)$ è uniformemente limitata al variare di x . Pertanto anche $|f_{n_k}(x) - f(x)|$ è uniformemente limitata (dalla costante $|f(x_0)| + \|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$). Allora possiamo applicare al compatto $[0, 1]$ il Teorema di Convergenza Dominata 1.9.54 e concludere che f_{n_k} converge a f in L^1 ed in tutte le norme L^r su $[0, 1]$, per ogni $1 \leq r < \infty$. Abbiamo provato (v).

Se $p = 2$, osserviamo che la sfera unitaria in S considerato come sottospazio chiuso nella norma L^2 , la quale è compatta nella topologia debole stella di L^2 in base al Teorema 3.10.7, lo è anche nella topologia debole indotta da L^2 , perché $L^2[0, 1]$ coincide isometricamente con il proprio duale (questo risultato è un celebre teorema di Riesz–Fischer, la cui dimostrazione, per comodità espositiva, viene rimandata al Capitolo 4 (teorema 4.4.6)). Pertanto la parte (v) nel caso $p = 2$ asserisce che nella sfera unitaria dello spazio S (nella norma di L^2) ogni successione ha una sottosuccessione convergente ad un elemento di S non soltanto debolmente, ma anche *in norma*. Questo significa che le sfere di S sono compatte nella norma di L^2 , ossia che S è localmente compatto. Questo fatto è esattamente la parte (vi), e la parte (vii) ora segue da un risultato che per convenienza espositiva posponiamo ad una prossima Sezione: il Teorema 3.21.5, che asserisce che uno spazio vettoriale topologico è localmente compatto se e solo se è a dimensione finita. \square

3.16 Il teorema del grafico chiuso

Rammentiamo che una funzione da un insieme X ad un insieme Y è definita come un sottoinsieme $G \subset X \times Y$ di coppie (x, y) che non hanno mai lo stesso primo elemento: questo significa che ad ogni $x \in X$ corrisponde al più un elemento $y \in Y$ tale che $(x, y) \in G$. È abituale indicare questo elemento y con $f(x)$. La proiezione di G sul fattore X è il dominio di f , e quella su Y è l'immagine di f .

Nota 3.16.1. Se G è un grafico, allora ad ogni $(x, y) \in G$ corrisponde un unico $y \in Y$, e quindi la proiezione canonica $\pi_1((x, y)) = x$ è invertibile se ristretta a G : ossia, esiste $\pi_1|_G^{-1} : X \rightarrow G$.

In effetti, spesso questa definizione astratta del concetto di funzione viene rimpiazzata dal simbolo $x \mapsto f(x)$, e l'insieme G viene chiamato il *grafico* di f . La consuetudine a questa formulazione, ad esempio nel caso di $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ci fa presumere che, se X e Y sono spazi topologici e $f : X \rightarrow Y$ è continua, il grafico di f debba essere un insieme chiuso. Questo fatto è quasi vero:

Proposizione 3.16.2. *Siano X e Y spazi topologici e $f : X \rightarrow Y$ continua. Allora, se Y è uno spazio di Hausdorff (Definizione 1.10.2), il grafico G di f è chiuso in $X \times Y$. Viceversa, se Y non è uno spazio di Hausdorff, esistono funzioni da Y a Y il cui grafico non è chiuso (ad esempio, la funzione identità).*

Dimostrazione. Sia $(x_0, y_0) \notin G$: in altre parole, $y_0 \neq f(x_0)$. Se Y è di Hausdorff, in Y esistono intorni V_1 di y_0 e V_2 di $f(x_0)$ disgiunti. Ma poiché f è continua, esiste un intorno U di x_0 in X tale che $f(U) \subset V_2$. Pertanto l'intorno $U \times V_1$ di (x_0, y_0) è tutto contenuto nel complemento di G . Quindi il complemento di G è aperto, ossia G è chiuso.

Se invece Y non è di Hausdorff, il grafico della funzione identità è la diagonale $(y, y) : y \in Y$. Se questo insieme fosse chiuso, allora il suo complemento sarebbe aperto, il che, per l'argomento appena esposto, equivarrebbe a dire che per ogni $z \neq w$ in Y esisterebbero intorni aperti disgiunti di z e w : questo contraddice il fatto che Y non sia di Hausdorff. \square

Nota 3.16.3. Ogni punto di accumulazione in uno spazio metrizzabile Z è limite di successioni $z_n \in Z$. Pertanto, se X e Y sono spazi metrizzabili, ogni punto di accumulazione del grafico $G \subset X \times Y$ è limite di successioni (x_n, y_n) , e quindi il grafico G è chiuso se e solo se per ogni successione $x_n \rightarrow x \in X$ tale che $f(x_n) \rightarrow y \in Y$ si ha $y = f(x)$. \square

Ora mostriamo che, per funzioni *lineari* su spazi vettoriali topologici metrizzabili e completi, il fatto che il grafico sia chiuso equivale alla continuità. Questa è una conseguenza quasi immediata del Teorema dell'applicazione aperta 3.15.3.

Teorema 3.16.4. (Teorema del grafico chiuso.) *Siano X e Y F -spazi (Definizione 3.1.1), e T una applicazione lineare da X a Y . Allora T è continua se e solo se il suo grafico è chiuso in $X \times Y$.*

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 3.16.2 è sufficiente dimostrare che se il grafico G di T è chiuso allora T è continua.

Consideriamo lo spazio vettoriale $X \times Y$, con somma e moltiplicazione per scalari definita componente per componente. Poiché X e Y sono F -spazi, la loro topologia è indotta da metriche invarianti d_X e d_Y : allora è banale verificare che $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$ è una metrica invariante su $X \times Y$ compatibile con la sua topologia prodotto, e completa. Quindi $X \times Y$, con questa topologia, un F -spazio, ed il sottoinsieme chiuso G è, essendo chiuso in uno spazio completo, è completo (Proposizione 1.10.7). Perciò G è un F -spazio. Consideriamo ora le seguenti due proiezioni ottenute dalle canoniche sui fattori (la seconda è proprio la proiezione canonica):

$$\pi_1|_G(x, Tx) = x, \quad \pi_2(x, y) = y.$$

Allora $\pi_1|_G$ e π_2 sono continue, perché le sono le proiezioni canoniche nella topologia prodotto (per definizione di topologia prodotto, Definizione 3.7.2). Poiché G e X sono F -spazi, segue dal Teorema dell'applicazione aperta 3.15.3 che $\pi_1|_G^{-1} : X \rightarrow G$ (che esiste come visto nella Nota 3.16.1) è continua. Ma naturalmente anche la proiezione canonica π_2 è continua, e quindi lo è $T = \pi_2 \circ \pi_1|_G^{-1}$. \square

3.17 L'operatore aggiunto; kernel e range di un operatore lineare

Teorema 3.17.1. *Siano X e Y spazi normati e $T : X \rightarrow Y$ un operatore limitato. Allora esiste un unico operatore limitato $T^* : X' \rightarrow Y'$ tale che*

$$\langle Tx, y' \rangle = \langle x, T^*y' \rangle \quad (3.37)$$

per ogni $x \in X$ e $y' \in Y'$. Inoltre, $\|T^*\| = \|T\|$.

Dimostrazione. Cominciamo con il definire T^* su Y' , ponendo $T^*y' := y' \circ T$, che è un funzionale lineare continuo su X perché è composizione di mappe lineari continue. Verifichiamo che T^* soddisfa l'identità (3.37):

$$\langle x, T^*y' \rangle := T^*y'(x) = y'(T(x)) = \langle Tx, y' \rangle.$$

Dato $y' \in Y'$, questa identità fissa il valore di T^*y' per ogni $x \in X$, e quindi determina un unico operatore $T^* : X' \rightarrow Y'$. Dal fatto che la dualità è una mappa bilineare si verifica immediatamente che T^* è una applicazione lineare. Resta da dimostrare la limitatezza, che segue dal Corollario 3.11.4 e dall'identità (3.37) in questo modo:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{|\langle Tx, y' \rangle| : \|x\|_X \leq 1, \|y'\|_{Y'} \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle x, T^*y' \rangle| : \|x\|_X \leq 1, \|y'\|_{Y'} \leq 1\} = \|T^*\|. \end{aligned}$$

□

Definizione 3.17.2. X e Y spazi normati e $T : X \rightarrow Y$ un operatore limitato. L'operatore $T^* : X' \rightarrow Y'$ introdotto in (3.37) si chiama l'*operatore aggiunto* di T .

Proposizione 3.17.3. Sia T un operatore lineare limitato da uno spazio di Banach X ad uno spazio di Banach Y . Allora il nucleo ed il range di T (si veda la Definizione 3.15.5) e del suo aggiunto T^* sono collegati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T^*) &= \mathcal{R}(T)^\perp, \\ \mathcal{N}(T) &= {}^\perp \mathcal{R}(T^*). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $y' \in \mathcal{N}(T^*) \subset Y'$, ossia $T^*y' = 0$. Questo equivale all'identità $\langle T^*y', x \rangle = 0$ per ogni $x \in X$, ossia a $\langle y', Tx \rangle = 0$ per ogni x , ossia ancora a $y' \in \mathcal{R}(T)^\perp$. Questo prova la prima relazione dell'enunciato. La seconda si prova in maniera interamente analoga ed è lasciata come esercizio al lettore. □

Corollario 3.17.4. (i) $\mathcal{N}(T^*)$ è chiuso in Y' nella topologia debole*;

(ii) $\mathcal{R}(T)$ è denso in Y se e solo se T^* è iniettivo;

(iii) $\mathcal{R}(T^*)$ è denso in X' nella topologia debole* se e solo se T è iniettivo.

Dimostrazione. Dalla precedente Proposizione 3.17.3 $\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp$, e quindi la parte (i) segue dalla prima asserzione del Corollario 3.11.12. Il Teorema di Hahn–Banach 3.5.3, o meglio la sua conseguenza enunciata nella Proposizione 3.5.8, mostra che il sottospazio chiuso $\mathcal{R}(T)$ è denso in Y se e solo se $\mathcal{R}(T)^\perp = 0$, ossia, in base alla precedente proposizione, se e solo se $\mathcal{N}(T^*) = 0$, ma questo equivale a dire che T^* è iniettivo, e la parte (ii) è dimostrata. In maniera analoga, si consideri il sottospazio ${}^\perp\mathcal{R}(T^*) \subset X'$, e si noti che ${}^\perp\mathcal{R}(T^*) = 0$ se e solo se $\mathcal{R}(T^*) \subset X'$ non è annichilato da nessun $\iota x \in X'$ a parte $x = 0$: poiché i funzionali del tipo ιx sono quelli continui nella topologia debole* di X' , di nuovo per il Teorema di Hahn–Banach 3.5.3, vediamo che questo equivale a dire che il sottospazio chiuso nella topologia debole* di X' generato da $\mathcal{R}(T^*)$ deve coincidere con tutto X' , ossia che $\mathcal{R}(T^*)$ è denso in X' in questa topologia. Questo dimostra la parte (iii). \square

Abbiamo quindi dimostrato che $\mathcal{R}(T)$ è denso in Y se e solo se T^* è iniettivo. Il prossimo enunciato mostra che $\mathcal{R}(T) = Y$ se e solo se T^* è iniettivo e $(T^*)^{-1} : \mathcal{R}(T^*) \mapsto Y'$ è limitato.

Teorema 3.17.5. *Sia T un operatore lineare limitato da uno spazio di Banach X ad uno spazio di Banach Y . Esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $y' \in Y'$, vale la disuguaglianza*

$$\|T^*y'\| \geq \delta\|y'\| \quad (3.38)$$

se e solo se $T(X) = Y$.

Dimostrazione. Assumiamo che (3.38) valga per ogni $y' \in Y'$. Vogliamo provare che allora $T(X) = Y$. Se U è la palla unitaria aperta di X e V quella di Y , questo equivale a provare che esiste $\eta > 0$ tale che $T(U) \supset \eta V$. Proveremo adesso che questa inclusione vale con $\eta = \delta$.

Sia $y_0 \notin T(U)$. Applichiamo al compatto $\{y_0\}$ ed al chiuso $\overline{T(U)}$ la parte (ii) del Teorema 3.6.1 (più precisamente, la sua formulazione in termini del modulo $|y'|$ di un opportuno funzionale, menzionata al termine di quell'enunciato). Otteniamo che esistono $y' \in Y'$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $|\langle y', y \rangle| < \alpha < \beta < |\langle y', y_0 \rangle|$ per ogni $y \in \overline{T(U)}$. Rinormalizzando y' opportunamente possiamo assumere che si abbia $|\langle y', y \rangle| < 1$ per ogni $y \in \overline{T(U)}$ ma $|\langle y', y_0 \rangle| > 1$. Allora, per questo $y' \in Y'$ rinormalizzato e ogni $x \in U$, abbiamo $|\langle T^*y', x \rangle| = |\langle y', Tx \rangle| < 1$, e quindi $\|T^*y'\| \leq 1$, in base come sempre alla definizione di norma nello spazio duale (si riveda il Corollario 3.11.1).

Ora, da (3.38),

$$\delta < \delta |\langle y', y_0 \rangle| \leq \delta \|y'\| \|y_0\| \leq \|y_0\| \|T^*y'\| < \|y_0\|.$$

Quindi ogni $y_0 \notin T(U)$ verifica $y_0 \notin \delta V$, o equivalentemente, $y \in \delta V$ implica $y \in T(U)$. Abbiamo quindi dimostrato che (3.38) implica $\delta V \subset T(U)$, e di conseguenza che $T(X) = Y$.

Viceversa, supponiamo che $T(X) = Y$. Allora, per il Teorema dell'applicazione aperta 3.15.3 (o più esplicitamente, per il suo Corollario 3.15.4), $T(U) \supset \delta V$ per qualche $\delta > 0$. Allora, ancora una volta per il Corollario 3.11.1, abbiamo

$$\begin{aligned} \|T^*y'\| &= \sup_{x \in U} |\langle T^*y', x \rangle| = \sup_{x \in U} |\langle y', Tx \rangle| \\ &\geq \sup_{y \in \delta V} |\langle y', y \rangle| = \delta \|y'\|, \end{aligned}$$

ossia (3.38). □

Teorema 3.17.6. *Siano X e Y spazi di Banach e $T : X \mapsto Y$ un operatore lineare limitato. le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

- (i) $\mathcal{R}(T)$ è chiuso in Y ;
- (ii) $\mathcal{R}(T^*)$ è chiuso in X' nella topologia debole*;
- (iii) $\mathcal{R}(T^*)$ è chiuso in X' nella topologia della norma.

Dimostrazione. Dalla Proposizione 3.17.3 sappiamo che $\mathcal{N}(T)^\perp = ({}^\perp\mathcal{R}(T^*))^\perp$, e quest'ultimo spazio, in base alla parte (ii) del Corollario 3.11.13, è la chiusura debole* di $\mathcal{R}(T^*)$, in particolare $\text{cal}\mathcal{N}(T)^\perp \supset \mathcal{R}(T^*)$. Ora proviamo che, se vale (i), allora vale l'inclusione opposta, $\text{cal}\mathcal{N}(T)^\perp \subset \mathcal{R}(T^*)$, e pertanto avremo che $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{N}(T)^\perp$ è chiuso nella topologia debole*, ossia (ii).

Fissiamo $x' \in \mathcal{N}(T)^\perp$. Per ogni $x \in X$ scriviamo $y = Tx$. Il funzionale continuo x' si estende allora ad un funzionale η su $\mathcal{R}(T)$ dato da $\eta(y) = \langle x', x \rangle$, ossia $\eta = x' \circ T^{-1}$. In effetti, η è ben definito, perché se $x_1, x_2 \in X$ verificano $Tx_1 = Tx_2$, allora $x_1 - x_2 \in \mathcal{N}^\perp$ e quindi $\langle x', x_1 \rangle = \langle x', x_2 \rangle$ in quanto x' appartiene a $\mathcal{N}(T)^\perp$.

Poiché assumiamo (i), ossia che $\mathcal{R}(T)$ sia chiuso in Y , e quindi completo (Proposizione 1.10.7), possiamo applicare il Corollario 3.15.4 del Teorema

dell'Applicazione Aperta all'operatore $T : X \mapsto \mathcal{R}(T)$ e concludere che, per qualche $c > 0$, ogni $y \in \mathcal{R}(T)$ verifica $y = Tx$ per qualche $x \in X$ con $\|x\| \leq c\|y\|$. Pertanto $|\eta(y)| = |\langle x', x \rangle| \leq c\|x'\|\|x\|$, e quindi η è continuo su $\mathcal{R}(T)$. Per il Teorema di Hahn–Banach 3.5.3, η si estende a qualche funzionale continuo $y' \in Y'$, ed allora, per ogni $x \in X$, si deve avere

$$\langle T^*y', x \rangle = \langle y', Tx \rangle = \eta(Tx) = \langle x', x \rangle,$$

ossia $x' = T^*y'$. Questo prova che $x' \in \mathcal{R}(T^*)$, ossia che $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{N}(T)^\perp$, il che, come abbiamo visto, implica (ii).

È ovvio che (ii) implichi (iii), dal momento che la topologia debole* è più debole della topologia della norma. Allora proviamo che (iii) implica (i). Supponiamo quindi che $\mathcal{R}(T^*)$ sia chiuso in X' nella topologia della norma, ed indichiamo con R la chiusura di $\mathcal{R}(T)$ in Y nella topologia della norma. Ovviamente possiamo riconsiderare $T : X \mapsto Y$ come un operatore da X a $\mathcal{R}(T)$, e quindi come un operatore fra gli spazi di Banach X e R , che preferiamo, per maggior chiarezza, indicare con un altro simbolo, diciamo $S : X \mapsto R$ (si noti che $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T)$, un fatto ovvio che useremo fra poco). Per definizione di $R = \overline{\mathcal{R}(T)}$, l'immagine di S è densa in R . Per la parte (ii) del Corollario 3.17.4, questo equivale a dire che $S^* : R' \mapsto X'$ è iniettivo. Per il Teorema di Hahn–Banach 3.5.3, ogni $r' \in R'$ ha qualche estensione continua $y' \in Y'$, la quale, come prima, verifica

$$\langle T^*y', x \rangle = \langle y', Tx \rangle = \langle r', Sx \rangle = \langle S^*r', x \rangle.$$

Quindi $\mathcal{R}(S^*) = \mathcal{R}(T^*)$, e poiché stiamo assumendo che valga (iii), $\mathcal{R}(S^*)$ è chiuso, e quindi è uno spazio di Banach. Allora possiamo applicare il Corollario 3.15.4 all'operatore $S^* : R' \mapsto \mathcal{R}(S^*)$, in base al quale, poiché S^* è iniettivo, otteniamo una costante $c > 0$ tale che $\|r'\| \leq c\|S^*r'\|$ per ogni $r' \in R'$. Segue allora dal Teorema 3.17.5 che $S(T) = R$. Ma abbiamo notato che $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T)$, e quindi ciò che abbiamo dimostrato è che $\mathcal{R}(T) = R$, un spazio chiuso: questa è la proprietà (i). \square

3.18 Operatori compatti; l'alternativa di Fredholm

Definizione 3.18.1. Sia $T : X \mapsto Y$ un operatore lineare fra due F -spazi X e Y . Diciamo che T è un operatore compatto se l'immagine di una palla

aperta $U \subset X$ è relativamente compatta in Y , cioè se la chiusura di $T(U)$ è compatta. Si noti che, grazie alla linearità ed al fatto che le traslazioni in uno spazio vettoriale topologico sono omeomorfismi, questa proprietà vale per ogni palla aperta se e solo se vale per una qualsiasi di esse (esercizio).

Nota 3.18.2. (i) Se T è un operatore compatto, in particolare l'immagine della palla unitaria con centro l'origine è contenuta in un compatto, e quindi limitata. Pertanto segue immediatamente dalla Definizione 3.3.7 che T è un operatore limitato.

(ii) La restrizione di un operatore compatto T ad un sottospazio $V \subset X$ è ancora un operatore compatto: infatti, data una palla $U \subset X$, si ha $\overline{T|_V(U)} = \overline{T(U \cap V)}$, e quest'ultimo insieme è chiuso nel compatto $\overline{T(U)}$, e quindi è compatto per la prima asserzione del Lemma 1.10.6.

(iii) È ovvio che ogni operatore su uno spazio a dimensione finita è compatto, perché manda la palla unitaria in un sottoinsieme di una palla nello spazio immagine, la quale ha chiusura compatta a causa della dimensione finita. Lo stesso argomento vale più in generale se l'immagine dell'operatore ha dimensione finita.

(iv) Viceversa, se X e Y sono F -spazi e $T : X \mapsto Y$ è compatto con immagine $\mathcal{R}(T)$ chiusa, allora $\dim(\mathcal{R}(T)) < \infty$. Infatti, se $\mathcal{R}(T)$ è chiuso nello spazio completo Y , allora è esso stesso completo (Proposizione 1.10.7), e quindi, in base al Teorema 3.15.3 dell'Applicazione Aperta, l'operatore limitato $T : X \mapsto \mathcal{R}(T)$ è una applicazione aperta, ossia manda aperti in aperti. Visto che T si assume compatto, esso manda palle aperte in aperti a chiusura compatta. Considerando in X la base locale a 0 data dalle palle U_ρ con centro l'origine e raggio $\rho > 0$, vediamo che $T(U_\rho)$ è una famiglia di aperti a chiusura compatta che forma una base locale della topologia di $\mathcal{R}(T)$. Pertanto $\mathcal{R}(T)$ è uno spazio topologico localmente compatto, e pertanto deve essere a dimensione finita in base al Teorema 3.21.5.

(v) Inoltre, in base al Teorema 1.11.1, T è compatto se e solo se l'immagine $T(U)$ di una qualsiasi palla aperta U è totalmente limitata (la totale limitatezza fu definita nella parte (iii) dell'enunciato del suddetto Teorema), e se e solo se da ogni successione in U si può estrarre una sottosuccessione la cui immagine sotto T è convergente.

(vi) Infine, nel caso $T : X \mapsto X$, ossia $T \in \mathcal{B}(X)$ è un operatore limitato da X a sé stesso, allora gli operatori compatti formano, oltre che un sottospazio, anche un ideale bilatero nell'algebra $\mathcal{B}(X)$, ossia se T è compatto e $S \in \mathcal{B}(X)$, allora ST e TS sono compatti. Infatti, poiché T è compatto, per ogni palla aperta U si ha che $\overline{T(U)}$ è un insieme compatto, e quindi, poiché S è continuo, ne segue che $\overline{ST(U)} = S(\overline{T(U)})$ è un compatto in base alla Proposizione 1.10.8. D'altro lato, a causa della limitatezza dell'operatore S , l'immagine $S(U)$ è contenuta in una palla rU centrata nell'origine, e quindi $\overline{TS(U)} \subset r\overline{T(U)}$, che è un compatto perché T è un operatore compatto. Pertanto $\overline{TS(U)}$ è un sottoinsieme chiuso di un compatto, e quindi è compatto in base alla prima asserzione del Lemma 1.10.6.

□

Proposizione 3.18.3. *Siano X e Y spazi di Banach. Gli operatori compatti formano un sottospazio chiuso $C = C(X, Y)$ dello spazio normato $\mathcal{B}(X, Y)$ degli operatori lineari limitati da X a Y , munito della norma degli operatori.*

Dimostrazione. Abbiamo già accennato il fatto ovvio che C è uno spazio vettoriale. Mostriamo che C è chiuso. Indichiamo con U la palla unitaria aperta di X centrata in 0 e con $U_r(x)$ la palla aperta di raggio $r > 0$ centrata in $x \in X$. Sia T un operatore nella chiusura di C in $\mathcal{B}(X, Y)$: ossia, per ogni $r > 0$ esiste $S \in C$ tale che $\|T - S\| < r$, ossia ancora

$$\|T(x) - S(x)\| < r \quad \text{per ogni } x. \quad (3.39)$$

Sappiamo dalla parte (v) del Corollario ?? che $S(U)$ è totalmente limitato, ossia esistono $x_1, \dots, x_n \in U$ tali che $S(U) \subset \cup_{i=1}^n U_r(Sx_i)$. Per ciascun $x \in U$, sia $x_i \in U$ un indice tale che $S(x) \in S(x_i)$. Allora dalla disuguaglianza triangolare e da (3.39) segue che,

$$\|T(x) - T(x_i)\| \leq \|T(x) - S(x)\| + \|S(x) - S(x_i)\| + \|S(x_i) - T(x)\| \leq 3r.$$

Questo mostra che $T(U)$ è localmente limitato: pertanto, in base alla parte (iv) della precedente Nota 3.18.2, T è compatto. □

Definizione 3.18.4. (Spettro di un operatore.) Sia X uno spazio vettoriale topologico e $T \in \mathcal{B}(X)$ (un operatore continuo su X). Lo spettro $\sigma(T)$ è l'insieme di tutti gli scalari λ (numeri nel campo di base dello spazio X) tali che $T - \lambda\mathbb{I}$ non è invertibile con inverso continuo, ossia non esiste $(T - \lambda\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{B}(X)$.

Nota 3.18.5. Segue immediatamente dal Corollario 3.15.6 che, se X è un F -spazio, allora $\lambda \in \sigma(T)$ se e solo se almeno una delle seguenti proprietà è vera:

- (i) $T - \lambda\mathbb{I}$ non è iniettivo, ovvero $\mathcal{N}(T - \lambda\mathbb{I}) \neq \{0\}$;
- (ii) $T - \lambda\mathbb{I}$ non è surgettivo, ossia $\mathcal{R}(T - \lambda\mathbb{I}) \subsetneq X$.

Se vale (i), λ è autovettore di T , e $\mathcal{N}(T - \lambda\mathbb{I})$ è il corrispondente autospazio. \square

Proposizione 3.18.6. *Sia X un F -spazio e $T \in \mathcal{B}(X)$.*

- (i) *Se T è compatto e $\lambda \neq 0$, allora $\dim(\mathcal{N}(T - \lambda\mathbb{I})) < \infty$.*
- (ii) *Se X ha dimensione infinita e T è compatto, allora $0 \in \sigma(T)$.*

Dimostrazione. La restrizione di T al sottospazio chiuso $\mathcal{N}(T - \lambda\mathbb{I})$ è un operatore compatto per la parte (ii) della Nota 3.18.2, ma questa restrizione è l'operatore $\lambda\mathbb{I}$, la cui immagine è esattamente il sottospazio chiuso $\mathcal{N}(T - \lambda\mathbb{I})$, che quindi deve essere a dimensione finita in seguito alla parte (iv) della stessa Nota. Questo prova (i).

Se $0 \notin \sigma(T)$, allora $\mathcal{R}(T) = X$ per la Nota 3.18.5, e quindi segue anche in questo caso dalla parte (iv) della Nota 3.18.2 che $\dim X = \dim \mathcal{R}(T) < \infty$. Questo contraddice l'ipotesi di (i) \square

Teorema 3.18.7. *Siano X e Y spazi di Banach e $T : X \mapsto Y$ un operatore lineare continuo. Allora T è compatto se e solo se il suo aggiunto T^* è compatto.*

Dimostrazione.

3.19 *Seminorme e spazi localmente convessi

Da qui in poi l'accento si focalizza su aspetti più astratti. Il lettore non interessato è invitato ad omettere il resto del Capitolo.

3.19.1 Spazi di Fréchet e topologie indotte da famiglie numerabili di seminorme

Definizione 3.19.1. (Famiglia separatrice di seminorme.) Sia V uno spazio vettoriale munito di una famiglia numerabile di seminorme p_n (introdotte nella Definizione 3.2.8), con la seguente proprietà di separazione: per ogni $v \neq 0$ in V , esiste n tale che $p_n(v) \neq 0$. Una tale famiglia di seminorme si dice *separatrice*.

I seguenti enunciato sono chiari, e si dimostrano come la parte (i) dell'Esercizio 1.13.7:

Nota 3.19.2. (Basi e sottobasi per topologie indotte da famiglie separatrici di seminorme.) Al variare di $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{Q}, r > 0$, gli insiemi $V(p_n, r) := \{v : p_n(v) < r\}$ formano una sottobase di aperti convessi e bilanciati (Definizione 3.1.7) per la topologia τ appena introdotta: i $V(p_n, r)$ sono convessi grazie alla disuguaglianza triangolare delle seminorme, e bilanciati grazie alla proprietà di dilatazione delle seminorme (rispettivamente le proprietà (i) e (ii) della Definizione 3.2.8). In altre parole, una base per τ consiste delle intersezioni finite degli insiemi $V(p_n, r)$ al variare di n in \mathbb{N} e $r > 0$ in \mathbb{Q} .

Si noti che gli insiemi $V(p_n, r) := \{v : p_n(v) < r\}$ formano una sottobase ma in generale non una base per la topologia: non è detto che in ogni aperto sia contenuto qualche $V(p_n, r)$. Ad esempio, la consueta topologia euclidea in \mathbb{R}^2 (i cui aperti di base possono essere scelti come palle euclidee) è indotta dalle due seminorme $p_1(x_1, x_2) = |x_1|$ e $p_2(x_1, x_2) = |x_2|$, i cui aperti $V(p_n, r)$ ($n = 1, 2$) sono strisce nel piano: le loro intersezioni sono rettangoli, ed ogni palla contiene un rettangolo, ma non una striscia. \square

Nota 3.19.3. (Topologia indotta da una famiglia separatrice di seminorme.) Una famiglia separatrice di seminorme rende V uno spazio vettoriale topologico con la topologia τ data da tutte le unioni di traslati di membri della base locale a 0. È ovvio che questa topologia è invariante per traslazione; in verità, occorrerebbe dimostrare che i punti sono chiusi (la proprietà $T1$ che è assunta nella Definizione 3.1.1 di spazio vettoriale topologico, ma questo (per l'invarianza per traslazione) equivale al fatto che $\{0\}$ sia un chiuso, e ciò è una ovvia conseguenza della proprietà di separazione: ogni $v \neq 0$ è contenuto in qualche aperto di base $v + V(p_n, r)$ che non contiene 0, quindi il complemento di $\{0\}$ è aperto. La continuità della somma e della

moltiplicazione per scalari sono facili esercizi che lasciamo per il lettore (che in caso di difficoltà può consultare la dimostrazione di [25, Theorem 1.37]. In questa topologia la nozione di convergenza diventa la seguente:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} v_j = v$$

se per ogni seminorma p_n si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} p_n(v_j - v) = 0$$

cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $j_0 \in \mathbb{N}$, $j_0 = j_0(\varepsilon, n)$, tale che, se $j > j_0$, si ha $p_n(v_j - v) < \varepsilon$. La proprietà di separazione è necessaria perché la topologia di uno spazio vettoriale topologico deve soddisfare l'assioma di separazione T_2 (Lemma 3.1.11), ed anche già solo T_1 (Definizione 3.1.1). \square

Nota 3.19.4. (Continuità nelle topologie indotte da famiglie separatrici di seminorme.) Come conseguenza diretta della Nota 3.19.2, se la topologia dello spazio vettoriale V è indotta da una famiglia separatrice di seminorme, una funzione $F : V \rightarrow W$ (dove W è un qualsiasi spazio topologico) è continua se e solo se la controimmagine di un aperto $O \subset W$ contiene un aperto di tale base (per definizione di continuità, Sezione 1.1, e definizione di base locale della topologia, Definizione 1.10.1). Un caso particolare è quello delle funzioni F che sono operatori lineari da V ad uno spazio normato W : essi sono continui se e solo se sono continui all'origine (grazie alla linearità ed alla invarianza per traslazione della topologia), e pertanto se e solo se, per ogni sfera O intorno all'origine in W , esistono una famiglia finita $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ e una costante C tali che, per ogni $v \in O$,

$$\|F(v)\| < C_n \sum_{i=1}^k p_{n_i}(v).$$

Analogo è il caso di uno spazio W munito di una famiglia numerabile di seminorme q_n : in tal caso l'operatore lineare $F : V \rightarrow W$ è continuo se e solo se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esistono una famiglia finita $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ e una costante C_n tali che, per ogni $v \in V$,

$$q_n(F(v)) < C_n \sum_{i=1}^k p_{n_i}(v).$$

\square

Nota 3.19.5. Sia V uno spazio vettoriale con topologia indotta da una famiglia numerabile di seminorme p_n . Allora ogni p_n è una funzione continua su V . Infatti, per l'invarianza per traslazione basta mostrare che p_n è continua a 0. Per ogni $\varepsilon > 0$, sia $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < \varepsilon$. Allora la controimmagine sotto p_n dell'intervallo aperto di raggio ε e centro 0 in \mathbb{R} contiene $V(p_n, r)$, ed infatti consiste dell'unione $\cup_{0 < r < \varepsilon} V(p_n, r)$, ossia di un aperto in V . \square

Teorema 3.19.6. (Seminorme e metrizzabilità.) *La topologia indotta da una famiglia separatrice di seminorme è metrizzabile e localmente convessa.*

Dimostrazione. La topologia indotta su V dalla famiglia numerabile di seminorme p_n proviene da una metrica invariante, in base al Teorema 3.2.5, dal momento che abbiamo appena visto che questa topologia ha basi locali numerabili. È facile costruire esplicitamente una tale metrica d nel modo seguente: nel modo seguente:

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p(x-y)}{1+p(x-y)}.$$

Ovviamente questa serie è convergente perché la funzione $h(t) = t/(1+t)$ ha valori fra 0 e 1 per $t \geq 0$, e quindi i termini della serie, $2^{-n}h(p(x-y))$, sono maggiorati da 2^{-n} . L'unica proprietà di d che non è ovvia è la disuguaglianza triangolare, per dimostrare la quale occorre osservare che la funzione h è concava nella semiretta $\{t \geq 0\}$, e quindi sublineare: $h(u+v) \leq h(u) + h(v)$ (la disuguaglianza è stretta se $u, v > 0$, ma non ci serve). Da questo segue che $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in V$.

Poiché la topologia indotta dalla famiglia p_n ammette basi locali consistenti di insiemi convessi, essa è una topologia localmente convessa. \square

Proposizione 3.19.7. *Sia V uno spazio vettoriale con topologia indotta da una famiglia numerabile di seminorme p_n . Allora un sottoinsieme $E \subset V$ è limitato se e solo se ogni p_n è una funzione limitata su E .*

Dimostrazione. Supponiamo E limitato: per ogni intorno U di 0 in V esiste $r > 0$ tale che $E \subset \lambda U$ per tutte le dilatazioni λ con $|\lambda| > r$ (Definizione 3.1.1). Prendiamo, al posto di U , l'aperto di base $V(p_n, 1)$. L'inclusione $E \subset \lambda V(p, 1)$ equivale alla disuguaglianza $p_n(v) < \lambda$ per ogni $v \in E$: quindi p_n è limitata su E .

Viceversa, supponiamo che tutte le seminorme siano limitate su E e scegliamo

un intorno U di 0 ed un aperto di base $V(p_1, r_1) \cap \dots \cap V(p_n, r_n) \subset U$. Poiché queste seminorme p_1, \dots, p_n sono limitate su E , esistono costanti C_j tali che $p_j < C_j$ su tutto E per ogni $1 \leq j \leq n$. Ma allora, per tutti questi indici j e per ogni $\lambda > \max\{C_j/r_j : 1 \leq j \leq n\}$, abbiamo $\lambda U \supset V(p_j, \lambda r_j) \supset V(p_j, C_j) \supset E$, quindi E è un insieme limitato. \square

Nota 3.19.8. Si badi bene, a scampo di funesti equivoci, che gli insiemi E caratterizzati dal fatto che tutte le seminorme p_n sono limitate su E di solito *non sono aperti!* La palla $B_n(\lambda) = \{f : p_n(f) < \lambda\}$ è limitata per ciascun n e λ , come osservato all'inizio della dimostrazione del Teorema 3.2.11, ed è aperta grazie alla Nota 3.19.5. Ma se la famiglia di seminorme è numerabile invece che finita, il tipico insieme E su cui tutte le seminorme sono limitate è l'intersezione numerabile di traslati di palle $B_n(\lambda_n)$, ed una intersezione numerabile di aperti di solito non è aperta. Questa è la vera, profonda differenza fra le topologie di spazio normato e di spazio munito di una famiglia separatrice (infinita) di seminorme. \square

3.20 Esempi di spazi con famiglie numerabili di seminorme; spazi di Fréchet

3.20.1 Gli spazi $C^\infty(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ e \mathcal{D}_K

Dato un aperto non vuoto $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, lo spazio $C^\infty(\Omega)$ consiste di tutte le funzioni infinitamente derivabili su Ω . Per stabilire la notazione, indichiamo con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ un multi-indice, ossia un vettore in \mathbb{N}^k a coefficienti non negativi, e con $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_k^{\alpha_k}$ la derivata di ordine α (si intende che $D^0 f = f$). L'ordine di derivazione è indicato con $|\alpha| := \sum_{i=1}^k |\alpha_i|$. Tutte le idee e gli argomenti che stiamo per presentare sono completamente intellegibili anche limitando l'attenzione al caso $k = 1$, ed invitiamo il lettore non interessato alla generalità a limitare l'attenzione a questo caso.

Sia B_n la palla di centro l'origine e raggio n in \mathbb{R}^k . Ecco un modo di definire una famiglia numerabile di seminorme su $C^\infty(\Omega)$: per ogni multi-indice α ,

$$q_{n,\alpha}(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| : x \in B_n\}. \quad (3.40)$$

Gli aperti della sottobase locale indotta da ciascuna di queste seminorme sono gli insiemi $W(n, \alpha, r) = \{f : q_{n,\alpha}(f) < r\}$ Poiché però una base per la

topologia indotta da questa famiglia di seminorme consiste delle intersezioni finite di questi insiemi, la stessa topologia viene indotta da questa nuova famiglia di seminorme:

$$p_n(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| : x \in B_n, |\alpha| \leq n\}. \quad (3.41)$$

Le famiglie di seminorme $\{q_n\}$ e $\{p_n\}$ sono famiglie separatrici, perché se $f \neq 0$ allora $q_0(f) = p_0(f) = \|f\|_\infty > 0$.

La sottobase indotta dalla nuova famiglia $\{p_n\}$ consiste degli insiemi $V(n, r) = \bigcap_{|\alpha| \leq n} W(n, \alpha, r)$. In effetti questa è non solo una sottobase ma anche una base, grazie alla seguente ovvia osservazione:

Nota 3.20.1. Se una famiglia di seminorme p_n è monotona, nel senso che, per ogni vettore v , si ha $p_n(v) \leq p_{n+1}(v)$, allora gli insiemi $V(p_n, r) = \{v : p_n(v) < r\}$ sono inscatolati, nel senso che $V(p_{n+1}, r) \subset V(p_n, r)$, e quindi la intersezione di un numero finito di questi insiemi $V(p_n, r)$ è ancora un insieme dello stesso tipo: se $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, allora $\bigcap_{i=1}^k V(p_{n_i}, r) = V(p_{n_k}, r)$. Quindi i $V(p_n, r)$ costituiscono non solo una sottobase, ma anche una base locale a 0 per la topologia (Teorema 3.2.13). Per semplicità, preferiamo ricorrere ad una base indicizzata da un solo indice, e per questo limitiamo l'attenzione alla famiglia \mathcal{B} di aperti di base

$$V_n := V\left(p_n, \frac{1}{n}\right). \quad (3.42)$$

Le intersezioni finite degli insiemi $V_n \in \mathcal{B}$ sono ancora insiemi in \mathcal{B} , e poiché $1/n \rightarrow 0$ ogni $V(p_n, r)$ contiene $V(p_n, 1/n) = V_n$ se n è abbastanza grande (maggiore di $1/r$). Quindi anche \mathcal{B} è una base locale a 0. \square

Corollario 3.20.2. *La convergenza di una successione $f_n \in C^\infty(\Omega)$ è la convergenza uniforme sui compatti delle f_n e di tutte le loro derivate (di qualsiasi ordine).*

Dimostrazione. L'enunciato segue dalle espressioni (3.40) o equivalentemente (3.41) delle seminorme che inducono la topologia di $C^\infty(\Omega)$. \square

Nota 3.20.3. È interessante considerare quest'altra possibilità:

$$s_n(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq n\}. \quad (3.43)$$

Queste seminorme non sono finite su $C^\infty(\Omega)$ (a meno che Ω , invece di esser aperto, non sia compatto), perché $C^\infty(\Omega)$ contiene funzioni che divergono alla

frontiera di Ω (od all'infinito); esse però costituiscono una famiglia di seminorme sul sottospazio di $C^\infty(\Omega)$ delle funzioni limitate e con tutte le derivate limitate. Su questo sottospazio le seminorme $\{s_n\}$ definite da (3.43) sono in realtà norme, dal momento che, se $s_n(f) = 0$, allora $s_0(f) = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$, e quindi $f = 0$. In particolare, queste norme sono definite sul sottospazio $C_0^\infty(\Omega)$ delle funzioni infinitamente derivabili che tendono a zero all'infinito, ed anche sul sottospazio \mathcal{D} delle funzioni C^∞ a supporto compatto, e sui suoi sottospazi \mathcal{D}_K delle funzioni C^∞ a supporto in qualche fissato compatto $K \subset \Omega$.

Le due famiglie di seminorme $\{p_n\}$ e $\{s_n\}$ definiscono la stessa topologia su \mathcal{D} , ed anche su \mathcal{D}_K per ogni compatto $K \subset \Omega$. Infatti, da un lato $p_n \leq s_n$ per ogni n , ma d'altro lato

$$\sup_n \max_{B_n} \max_{|\alpha| \leq n} |D^\alpha f| = \sup_n \sup_{\mathbb{R}^k} \max_{|\alpha| \leq n} |D^\alpha f|$$

(perché i massimi di tutte le derivate di f sono assunti sullo stesso compatto $\text{supp } F$.) \square

Teorema 3.20.4. $C^\infty(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet (Definizione 3.1.1).

Dimostrazione. $C^\infty(\Omega)$ è localmente convesso in base al Teorema 3.19.6. Dobbiamo solo dimostrare che $C^\infty(\Omega)$ è completo.

Consideriamo una successione $\{f_j\}$ di Cauchy in $C^\infty(\Omega)$. Allora $f_i - f_j \in V_n = V(p_n, 1/n)$ (definito in (3.42) se i e j sono abbastanza grandi (quanto grandi dipende da n , naturalmente). Questo significa che $\max_{x \in B_n} |D^\alpha f_i(x) - D^\alpha f_j(x)| < 1/n$ per ogni $|\alpha| \leq n$. Ma allora, per ogni α , la successione $\{D^\alpha f_j\}$ è di Cauchy nella norma uniforme per ogni compatto in Ω . Poiché la norma uniforme è completa, per ogni multi-indice α esiste $g_\alpha = \lim_j D^\alpha f_j$ (limite uniforme sui compatti). Quindi g_α è continuo, e, per il Teorema 1.3.19 di convergenza uniforme con le derivate, $g^\alpha = D^\alpha g_0$, e quindi $g_0 \in C^\infty(\Omega)$ e lo stesso vale per tutte le g_α . Ma allora $p_n(f_j - g) \rightarrow 0$ per $j \rightarrow \infty$, e quindi $f_j \rightarrow g$ nella topologia di $C^\infty(\Omega)$. \square

Nota 3.20.5. In seguito vedremo un argomento analogo per il sottospazio $\mathcal{S}(\Omega)$ di $C^\infty(\Omega)$ su cui sono finite tutte le seminorme

$$p_{k,n}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m, |\alpha|=n} (1 + |x|^k) |D^\alpha f(x)|.$$

Questo spazio si chiama la *classe di Schwartz*, ed è studiato in dettaglio nel Capitolo 9. Però, in realtà, la dimostrazione della sua completezza, che sarà svolta in pieno dettaglio nel Teorema 9.4.3, è la stessa del precedente Teorema 3.20.4: invitiamo il lettore a svolgerla ora per esercizio, insieme agli enunciati paralleli a quelli della precedente Nota 3.20.3, ed a consultare il succitato teorema in caso di difficoltà con la stringatezza dell'argomento precedente. Qui ci limitiamo a riassumere il risultato appena citato (e l'equivalente della Nota 3.20.3) nel prossimo Corollario 3.20.6. Prima, però, osserviamo che la topologia indotta dalla famiglia delle seminorme $p_{k,n}$ è la stessa di quella indotta dalle seminorme

$$r_{2k,n}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m, |\alpha|=n} (1 + x^{2k}) |D^\alpha f(x)|.$$

Infatti, le due famiglie di seminorme sono equivalenti, perché, ovviamente, $p_{2k,n} = r_{2k,n}$, e le palle associate a ciascuna di queste due famiglie di seminorme sono inscatolate all'aumentare di k . \square

Corollario 3.20.6. *La topologia indotta su $\mathcal{S}(\Omega)$ dalle seminorme $p_{k,n}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m, |\alpha|=n} (1 + |x|)^k |D^\alpha f(x)|$ è la stessa di quella indotta dalle seminorme $q_n(f) = \sup_{|x| \leq n, |\alpha| \leq n} (1 + |x|)^k |D^\alpha f(x)|$, che però hanno il vantaggio di essere crescenti, nel senso che $q_n(f) \leq q_{n+1}(f)$ per ogni $f \in \mathcal{S}$. Con questa topologia, $\mathcal{S}(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet (Definizione 3.1.1: si rammenta che $\mathcal{S}(\Omega)$ è localmente convesso perché la sua topologia è indotta da una famiglia separatrice di seminorme: Teorema 3.19.6).*

In maniera del tutto analoga:

Corollario 3.20.7. *Per ogni compatto $K \subset \Omega$, il sottospazio $\mathcal{D}_K \subset C^\infty(\Omega)$ è un sottospazio chiuso, e quindi è completo; pertanto è uno spazio di Fréchet.*

Dimostrazione. Le seminorme in \mathcal{D}_K sono la restrizione delle seminorme di $C^\infty(\Omega)$, e quindi le successioni di Cauchy $\{f_n\} \subset \mathcal{D}_K$ convergono in $C^\infty(\Omega)$ perché quest'ultimo spazio è completo (Teorema 3.20.4): questo significa che le f_n convergono uniformemente sui compatti (con tutte le loro derivate) a qualche funzione f in $C^\infty(\Omega)$ (Corollario 3.20.2). Ma visto che tutte le funzioni f_n hanno supporto in un unico compatto K , lo stesso vale per il loro limite uniforme sui compatti f , che quindi appartiene a \mathcal{D}_K . Pertanto \mathcal{D}_K è chiuso in $C^\infty(\Omega)$, e le successioni di Cauchy convergono in \mathcal{D}_K . Siccome

la topologia di \mathcal{D}_K è indotta da una famiglia di seminorme, essa è localmente convessa, grazie al Teorema 3.19.6: quindi \mathcal{D}_K è uno spazio di Fréchet (Definizione 3.1.1). \square

3.20.2 La topologia di limite induttivo rende $\mathcal{D}(\Omega)$ completo

Abbiamo già definito in (3.41) le seminorme $p_n(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| : x \in B_n, |\alpha| \leq n\}$ su $\mathcal{D}(\Omega)$, ed abbiamo mostrato nella Nota 3.20.3 che esse inducono la stessa topologia delle norme $\{s_n\}$ definite in (3.43): $s_n(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| : x \in \mathbb{R}^k, |\alpha| \leq n\}$. Ovviamente, per ciascun compatto $K \subset \Omega$, queste norme inducono sul sottospazio $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}$ la topologia relativa ereditata da $\mathcal{D}(\Omega)$: abbiamo visto nel precedente Corollario 3.20.7 che in questa topologia \mathcal{D}_K è di Fréchet. Purtroppo, però:

Proposizione 3.20.8. *Nella topologia indotta dalle seminorme di $C^\infty(\Omega)$ studiate nella Nota 3.20.3, il sottospazio $\mathcal{D}(\Omega)$ delle funzioni a supporto compatto non è completo.*

Dimostrazione. Costruiamo una successione di Cauchy rispetto alle seminorme p_n definite in (3.41) che converge (ovviamente!) in C^∞ ma ad una funzione a supporto non compatto, quindi non converge in \mathcal{D} . Per semplicità consideriamo solo il caso di $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, ma la generalizzazione a funzioni definite su un aperto illimitato $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ è ovvia.

Sia ϕ una funzione C^∞ con supporto in $[0, 1]$ e c_n una successione di numeri complessi che tende a zero. Allora la successione $\Phi_N = \sum_{n=0}^N c_n \phi(x - n)$ è di Cauchy nelle seminorme p_n , perché, se $n < M < N$, allora $\Phi_N - \Phi_M = \sum_{n=M}^N c_n \phi(x - n)$ ha supporto fuori della palla di raggio $M > n$ e quindi $p_n(\Phi_N - \Phi_M) = 0$. È chiaro che Φ_N converge in C^∞ alla funzione $\sum_{n=0}^\infty c_n \phi(x - n)$, che ha supporto non compatto. \square

Pertanto, non vogliamo usare su \mathcal{D} la topologia delle seminorme p_n , anche se essa si restringe su \mathcal{D}_K alla consueta topologia di Fréchet per ogni compatto $K \subset \Omega$: al contrario, vogliamo utilizzare queste topologie di Fréchet di tutti i sottospazi \mathcal{D}_K per indurre una nuova topologia su \mathcal{D} che verifichi la proprietà di completezza e si restringa su tutti i \mathcal{D}_K alla consueta topologia delle seminorme p_n . In base al Teorema 3.19.6, questa topologia, che si chiama la *topologia del limite induttivo*, non è indotta da una famiglia separatrice di seminorme su \mathcal{D} , perché vedremo che, non è metrizzabile

(Teorema 3.20.21). Quando munito di tale topologia, lo spazio vettoriale topologico $\mathcal{D}(\Omega)$ si chiama il *limite induttivo* dei sottospazi \mathcal{D}_K : d'ora in avanti considereremo sempre $\mathcal{D}(\Omega)$ con la topologia di limite induttivo.

Definizione 3.20.9. (Topologia del limite induttivo.) Sia $K \subset \Omega$ compatto con interno non vuoto e τ_K la consueta topologia di Fréchet di \mathcal{D}_K (indotta dalla famiglia $\{s_n\}$ di norme introdotte in (3.43), che danno luogo alla stessa topologia delle seminorme $\{p_n\}$, come visto nella Nota 3.20.3). Sia β la famiglia di tutti gli insiemi convessi bilanciati $W \subset \mathcal{D}$ compatibili con le topologie τ_K , ossia tali che $W \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$ per ogni compatto K come sopra, e τ la famiglia di tutti i traslati in \mathcal{D} di insiemi in β .

Nota 3.20.10. Per ogni $r > 0$ e $K \subset \Omega$ compatto, le palle $B_{n,K}(r) = \{f \in \mathcal{D}_K : s_n(f) < r\}$ sono aperti convessi bilanciati in \mathcal{D}_K : sono aperti perché la topologia τ_K su \mathcal{D}_K è quella indotta dalle norme $\{s_n\}$, e sono convesse e bilanciate rispettivamente per la proprietà subadditiva (disuguaglianza triangolare) e la proprietà di omogeneità delle norme (o seminorme: proprietà (i) e (ii) della Definizione 3.2.8). Per lo stesso motivo, le palle $B_n(r) = \{f \in \mathcal{D}(\Omega) : s_n(f) < r\}$ sono insiemi convessi e bilanciati in $\mathcal{D}(\Omega)$, ed ovviamente $B_{n,K}(r) = B_n(r) \cap \mathcal{D}_K$. Segue quindi dalla definizione di β (Definizione 3.20.9) che le palle $B_n(r)$ appartengono a β . \square

Abbiamo bisogno di un facile lemma tecnico.

Lemma 3.20.11. *Se W è un convesso e $0 < \delta < 1$, allora $W = \delta W + (1 - \delta)W$.*

Dimostrazione. Per semplicità consideriamo il caso $\delta = \frac{1}{2}$: il caso generale ha la stessa dimostrazione, parola per parola.

Osserviamo anzitutto che ogni insieme W verifica $W \subset \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}W$, dal momento che per ogni punto w si ha $w = \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}w$. Però, se l'insieme W è convesso, allora è vero anche il viceversa: se $u, v \in \frac{1}{2}W$, allora $2u, 2v \in W$ e ponendo $w = \frac{1}{2}(2u + 2v)$ vediamo che la combinazione convessa w deve appartenere a W , quindi $\frac{1}{2}W + \frac{1}{2}W \subset W$. Abbiamo pertanto provato che ogni convesso W verifica $W = \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}W$. \square

Teorema 3.20.12. *La famiglia τ della precedente Definizione 3.20.9 è una topologia su $\mathcal{D}(\Omega)$ con base locale β a 0, e:*

(i) *in questa topologia $\mathcal{D}(\Omega)$ è uno spazio localmente convesso;*

(ii) i sottoinsiemi convessi bilanciati di $\mathcal{D}(\Omega)$ sono aperti se e solo se appartengono alla base locale β ;

(iii) la restrizione di τ a \mathcal{D}_K coincide con τ_K .

Dimostrazione. Proviamo per prima cosa che β è una base locale per τ : questo equivale a mostrare che, per tutti gli aperti $V_1, V_2 \in \tau$ e per ogni funzione $f \in V_1 \cap V_2$, esiste un aperto $W \in \beta$ tale che

$$f + W \subset V_1 \cap V_2. \quad (3.44)$$

Poiché (per la sua definizione 3.20.9) τ consiste di traslati di insiemi in β , per $i = 1, 2$ esistono $f_i \in \mathcal{D} = \mathcal{D}(\otimes)$ e W_i convessi bilanciati in β tali che

$$f \in f_i + W_i \subset V_i. \quad (3.45)$$

Sia $K \subset \Omega$ un compatto che contiene i supporti di f, f_1 e f_2 , ovvero f, f_1 e $f_2 \in \mathcal{D}_K$. Rammentiamo la condizione di compatibilità nella Definizione 3.20.9: gli insiemi bilanciati W_i verificano $W_i \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$, ossia queste intersezioni sono aperti in \mathcal{D}_K . Ma allora, a causa di (3.45), abbiamo $f - f_i \in W_i \cap \mathcal{D}_K$. Ma quando W è un aperto e $g \in W$, il numero $\lambda_0 := \inf\{\lambda : g \in \lambda W\}$ non è un minimo, e poiché $g \in W$ deve essere $\lambda_0 < 1$. Quindi esistono $\delta_i \in (0, 1)$ tali che $f - f_i \in (1 - \delta_i)W_i$, per $i = 1, 2$. Ora usiamo il fatto che i W_i sono anche convessi: segue dal Lemma 3.20.11 che

$$f - f_i + \delta_i W \subset (1 - \delta_i)W_i + \delta_i W_i = W_i,$$

e quindi l'inclusione (3.44) vale con la scelta $W = \delta_1 W_1 \cap \delta_2 W_2$. Questo prova che β è una base per τ .

La tediosa ma elementare verifica del fatto che τ sia una topologia di spazio vettoriale topologico potrebbe essere lasciata al lettore per esercizio, ma a titolo esemplificativo la svolgiamo qui.

Siano $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$, $f_1 \neq f_2$, e consideriamo la palla $B_0(r)$ introdotta nella Nota 3.20.10 con $r := p_0(f_1 - f_2)$ (r è positivo perché $f_1 - f_2 \neq 0$ e le s_n sono norme). Proprio per quanto osservato in quella Nota, $B_0(r)$ appartiene a β , ed in base alla disuguaglianza triangolare $f_1 \notin f_2 + B_0(r)$: quindi ogni punto $f_2 \neq f_1$ appartiene ad un aperto della topologia τ disgiunto da f_1 , ovvero il complemento di f_1 è aperto in τ , e quindi i punti sono chiusi.

Per provare che la somma è continua, usiamo il Lemma 3.20.11: dato $W \in \beta$, abbiamo $(f_1 + \frac{1}{2}W) + (f_2 + \frac{1}{2}W) = (f_1 + f_2) + W$, e quindi la controimmagine

di un intorno aperto di $f_1 + f_2$ contiene la somma di intorni aperti di f_1 e f_2 . Per provare che la moltiplicazione per scalari è continua, prendiamo $\alpha, \alpha_0 \in \mathbb{C}$ e $f, f_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$, e scriviamo

$$\alpha f - \alpha_0 f_0 = \alpha(f - f_0) + (\alpha - \alpha_0)f_0. \quad (3.46)$$

Poiché abbiamo già mostrato che β è una base locale a 0 per τ , dato un qualsiasi $W \in \beta$ esiste $\delta > 0$ tale che $\delta f \in \frac{1}{2}W$. Allora, da (3.46) e dal fatto che $W \in \beta$ è convesso e bilanciato, per ogni $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ e $f - f_0 \in \lambda W$ abbiamo $\alpha f - \alpha_0 f_0 \in |\alpha|cW + \frac{1}{2}W \subset (c(|\alpha_0| + \delta) + \frac{1}{2})W$. Quindi, scegliendo c abbastanza piccolo, vediamo che $\alpha f - \alpha_0 f_0 \in W$: questo significa che la moltiplicazione per scalari è continua. Abbiamo completato la dimostrazione del fatto che τ è una topologia di spazio vettoriale topologico.

Infine, poiché la base locale β consiste di insiemi convessi, la topologia τ è localmente convessa. Questo completa la dimostrazione della parte (i) dell'enunciato.

Ora mostriamo la parte (ii), anzi più in generale che per ogni $V \in \tau$ si ha

$$V \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K \quad (3.47)$$

(da questo segue la parte (ii) se si limita l'attenzione ad aperti V convessi e bilanciati; si noti che il "solo se" è ovvio, perché gli elementi della base locale β sono automaticamente aperti in τ).

Fissato $V \in \tau$ scegliamo $f \in V \cap \mathcal{D}_K$. Come al solito, poiché ormai sappiamo che β è una base locale a 0 per τ , esiste $W \in \beta$ tale che $f + W \subset V$, e quindi $f + (W \cap \mathcal{D}_K) \subset V \cap \mathcal{D}_K$. D'altra parte, il fatto che W appartenga a β significa che $W \cap \mathcal{D}_K$ è un aperto della topologia τ_K di \mathcal{D}_K . Allora, per ogni suo punto f , l'insieme $V \cap \mathcal{D}_K$ contiene un intorno aperto (in τ_K) di f . Quindi $V \cap \mathcal{D}_K$ è un aperto di τ_K : questo prova (3.47) e quindi la parte (ii).

Osserviamo anche che (3.47) implica che la topologia relativa ereditata da \mathcal{D}_K per restrizione della topologia τ di $\mathcal{D}(\Omega)$ è contenuta in τ_K . Quindi, per provare la parte (iii), basta ora mostrare che ogni aperto in $E \in \tau_K$ è la restrizione a \mathcal{D}_K di qualche aperto di $V \in \tau$. La topologia τ_K è indotta dalle norme s_n , una cui base locale a 0 consiste delle palle

$$B_{n,K}(r) = \{f \in \mathcal{D}_K : s_n(f) < r\} \quad (3.48)$$

(Nota 3.19.2), e quindi, per ogni $f \in E$, esistono n intero e $r > 0$ tali che

$$f + B_{n,K}(r) = \{g \in \mathcal{D}_K : s_n(g - f) < r\} \subset E. \quad (3.49)$$

Ora consideriamo la palla analoga in $\mathcal{D}(\Omega)$, ossia $B_n(r) = \{h \in \mathcal{D}(\Omega) : s_n(h) < r\}$. Naturalmente,

$$B_{n,K}(r) = B_n(r) \cap \mathcal{D}_K. \quad (3.50)$$

È chiaro che $(f + B_n(r)) \cap \mathcal{D}_K = f + (B_n(r) \cap \mathcal{D}_K) = f + B_{n,K}(r) \subset E$. Allora poniamo

$$V := \cup_{f \in E} (f + B_n(r)),$$

e concludiamo che V appartiene a τ , perché unione di traslati di aperti in β , visto che le palle $B_n(r)$ appartengono a β (Nota 3.20.10), ed inoltre, per (3.50) e (3.49), $V \cap \mathcal{D}_K = \cup_{f \in E} (f + B_{n,K}(r)) = E$. Questo conclude la dimostrazione della parte (iii), e del teorema. \square

Corollario 3.20.13. *Se E è un insieme limitato in $\mathcal{D}(\Omega)$, allora $E \subset \mathcal{D}_K$ per qualche compatto $K \subset \Omega$, e E è limitato in \mathcal{D}_K : in particolare, tutte le norme s_n sono limitate su E , ossia esistono costanti m_n tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $f \in E$, si ha $s_n(f) \leq m_n$.*

Nota 3.20.14. A scanso di equivoci, mettiamo in guardia il lettore sul fatto che vedremo in seguito (Corollario 3.22.6) che \mathcal{D}_K e $\mathcal{D}(\Omega)$ non sono localmente limitati, e quindi non contengono aperti limitati! Questi spazi contengono molti insiemi limitati, appunto quelli su cui tutte le seminorme sono limitate, ma questi insiemi non sono aperti. Si riveda la Nota 3.19.8. \square

Dimostrazione del Corollario 3.20.13. Sia E un sottoinsieme di $\mathcal{D}(\Omega)$ che non è contenuto \mathcal{D}_K per alcun compatto $K \subset \Omega$. Questo vuol dire che esiste una successione $f_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ i cui supporti non sono contenuti in un unico compatto, ossia tali che $f_n(x_n) \neq 0$ per qualche successione $x_n \in E$ che tende all'infinito (ossia che ha solo un numero finito di elementi in ciascun compatto K). Senza perdita di generalità, possiamo scegliere le f_n a supporto disgiunto. Allora poniamo

$$V := \left\{ f \in \mathcal{D}(\Omega) : |f(x_n)| < \frac{1}{n} |f_n(x_n)| \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Consideriamo $V \cap \mathcal{D}_K$. Il compatto K contiene solo un numero finito di punti $x_1, \dots, x_{n(K)}$ della successione $\{x_n\}$: quindi, ponendo per semplicità $r_j = \frac{1}{j} |f_j(x_j)|$ per $j = 1, \dots, n(K)$, vediamo che $f(x_n) = 0$ per $n > n(K)$ (perché i supporti delle f_n sono disgiunti), e quindi la condizione $|f(x_n)| <$

$\frac{1}{n}|f_n(x_n)|$ è verificata in $f \in \mathcal{D}_K$, ma che ogni $f \in V \cap \mathcal{D}_K$ verifica $s_j(f) < r_j$ per $j < n(K)$, ossia $V \cap \mathcal{D}_K \supset \bigcap_{1 \leq j \leq n(K)} B_{0,K}(r_j)$ (notazione come in (3.48)). Inoltre V è aperto nella topologia relativa indotta da \mathcal{D} su \mathcal{D}_K , perché, se ristretto a \mathcal{D}_K , V è una intersezione finita di aperti, in quanto la disuguaglianza che lo definisce viene verificata solo un numero finito di volte. Poiché le palle $B_{0,K}(r_j)$ appartengono alla topologia τ_K indotta dalle norme s_n , questo significa che $V \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$, ossia (in base alla Definizione 3.20.9) che $V \in \beta$, e precisamente V è un intorno di 0 nella topologia τ . Ma per il modo in cui abbiamo definito V , per nessun intero n si ha che $f_n \in nV$: siccome le f_n appartengono a E , questo vuol dire che E è illimitato (si riveda la definizione di insieme limitato nella Definizione 3.1.1).

Pertanto, se E è limitato in $\mathcal{D}(\Omega)$, esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $E \subset \mathcal{D}_K$. Ma allora, per la parte (iii) del precedente Teorema 3.20.12, E è limitato in \mathcal{D}_K , ed allora, per la Proposizione 3.19.7, esistono costanti m_n tali che $\sup_{f \in E} s_n(f) = m_n$. (Si noti che questa Proposizione si applica a \mathcal{D}_K ma non direttamente a $\mathcal{D}(\Omega)$, perché la topologia τ del limite induttivo non è indotta da una famiglia separatrice di seminorme.) \square

Teorema 3.20.15. (i) Se $\{f_j\}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{D}(\Omega)$, allora $\{f_j\} \subset \mathcal{D}_K$ per qualche compatto $K \subset \Omega$, e $\{f_j\}$ è una successione di Cauchy in \mathcal{D}_K (nella topologia τ_K). In altre parole, per ogni intero n si ha $s_n(f_i - f_j) \rightarrow 0$ per $i, j \rightarrow \infty$: ossia, tutte le f_n hanno supporto in un unico compatto, e tutte le derivate delle f_j (di qualsiasi ordine $\alpha \in \mathbb{N}^k$) convergono uniformemente a 0 per $j \rightarrow \infty$.

(ii) Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ (con la topologia di limite induttivo τ) è uno spazio completo, e quindi di Fréchet (Definizione 3.1.1).

Dimostrazione. In base al Lemma 3.1.16, ogni successione di Cauchy è un insieme limitato. Pertanto, per il precedente Corollario 3.20.13, l'intera successione giace in un sottospazio \mathcal{D}_K . Per la parte (iii) del Teorema 3.20.12, la restrizione di τ al sottospazio \mathcal{D}_K è precisamente la topologia τ_K : quindi la successione è di Cauchy nella topologia τ_K . Questo prova la parte (i). Poiché \mathcal{D}_K è completo (nella sua topologia τ_K), ogni successione di Cauchy per τ_K converge, e quindi, grazie alla parte (i), anche $\mathcal{D}(\Omega)$ è completo. Poiché abbiamo visto che $\mathcal{D}(\Omega)$ è localmente convesso (parte (i) del Teorema 3.20.12), ne segue che $\mathcal{D}(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet. \square

Teorema 3.20.16. *Sia F un funzionale lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$, o più in generale una applicazione lineare di $\mathcal{D}(\Omega)$ su uno spazio X localmente convesso. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- (i) F è continuo.
- (ii) F è limitato (nel senso della Definizione 3.3.1, ossia manda insiemi limitati in insiemi limitati).
- (iii) La restrizione di F ad ogni sottospazio \mathcal{D}_K è continua su \mathcal{D}_K (ossia nella topologia τ_K di \mathcal{D}_K).

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che (i) e (iii) sono equivalenti. È chiaro che (i) implica (iii), perché la topologia τ_K di \mathcal{D}_K è la topologia relativa indotta da $\mathcal{D}(\Omega)$ (ottenuta da τ per restrizione a (ovvero intersezione con) \mathcal{D}_K). Viceversa, ora proviamo che, se la restrizione di F a tutti i \mathcal{D}_K è τ_K -continua, allora F è τ -continua. Sia U un intorno di 0 in X (che senza perdita di generalità possiamo scegliere convesso e bilanciato grazie al Lemma 3.1.8) e $V := F^{-1}(U)$: dobbiamo provare che V è aperto in $\mathcal{D}(\Omega)$ (ossia che appartiene a τ). Ma chiaramente $V = F^{-1}(U)$ è anch'esso convesso e bilanciato, ed in base alla parte (ii) del Teorema 3.20.12 un tale V è in τ se e solo se è in β , ossia $V \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$ (questa è la Definizione 3.20.9 di β). Ma questo è vero se la restrizione di F a \mathcal{D}_K è τ_K -continua. Abbiamo provato che (i) e (iii) sono equivalenti.

Abbiamo già dimostrato nella prima parte della Proposizione 3.3.4 che (i) implica (ii). Purtroppo, il viceversa non segue da quella Proposizione, perché non abbiamo dimostrato che $\mathcal{D}(\Omega)$ sia metrizzabile, ed in effetti vedremo che non lo è (Teorema 3.20.21). (invece, l'equivalenza di (i) e (ii) sarebbe conseguenza di quella Proposizione se stessimo considerando applicazioni lineari sui sottospazi \mathcal{D}_K , che sono metrizzabili in base al Teorema 3.19.6 perché la loro topologia τ_K è indotta da una famiglia separatrice di seminorme).

Assumiamo (ii): F è limitato. Evidentemente, allora, la restrizione di F ai sottospazi \mathcal{D}_K per ogni compatto $K \subset \Omega$ è anch'essa limitata. Poiché \mathcal{D}_K è metrizzabile, questa restrizione è continua su \mathcal{D}_K (naturalmente rispetto a τ_K , che è la topologia indotta da τ per restrizione), in base alla seconda parte della prima parte della Proposizione 3.3.4. Questo mostra che (ii) implica (iii) e completa la dimostrazione dell'enunciato. \square

Corollario 3.20.17. *Per ogni multi-indice α , l'operatore di derivata D^α manda $\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ ed è continuo.*

Dimostrazione. Che D^α mandi $\mathcal{D}(\Omega)$ in sé è ovvio dalla definizione di $\mathcal{D}(\Omega)$; lo stesso è vero per \mathcal{D}_K . Il fatto che sia continuo segue dall'equivalenza fra (i) e (iii) nel precedente Teorema 3.20.16, visto che le norme s_n introdotte in (3.43) verificano $s_n(D^\alpha f) \leq s_{n+\alpha}(f)$, e pertanto la restrizione di D^α a \mathcal{D}_K è continua su \mathcal{D}_K (la cui topologia è indotta dalle norme s_n , come abbiamo visto nella Nota 3.20.3). \square

Corollario 3.20.18. *Un funzionale lineare F su $\mathcal{D}(\Omega)$ è continuo se e solo se, per ogni compatto $K \subset \Omega$, esistono un intero $n = n(K)$ ed una costante $C = C(K)$ tali che, per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, la norma s_n definita in (3.43) verifica la disuguaglianza $|F(f)| \leq C s_n(f)$.*

Dimostrazione. Questa è esattamente l'equivalenza fra le proprietà (i) e (iii) del Teorema 3.20.16. \square

Notazione 3.20.19. Un funzionale continuo su $\mathcal{D}(\Omega)$ si chiama una *distribuzione*. Le distribuzioni verranno studiate succintamente, ma comunque in maggior dettaglio, nella Sezione 11.18.

Ridefiniamo, per ogni compatto K , l'indice n nel precedente Corollario 3.20.18 in modo che $n(K)$ sia il più piccolo indice per cui vale la disuguaglianza di quell'enunciato. Allora, se $n(K)$ si può scegliere indipendente dal compatto K , ossia se $n(K)$ è limitato al variare del compatto $K \subset \Omega$, allora il minimo tale n si chiama l'*ordine* della distribuzione F .

Esempio 3.20.20. Per ogni $x \in \Omega$, definiamo $\delta_x(f) = f(x)$. È ovvio che δ_x è un funzionale lineare, ed è continuo su $\mathcal{D}(\Omega)$ in base al Corollario 3.20.18, perché $|\delta_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty = s_0(f)$ (in effetti, da questo vediamo che δ_x è una distribuzione di ordine 0). Questo funzionale continuo si chiama la *distribuzione delta di Dirac*. \square

Abbiamo inizialmente introdotto su $\mathcal{D}(\Omega)$ la famiglia di norme s_n che descrivono la topologia di \mathcal{D}_K per K compatto (equivalenti alle seminorme p_n con cui abbiamo topologizzato $C^\infty(\Omega)$: si riveda la Nota 3.20.3). In quella topologia $\mathcal{D}(\Omega)$ è metrizzabile (Teorema 3.19.6), ma abbiamo visto che non è completo (Proposizione 3.20.8). Per renderlo completo, abbiamo cambiato topologia: lo abbiamo munito della topologia di limite induttivo indotta da tutti i sottospazi (metrizzabili!) \mathcal{D}_K con K compatto in Ω . Con questa topologia $\mathcal{D}(\Omega)$ è completo (Teorema 3.20.15). Ora vedremo che purtroppo, però, non è metrizzabile. In particolare, non è normabile, perché altrimenti

la norma definirebbe una metrica che indurrebbe una topologia equivalente. Nella Sezione 3.22 dimostreremo, in modo indipendente e forse più semplice, che $\mathcal{D}(\Omega)$ non è normabile: qui utilizziamo un teorema di base dell'Analisi Funzionale per mostrare il risultato più generale che non è metrizzabile.

Teorema 3.20.21. *Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$, con la topologia di limite induttivo τ , non è metrizzabile.*

Dimostrazione. Il nucleo della distribuzione δ_x dell'Esempio 3.20.20 consiste delle funzioni in $\mathcal{D}(\Omega)$ che si annullano al punto x . Abbiamo visto in quell'Esempio che δ_x è un funzionale continuo, e quindi il suo nucleo è chiuso in base alla Proposizione 3.3.15. Allora il sottospazio \mathcal{D}_K , che consiste delle funzioni nulle fuori di K , e quindi è l'intersezione di questi nuclei al variare di x nel complemento di K , è un sottospazio chiuso perché è intersezione di chiusi. Ma siccome \mathcal{D}_K è un sottospazio proprio, esso non può contenere un intorno aperto dell'origine della topologia τ di $\mathcal{D}(\Omega)$ (altrimenti, in base al Lemma 3.1.13, coinciderebbe con tutto $\mathcal{D}(\Omega)$). Per l'invarianza per traslazione della topologia di spazio vettoriale topologico (Definizione 3.1.1), \mathcal{D}_K non contiene alcun aperto di τ , ovvero ha interno vuoto in $\mathcal{D}(\Omega)$. Invadiamo Ω con una famiglia numerabile di sottoinsiemi compatti K_n , ossia scegliamo K_n in modo che $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$: allora $\mathcal{D}(\Omega) = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{K_n}$ è unione numerabile di sottoinsiemi con interno vuoto, e quindi è di prima categoria in sé stesso (Definizione 3.13.3): allora, poiché è completo (Teorema 3.20.15), non può essere metrizzabile in base al Teorema di Categoria di Baire 3.13.1. \square

3.21 *Spazi vettoriali localmente compatti e proprietà di Heine–Borel

Richiamiamo la nozione di sottoinsieme limitato A di uno spazio vettoriale topologico V , introdotta nella Definizione 3.1.1: A è limitato se per ogni intorno U di 0 in V esiste $r = r_{A,U} > 0$ tale che $A \subset \lambda U$ per tutte le dilatazioni λ con $|\lambda| > r$.

***Proposizione 3.21.1.** *In uno spazio vettoriale topologico, un insieme compatto è limitato e chiuso.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio vettoriale topologico e $K \subset X$ un compatto. Poiché la topologia di uno spazio vettoriale topologico è di Hausdorff, il fatto che K sia chiuso segue dalla seconda metà del Lemma 1.10.6.

Proviamo che K è un insieme limitato. Sappiamo dal Lemma 3.1.13 che, se U è un intorno di 0 , allora

$$X = \cup_{n \in \mathbb{N}} nU. \quad (3.51)$$

Dunque è anche vero che $K \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} nJ$ per ogni intorno bilanciato J di 0 contenuto in U (un tale intorno esiste in base al precedente Lemma 3.1.8). Dal ricoprimento $\{nJ\}$ del compatto K estraiamo un sottoricoprimento finito $\{n_1J, n_2J, \dots, n_mJ\}$, e per comodità supponiamo di ordinare gli indici in modo che n_m sia l'indice massimo. Poiché J è bilanciato abbiamo $n_mJ \supset n_kJ$ per $k = 1, \dots, m-1$: quindi $K \subset n_mJ$, ed allora, per ogni $t > n_m$, si ha $K \subset n_mJ \subset tJ \subset tU$. Questo dimostra che K è limitato. \square

Ora ci serve un lemma tecnico:

Lemma 3.21.2. *Sia X uno spazio vettoriale topologico e Y un sottospazio localmente compatto nella topologia relativa ereditata da X : quindi esiste un intorno dell'origine in Y a chiusura compatta $K \subset Y$, ovvero un intorno dell'origine U in X tale che $U \cap Y \subset K$. Esiste un intorno V dell'origine in X simmetrico (ossia tale che $V = -V$) e tale che $\bar{V} + \bar{V} \subset U$. Allora, per ogni $x \in X$, l'insieme $Y \cap (x + \bar{V})$ è compatto in Y .*

Dimostrazione. Un intorno V tale che $V + V \subset U$ esiste perché $0 + 0 = 0$ e la somma è continua. Grazie al Corollario 3.1.12, possiamo anche supporre che $\bar{V} + \bar{V} \subset U$, e rimpiazzando V con $V \cap (-V)$ possiamo anche scegliere V simmetrico. Quindi $(\bar{V} + \bar{V}) \cap Y$ è contenuto nel compatto K , pertanto è compatto per la prima parte del Lemma 1.10.6 (che qui si applica perché, ovviamente, lo spazio Y , essendo localmente compatto, contiene la chiusura in X di un suo aperto intorno all'origine e quindi è chiuso in X). Ma allora, per $x \in X$, scriviamo $E_{x,V} := Y \cap (x + \bar{V})$. Per ogni $y, z \in E_{x,V}$ si ha, da un lato, $y - z = y - x + x - z \in \bar{V} + \bar{V} \subset U$, e d'altro lato $y - z \in Y$ perché Y è un sottospazio. Quindi $y - z \in Y \cap U \subset K$. Ma allora ogni $y \in E_{x,V}$ appartiene al compatto $z + K$, ossia $E_{x,V} \subset z + K$ compatto. D'altra parte $E_{x,V}$ è chiuso in Y nella topologia relativa indotta su Y da X , perché è l'intersezione di Y con un chiuso $x + \bar{V}$ di X . Allora $E_{x,V}$ è un chiuso in Y contenuto in un compatto, e quindi è compatto per la prima parte del Lemma 1.10.6.

\square

Lemma 3.21.3. *Sia X uno spazio vettoriale topologico e Y un sottospazio localmente compatto (nella topologia relativa ereditata da X). Allora Y è chiuso in X .*

Dimostrazione. Poiché Y è localmente compatto, esiste un compatto $K \subset Y$ il cui interno contiene 0 (qui le proprietà topologiche di compattezza ed interno si intendono nella topologia relativa di Y ereditata da X). Ciò significa che esiste un intorno dell'origine $U \subset X$ tale che $U \cap Y = K$. In corrispondenza di questo aperto U scegliamo un intorno aperto V di 0 in X come nel precedente Lemma 3.21.2, e consideriamo la famiglia \mathcal{F} di tutti i suoi sottoinsiemi aperti che contengono 0 . Fissiamo un punto qualsiasi nella chiusura \bar{Y} . Se $W \in \mathcal{F}$ consideriamo l'insieme $E_{x,W} := Y \cap (x + \bar{W})$: esso è compatto per la prima parte del Lemma 1.10.6, perché è un sottoinsieme chiuso di $Y \cap (x + \bar{W})$ che è compatto per il sopraccitato Lemma 3.21.2; inoltre è non vuoto, perché $x \in \bar{Y}$ e quindi $x + \bar{W}$ interseca Y per ogni intorno aperto W di 0 . Evidentemente, le intersezioni finite di insiemi in \mathcal{F} appartengono ancora a \mathcal{F} . Allora la famiglia $\{E_{x,W} : W \in \mathcal{F}\}$ è una famiglia di compatti con la proprietà dell'intersezione finita (Nota 1.9.7): pertanto esiste $z \in \bigcap_{W \in \mathcal{F}} E_{x,W}$. Poiché tutti gli $E_{x,W}$ sono sottoinsiemi di Y , anche z appartiene a Y . D'altra parte $z \in x + \bar{W}$ per ogni $W \in \mathcal{F}$, e quindi i punti x e z non sono separabili con due intorni disgiunti: dal momento che la topologia di X è di Hausdorff (Lemma 3.1.11), ne segue $z = x$. Pertanto $\bar{Y} = Y$. \square

Proposizione 3.21.4. *Sia X uno spazio vettoriale topologico e V un sotto-spazio di dimensione finita. Allora V è chiuso in X .*

Dimostrazione. In base al precedente Lemma 3.21.3, è sufficiente dimostrare che Y è localmente compatto (nella topologia relativa). Più in generale, costruiamo un isomorfismo fra Y e \mathbb{C}^n che è un omeomorfismo (ossia continuo con inversa continua), ed allora Y deve essere localmente compatto nella topologia relativa perché \mathbb{C}^n lo è nella propria topologia. In effetti, ciò che stiamo per dimostrare è che ogni isomorfismo è un omeomorfismo.

Scegliamo una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ in V , e consideriamo la mappa $T : \mathbb{C}^n \rightarrow V$ definita da $T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$: si osservi che l'immagine di T è V . Poiché in uno spazio vettoriale topologico la moltiplicazione per scalari e la somma sono mappe continue, anche T è continuo, ed inoltre è iniettivo perché $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base. Basta provare che l'operatore inverso $T^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ è anch'esso continuo, perché in tal caso gli spazi topologici \mathbb{C}^n e V (quest'ultimo nella topologia relativa indotta da X) sono omeomorfi, e quindi V deve essere chiuso perché lo è \mathbb{C}^n . Dimostriamo questo fatto per induzione su n .

Per $n = 1$, T^{-1} esiste perché T è iniettivo, ed è un funzionale lineare iniettivo

definito su V , quindi ha nucleo $\{0\}$. Il nucleo è chiuso (nella topologia relativa di V) e quindi T^{-1} è continuo in base alla Proposizione 3.3.15. Pertanto, in questo caso, T è un omeomorfismo.

Fissiamo $n > 1$ e supponiamo, per induzione, che l'enunciato valga per $n - 1$, ossia che la restrizione di T a sottospazi di dimensione $n - 1$ sia un omeomorfismo. Poiché $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V , ogni vettore $v \in V$ si esprime in modo unico come $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, dove la coordinata $\alpha_i = \alpha_i(v)$ è un funzionale lineare su V , non nullo: quindi il nucleo N_i di questo funzionale lineare è un sottospazio di V di dimensione $n - 1$. Per l'ipotesi di induzione, per ogni i sappiamo che N_i è chiuso nella topologia di V (la topologia relativa indotta da X) e quindi il funzionale α_i è continuo su Y . Ma allora $T(v) = (\alpha_1(v), \dots, \alpha_n(v))$ è anch'esso un operatore continuo. \square

Teorema 3.21.5. *Ogni spazio vettoriale localmente compatto ha dimensione finita (e naturalmente, grazie alla dimostrazione del precedente Lemma 3.21.4, tutti gli spazi vettoriali a dimensione finita sono localmente compatti).*

Dimostrazione. Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente compatto: allora esiste un intorno V dell'origine a chiusura compatta (Definizione 3.1.1); sostituendo V con $V \cap (-V)$ possiamo assumere che V sia un intorno simmetrico: $V = -V$. Applichiamo allora due risultati precedenti: la Proposizione 3.21.1, in base alla quale sappiamo che V è limitato, e la Proposizione 3.2.1, che asserisce che esiste una base numerabile all'origine fatta di dilatati di V , ad esempio gli intorni $V_n = 2^{-n}V$. I traslati $\{x + \frac{1}{2}V : x \in X\}$ costituiscono una famiglia di aperti che copre X , e quindi anche \bar{V} : quest'ultimo insieme è compatto, e quindi per ricoprirlo basta una sottofamiglia finita $\{x_i + \frac{1}{2}V : i = 1, \dots, k\}$. Lo spazio vettoriale Y generato da x_1, \dots, x_k ha dimensione minore o uguale a k e quindi è chiuso in X in base alla precedente Proposizione 3.21.4. Visto che $V \subset \bar{V} \subset \cup_{i=1}^k (x_i + \frac{1}{2}V) \subset Y + \frac{1}{2}V$ (perché $x_i \in Y$ per il modo in cui abbiamo definito Y), dividendo per due otteniamo $\frac{1}{2}V \subset Y + \frac{1}{4}V$ (rammentiamo che Y è uno spazio vettoriale e quindi invariante per moltiplicazione scalare: $\frac{1}{2}Y = Y$; fra un attimo useremo anche che è invariante per somma, ossia $Y + Y = Y$). Allora

$$V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V$$

ed iterando

$$V \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y + 2^{-n}V) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y + V_n).$$

Se $A \subset X$, la chiusura di A è definita come l'insieme degli $x \in X$ tali che $x + U$ interseca A per ogni intorno U di 0, o equivalentemente per ogni intorno in una base locale a 0 (indichiamola con \mathcal{F}). Se questi intorni di base si scelgono simmetrici, questo equivale a dire che $x \in A$ se e solo se $x \in \bigcap \{A + V : V \in \mathcal{F}\}$. Gli intorni V_n formano appunto una tale base, come visto sopra: quindi abbiamo provato che $V \subset \bar{Y}$. Ma allora $V \subset Y$, perché Y è un sottospazio chiuso. Dilatando ora vediamo che $nV \subset Y$ per ogni $n \geq 1$. In base all'identità (3.51) nella dimostrazione della Proposizione 3.21.1, questo implica $X = Y$. Ma Y ha dimensione finita, e questo completa la dimostrazione. \square

3.21.1 Proprietà di Heine–Borel

Definizione 3.21.6. (*Proprietà di Heine–Borel.*) Uno spazio topologico verifica la proprietà di Heine–Borel se ogni sottoinsieme limitato e chiuso è compatto

In particolare, se uno spazio vettoriale topologico verifica la proprietà di Heine–Borel, i suoi compatti sono tutti e soli gli insiemi limitati e chiusi, in base alla Proposizione 3.21.1.

Teorema 3.21.7. *Ogni spazio vettoriale localmente limitato che verifica la proprietà di Heine–Borel è di dimensione finita.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio vettoriale localmente limitato: X contiene quindi un intorno limitato V dell'origine (Definizione 3.1.1). Asseriamo che anche la sua chiusura \bar{V} è un insieme limitato. Infatti, sia U un intorno limitato dell'origine: allora, grazie al Corollario 3.1.12, esiste un altro intorno J dell'origine con $\bar{J} \subset U$. Poiché V è limitato, per qualche $r > 0$ deve valere $V \subset rJ$, ma allora vale anche $\bar{V} \subset r\bar{J} \subset rU$, e quindi anche \bar{V} è limitato: questo prova l'asserzione.

Poiché si assume che X soddisfi la proprietà di Heine–Borel, \bar{V} è compatto: ma questo significa che X è uno spazio vettoriale localmente compatto, ed allora X ha dimensione finita in base al precedente Teorema 3.21.5. \square

Corollario 3.21.8. *Uno spazio normabile di dimensione infinita non soddisfa la proprietà di Heine–Borel.*

Dimostrazione. Uno spazio normabile è localmente limitato (Teorema 3.2.11), e quindi, se ha dimensione infinita, non può verificare la proprietà di Heine–Borel a causa del precedente Teorema 3.21.7). \square

Esempio 3.21.9. Consideriamo la palla unitaria B_1 nello spazio normato $L^p(\mathbb{R})$. Naturalmente, la palla unitaria in uno spazio normato come $L^p(\mathbb{R})$ è chiusa, perché la norma è una funzione continua; inoltre è limitata, per l'ovvio argomento esposto nelle prime righe della dimostrazione del Teorema 3.2.11. Dal precedente Corollario 3.21.8 sappiamo che $L^p(\mathbb{R})$ non soddisfa la proprietà di Heine–Borel, e ad esempio di questo fatto osserviamo che la palla unitaria B_1 limitata e chiusa, non è compatta. Infatti, consideriamo una successione di funzioni $f_n \in L^p$ di norma 1 ed a supporti disgiunti (ad esempio, potremmo scegliere f_n come la funzione caratteristica χ_n dell'intervallo $[n, n+1]$). Allora il limite puntuale $f(x)$ esiste per ogni x e vale identicamente zero, a causa della disgiunzione dei supporti (esercizio). Se esistesse il limite nella norma di L^p , allora $f_n(x)$ dovrebbe convergere a $f(x) = 0$ per quasi ogni x , e quindi, per la continuità della norma, $\lim_n \|f_n\|_p = \|f\|_p = 0$. Ma ciò non accade perché $\|f_n\|_p \equiv 1$.

In particolare questo fatto vale per $L^\infty(\mathbb{R})$, e quindi per i suoi sottospazi chiusi $C \cap L^\infty(\mathbb{R})$ e $C_0(\mathbb{R})$, muniti della norma uniforme.

Un caso particolarmente interessante è quello di $L^2(\mathbb{R})$, dove la norma è indotta dal prodotto scalare $(f, g)_2 := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$, nel senso che $\|f\|_2^2 = (f, f)_2$. Allora, consideriamo un sistema ortonormale numerabile $\{f_n\}$ (ossia tale che $(f_n, f_m)_2 = 0$ se $n \neq m$ e 1 se $n = m$). Allora per $n \neq m$ la distanza fra f_n e f_m vale $\sqrt{2}$ (per il teorema di Pitagora nello spazio bidimensionale generato da f_n e f_m , od equivalentemente perché

$$\begin{aligned} \text{dist}(f_n, f_m) &= \|f_n - f_m\|_2 = \sqrt{(f_n - f_m, f_n - f_m)} = \sqrt{(f_n, f_n) + (f_m, f_m)} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Quindi nessuna sottosuccessione di $\{f_n\}$ può essere di Cauchy (la sua variazione non tende a zero), e pertanto non può convergere. \square

3.22 *Esempi esotici: spazi non localmente limitati

3.22.1 $C^\infty(\Omega)$ non è localmente limitato

Abbiamo appena visto che lo spazio normato $C_0(\Omega)$ e tutti gli altri spazi normati a dimensione infinita non soddisfano la proprietà di Heine–Borel (Esempio 3.21.9). Completamente diverso può essere il caso di uno spazio metrico la cui topologia è indotta da una famiglia separatrice di seminorme:

Teorema 3.22.1. $C^\infty(\Omega)$ soddisfa la proprietà di Heine–Borel della Definizione 3.21.6.

Dimostrazione. Sia $J \subset C^\infty(\Omega)$ un sottoinsieme limitato e chiuso: dobbiamo mostrare che J è compatto. Poiché la topologia di $C^\infty(\Omega)$ è indotta dalla famiglia separatrice di seminorme p_n introdotte in (3.41), $C^\infty(\Omega)$ è uno spazio metrico per il Teorema 3.19.6, ed è completo per il Teorema 3.20.4. Pertanto, in base al Teorema 1.11.1, J è compatto se e solo se ogni successione in J ha una sottosuccessione convergente.

Usiamo l'ipotesi che J sia un insieme limitato, il che, per la Proposizione 3.19.7, equivale a dire che tutte le seminorme p_n sono limitate su J . Vista la definizione delle seminorme p_n , questo significa che, per opportune costanti C_n , ogni elemento $f \in J$ verifica $|D^\alpha(f)(x)| \leq C_n$ per ogni $|\alpha| \leq n$ e per ogni x nella palla $B_n \cap \Omega \subset \mathbb{R}^k$ di centro l'origine e raggio n . Ma se le derivate di ordine n sono limitate, allora lo è il gradiente delle derivate di ordine $n - 1$, e pertanto, per il teorema di Lagrange (Sezione 1.1), tutte le derivate di ordine $n - 1$ (ed iterando l'argomento anche tutte quelle di ordine minore o uguale a $n - 1$) sono lipschitziane (nel senso di (1.28.2)) con la stessa costante di Lipschitz C_n indipendente da f , e quindi equicontinue (Definizione 1.12.1) su $B_n \cap \Omega$. Poiché ogni sottoinsieme compatto $K \subset \Omega$ è contenuto in B_n se n è abbastanza grande, il Teorema di Ascoli–Arzelà 1.12.3 implica che ogni successione di funzioni in J ha una sottosuccessione $\{f_j\}$ che converge uniformemente sui compatti con tutte le sue derivate $D^\alpha f_j$ per ogni multi-indice α . Perciò $\{f_j\}$ converge nella topologia di $C^\infty(\Omega)$. Poiché J è chiuso, questo implica che f appartiene a J . Abbiamo dimostrato che J è compatto. \square

Corollario 3.22.2. $C^\infty(\Omega)$ non è localmente limitato, ed in particolare la sua topologia non proviene da una norma.

Dimostrazione. La topologia di $C^\infty(\Omega)$ proviene da una famiglia separatrice di seminorme, e quindi è metrizzabile per il Teorema 3.19.6, e localmente convessa per il Teorema 3.19.6. Allora il precedente Teorema 3.22.1, il fatto che $C^\infty(\Omega)$ ha dimensione infinita (contiene lo spazio di tutti i polinomi!) ed il Teorema 3.21.7 implicano che $C^\infty(\Omega)$ non può essere localmente limitato. Inoltre, dalla condizione equivalente alla normabilità del Teorema 3.2.11, ora segue che $C^\infty(\Omega)$ non può essere normabile. \square

Corollario 3.22.3. *Per ogni compatto $K \subset \Omega$, lo spazio \mathcal{D}_K soddisfa la proprietà di Heine–Borel.*

Dimostrazione. Questo segue immediatamente dallo stesso argomento della dimostrazione del precedente Corollario 3.22.2 e dal fatto che \mathcal{D}_K è chiuso in $C^\infty(\Omega)$ (Corollario 3.20.7) e la sua topologia è indotta dalle stesse seminorme). \square

L'argomento della dimostrazione del Corollario 3.22.2 non si applica direttamente allo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$, perché la topologia τ di limite induttivo di $\mathcal{D}(\Omega)$ non è indotta direttamente da una famiglia di seminorme (Definizione 3.20.13). Ma è proprio qui che si apprezzano le conseguenze della proprietà di compatibilità per restrizione della topologia τ ((3.47) e parte (iii) del Teorema 3.20.12:

Corollario 3.22.4. *Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ soddisfa la proprietà di Heine–Borel.*

Dimostrazione. Grazie al Corollario 3.20.13, ogni insieme J limitato in $\mathcal{D}(\Omega)$ è contenuto in \mathcal{D}_K per qualche compatto $K \subset \Omega$, ed allora, in base alla parte (iii) del Teorema 3.20.12, J è limitato nella topologia τ_K di \mathcal{D}_K che ivi coincide con la topologia τ di $\mathcal{D}(\Omega)$. Quindi J è compatto (in questa topologia τ_K) grazie alla dimostrazione del Corollario 3.22.3: ma allora è compatto in τ , di nuovo perché τ e τ_K coincidono sul sottospazio \mathcal{D}_K . \square

Proposizione 3.22.5. *La classe di Schwartz $\mathcal{S}(\Omega)$ soddisfa la proprietà di Heine–Borel.*

Dimostrazione. Vogliamo applicare lo stesso argomento che dimostra il Teorema 3.22.1. L'unica difficoltà consiste nel provare che, se le seminorme $p_{k,n}$ della Nota 3.20.5 sono equilimitate su un insieme $J \subset \mathcal{S}$, allora le funzioni $f \in J$ sono equicontinue. A questo fine conviene utilizzare le seminorme

equivalenti $r_{2k,n}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m, |\alpha|=n} (1 + x^{2k}) |D^\alpha f(x)|$ introdotte in quella Nota, che sono C^∞ . Meglio ancora, usiamo al posto di queste seminorme le equivalenti monotone ad un solo indice definite da

$$h_n(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m, |\alpha| \leq n, k \leq n} (1 + x^{2k}) |D^\alpha f(x)|$$

(esattamente come abbiamo fatto nel passare da (3.40) a (3.41)).

Si tratta di dimostrare che le funzioni $f \in \mathcal{S}$ tali che $h_n(f) < C_n$ sono equicontinue. Come nella dimostrazione del Teorema 3.22.1, basta dimostrare che, se $(1 + x^{2k})|D^\alpha f| \leq C_{n-1}$ per $|\alpha|, k \leq n-1$, allora anche le derivate di $(1 + x^{2k})D^\alpha f$ sono equilimitate. Si noti che è qui che è comodo utilizzare seminorme in forma C^∞ .

Ma le derivate di $(1 + x^{2k})D^\alpha f$ sono somme del tipo $x^{2k-1}D^\alpha f + (1 + x^{2k})D^\beta f$ con $|\beta| = n$. Pertanto, se $h_n(f) \leq C_n$, queste somme si maggiorano con $2C_n$ e quindi sono equilimitate. \square

Corollario 3.22.6. *Gli spazi \mathcal{D}_K per $K \subset \Omega$ compatto, $\mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathcal{S}(\Omega)$ non sono localmente limitati, ed in particolare la loro topologia non proviene da una norma.*

Dimostrazione. la dimostrazione è identica a quella del Corollario 3.22.2 pur di dimostrare che questi spazi hanno dimensione infinita. D'altra parte, possiamo sempre trovare, in ogni compatto K di misura positiva, una famiglia di sottoinsiemi compatti K_n di misura positiva, perché la misura di Lebesgue è regolare (Definizione 1.9.11). Allora il lemma di partizione dell'unità (Corollario 1.10.16) assicura l'esistenza di funzioni $f_n \in C^\infty$ con supporto in K_n (e quindi in $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{S}(\Omega)$). Poiché i supporti sono disgiunti, la famiglia di funzioni f_n è linearmente indipendente. \square

3.23 **Esempi esotici: spazi non localmente convessi

3.23.1 Spazi $L^p[0, 1]$ e $L^p(\mathbb{R})$ per $0 < p < 1$

Gli elementi di $L^p[0, 1]$ sono le (classi di equivalenza di Lebesgue delle) funzioni misurabili secondo Lebesgue su $[0, 1]$ tali che

$$N_p^p(f) := \int_0^1 |f|^p < \infty. \quad (3.52)$$

Per $0 < p < 1$ sappiamo dal Lemma 1.7.5 che $(a + b)^p \leq a^p + b^p$. Quindi, ponendo

$$d(f, g) := N_p^p(f - g), \quad (3.53)$$

otteniamo una funzione non negativa su L^p che verifica la disuguaglianza triangolare e tale che $d(f - h, g - h) = d(f, g)$ per ogni f, g, h : ossia, una metrica invariante per traslazione. Sappiamo che, per $0 < p < 1$, N_p non è da una norma (parte (ii) dell'Esercizio 1.16.18), ma che nella metrica d lo spazio L^p è completo per tutti i $p > 0$ (Nota 1.16.27).

Nota 3.23.1. (Gli spazi L^p sono completi e localmente limitati.) Per $r > 0$, consideriamo le palle aperte intorno all'origine, $B_r := \{f \in L^p : N_p^p(f) < r\}$. È chiaro che queste palle formano una base locale all'origine per la topologia di L^p (le basi locali sono definite alla fine della Definizione 1.10.1). È anche immediato che questa base consiste di insiemi limitati (nel senso della Definizione 3.1.1), perché queste palle sono dilatate l'una dell'altra: ad esempio, $B_1 = r^{-1/p} B_r$ per ogni $r > 0$, e quindi B_1 è limitato, ed analogamente lo sono tutti i B_r . Quindi, per tutti i $p > 0$, *gli spazi L^p sono completi e localmente limitati*, nel senso della Definizione 3.1.1 (per $p \geq 1$ questo era già ovvio, perché gli spazi normati sono evidentemente localmente limitati). Si noti che lo stesso argomento vale per $L^p(\mathbb{R})$ ed anche per $L^p(\mu)$ rispetto ad una qualsiasi misura di Borel, ad esempio per gli spazi di successioni ℓ^p introdotti nella Definizione 1.7.1. \square

Il prossimo enunciato prova una conseguenza interessante, che equivale ad asserire che L^p , per $p < 1$, *non è localmente convesso*, come già sappiamo (le palle unitarie in questi L^p non sono convesse, perché hanno sezioni bidimensionali non convesse, illustrate nelle Figure della Nota 1.7.10; abbiamo già alluso a questi fatti nella parte (ii) dell'Esercizio 1.16.18 e nell'Esercizio 1.7.8). L'equivalenza della formulazione della prossima Proposizione con quella relativa a palle unitarie segue subito dal fatto che, se esistesse un aperto convesso intorno ad un qualsiasi punto, grazie all'invarianza per traslazione della topologia ne esisterebbe uno che contiene l'origine).

Proposizione 3.23.2. *Per $0 < p < 1$, gli unici sottoinsiemi aperti convessi di L^p sono l'insieme vuoto e L^p stesso.*

Dimostrazione. Sia U un aperto convesso in L^p . Grazie all'invarianza per traslazione della topologia, senza perdita di generalità possiamo assumere

$0 \in U$. Allora U contiene una palla B_r per qualche $r > 0$ opportuno, perché queste palle formano una base locale per la topologia (si riveda la Definizione 1.10.1). Scegliamo una qualsiasi funzione $f \in L^p$, $f \neq 0$. Poiché l'integrale indefinito di $|f|^p$ è continuo (Lemma 1.27.2), esistono $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ tali che, per $i = 1, \dots, n$,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)|^p dx = \frac{1}{n} N_p^p(f) \quad (3.54)$$

(si noti che la stessa proprietà resta vera anche per $L^p(\mathbb{R})$ anziché $L^p[0, 1]$ pur di prendere $x_0 = -\infty$ e $x_n = +\infty$). Poniamo $g_i = 0$ fuori dell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ e $g_i = nf$ in tale intervallo. Allora $N_p^p(g_i) = n^{p-1} N_p^p(f)$: poiché $p < 1$, sappiamo che $n^{p-1} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, e quindi esiste n tale che $n^{p-1} N_p^p(f) < r$. Ma allora le funzioni g_i sono in U , perché la disuguaglianza $N_p^p(g_i) < r$ equivale a $g_i \in B_r \subset U$. D'altro lato, f è la combinazione convessa $f = (g_1 + \dots + g_n)/n$. Allora $f \in U$ visto che U è convesso. Questo prova che $U = L^p$. \square

Corollario 3.23.3. *Lo stesso risultato della precedente Proposizione 3.23.2 vale per $L^p(\mathbb{R})$, o più in generale per qualsiasi spazio $L^p(\mu)$ rispetto ad una misura di Borel assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.*

Dimostrazione. Il caso di $L^p(\mathbb{R})$ è chiarito nella osservazione subito dopo (3.54). Il caso generale di misure senza componenti atomiche è analogo (si vedano in particolare i Teoremi 1.28.15 e 1.28.18). \square

Esercizio 3.23.4. Il precedente enunciato vale anche per misure senza componente atomica (definite come nell'Esempio 3.9.18)? Si riveda la Sottosezione 1.28.2. QUI \square

Ecco una conseguenza a prima vista sorprendente:

Corollario 3.23.5. *Per $0 < p < 1$, l'unico funzionale lineare continuo di $L^p[0, 1]$ o $L^p(\mathbb{R})$ a valori in uno spazio localmente convesso V (ad esempio, $V = \mathbb{R}$ o $V = \mathbb{C}$) è il funzionale nullo.*

Dimostrazione. Sia $F : L^p \rightarrow V$ un funzionale continuo e \mathcal{B} una base locale a 0 per la topologia di V consistente di insiemi convessi. Per ogni $U \in \mathcal{B}$, la controimmagine $F^{-1}(U)$ è un aperto di L^p non vuoto (perché F è continuo) e convesso (perché F è lineare). Dalla Proposizione 3.23.2 segue $F^{-1}(U) = L^p$,

ovvero $F(L^p) \subset U$ per ogni intorno di base U . Ma se per qualche $f \neq 0$ in L^p si avesse $F(f) \neq 0$, allora esisterebbe un intorno U della base locale di V che non contiene $F(f)$ (perché lo spazio vettoriale topologico V è di Hausdorff: Lemma 3.1.11). Quindi $F = 0$. \square

3.23.2 Un compatto numerabile senza punti estremi in $L^p[0, 1]$ e $L^p(\mathbb{R})$ per $0 < p < 1$

Sia $M \subset \mathbb{R}$ un intervallo oppure tutto \mathbb{R} con la misura di Lebesgue, o più in generale uno spazio di misura con misura μ . Scegliamo una $f \in L^p(\mu)$ normalizzata da $N_p^p(f) = 1$ (qui $N_p^p(f) := \int |f|^p$ come in (3.52)). Abbiamo visto nella dimostrazione della Proposizione 3.23.2 che f si decompone come combinazione convessa $f = (g_1 + \dots + g_n)/n$, dove $g_i = n f \chi_{[x_i, x_{i+1}]}$, per opportuni punti $x_i \in M$ scelti in modo tale che $N_p^p(f \chi_{[x_i, x_{i+1}]}) = N_p^p(f)/n = 1/n$, e quindi $N_p^p(g_i) = n^{p-1}$. Chiamiamo le funzioni g_i i *frammenti di prima generazione* di f , e denotiamoli con $g_i = f_{1,i}$: allora abbiamo $N_p^p(f_{1,i}) = n^{p-1}$. Iteriamo la procedura ponendo, per $k = 1, \dots, n$,

$$f_{1,k} = (f_{2,1} + \dots + f_{2,n})/n$$

con nuovi frammenti (di seconda generazione) a supporti disgiunti e tali che $N_p^p(f_{2,m}) = n^{p-1} N_p^p(f_{1,i}) = n^{2(p-1)}$, e così via iterativamente. Ogni frammento di una data generazione è combinazione convessa di frammenti della generazione successiva, ed i frammenti g di generazione k risultano normalizzati dalla regola $N_p^p(g) = n^{k(p-1)}$. Quindi, per $0 < p < 1$, i frammenti di generazione k tendono a zero nella metrica di L^p (definita come in (3.53)). Poiché ci sono un numero finito di frammenti di ciascuna generazione, da questo segue che l'insieme J_f costituito da tutti i frammenti di tutte le generazioni è numerabile ed ha 0 come unico punto limite, quindi $J_f \cup \{0\}$ è compatto, ma nessun punto di J_f è estremo (perché ogni frammento è una combinazione convessa di altri frammenti). Ripetendo la costruzione a partire dalla funzione $-f$ si ottiene analogamente un insieme J_{-f} tale che $K := J_f \cup J_{-f} \cup \{0\}$ è compatto ma non ha punti estremi (la funzione 0 non può essere un punto estremo perché è combinazione convessa di f e $-f$: ne è la media aritmetica!).

Questo esempio non contraddice il Corollario 3.9.14 perché gli spazi $L^p(\mu)$, per $0 < p < 1$, non sono localmente convessi.

3.23.3 Spazi ℓ^p per $0 < p < 1$

Consideriamo ora gli spazi ℓ^p di successioni introdotti nella Definizione 1.7.1. Questo è il caso di L^p rispetto ad una misura puramente atomica (il caso opposto a quello del Corollario 3.23.3). Analogamente a quanto fatto nella precedente Sottosezione 3.23.1, per $\mathbf{x} = \{x_n : n = 0, 1, \dots\} \in \ell^p$ poniamo

$$N_p^p(\mathbf{x}) := \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p.$$

Come nella Sottosezione 3.23.1, l'espressione

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := N_p^p(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

è una metrica invariante per traslazione, ma, per $0 < p < 1$, N_p non è una norma perché non verifica la disuguaglianza triangolare. In particolare, per $0 < p < 1$, gli spazi ℓ^p non sono spazi di Banach e non sono localmente convessi. Essi sono però spazi metrici completi (Corollario 1.16.30) e spazi vettoriali topologici localmente limitati (Nota 3.23.1). Per $p \geq 1$, invece, gli spazi ℓ^p sono spazi di Banach ed il duale di ℓ^p è isometricamente isomorfo a ℓ^q con $1/p + 1/q = 1$, come si è visto nella Sezione 3.12. La dualità è data da

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \tag{3.55}$$

Nota 3.23.6. Indichiamo con \mathbf{e}_i il funzionale su ℓ^p dato da $\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) = x_i$ (si osservi che, per $p \geq 1$, le successioni \mathbf{e}_i sono quelle che valgono 1 all'indice i e zero altrove, che chiamiamo *successioni canoniche*). Poiché $|x_i| \leq N_p(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{1/p}$, i funzionali \mathbf{e}_i sono continui su ℓ^p per ogni $p > 0$. \square

Proposizione 3.23.7. *Per tutti i p ($0 < p \leq \infty$), il duale dello spazio vettoriale topologico ℓ^p separa i punti di ℓ^p .*

Dimostrazione. Basta osservare che, se $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \ell^p$, allora per qualche indice i si deve avere $x_i \neq y_i$, e quindi il funzionale lineare \mathbf{e}_i separa \mathbf{x} e \mathbf{y} . D'altra parte, abbiamo osservato nella Nota 3.23.6 che questo funzionale è continuo su ℓ^p . \square

Nota 3.23.8. I sottoinsiemi di ℓ^p dati da $\{\mathbf{x} : x_i > t\}$, per $i \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$ sono aperti convessi in ℓ_p , ed in base alla dimostrazione della precedente Proposizione 3.23.7 essi sono sufficientemente numerosi da separare i punti di ℓ^p , ma (se $p < 1$) non abbastanza da dare origine ad una base o anche solo ad una sottobase per la topologia di ℓ^p (nel senso della Definizione 1.10.1), visto che per questi p lo spazio ℓ^p non è localmente convesso. \square

Corollario 3.23.9. *Per $0 < p < 1$, il duale $(\ell^p)'$ di ℓ^p è contiene il duale di ℓ^∞ e separa i punti di ℓ^∞ .*

Dimostrazione. Abbiamo visto nella Proposizione 1.7.7 che, per $\mathbf{x} \in \ell^p$ con $p < 1$, si ha $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_p$, e quindi $\mathbf{x} \in \ell^\infty$. In altre parole, la mappa identità è una immersione continua di ℓ^p in ℓ^∞ . Quindi ogni funzionale continuo su ℓ^∞ è anche continuo su ℓ^p (ossia, è continuo nella norma di ℓ^p). Quindi il duale di ℓ^p separa i punti di ℓ^∞ , grazie alla proprietà di separazione discende quindi dalla precedente Proposizione 3.23.7. \square

Proposizione 3.23.10. **(Per $0 < p \leq 1$, il duale di ℓ^p è ℓ^∞)** *Il duale $(\ell^p)'$ di ℓ^p coincide con ℓ^∞ (qui la dualità è quella stabilita in (3.55)).*

Dimostrazione. Il caso $p = 1$ è già noto dalla Sezione 3.12. Assumiamo quindi $0 < p < 1$. È chiaro che, per ogni $\mathbf{x} \in \ell^p$ e $\mathbf{y} \in \ell^\infty$, la serie $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ converge, poiché $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_p$ per $p < 1$ (dimostrazione della Proposizione 1.7.7), e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \max_n |y_n| \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \leq \max_n |y_n| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

ossia $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{y}\|_\infty \|\mathbf{x}\|_p$. Pertanto ℓ^∞ si immerge nel duale di ℓ^p , ovvero $\ell^\infty \subset (\ell^p)'$, e l'immersione è continua.

Resta da dimostrare che ogni funzionale continuo y su ℓ^p è del tipo $y(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ per qualche successione limitata \mathbf{y} . Consideriamo le successioni canoniche \mathbf{e}_i della Nota 3.23.6, e poniamo $y_i := y(\mathbf{e}_i)$. Poiché y è un funzionale continuo e $\|\mathbf{e}_i\|_p = 1$, i numeri $|y_i|$ sono limitati uniformemente rispetto a i (da $\|y\|_{(\ell^p)'}$, e per ogni $\mathbf{x} \in \ell^p$ la serie $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \mathbf{e}_i$ converge in ℓ^p , perché le sue code $\sum_{i>N} x_i \mathbf{e}_i$ sono maggiorate nella norma di ℓ^p da $(\sum_{i>N} |x_i|^p)^{1/p}$. Ma allora converge anche la serie

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i.$$

Quindi il funzionale y è implementato dalla successione limitata $\{y_i\}$ nel senso della dualità (3.55). \square

Teorema 3.23.11. *Sia τ_p la topologia debole* (Definizione 3.10.3) indotta su ℓ^∞ dallo spazio ℓ^p ($0 < p < 1$) visto come sottospazio del preduale di ℓ^∞ alla luce della precedente Proposizione 3.23.10). Allora al variare di p le topologie τ_p sono inequivalenti. Ciononostante, la loro restrizione agli insiemi limitati in norma in ℓ^∞ induce su questi insiemi limitati la stessa topologia.*

Dimostrazione. Sia $0 < p < 1$. In base alla Proposizione 3.23.9, i funzionali continui su ℓ^p separano i punti di ℓ^∞ . Pertanto si applica la Proposizione 3.8.3, e quindi sappiamo che il duale di ℓ^∞ visto come spazio vettoriale topologico con la topologia τ_p coincide con ℓ^p . Poiché gli spazi ℓ^p sono strettamente inclusi uno nell'altro (diventano strettamente più piccoli al decrescere di p : Proposizione 1.7.7), ne segue che le topologie τ_p sono inequivalenti (al decrescere di p , diminuiscono i funzionali continui rispetto a τ_p , e quindi τ_p è strettamente più debole di τ_q se $0 < p < q < 1$).

D'altra parte, se K è un insieme limitato in norma in ℓ^∞ , K è contenuto in un multiplo della sua sfera unitaria, che è compatta nella topologia debole* τ_p in base al Teorema di Banach–Alaoglu 3.10.7. Rammentiamo che la topologia debole* τ_p separa i punti di ℓ^∞ (Corollario 3.23.9) ed è di Hausdorff, come tutte le topologie deboli indotte da una famiglia di funzionali che separano i punti (Esercizio 1.13.7). Allora l'ultima parte dell'enunciato segue dalla unicità di una topologia compatta e di Hausdorff (seconda parte della Proposizione 1.10.8, o più precisamente Esercizio 1.10.9). \square

3.24 Interpolazione di operatori e teorema di Riesz–Thorin

Parte II

Serie e trasformate di Fourier

Capitolo 4

Sistemi ortonormali e spazi di Hilbert

4.1 La migliore approssimazione in spazi con prodotto interno

Richiamiamo la seguente :

Definizione 4.1.1. Rammentiamo che un prodotto interno (o *prodotto scalare*) (\cdot, \cdot) su uno spazio vettoriale V è non degenere se $v \in V$ verifica $(v, u) = 0$ per ogni $u \in V$, allora si abbia necessariamente $v = 0$. Un caso particolare di prodotti interni non degeneri è dato dai prodotti interni *definiti positivi*, cioè tali che $(v, v) \geq 0$ per ogni $v \in H$ e $(v, v) = 0$ se e solo se $v = 0$. Il prodotto scalare euclideo in \mathbb{C}^n , definito da $(v, u) = \sum_{i=1}^n v_i \bar{u}_i$, è non degenere.

Sia V uno spazio vettoriale munito di un prodotto interno definito positivo, e sia H un sottospazio a dimensione finita (quindi necessariamente chiuso) di V . Affermiamo che per ogni vettore $v \in V$ esiste un vettore $w = P_H(v)$ in H tale che la distanza $\|v - w\|$ è la minima possibile. Questo fatto si prova nel modo seguente. Anzitutto la distanza è una funzione continua (vedi Nota 4.1.2 in seguito). Inoltre i suoi valori più piccoli si trovano entro una sfera chiusa S ; basta prendere un qualsiasi punto h in H e scegliere come raggio della sfera la distanza $r = \|v - h\|$: i punti di H fuori di questa sfera non ci interessano perché distano da v più di h . Quindi i valori più piccoli della distanza da H a v si ottengono per punti di H che si trovano nell'insieme

limitato e chiuso $S \cap H$. Ora, in un insieme limitato e chiuso in uno spazio a dimensione finita, la distanza, essendo una funzione continua (come mostrato nella prossima Nota 4.1.2), ha minimo (Teorema di Weierstrass, Sezione 1.1).

Nota 4.1.2. Perché la distanza $\|v - w\|$ è continua rispetto a w (e a v)? Perché, se $w, w_0 \in H$ e $v \in V$, allora

$$\left| \|v - w\| - \|v - w_0\| \right| \leq \|v - w - (v - w_0)\| = \|w - w_0\|$$

grazie alla disuguaglianza triangolare delle norme, e quindi

$$\|v - w\| \rightarrow \|v - w_0\|$$

se $w \rightarrow w_0$ (cioè se $\|w - w_0\| \rightarrow 0$). □

Esercizio 4.1.3. Il prodotto scalare è continuo rispetto a ciascuna variabile. □

Fissiamo in H un sistema ortonormale $\{e_n, n = 1, 2, \dots\}$. Vogliamo trovare le coordinate di $P_H(v)$ rispetto a questo sistema ortonormale.

Teorema 4.1.4. (Teorema di migliore approssimazione).

Sia H un sottospazio chiuso di V , $N \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$. Definiamo

$$E_N^H(v) = \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}} \left\| v - \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j \right\|$$

(la distanza minima da v a punti del sottospazio di H generato dai vettori $\{e_1, \dots, e_N\}$). Allora

$$(E_N^H(v))^2 = \|v\|^2 - \sum_{j=1}^N (v, e_j)^2$$

Nota 4.1.5. Per spazi di dimensione finita questo è il Teorema di Pitagora: si veda la Figura 4.1

In generale, anche a dimensione infinita, l'espressione della distanza euclidea, come somma o serie di quadrati, porta ad un nome differente per il teorema di migliore approssimazione 4.1.4, che in quasi tutti i testi applicativi si chiama *teorema dei minimi quadrati*. □

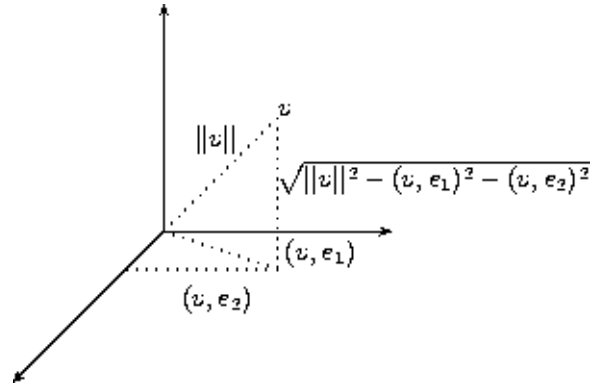


Figura 4.1: Migliore approssimazione in spazi con prodotto scalare e teorema di Pitagora

Dimostrazione del Teorema. Rammentiamo che, se z, w sono numeri complessi, allora

$$|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - z\bar{w} - \bar{z}w = |z|^2 + |w|^2 - 2 \operatorname{Re} z\bar{w}. \quad (4.1)$$

Perciò si ha :

$$\begin{aligned} \left\| v - \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j \right\|^2 &= \left(v - \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j, v - \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k \right) \\ &= (v, v) - \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_k (v, e_k) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \overline{(v, e_j)} + \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \bar{\alpha}_k (e_j, e_k). \end{aligned}$$

Ma

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$$

perché gli e_j sono un sistema ortonormale. Quindi

$$\left\| v - \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j \right\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_k (v, e_k) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \overline{(v, e_j)} + \sum_{j=1}^N |\alpha_j|^2.$$

Ora, applicando (4.1), si ottiene

$$\left\| v - \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j \right\|^2 = \|v\|^2 + \sum_{j=1}^N |\alpha_j - (v, e_j)|^2 - \sum_{j=1}^N |(v, e_j)|^2.$$

Poiché, per ogni $\alpha_1, \dots, \alpha_N$,

$$\sum_{j=1}^N |\alpha_j - (v, e_j)|^2 \geq 0$$

(i moduli non possono essere negativi), ne segue che

$$\left\| v - \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j \right\|^2 \geq \|v\|^2 - \sum_{j=1}^N |(v, e_j)|^2.$$

La disuguaglianza diventa uguaglianza quando

$$\sum_{j=1}^N |\alpha_j - (v, e_j)|^2 = 0$$

cioè se $\alpha_j = (v, e_j) \forall j$.

Quindi

$$E_N^H(v) = \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}} \left\| v - \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j \right\| = \sqrt{\|v\|^2 - \sum_{j=1}^N |(v, e_j)|^2}.$$

□

Corollario 4.1.6. *Sia $v \in V$ e $H = \text{span}\{e_1, \dots, e_N\}$ il sottospazio lineare generato dai vettori ortonormali e_1, \dots, e_N . Allora il vettore $P_H(v) \in H$ di minima distanza da v è dato da*

$$P_H(v) = \sum_{j=1}^N (v, e_j) e_j.$$

Inoltre l'errore $v - P_H(v)$ commesso approssimando v con la migliore approssimazione $P_H(v)$ in H è ortogonale a H :

$$v - P_H(v) \perp w \quad \forall w \in H.$$

Nota 4.1.7. Come si vede dalla figura 4.1, l'ortogonalità è geometricamente chiara se V è a dimensione finita, però richiede una dimostrazione. □

Dimostrazione del Corollario. Abbiamo già visto che $P_H(v) = \sum_{j=1}^N (v, e_j) e_j$ (Teorema di migliore approssimazione 4.1.4). Sia $w \in H$, $w = \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j$. Grazie all'ortonormalità degli e_j si ha:

$$\begin{aligned} (w, v - P_H(v)) &= \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j e_j, v \right) - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j e_j, \sum_{k=1}^N (v, e_k) e_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \alpha_j (e_j, v) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \overline{(v, e_j)} = 0. \end{aligned}$$

□

Questa proprietà di ortogonalità motiva la seguente terminologia:

Definizione 4.1.8. Il vettore $P_H(v) \in H$ di minima distanza da v si chiama proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso H .

Vedremo che $P_H(v)$ si definisce anche quando H è di dimensione infinita.

Come ulteriore corollario del teorema di migliore approssimazione abbiamo:

Corollario 4.1.9. (Disuguaglianza di Bessel). Per ogni $v \in V$ e per ogni sistema ortonormale $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(v, e_i)|^2$$

è convergente, e

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(v, e_i)|^2 \leq \|v\|^2.$$

Dimostrazione. Dal Teorema di migliore approssimazione 4.1.4 segue che per ogni N

$$\|v\|^2 - \sum_{i=1}^N |(v, e_i)|^2 = E_N^H(v)^2 \geq 0,$$

dove $H = \text{span}\{e_1, \dots, e_N\}$. Perciò si ha

$$\sum_{i=1}^N |(v, e_i)|^2 \leq \|v\|^2 \quad \forall N.$$

Ma

$$\sum_{i=1}^N |(v, e_i)|^2$$

è una successione non decrescente al crescere di N . Una successione monotona e limitata ha limite finito [19, Cap. 16 (Appendice)]. Quindi esiste finito il limite

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(v, e_i)|^2$$

e verifica

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(v, e_i)|^2 \leq \|v\|^2.$$

□

Definizione 4.1.10. (Coefficienti di Fourier di sviluppi ortonormali ed ortogonali.) Fissato un sistema ortonormale $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset V$, per ogni $v \in V$ la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} (v, e_j) e_j$$

si chiama sviluppo ortonormale (o serie di Fourier) di v rispetto al sistema $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. I coefficienti $c_j = (v, e_j)$ si chiamano *coefficienti di Fourier* di v rispetto al dato sistema ortonormale.

Se invece il sistema $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è ortogonale ma non ortonormale, allora, normalizzandolo, si ottiene il sistema $b_j := \left\{ \frac{e_j}{\|e_j\|} \right\}$. Lo sviluppo ortonormale di v rispetto a questo nuovo sistema è

$$\sum_{j=1}^{\infty} (v, b_j) b_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(v, e_j)}{(e_j, e_j)} e_j.$$

I coefficienti

$$c_j = \frac{(v, e_j)}{(e_j, e_j)} \tag{4.2}$$

di questo sviluppo (rispetto ai vettori ortogonali non normalizzati e_j) si chiamano ancora coefficienti di Fourier di v rispetto agli e_j .

L'espressione della disuguaglianza di Bessel nel caso di un sistema ortogonale non normalizzato segue immediatamente dall'espressione dei coefficienti di Fourier in questo caso, data nella Definizione 4.1.10 immediatamente precedente:

Corollario 4.1.11. (*Disuguaglianza di Bessel per sviluppi ortogonali.*) Per ogni $v \in V$ e per ogni sistema ortogonale $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$, la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|(v, e_i)|^2}{(e_i, e_i)}$$

è convergente, e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|(v, e_i)|^2}{(e_i, e_i)} \leq \|v\|^2.$$

In particolare, se denotiamo con c_i i coefficienti di Fourier $\frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}$ (Definizione 4.1.10), otteniamo

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \|e_i\|^2 \leq \|v\|^2. \quad (4.3)$$

4.2 Completezza in spazi con prodotto interno e convergenza di serie

Sia V uno spazio vettoriale con prodotto interno (\cdot, \cdot) , e come al solito $\|v\|^2 = (v, v)$. Data una successione di vettori $\{v_j, j \in \mathbb{N}\} \subset V$, ricordiamo che si dice che v_j converge a v in norma per $j \rightarrow \infty$ se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|v_j - v\| = 0.$$

Da questo segue la definizione di convergenza di una serie di vettori: la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} v_j$$

converge se le sue somme parziali

$$S_N = \sum_{j=1}^N v_j$$

sono una successione convergente. In tal caso esse costituiscono una successione di Cauchy:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $N > M > K$

$$\left\| \sum_{j=M+1}^N v_j \right\| = \|S_N - S_M\| < \varepsilon. \quad (4.4)$$

Definizione 4.2.1. Lo spazio H è completo se è vero anche il viceversa: ogni successione di Cauchy è convergente a un vettore di H . In tal caso, la condizione (4.4) è equivalente alla convergenza della serie.

Lemma 4.2.2. Sia $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormale, e $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbb{C}$. Allora, per ogni M ,

$$\left\| \sum_{j=1}^M \alpha_j e_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^M |\alpha_j|^2.$$

Dimostrazione. Sia

$$S_M = \sum_{j=1}^M \alpha_j e_j.$$

Allora

$$\begin{aligned} \|S_M\|^2 &= (S_M, S_M) = \sum_{j,k=1}^M (\alpha_j e_j, \alpha_k e_k) \\ &= \sum_{j,k=1}^M \alpha_j \overline{\alpha_k} (e_j, e_k) = \sum_{j=1}^M |\alpha_j|^2 \end{aligned}$$

per l'ortonormalità. □

Corollario 4.2.3. In uno spazio completo V , lo sviluppo ortonormale di ogni vettore $v \in V$ è una serie convergente.

Dimostrazione. Chiamiamo, come sempre, $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormale. Sia $\alpha_j = (v, e_j)$. Consideriamo le somme parziali

$$S_M = \sum_{j=1}^M \alpha_j e_j$$

dello sviluppo ortonormale. Per il Lemma 4.2.2, per ogni $M > N$

$$\|S_M - S_N\|^2 = \sum_{j=N+1}^M |\alpha_j|^2. \quad (4.5)$$

Per la disuguaglianza di Bessel (Corollario 4.1.9) la serie

$$\sum_{j=1}^M |\alpha_j|^2 \leq \|v\|^2$$

è convergente. Quindi le sue somme parziali formano una successione di Cauchy. Allora, a causa di (4.5), le somme parziali S_M formano una successione di Cauchy. Poiché V è completo questa successione di Cauchy converge. \square

Nota 4.2.4. Nel Corollario 4.2.3 non è detto che lo sviluppo ortonormale di un vettore v converga proprio al vettore v . Questo non accade se il sistema ortonormale non è sufficientemente "ricco". Ad esempio, sia $V = \mathbb{R}^3$ e prendiamo il sistema ortonormale $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)\}$. Lo sviluppo ortonormale di un vettore v , ad esempio $v = (1, 2, 3)$ non appartenente al piano xy (generato da $\{e_1, e_2\}$) è $(v, e_1)e_1 + (v, e_2)e_2$ che sta nel piano xy , ed infatti è esattamente la proiezione ortogonale $P(v)$ di v su questo piano (nell'esempio si ha $P(v) = e_1 + 2e_2 \neq v$). \square

Corollario 4.2.5. *Se $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbb{C}$ e la serie*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$$

converge ad un vettore v , allora $\alpha_j = (v, e_j)$ per ogni j , cioè i coefficienti dello sviluppo sono necessariamente i coefficienti di Fourier. La stessa asserzione vale per uno sviluppo ortogonale non ortonormale.

Dimostrazione. Una volta dimostrato l'enunciato per un sistema ortonormale, esso segue immediatamente per un sistema ortogonale in virtù del fatto che i coefficienti di Fourier in questo contesto sono definiti come quelli del corrispondente sviluppo rispetto al sistema normalizzato (Definizione 4.1.10).

Assumiamo quindi il sistema ortonormale. Allora, per l'ortonormalità degli $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ e la continuità del prodotto scalare (Esercizio 4.1.3),

$$(v, e_j) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, e_j \right) = \alpha_j.$$

□

4.3 Sistemi ortonormali in spazi con prodotto interno

Sia V uno spazio vettoriale con prodotto interno, e sia $\{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale in V . Sia $H_N = \text{span} \{e_1, \dots, e_N\} \subset V$. Dal Teorema di migliore approssimazione 4.1.4 abbiamo

$$E_N(v) = E_{H_N}(v) = \sqrt{\|v\|^2 - \sum_{j=1}^N |(v, e_j)|^2}.$$

Sappiamo che

$$\sum_{j=1}^N |(v, e_j)|^2$$

crece con N , e quindi la distanza $E_N(v)$ fra v e H_N decresce quando N cresce (il che è comunque ovvio perché $H_N \subset H_M$ se $N < M$).

Definizione 4.3.1. Si dice che il sistema ortonormale $\{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ è completo se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N(v) = 0, \quad \forall v.$$

Dal Teorema di migliore approssimazione 4.1.4 segue

Corollario 4.3.2. Sia V uno spazio con prodotto interno e $\{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale. Le proprietà seguenti sono equivalenti:

- (i) $\{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ è un sistema ortonormale completo;
- (ii) per ogni $v \in V$ la serie $\sum_{j=1}^{\infty} (v, e_j)e_j$ converge a v ;

(iii) per ogni $v \in V$, $\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(v, e_j)|^2$

(iv) il sottospazio vettoriale chiuso generato dal sistema ortonormale $\{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ coincide con V .

Nota 4.3.3. (Identità di Parseval, ovvero Teorema di Plancherel in uno spazio con prodotto interno.) La proprietà (iii) è l'estensione dell'identità del teorema di Pitagora a spazi di dimensione non necessariamente finita: essa si chiama *identità di Parseval* (o Teorema di Plancherel).

□

Dimostrazione del Corollario 4.3.2. Per il Teorema di migliore approssimazione 4.1.4 (i) è equivalente a (iii). Inoltre dalla dimostrazione di quel teorema (vedi (4.1)) si ha

$$\|v - \sum_{j=1}^N (v, e_j) e_j\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{j=1}^N |(v, e_j)|^2$$

e quindi

$$\|v - \sum_{j=1}^{\infty} (v, e_j) e_j\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} |(v, e_j)|^2$$

(la serie numerica è convergente grazie alla disuguaglianza di Bessel, Corollario 4.1.9). Quindi (ii) è equivalente a (iii). Infine, sia H il sottospazio chiuso di V generato dai vettori $\{e_j, j \in \mathbb{N}\}$. Se vale (ii) $H = V$, quindi (ii) \Rightarrow (iv). Viceversa, se vale (iv), allora per ogni $v \in V \exists \alpha_1, \alpha_2 \dots \in \mathbb{C}$ tali che

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \rightarrow v.$$

Ma allora, per il corollario 4.2.5 si ha

$$\sum_{j=1}^N (v, e_j) e_j \rightarrow v \quad \text{per } N \rightarrow \infty$$

e quindi (iv) \Rightarrow (ii).

□

Corollario 4.3.4. *Sia H un sottospazio chiuso di V , non necessariamente a dimensione finita. Definiamo la proiezione ortogonale $P_H(v)$ su H di un vettore v analogamente a quanto fatto nel corollario 4.1.6 nel caso di H a dimensione finita:*

$$P_H(v) = \sum_{j=1}^{\infty} (v, e_j) e_j,$$

dove $\{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ è un sistema ortonormale in H .

Se V è uno spazio completo, allora la serie che definisce $P_H(v)$ è convergente ad un vettore in H , e questo vettore non dipende dalla scelta del sistema ortonormale $\{e_j\}$ usato per costruirlo. Inoltre, se $\{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ è un sistema ortonormale completo in H , allora

$$P_H(v) = v, \quad \forall v \in H$$

e viceversa, ed inoltre

$$v - P_H(v) \perp H \quad \forall v \in V.$$

Dimostrazione. Se $\{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ è un sistema ortonormale in $H \subset V$, allora la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} (v, e_j) e_j$$

converge grazie alla disuguaglianza di Bessel (Corollario 4.1.9). Infatti le sue somme parziali

$$S_N = \sum_{j=1}^N (v, e_j) e_j$$

verificano

$$\|S_N - S_M\|^2 \leq \sum_{j=M+1}^N |(v, e_j)|^2 \quad \forall N > M,$$

a causa della ortonormalità degli $\{e_j\}$.

Ma

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(v, e_j)|^2 \leq \|v\|^2,$$

per la disuguaglianza di Bessel (Corollario 4.1.9), e quindi, per la proprietà di Cauchy, si ha

$$\sum_{j=M+1}^N |(v, e_j)|^2 < \varepsilon \quad \forall N > M$$

se M è abbastanza grande.

Quindi le somme parziali S_N formano una successione di Cauchy nello spazio completo V (e nel suo sottospazio chiuso, quindi completo, H).

Perciò la successione $\{S_N\}$ è convergente in H , quindi la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} (v, e_j) e_j$$

converge a un vettore $P_H(v) \in H$.

Se $v \in H$ e il sistema ortonormale $\{e_j\}$ è completo in H , allora per il Corollario 4.3.2 (ii)

$$P_H(v) = \sum_{j=1}^{\infty} (v, e_j) e_j = v.$$

Poiché le somme parziali S_N formano una successione di Cauchy nello spazio completo V , la successione $\{S_N\}$ è convergente in V . Ma $S_N \in H$ e H è chiuso in V , quindi

$$S_N = \sum_{j=1}^N (v, e_j) e_j$$

converge a un vettore $P_H(v) \in H$.

Se il sistema ortonormale $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è completo in H , allora, per il Corollario 4.3.2 (iii), si ha

$$P_H(v) = \sum_{j=1}^{\infty} (v, e_j) e_j = v.$$

Se invece non è completo, allora esiste un vettore $v_0 \in H$ tale che $v_0 \neq \sum_{j=1}^{\infty} (v_0, e_j) e_j$, sempre per il Corollario 4.3.2. Ma la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} (v_0, e_j) e_j$$

converge a $P_H(v_0)$, quindi $P_H(v_0) \neq v_0$.

Supponiamo che $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sia completo in H . Per mostrare che $v - P_H(v)$ è ortogonale a H , è sufficiente mostrare che è ortogonale a ogni e_j . Infatti se $w \in H$ e $w \perp e_j \forall j$ allora $(w, h) = 0 \forall h \in H$ perché, per il corollario 4.3.2,

$$h = \sum_{j=1}^{\infty} (h, e_j) e_j$$

e quindi

$$(w, h) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{(h, e_j)} (w, e_j) = 0$$

per la continuità del prodotto scalare (Nota 4.1.2).

Abbiamo quindi visto che basta provare che $v - P_H(v) \perp e_j$ per ogni j . Per dimostrare questa relazione di ortogonalità si procede come nel Corollario 4.1.6. Per ogni j si ha:

$$\begin{aligned} (v - P_H(v), e_j) &= \left(v - \sum_{k=1}^{\infty} (v, e_k) e_k, e_j \right) \\ &= (v, e_j) - \sum_{k=1}^{\infty} (v, e_k) (e_k, e_j) \\ &= (v, e_j) - (v, e_j) (e_j, e_j) = (v, e_j) - (v, e_j) = 0. \end{aligned}$$

Mostriamo che il vettore $w_1 = P_H(v)$ non dipende dalla scelta del sistema ortonormale completo $\{e_j\} \subset H$. Sia $\{f_i\}$ un altro sistema ortonormale completo in H , e sia $w_2 = \sum_{i=1}^{\infty} (v, f_i) f_i$. Allora w_1 e w_2 appartengono a H , ed abbiamo quindi visto che $v - w_1$ e $v - w_2$ sono entrambi ortogonali a tutto H . Pertanto, per $h, k = 1, 2$ si ha $(v - w_k, w_h) = 0$, e quindi, per $k = 1, 2$,

$$(v, w_k) = (w_k, w_k) = \|w_k\|^2,$$

e

$$(v, w_1) = (w_2, w_1), \quad (v, w_2) = (w_1, w_2).$$

Ma $(w_2, w_1) = (w_1, w_2)$. Pertanto segue dalle precedenti identità che

$$\|w_1\|^2 = (v, w_1) = (w_2, w_1) = (w_1, w_2) = \|w_1\|^2.$$

Quindi

$$\|w_1 - w_2\|^2 = (w_1 - w_2, w_1 - w_2) = \|w_1\|^2 - (w_1, w_2) - (w_2, w_1) + \|w_2\|^2 = 0,$$

ossia $w_1 = w_2$. \square

Nota 4.3.5. Se $\{e_j\}$ non è completo in H , allora, in generale, $P_H(v) \neq v$ per $v \in H$.

Ad esempio, sia $V = \mathbb{R}^3$ (oppure \mathbb{C}^3 se si lavora sul campo complesso) e $H = \mathbb{R}^2$ (oppure \mathbb{C}^2) il sottospazio dato da $H = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ e $v = (1, 2, 0)$.

Consideriamo il sistema consistente del solo vettore $e_1 = (1, 0, 0)$. Allora, rispetto a questo sistema, $P_H(v) = (v, e_1)e_1 = (1, 0, 0) \neq (1, 2, 0) = v$.

Invece, se si sceglie in H il sistema completo $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ allora $P_H(v) = v$. \square

Riassumendo, se $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è completo in H e V è uno spazio completo si ha

$$(i) \quad P_H(v) \in H \quad \forall v \in V$$

$$(ii) \quad P_H(h) = h \quad \forall h \in H$$

$$(iii) \quad v - P_H(v) \perp H.$$

È facile vedere che queste tre proprietà caratterizzano $P_H(v)$.

Definizione 4.3.6. Si dice che un sistema ortonormale $\{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ è massimale se

$$(v, e_j) = 0 \quad \forall j \Rightarrow v = 0.$$

Teorema 4.3.7. In uno spazio completo il sistema di vettori $\{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ è massimale se e solo se è un sistema completo.

Dimostrazione. Mostriamo prima che $\{e_j\}$ completo implica $\{e_j\}$ massimale.

Sia $v \in V$, e supponiamo che si abbia $(v, e_j) = 0$ per ogni j . Dobbiamo mostrare che $v = 0$. Ma poiché $\{e_j\}$ è completo, dal Corollario 4.3.2 abbiamo

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} (v, e_j) e_j = 0.$$

Ora mostriamo, per assurdo, che, se $\{e_j\}$ è massimale e lo spazio V è completo, allora $\{e_j\}$ è completo.

Se non lo fosse, per il punto (iv) del corollario 4.3.2 il sottospazio chiuso H generato dai vettori $\{e_j\}$ sarebbe più piccolo di V , cioè esisterebbe un vettore $v \in V$ con $v \notin H$. Allora esisterebbe anche un vettore $w \in V$ con

$w \neq 0$ e $w \perp H$ (basta prendere il vettore $w = v - P_H(v)$ e usare il Corollario 4.3.4, che è applicabile perché lo spazio H , essendo un sottospazio chiuso di uno spazio completo, è anch'esso completo).

Ma in tal caso si avrebbe:

$$\forall j \quad (w, e_j) = (v, e_j) - (P_H(v), e_j) = (v, e_j) - (v, e_j) = 0$$

per il Corollario 4.1.6.

Quindi $w \neq 0$ e $(w, e_j) = 0 \forall j$ il che contraddice l'ipotesi che $\{e_j\}$ sia massimale. \square

Esercizio 4.3.8. In \mathbb{C}^3 (oppure in \mathbb{R}^3) si consideri la base canonica $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Allora $\{e_1, e_2, e_3\}$ è massimale ed è completo, mentre $\{e_1, e_2\}$ non è né massimale né completo. La stessa cosa vale per qualsiasi altra base. \square

Esercizio 4.3.9. Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare (\cdot, \cdot) e sia $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormale in V .

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false ($\boxed{\text{V}}$ vero, $\boxed{\text{F}}$ falso)

(a) $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è completo \iff per ogni $v \in V$ la serie

$$\sum_{j=1}^{+\infty} (v, e_j) e_j$$

converge a v .

$\boxed{\text{V}} \boxed{\text{F}}$

(b) Se $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è completo \Rightarrow per ogni $v \in V$

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} |(v, e_j)|^2.$$

$\boxed{\text{V}} \boxed{\text{F}}$

(c) Il sottospazio vettoriale chiuso generato dal sistema ortonormale $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ coincide con V .

$\boxed{\text{V}} \boxed{\text{F}}$

- (d) Se $H \subset V$ è un sottospazio vettoriale chiuso, la proiezione ortogonale su H di v è data da

$$P_H(v) = \sum_{j=1}^{+\infty} (v, e_j) e_j.$$

□

- (e) Se $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo in $H \Rightarrow$ il vettore $v - P_H(v)$ è parallelo a tutti i vettori di H .

□

□

4.4 Spazi di Hilbert

Definizione 4.4.1. Sia H uno spazio vettoriale munito di un prodotto scalare (\cdot, \cdot) definito positivo. Se H è completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare ($\|v\|^2 = (v, v)$) si dice che H è uno *spazio di Hilbert*.

Nell'esempio seguente e nel successivo esercizio dobbiamo considerare successioni di vettori i quali sono essi stessi costituiti da successioni (numeriche). Per evitare confusione, in queste pagine indichiamo tali successioni con simboli in grassetto.

Esempio 4.4.2. (i) $L^2(\mathbb{R})$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

L'integrale in questa definizione è l'integrale di Lebesgue (Sezione 1.9). La completezza è stata dimostrata in 1.16.26. Il lettore può derivare una dimostrazione alternativa (di fatto analoga) che usa solo tecniche di spazi di Hilbert in analogia al successivo Esercizio 4.4.3 (si veda Nota 4.4.4).

- (ii) Analogamente, e con la stessa dimostrazione, $L^2([a, b])$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Preferiamo, però, rinormalizzare la misura di Lebesgue nell'integrale che definisce il prodotto scalare, e quindi lo ridefiniamo così:

$$(f, g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

(iii) Se E è uno spazio topologico munito della σ -algebra dei Boreliani (Definizione 1.9.9), e μ è una misura di Borel su E (Definizione 1.9.11), allora $L^2(E, \mu)$ è uno spazio di Hilbert (stessa dimostrazione che per $L^2(\mathbb{R})$).

(iv) $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ o $\ell^2(\mathbb{Z})$ sono spazi di Hilbert.

Dimostrazione. La completezza è un caso particolare del punto (iii): basta prendere $E = \mathbb{N}$ o \mathbb{Z} e μ la misura discreta (quella che conta i punti di ogni insieme). In effetti, in questo ambiente puramente atomico, ossia discreto, dove gli integrali diventano somme, possiamo anche dare una dimostrazione diretta della completezza, che viene posposta al successivo Esercizio 4.4.3. Illustriamo invece qui alcuni aspetti che legano ℓ^2 agli spazi a dimensione finita.

Indichiamo gli elementi di ℓ^2 con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$. Il prodotto scalare in ℓ^2 è dato da

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta_i},$$

e quindi la norma è

$$\|\alpha\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2.$$

Un sistema ortonormale completo è dato dalla famiglia di successioni $\mathbf{e}_j = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0, \dots)$ dove il valore 1 è al posto j -esimo, cioè $(\mathbf{e}_j)_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \\ 1 & \text{se } k = j \end{cases}$. È ovvio che le successioni α che sono nulle dopo il posto N -simo, cioè del tipo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N, 0, 0, \dots)$, formano un sottospazio di ℓ_N^2 isomorfo a \mathbb{C}^N (come già osservato nella Nota 1.7.11). La norma \mathbb{C}^N di una tale successione coincide con la sua norma in ℓ^2 :

$$\|\alpha\|_{\ell_N^2}^2 = \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|\alpha\|_{\ell^2}^2.$$

A questo sottospazio ℓ_N^2 appartengono i primi N vettori \mathbf{e}_j , che corrispondono agli N vettori canonici di base. Quindi ℓ^2 può essere pensato come una naturale estensione a dimensione infinita dello spazio euclideo \mathbb{C}^N , e gli \mathbf{e}_j come i "vettori canonici di base".

Il sistema $\{\mathbf{e}_j\}$ è completo. Per provare questo fatto basta provare che è massimale, per il Teorema 4.3.7. Mostriamo quindi la massimalità: cioè mostriamo che, se $\alpha \in \ell^2$ e $(\alpha, \mathbf{e}_j) = 0$ per ogni j allora $\alpha = \mathbf{0} = (0, \dots, 0, \dots)$. Ma questo segue immediatamente dal fatto che

$$(\alpha, \mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta_{kj} = \alpha_j.$$

□

Esercizio 4.4.3. Diamo una dimostrazione diretta della completezza di ℓ^p per $0 < p < \infty$.

Svolgimento. Per coerenza, visto che il presente Capitolo è dedicato agli spazi di Hilbert, limitiamo l'attenzione al caso di ℓ^2 , ma, se sostituiamo 2 con p e la disuguaglianza di Cauchy con la disuguaglianza di Hölder (Teorema 1.16.6), la dimostrazione si ripete parola per parola.

Dobbiamo provare che ogni successione di Cauchy $\{\alpha_n\}$ di elementi di ℓ^2 (cioè di successioni a quadrato sommabile) converge a una successione limite in ℓ^2 . Notiamo preliminarmente che per ogni $\alpha \in \ell^2$, per ogni j si ha

$$|\alpha_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2} = \|\alpha\|_{\ell^2}.$$

Allora sia $\{\alpha_n\}$ una successione di Cauchy di elementi di ℓ^2 :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m, n > N, \|\alpha_m - \alpha_n\| < \varepsilon. \quad (4.6)$$

Allora per ogni j anche la successione numerica $(\alpha_n)_j$ è di Cauchy, grazie alla precedente disuguaglianza

$$\left| (\alpha_m)_j - (\alpha_n)_j \right| \leq \|\alpha_m - \alpha_n\| < \varepsilon$$

e a (4.6).

Poiché \mathbb{C} è completo, deve esistere per ogni j il limite della successione $\left\{(\alpha_m)_j\right\}_{j \in \mathbb{N}}$: chiamiamolo α_j . Mostriamo che $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ è un elemento di ℓ^2 e $\alpha_n \rightarrow \alpha$, cioè

$$\|\alpha_n - \alpha\| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Grazie a (4.6) si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M : \sum_{j=1}^{\infty} \left| (\alpha_m)_j - (\alpha_k)_j \right|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall m, k > M.$$

Perciò, per ogni n

$$\sum_{j=1}^n \left| (\alpha_m)_j - (\alpha_k)_j \right|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| (\alpha_m)_j - (\alpha_k)_j \right|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall m \geq k > M.$$

Passando al limite per $k \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\sum_{j=1}^n \left| (\alpha_m)_j - \alpha_j \right|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall m \geq k > M.$$

Quindi le somme parziali S_n della serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| (\alpha_m)_j - \alpha_j \right|^2$$

sono limitate. Poiché questa serie è a termini non negativi le sue somme parziali convergono (esse sono una successione crescente e limitata in \mathbb{R} [19, Cap. 16 (Appendice)]). Quindi

$$\|\alpha_m - \alpha\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left| (\alpha_m)_j - \alpha_j \right|^2 < \varepsilon^2 < \infty, \quad (4.7)$$

cioè $\alpha_m - \alpha \in \ell^2$, $\forall m > M$. Poiché, per ipotesi, $\alpha_m \in \ell^2$, anche $\alpha \in \ell^2$. Inoltre, per (4.7) si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste M tale che per ogni $m > M$

$$\|\alpha_m - \alpha\| < \varepsilon,$$

e cioè

$$\alpha_m - \alpha \rightarrow 0 \quad \text{per } m \rightarrow \infty.$$

Questo prova che la successione di Cauchy $\{\alpha_m\} \subset \ell^2$ converge a $\alpha \in \ell^2$ e quindi che ℓ^2 è completo. Si noti che la stessa dimostrazione si applica allo spazio normato ℓ^p introdotto nella Definizione 1.7.1. \square

Nota 4.4.4. I passaggi al limite sotto il segno di serie sono analoghi a quelli sotto il segno di integrale che servirebbero, con identica dimostrazione, per provare la completezza di L^2 ; una variante di tale dimostrazione che si estende a tutti gli spazi L^p (e ℓ^p) è stata presentata nel Teorema di Riesz-Fischer (Teorema 1.16.26). Tali passaggi al limite sotto il segno di integrale sono validi per l'integrale di Lebesgue ma non per quello di Riemann (si veda la Sezione 1.9). Si ha che lo spazio L^2 costruito con l'integrale di Lebesgue è completo, ma costruito con l'integrale di Riemann non lo è. \square

Esercizio 4.4.5. Costruire una successione di Cauchy in $L^2((0,1))$ (rispetto all'integrale di Lebesgue) che converge in questo spazio, ma non converge nello spazio $L^2((0,1))$ costruito con l'integrale di Riemann.

Svolgimento. . Si consideri una funzione positiva $f \in L^2$ illimitata ed i suoi approssimanti $f_n(x) := \min\{f(x), n\}$. Si osservi che f_n tende a f puntualmente in maniera monotona ed anche nella norma di L^2 , ma il limite puntuale f è illimitato, e quindi non integrabile secondo Riemann (non ha approssimanti per eccesso a gradini). Naturalmente, la norma L^2 di f nel senso di Riemann è definibile come limite delle norme di f_n , ossia come approssimazione nel senso degli integrali impropri di Riemann, ed allora ovviamente coincide con la norma L^2 di Lebesgue: però non è definibile direttamente come $\int |f|^2$ nel senso dell'integrale di Riemann. \square

D'ora in avanti useremo sempre l'integrale di Lebesgue.

Teorema 4.4.6. (Riesz–Fischer.) *Uno spazio di Hilbert H si dice separabile se è dotato di un sistema ortonormale completo numerabile (cioè indicizzato da un indice intero). Ogni spazio di Hilbert separabile è isometricamente isomorfo a ℓ^2 : in altre parole, esiste un isomorfismo lineare surgettivo*

$$\tau : H \rightarrow \ell^2$$

tale che

$$\forall h \in H, \quad \|\tau(h)\|_{\ell^2} = \|h\|_H.$$

Dimostrazione. Sia $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormale completo in H . Definiamo

$$\tau(h) = \{(h, e_n), \quad n = 1, 2, \dots\}.$$

Per l'identità di Parseval (Corollario 4.3.2(iii)) si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(h, e_n)|^2 = \|h\|_H^2,$$

e quindi τ è una isometria (perciò necessariamente iniettiva: se $h_1 \neq h_2 \in H$ allora $\|\tau(h_1) - \tau(h_2)\|_{\ell^2} = \|h_1 - h_2\|_H \neq 0$). Dobbiamo solo dimostrare che τ è surgettivo.

Sia $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \ell^2$. Basta costruire un vettore $h \in H$ tale che $\tau(h) = \alpha$. Questo h esiste: esso è dato da

$$h = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j.$$

La serie converge perché H è completo (Corollario 4.3.2(ii)), e

$$\tau(h) = \{(h, e_n), \quad n = 1, 2, \dots\} = \{\alpha_n \mid n = 1, 2, \dots\} = \alpha$$

perché

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j, e_n \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \delta_{jn} = \alpha_n,$$

per l'ortogonalità e per la continuità del prodotto scalare (Esercizio 4.1.3). \square

Nota 4.4.7. Se nel Teorema 4.4.6 si assume che H sia munito di prodotto scalare, ma non sia completo rispetto alla norma, allora, ovviamente, l'enunciato non può valere: H non può, in questa ipotesi, essere isometricamente isomorfo a ℓ^2 , perché ℓ^2 è completo. La parte della dimostrazione che viene meno è la surgettività di τ . Infatti, dato $\alpha \in \ell^2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, non si trova sempre $h \in H$ tale che $\alpha = \tau(h)$.

In effetti, sulla base della disuguaglianza di Bessel (Corollario 4.1.9), le somme parziali S_n della serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$$

formano ancora una successione di Cauchy:

$$\forall m > n \quad \|S_m - S_n\|^2 = \sum_{j=n+1}^m |\alpha_j|^2 < \varepsilon$$

se n è abbastanza grande. Infatti

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \|h\|^2 \quad (4.8)$$

per il Corollario 4.3.2, e quindi

$$n \rightarrow \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2$$

è una successione (numerica) convergente, quindi di Cauchy. Quindi lo è anche la successione S_n . Però, se non si assume che H sia completo, la successione di Cauchy S_n in H può non essere convergente.

Peraltro, quando H non è completo, τ è un isomorfismo isometrico surgettivo su un sottospazio K denso in ℓ^2 , cioè tale che $\overline{K} = \ell^2$ (chiusura in norma): si tratta del sottospazio delle successioni con solo un numero finito di termini non nulli:

$$K = \{\beta : \exists n = n(\beta) \in \mathbb{N} \text{ tale che } \beta_j = 0 \text{ per ogni } j > n\}.$$

Infatti è ovvio che ogni $\alpha \in \ell^2$ si approssima, a meno di qualunque $\varepsilon > 0$, con elementi di K (e quindi $\overline{K} = \ell^2$):

$$\forall \alpha \in \ell^2 \quad \exists n : \sum_{j=n+1}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \varepsilon$$

perché, per (4.8), la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2$$

è convergente. Perciò $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots)$ verifica

$$\|\alpha - \beta\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \varepsilon.$$

È anche ovvio che τ è surgettivo su K , poiché, per ogni $\beta \in K$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n, 0, 0 \dots)$, si ha

$$h = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \in H$$

(è una combinazione lineare finita, non ci sono problemi di convergenza di serie!) e $\tau(h) = \beta$. \square

Esercizio 4.4.8. Sia H lo spazio di Hilbert $L^2([-1, 1], dx)$ e K il sottospazio delle funzioni lineari (quindi $f \in K \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) = ax + b$). Si determini la proiezione ortogonale su K della funzione $\phi(x) = x^2$. \square

Svolgimento Se $a, b \in \mathbb{R}$, i vettori $\mathbf{e}_1 = b$ e $\mathbf{e}_2 = ax$ formano una base ortogonale in K . Infatti

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= \int_{-1}^1 bax \, dx \\ &= ba \int_{-1}^1 x \, dx = 0. \end{aligned}$$

Scegliamo ora a e b in modo da avere che $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è una base ortonormale, ossia in modo tale che

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1 \quad (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1.$$

i deve avere

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \int_{-1}^1 b^2 \, dx = 2b^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

(scegliamo $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$) e

$$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = \int_{-1}^1 a^2 x^2 \, dx = a^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = a^2 \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{\frac{3}{2}},$$

(scegliamo $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$).

Allora la base ortonormale è $\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}x\}$.

Ricordiamo che la proiezione sul sottospazio K di un vettore \mathbf{v} è data da (Corollario 4.3.4):

$$P_K(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^2 (\mathbf{v}, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i.$$

Quindi

$$P_K(x^2) = (x^2, \frac{\sqrt{2}}{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} + (x^2, \sqrt{\frac{3}{2}}x) \sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

Ma

$$(x^2, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

e

$$(x^2, \sqrt{\frac{3}{2}}x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 x^3 dx = 0.$$

Quindi

$$P_K(x^2) = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3}.$$

□

Nota 4.4.9. La proiezione del polinomio pari x^2 sullo spazio dei polinomi lineari, generato dal polinomio pari 1 e dal dispari x , ha componente nulla lungo il polinomio dispari. Questa relazione fra proiezione e parità è sempre vera (esercizio!) ed è analoga al fatto che gli sviluppi di Taylor di funzioni dispari (rispettivamente pari) sono composti di soli polinomi dispari (rispettivamente pari). Si veda anche l'Esercizio 5.2.8). □

Esercizio 4.4.10. Consideriamo in $\ell^2(\mathbb{N})$ i vettori della base canonica

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots)$$

⋮

e sia $v_j = \sum_{i=1}^j e_i$.

Fissato j , trovare la proiezione ortogonale di v_j sui seguenti sottospazi:

- (i) il sottospazio generato da e_1 ;
- (ii) il sottospazio generato da $\{e_1, e_2, \dots, e_j\}$;
- (iii) il sottospazio generato da $\{e_1, e_2, \dots, e_{2j}\}$.

□

4.5 La disuguaglianza di Cauchy–Schwarz

Proposizione 4.5.1. *Se V è uno spazio con prodotto interno e $v, w \in V$, allora*

$$|(v, w)| \leq \|v\| \|w\|$$

Dimostrazione. Osserviamo dapprima che la disuguaglianza è vera in ogni spazio V di dimensione 2. Questo segue dal Teorema di Talete: $(v, w) = \|v\| \|w\| \cos(\theta)$ dove θ è l'angolo formato dai vettori v e w ; oppure, in termini di coordinate nella base canonica, dalle seguenti uguaglianze:

se $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$ e $w = w_1 e_1 + w_2 e_2$, allora

$$\begin{aligned} |(v, w)|^2 &= |v_1 \bar{w}_1 + v_2 \bar{w}_2|^2 \\ &= |v_1 \bar{w}_1|^2 + |v_2 \bar{w}_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(v_1 \bar{w}_1 \bar{v}_2 w_2) \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \|v\|^2 \|w\|^2 &= (|v_1|^2 + |v_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2) \\ &= |v_1 w_1|^2 + |v_2 w_2|^2 + |v_1|^2 |w_2|^2 + |w_1|^2 |v_2|^2. \end{aligned}$$

Infatti da qui segue che la disuguaglianza dell'enunciato equivale al fatto che, per ogni v_1, v_2, w_1, w_2 ,

$$2 \operatorname{Re}(v_1 \bar{w}_1 \bar{v}_2 w_2) \leq |v_1|^2 |w_2|^2 + |w_1|^2 |v_2|^2,$$

cioè, per ogni $a, b \in \mathbb{C}$,

$$2 \operatorname{Re}(a \bar{b}) \leq |a|^2 + |b|^2.$$

Questo è vero perché

$$|a|^2 + |b|^2 - 2 \operatorname{Re}(a \bar{b}) = |a - b|^2 \geq 0.$$

Questo dimostra la Proposizione se la dimensione di V è uguale a 2. Ma se V è arbitrario, una volta scelti v, w applichiamo la disuguaglianza appena provata allo spazio bidimensionale generato da v e w . \square

Nota 4.5.2. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per lo spazio L^2 è un caso particolare della disuguaglianza di Hölder (Teorema 1.16.6) per gli spazi L^p e L^q , con p, q indici coniugati (Definizione 1.16.4). \square

4.6 Operatori lineari e funzionali lineari su spazi normati; dualità

In questa Sezione trattiamo i funzionali lineari continui su spazi di Hilbert. La terminologia e le nozioni di base sono state esposte nella Sezione ??, ma ripetiamo qui gli enunciati principali, senza ripetere le dimostrazioni. Alcuni risultati simili per gli spazi normati completi L^p sono stati esposti in Sezione 1.19: in particolare, alcuni enunciati che ora presenteremo sono già stati introdotti là. Il risultato principale di questa Sezione, il Teorema di rappresentazione di Riesz (Teorema 4.6.4), quando specializzato al caso dello spazio di Hilbert L^2 coincide con il caso $p = 2$ del Teorema di Dualità 1.19.6 per gli spazi L^p .

Richiamiamo la seguente definizione di *operatore lineare* tipica dell'Algebra Lineare:

Definizione 4.6.1. Siano V e W spazi vettoriali. Una applicazione

$$T : V \rightarrow W$$

si dice un operatore lineare se per ogni $v_1, v_2 \in V$ e per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ si ha

$$T(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2).$$

Definizione 4.6.2. (Operatori continui.) Se V è uno spazio normato (o più in generale se su V è data una nozione di convergenza) dire che T è continuo significa dire che

$$\lim_{v \rightarrow v_0} T(v) = T(v_0)$$

(spesso scriveremo Tv invece che $T(v)$).

Il seguente enunciato è un caso particolare della Proposizione 3.3.4, grazie all'ultima osservazione della Definizione 3.3.7.

Proposizione 4.6.3. Se V, W sono spazi normati e $T : V \rightarrow W$ è un operatore lineare, allora T è continuo se e solo se esiste $C > 0$ tale che, per ogni $v \in V$

$$\|Tv\|_W \leq C\|v\|_V.$$

Dimostrazione. La disuguaglianza nell'enunciato ovviamente implica la continuità di T . Viceversa, se T è continuo, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che la sfera con centro 0 di raggio δ in V viene mandata da T nella sfera con centro 0 di raggio ε in W : cioè $\|Tv\|_W < \varepsilon_0$ se $\|v\|_V < \delta_0$. Ma poiché T è lineare e continuo, questo vuol dire che $\|Tv\|_W \leq \varepsilon_0$ se $\|v\|_V \leq \delta_0$. In particolare, scegliendo v tale che $\|v\|_V = \delta_0$, per ogni $\alpha > 0$ si ha:

$$\|Tv\|_W \leq \varepsilon := \alpha\varepsilon_0$$

se

$$\|v\|_V = \delta := \alpha\delta_0.$$

Cioè

$$\|Tv\|_W \leq \alpha\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_0}{\delta_0} \|v\|_V = C\|v\|_V.$$

□

La norma di un operatore lineare T da uno spazio normato V ad uno spazio normato W è stata introdotta nella Definizione 3.3.7: rammentiamo che si tratta dell'estremo inferiore delle costanti $C > 0$ tali che, per ogni $v \in V$, si abbia $\|Tv\| \leq C\|v\|$. Rammentiamo anche che la norma è submoltiplicativa (Corollario 3.3.10): dati due operatori lineari $A : V \rightarrow W$ e $B : U \rightarrow V$, l'operatore composto $AB : U \rightarrow W$ verifica

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Inoltre, in dimensione finita, la norma coincide con il massimo modulo degli autovalori (Proposizione 3.3.12).

Ora studiamo i funzionali lineari su uno spazio di Hilbert H (ossia gli operatori lineari da H a \mathbb{C} , Definizione 3.3.14) che sono continui. Un caso particolare è quello ben noto dei funzionali sugli spazi vettoriali a dimensione finita).

Teorema 4.6.4. (Teorema di rappresentazione di Riesz.) *Se H è uno spazio di Hilbert, i funzionali lineari continui su H formano uno spazio vettoriale isometricamente isomorfo a H . Per ogni $u \in H$ il funzionale F_u definito da*

$$F_u(v) = (v, u)_H \quad \forall v \in H$$

è continuo e $\|F_u\| = \|u\|_u$. Viceversa ogni funzionale continuo su H è del tipo F_u per qualche $u \in H$, e questo u è unico.

Notazione 4.6.5. Lo spazio dei funzionali continui su uno spazio normato V si chiama il duale di V e si indica con V' .

Dimostrazione. È ovvio che H' è uno spazio vettoriale. Sia $u \in H$ e $F_u(v) = (v, u)$. Allora F_u è un funzionale lineare e per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (Proposizione 4.5.1) si ha

$$|F_u(v)| = |(v, u)| \leq \|v\| \|u\|.$$

Quindi, per la Proposizione 4.6.3, F_u è continuo, e $\|F_u\| \leq \|u\|$. Ma $F_u(u) = (u, u) = \|u\|^2$, e perciò

$$\|F_u\| = \inf \{C > 0 : |F_u(v)| \leq C\|v\| \quad \forall v \in H\} \geq \|u\|.$$

Quindi $\|F_u\| = \|u\|$.

Viceversa, mostriamo che per ogni $F \in H'$ esiste $u \in H$ tale che $F = F_u$. Se $F = 0$, allora questo è vero per $u = 0$. Altrimenti sia

$$M = \text{Ker } F = \{v \in H : F(v) = 0\}.$$

Osserviamo che M è un sottospazio vettoriale di H (perché F è lineare) ed inoltre M è chiuso: se $v_n \in M$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \in H$, allora $v \in M$, perché F è continuo, e quindi

$$F(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(v_n) = 0.$$

Poiché $F \neq 0$ si ha $M \neq H$. Perciò possiamo trovare $v_0 \in H$ con $v_0 \notin M$. Ma allora esiste $w \in H$, $w \perp M$: basta utilizzare il *procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt*, cioè prendere $w = v_0 - P_M(v_0)$, dove P_M è la proiezione ortogonale su M definita nel Corollario 4.3.4 ($P_M(v_0)$ esiste, grazie a questo Corollario, perché M è chiuso). Riscalando, otteniamo un vettore w_0 tale che $w_0 \perp M$ e $F(w_0) = 1$.

Per ogni $h \in H$, ponendo $\alpha = F(h)$, osserviamo che

$$F(h - \alpha w_0) = F(h) - \alpha F(w_0) = \alpha - \alpha = 0.$$

Quindi $h - \alpha w_0 \in M$, e dal momento che $w_0 \perp M$ si ha

$$0 = (h - \alpha w_0, w_0) = (h, w_0) - \alpha \|w_0\|^2 = (h, w_0) - F(h) \|w_0\|^2.$$

Poniamo $u = w_0 / \|w_0\|^2$: allora ne segue che, per ogni $h \in H$, $F(h) = (h, u)$. Quindi $F = F_u$.

Questo vettore u è unico, perché se $F = F_u = F_{u'}$, allora

$$(h, u) = (h, u') \quad \forall h \in H,$$

e quindi $u - u' \perp H$. Ma allora $u = u'$, perché il prodotto scalare è definito positivo, e quindi non degenere (Definizione 4.1.1). \square

Nota 4.6.6. Il Teorema di rappresentazione di Riesz 4.6.4 asserisce che, se H è uno spazio di Hilbert, allora $H' \approx H$ e l'isomorfismo è una isometria. In particolare questo vale per ogni spazio vettoriale di dimensione finita V , perché ogni tale spazio V è di Hilbert (fissata una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ il prodotto scalare è dato da

$$(v, u) = \sum_{i=1}^n v_i \bar{u}_i$$

se $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ e $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$. Quindi ogni spazio di dimensione finita è isomorfo al suo duale. Si osservi che, se $e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ con 1 al posto i è un vettore della base canonica, allora il funzionale lineare associato è

$$F_{e_i}(v) = (v, e_i) = v_i,$$

cioè il suo valore è la i -esima coordinata del vettore a cui F_{e_i} si applica. Quindi i funzionali che "leggono" le singole coordinate formano una base in V' che chiameremo base canonica di V' (una volta fissata una base canonica in V). \square

Esercizio 4.6.7. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $F \in H'$ un funzionale lineare continuo su H . Dimostrare che se $K = \text{Ker} F \equiv \{x : F(x) = 0\}$, allora $\dim K^\perp = 1$. \square

Svolgimento. $y \in K^\perp \Leftrightarrow (y, x) = 0$ se $F(x) = 0$. Se y_1, y_2 sono due vettori linearmente indipendenti in K^\perp , allora

$$(y_1 - y_2, x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in K \Rightarrow y_1 - y_2 \in K^\perp.$$

Scegliamo y_1 e y_2 in modo tale che $F(y_1) = F(y_2) = 1$ (ciò è sempre possibile dividendo y_i per $F(y_i)$, $i = 1, 2$).

Allora

$$F(y_1 - y_2) = F(y_1) - F(y_2) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow y_1 - y_2 \in K.$$

Ma $K^\perp \cap K = \{0\}$ perché il prodotto scalare è non degenere, e quindi $y_1 - y_2 = 0$ cioè $y_1 = y_2$. \square

Nota 4.6.8. L'esercizio può essere risolto anche utilizzando il Teorema di rappresentazione di Riesz 4.6.4. \square

Esercizio 4.6.9. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in H spazio di Hilbert tale che $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n b_n < +\infty$ per ogni $b_n > 0$ con $\sum b_n^2 < +\infty$. Dimostrare che allora $\sum a_n^2 < +\infty$. \square

Svolgimento. Poniamo $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Allora abbiamo che $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| < \infty \forall \mathbf{b} \in \ell^2$. Da ciò segue che la trasformazione lineare $F_{\mathbf{a}}$ tale che $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ è definita su tutto ℓ^2 . Essa è continua, perché, per ogni $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tale che

$$F_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \leq \sum_{n=1}^N a_n b_n + \varepsilon,$$

ma

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^N b_n^2 \right),$$

per la disuguaglianza di Cauchy–Schwartz (Proposizione 4.5.1). Perciò per ogni $\mathbf{b} \in \ell^2$,

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) &\leq \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^N b_n^2 \right) + \varepsilon \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \right) \|\mathbf{b}\|_{\ell^2}^2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Prendiamo $\varepsilon = \|\mathbf{b}\|_{\ell^2}^2$. Allora $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che

$$F_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) \leq \left[1 + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \right) \right] \|\mathbf{b}\|_{\ell^2}^2.$$

Da ciò segue che $F_{\mathbf{a}}$ è continuo su ℓ^2 (Proposizione 4.6.3). Allora per il Teorema di rappresentazione di Riesz 4.6.4, esiste $\mathbf{c} \in \ell^2$ tale che

$$F_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{b} \in \ell^2.$$

Consideriamo i casi particolari $\mathbf{b} = \mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ come nell'Esercizio 4.4.3. Allora

$$F_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = F_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}_i) = a_i$$

e

$$(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{e}_i) = c_i.$$

Perciò $a_i = c_i \forall i$ e quindi $\mathbf{a} = \mathbf{c} \in \ell^2$. □

Esercizio 4.6.10. Sia H uno spazio di Hilbert e siano $f, g \in H$ linearmente indipendenti e $\|f\| = \|g\| = 1$. Dimostrare che $\|tf + (1-t)g\| < 1$ per $0 < t < 1$. In altre parole, mostrare che la sfera in uno spazio di Hilbert è strettamente convessa: la corda che congiunge due punti sulla superficie della sfera sta tutta all'interno della sfera tranne che ai due punti estremi. □

Svolgimento. Questo esercizio è già stato svolto per spazi di Hilbert separabili: infatti, dal momento che ogni spazio di Hilbert separabile è isometricamente isomorfo a L^2 in base al Teorema di Riesz–Fischer 4.4.6, abbiamo già dimostrato questo enunciato nell'Esempio 3.9.17, più in generale per tutti gli spazi L^p con $1 < p < \infty$. Pertanto l'enunciato vale anche per spazi di Hilbert non separabili, dal momento che il sottospazio generato dai due vettori f e g è separabile. Pur tuttavia, diamo qui dimostrazioni alternative indirizzate ai lettori che non abbiano avuto sufficiente interesse per approfondire questi argomenti di Analisi Funzionale su spazi di Banach.

Osserviamo anzitutto che il fatto che ogni sfera di raggio positivo in uno spazio di Hilbert sia strettamente convessa è ovvio per il motivo seguente. A meno di traslazioni e dilatazioni possiamo restringere l'attenzione alla sfera unitaria con centro l'origine (come abbiamo fatto nell'enunciato). Ogni due vettori non multipli l'uno dell'altro f e g di norma 1 generano un sottospazio di Hilbert isometricamente isomorfo a \mathbb{C}^2 , e, se si limita l'attenzione a combinazioni lineari a coefficienti reali, generano un sottospazio reale R isometricamente isomorfo a \mathbb{R}^2 . Questo è appunto il caso delle combinazioni convesse dei vettori f e g , visto che i loro coefficienti sono reali: quindi esse giacciono tutte in $R \sim \mathbb{R}^2$. Ora, che il cerchio di raggio 1 con centro l'origine in \mathbb{R}^2 sia strettamente convesso è geometricamente ovvio: il lettore che non lo trova ovvio può ruotare il cerchio intorno all'origine in maniera da portare la corda sottesa da f e g nel semipiano inferiore (aperto), dove il cerchio è il grafico della funzione $\sqrt{1-x^2}$, che è strettamente convessa perché ha derivata seconda strettamente positiva (limitata inferiormente da una costante positiva).

Ma per il lettore che preferisce usare solo tecniche basate sull'algebra lineare e sulle norme, ecco una dimostrazione diretta.

Consideriamo dapprima il caso particolare in cui $f \perp g$. Si ha:

$$\|tf + (1-t)g\|^2 = t^2(f, f) + (1-t)^2(g, g) + t(1-t)[(f, g) + (g, f)].$$

Dato che $f \perp g$ e $\|f\| = \|g\| = 1$,

$$\|tf + (1-t)g\|^2 = t^2 + (1-t)^2 = 2t^2 - 2t + 1.$$

Osserviamo ora che $\max\{2t^2 - 2t + 1 : t \in (0, 1)\} < 1$, perché se consideriamo la funzione $\phi(t) = 2t^2 - 2t + 1$, abbiamo che $\phi'(t) = 4t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ e $\phi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $\phi(0) = \phi(1) = 1$. Quindi la funzione $\phi(t)$ assume il massimo assoluto (= 1) solo agli estremi dell'intervallo $[0, 1]$. Da ciò segue che $\phi(t) < 1$ per ogni $t \in (0, 1)$.

Veniamo al caso generale: ora f, g sono solo linearmente indipendenti. Consideriamo il sottospazio bidimensionale che essi generano e sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base ortonormale in esso.

Allora $f = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2$ e $g = d_1\mathbf{e}_1 + d_2\mathbf{e}_2$ con $c_1^2 + c_2^2 = 1$ e $d_1^2 + d_2^2 = 1$.

Inoltre

$$\begin{aligned} tf + (1-t)g &= tc_1\mathbf{e}_1 + (1-t)d_1\mathbf{e}_1 + tc_2\mathbf{e}_2 + (1-t)d_2\mathbf{e}_2 \\ &= [tc_1 + (1-t)d_1]\mathbf{e}_1 + [tc_2 + (1-t)d_2]\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|tf + (1-t)g\|^2 &= [tc_1 + (1-t)d_1]^2 + [tc_2 + (1-t)d_2]^2 \\ &= t^2c_1^2 + (1-t)^2d_1^2 + t^2c_2^2 \\ &\quad + (1-t)^2d_2^2 + 2t(1-t)c_1d_1 + 2t(1-t)c_2d_2 \\ &= t^2(c_1^2 + c_2^2) + (1-t)^2(d_1^2 + d_2^2) + 2t(1-t)(f, g) \\ &= t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t)(f, g) \\ &< t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) \end{aligned}$$

perché $|(f, g)| < 1$, in quanto $\|f\| = \|g\| = 1$ e f, g non sono allineati (essendo linearmente indipendenti).

Quindi

$$\|tf + (1-t)g\|^2 < t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = [t + (1-t)]^2 = 1.$$

□

Nota 4.6.11. L'Esercizio 4.6.10 rivela che la sfera in uno spazio di Hilbert è strettamente convessa: la corda che congiunge due punti sulla superficie della sfera sta tutta all'interno della sfera tranne che ai due punti estremi. Facendo tendere uno dei due punti estremi f verso l'altro, g , si osserva che la retta in cui giace tale corda si sposta verso la retta tangente alla sfera in g . Quindi tutte le rette tangenti toccano la sfera unicamente nel punto di tangenza. Questa proprietà di convessità stretta non è vera in generale per spazi normati non di Hilbert; ad esempio non è vera per gli spazi ℓ^1 e ℓ^∞ (si vedano le figure delle loro sfere unitarie nella Nota 1.7.10). \square

Capitolo 5

Serie di Fourier

5.1 Funzioni periodiche e sistema trigonometrico

Sia f una funzione periodica su \mathbb{R} di periodo $T > 0$: cioè $f(t + T) = f(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Useremo spesso il seguente fatto:

Lemma 5.1.1. *Se f è una funzione periodica di periodo T e integrabile in ogni intervallo finito, l'integrale di f su un qualunque intervallo di lunghezza T è lo stesso, cioè*

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Si tratta di mostrare che, se si sposta l'intervallo di integrazione da $[0, T]$ a $[a, a + T]$ (diciamo verso destra, cioè per $a > 0$: il caso opposto è analogo) il contributo dell'integrale che si perde nel tratto $[0, a]$ lo si riacquista nel tratto $[T, a + T]$:

In effetti questo equivale alla additività dell'integrale: per la periodicità si ha

$$\int_0^a f(t) dt = \int_T^{a+T} f(t) dt$$

e quindi per l'additività

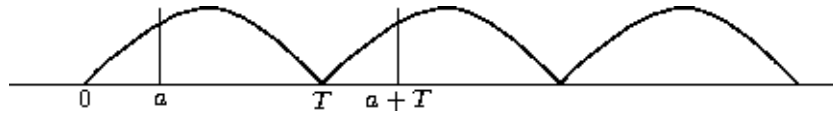


Figura 5.1: L'integrale su un periodo è invariante per traslazione del periodo

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(t) dt &= \int_0^{a+T} f(t) dt - \int_0^a f(t) dt \\ &= \int_0^{a+T} f(t) dt - \int_T^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt. \end{aligned}$$

□

Nota 5.1.2. Se f è periodica di periodo T allora la funzione *dilatata*

$$g(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)$$

è periodica di periodo 2π : infatti per ogni t

$$g(t + 2\pi) = f\left(\frac{(t + 2\pi)T}{2\pi}\right) = f\left(\frac{tT}{2\pi} + T\right) = f\left(\frac{tT}{2\pi}\right) = g(t)$$

perché f è periodica di periodo T .

Quindi, a meno di una dilatazione di scala, possiamo limitarci a considerare funzioni periodiche di periodo 2π . □

Definizione 5.1.3. Muniamo lo spazio $L^2[0, 2\pi]$ del prodotto scalare seguente:

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

normalizzato come alla fine della parte (ii) dell'Esempio 4.4.2. Pertanto la norma in $L^2[0, 2\pi]$ è data da

$$\|f\|_{L^2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Analogamente, per $1 \leq p < \infty$, rammentiamo la Definizione 1.16.1 di $L^p[0, 2\pi]$ come lo spazio delle funzioni misurabili secondo Lebesgue (Definizione 1.9.39) tali che la seguente norma è finita:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

In particolare, per $p = 1$, la norma L^1 è data da

$$\|f\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt.$$

Infine, lo spazio $L^\infty[0, 2\pi]$ consiste delle funzioni misurabili e limitate su $[0, 2\pi]$, ed è munito della norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ess sup}_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(t)|$$

(l'estremo superiore essenziale è stato introdotto nella Definizione 1.16.2 e poi studiato nell'Esercizio 1.16.3).

Notiamo anche che, con la normalizzazione scelta alla fine della parte (ii) dell'Esempio 4.4.2, il prodotto scalare in $L^2[0, T]$ è

$$(f, g) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt,$$

e quindi la norma in $L^2[0, T]$ è data da

$$\|f\|_{L^2} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

ed analogamente per la norma in $L^p[0, T]$.

Definizione 5.1.4. Nello spazio $L^2[0, 2\pi]$ chiamiamo *sistema trigonometrico* la famiglia di funzioni

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \dots, \}$$

tutte di periodo 2π .

Proposizione 5.1.5. *Il sistema trigonometrico è ortogonale in $L^2[0, 2\pi]$.*

Dimostrazione. Come per molte altre proprietà delle serie di Fourier, anche questa si dimostra più agevolmente passando dalle funzioni trigonometriche ad esponenziali complessi. Rammentiamo (Sezione 1.1) che

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Da qui

$$\cos kt = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}; \quad \sin mt = \frac{e^{imt} - e^{-imt}}{2i} \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}. \quad (5.1)$$

Ma il sistema $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è ortogonale in $L^2[0, 2\pi]$. Infatti:

$$\begin{aligned} (e^{ikt}, e^{imt}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)t} dt \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } k = m \\ \left[\frac{e^{i(k-m)t}}{2\pi i(k-m)} \right]_0^{2\pi} & \text{se } k \neq m. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Esercizio 5.1.6. Si verifichi l'ultima uguaglianza (5.2) anche passando alle parti reale e immaginaria ed applicando le formule di prostaferesi. \square

Da qui e da (5.1) è ovvio che, se $k \neq m$ e $u_k(t) = \cos kt$, $v_m(t) = \sin mt$, si ha:

$$(u_k, v_m) = 0$$

mentre, per $k \neq 0$,

$$(u_k, u_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 kt dt = \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 kt dt = (v_k, v_k),$$

e, per $k = 0$,

$$(1, 1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1.$$

Usando queste ultime due identità segue, di nuovo da (5.1), che

$$(u_k, u_m) = 0 = (v_k, v_m).$$

\square

Esercizio 5.1.7. Dimostriamo che

$$(u_k, u_k) = (v_k, v_k) = \frac{1}{2}$$

direttamente con integrali di funzioni a valori reali, invece che passando per integrali di esponenziali complessi. \square

Svolgimento. Si ha $\sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos t$ per ogni t , quindi

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(t + \frac{\pi}{2}) \, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi + \frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt.$$

Grazie al Lemma 5.1.1, l'ultimo integrale è uguale a

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt.$$

Quindi si ha

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \|v_1\|_{L_*^2}^2 = \|u_1\|_{L_*^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt.$$

Invece di calcolare questo integrale con il metodo di integrazione per sostituzione (Teorema 1.22.1), possiamo ottenere il risultato così:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \pi. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Quindi

$$\|v_1\|_{L_*^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \|u_1\|_{L_*^2}^2 = 1.$$

Ora, per trattare il caso di $\|u_k\|_2$ e $\|v_k\|_2$, osserviamo che vale il seguente

Lemma 5.1.8. *Se f è periodica di periodo T e $g(t) = f(kt)$ per qualche intero positivo k , allora*

$$\int_0^T g(t) \, dt = \int_0^T f(t) \, dt.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \int_0^T g(t) dt &= \int_0^T f(kt) dt = \\ &= \frac{1}{k} \int_0^{kT} f(t) dt \\ &= \frac{1}{k} k \int_0^T f(t) dt \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla periodicità di f . \square

Completiamo ora la *dimostrazione dell'Esercizio 5.1.7*.

Osserviamo che $u_k(t) = \cos kt = u_1(kt)$ e analogamente per v_k . Dal Lemma 5.1.8 segue che

$$\|u_k\|_{L^2_*} = \|u_1\|_{L^2_*} = 1$$

e

$$\|v_k\|_{L^2_*} = \|v_1\|_{L^2_*} = 1$$

per ogni k . \square

Nota 5.1.9. Consideriamo il dilatato $g(t) = f(\alpha t)$ di una funzione f , periodica di periodo T (qui $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$). Allora g è una funzione periodica di periodo T/α e, come nella dimostrazione del Lemma 5.1.8, si ha

$$\int_0^{\frac{T}{\alpha}} g(t) dt = \int_0^{\frac{T}{\alpha}} f(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^T f(x) dx.$$

Pertanto, con la normalizzazione scelta alla fine della Definizione 5.1.3, troviamo che, per ogni T ,

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2[0,T]}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T |g(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T |f(\alpha t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{\alpha T} \int_0^{\alpha T} |f(x)|^2 dx = \|f\|_{L^2[0,\alpha T]}^2. \end{aligned}$$

Ad esempio, le funzioni $\tilde{u}_k(t) = \sin(2\pi kt)$ e $\tilde{v}_k(t) = \cos(2\pi kt)$ verificano

$$\|\tilde{u}_k\|_{L^2[0,1]}^2 = \|u_k\|_{L^2[0,2\pi]}^2 = \frac{1}{2},$$

e analogamente per v_k . Quindi il sistema trigonometrico

$$\left\{ 1, \sqrt{2} \sin(2\pi t), \sqrt{2} \cos(2\pi t), \sqrt{2} \sin(4\pi t), \sqrt{2} \cos(4\pi t), \dots \right\}$$

è ortonormale in $L^2[0, 1]$. Analogamente il sistema

$$\left\{ e^{2\pi ikt} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

è ortonormale in $L^2[0, 1]$. □

Ora riassumiamo:

Corollario 5.1.10. (i) *Il sistema*

$$\left\{ 1, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin 2t, \sqrt{2} \cos 2t, \dots \right\}$$

è ortonormale in $L^2[0, 2\pi]$, e più in generale il sistema

$$\left\{ 1, \sqrt{2} \sin \frac{2\pi t}{T}, \sqrt{2} \cos \frac{2\pi t}{T}, \sqrt{2} \sin \frac{4\pi t}{T}, \sqrt{2} \cos \frac{4\pi t}{T}, \dots \right\}$$

è ortonormale in $L^2[0, T]$ con la norma definita da

$$\|f\|_{L^2[0, T]}^2 = \frac{1}{2T} \int_0^T |f|^2 dt;$$

(ii) *il sistema*

$$\left\{ e^{ikt} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

è ortonormale in $L^2[0, 2\pi]$, e più in generale il sistema

$$\left\{ e^{2\pi ikt/T} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

è ortonormale in $L^2[0, T]$

Per passare dall'uno all'altro di questi due sistemi ortogonali si usa un semplice cambiamento di base, basato sulle identità (5.1): se $u_k(t) = \cos kt$, $v_k(t) = \sin kt$ e $e_k(t) = e^{ikt}$ si ha

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_k \\ e_{-k} \end{pmatrix} \quad \text{per } k \neq 0,$$

e $u_0 = e_0$.

È quindi ovvio che uno di questi due sistemi ortonormali è completo in $L^2[0, 2\pi]$ se e solo se lo è l'altro.

Vedremo in seguito che questi due sistemi sono completi.

Nota 5.1.11. La normalizzazione dei sistemi ortogonali in un intervallo, ad esempio $[-\pi, \pi]$, naturalmente dipende dalla normalizzazione della misura di Lebesgue sull'intervallo. Ad esempio, se invece di normalizzare la misura in maniera che la massa totale dell'intervallo sia 1, ossia di considerare la misura $d\mu := \frac{dx}{2\pi}$, si usa la misura non normalizzata $dm := dx$, come all'inizio dell'Esempio 4.4.2, allora la massa totale dell'intervallo diventa 2π e la norma L^2 della funzione 1 diventa $\sqrt{2\pi}$, quella delle funzioni $\sin nx$ e $\cos nx$ per $n > 1$ risulta essere $\sqrt{\pi}$, mentre la norma di e^{ikx} diventa $\sqrt{2\pi}$.

Invece, i coefficienti di Fourier rimangono invariati, perché sono dati dal rapporto dei due prodotti scalari definiti in (4.2), dove numeratore e denominatore cambiano entrambi proporzionalmente alla normalizzazione della misura. \square

5.2 Sviluppi di Fourier di funzioni in $L^2 [0, T]$

Scriviamo lo sviluppo nel sistema trigonometrico: per ogni $f \in L^2 [0, 2\pi]$ lo sviluppo ortonormale è

$$\begin{aligned} & (f, 1) + \sum_{k=1}^{\infty} (f, \sqrt{2}\cos kt)\sqrt{2}\cos kt + \sum_{k=1}^{\infty} (f, \sqrt{2}\sin kt)\sqrt{2}\sin kt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt \right) \cos kx + \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt \right) \sin kx \right]. \end{aligned}$$

Per indicare che questo è lo sviluppo ortonormale di f rispetto al sistema trigonometrico scriveremo:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (5.4)$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt. \quad (5.5)$$

Poiché per $n > 0$ le funzioni $e_n(x) = \cos(nx)$ oppure $\sin(nx)$ verificano $\|e_n\|^2 = 1/2$ (identità (5.2) ed Esercizio 5.1.7), per $k > 0$ questi sono precisamente i coefficienti di Fourier di f introdotti nella Definizione 4.1.10, rispetto

al sistema ortogonale dato dalle funzioni 1 , $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ (n intero positivo) ed anche rispetto al corrispondente sistema normalizzato del Corollario 5.1.10 (i); si noti però che, nel caso $k = 0$, ossia per la funzione costantemente 1 , si ha $\|1\|^2 = 1$, e quindi il coefficiente di Fourier della Definizione 4.1.10 vale $\frac{1}{2\pi}(f, 1) = a_0/2$: questo spiega perché abbiamo scritto $a_0/2$ in (5.4).

Nota 5.2.1. Dobbiamo usare il simbolo \sim , diverso da $=$, dato che non sappiamo ancora se la serie converge a f , perché non abbiamo dimostrato che il sistema è completo (lo dimostreremo in seguito nel Teorema 5.13.3). Analogamente scriviamo

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (5.6)$$

dove

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt. \quad (5.7)$$

I coefficienti c_k si chiamano *coefficienti di Fourier di f in forma complessa*. Le serie (5.4) e (5.6) si chiamano, rispettivamente, serie di Fourier di f in forma reale e complessa. \square

Definizione 5.2.2. Nel seguito scriveremo $\widehat{f}(k)$ invece di c_k in (5.7).

Esercizio 5.2.3. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha $\widehat{f}(k) = \overline{\widehat{f}(-k)}$. \square

Proposizione 5.2.4. *I coefficienti di Fourier di $f \in L^2[0, T]$ sono una successione che tende a zero all'infinito:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = 0.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla disuguaglianza di Bessel (Corollario 4.1.9) \square

Proposizione 5.2.5. *Fra i coefficienti di Fourier di f in forma reale e complessa intercorre la seguente relazione: per $k \geq 0$,*

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= c_k = \frac{1}{2} (a_k - ib_k) \\ \widehat{f}(-k) &= c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + ib_k), \end{aligned}$$

o equivalentemente, per $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} a_k &= \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k) \\ b_k &= i \left(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k) \right). \end{aligned}$$

Inoltre, se f è a valori reali, allora $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ e $c_k = \bar{c}_{-k}$.

Dimostrazione. Segue dall'identità (5.1) della Proposizione 5.1.5. \square

Se si considerano funzioni $L^2[0, T]$, dove $T > 0$, allora si ottengono risultati analoghi dilatando l'intervallo $[0, 2\pi]$ in $[0, T]$: il sistema ortonormale in forma complessa diventa

$$\left\{ e^{\frac{2\pi i kt}{T}} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

ed in forma reale

$$\left\{ 1, \sqrt{2} \cos \frac{2\pi kt}{T}, \sqrt{2} \sin \frac{2\pi kt}{T} \right\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Corollario 5.2.6. Per ogni $f \in L^2[0, T]$, sia $k = 1, 2, \dots$ e scriviamo

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \\ \widehat{f}(k) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i kt/T} dt \end{aligned}$$

i coefficienti di Fourier in forma reale o complessa (cioè rispetto ai sistemi trigonometrici in forma reale o complessa in $L^2[0, T]$ considerati nella Proposizione 5.2.5). Allora la serie di Fourier in forma reale

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left(2\pi k \frac{x}{T} \right) + b_k \sin \left(2\pi k \frac{x}{T} \right) \right)$$

ed in forma complessa

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x/T}$$

convergono entrambe (alla stessa funzione) in $L^2[0, T]$.

Dimostrazione. Questo è niente altro che il Corollario 4.2.3 del Capitolo 1. Il fatto che le due serie convergono alla stessa somma è dovuto alla identità

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \widehat{f}(k)e^{ikx} + \widehat{f}(-k)e^{-ikx},$$

che segue dalla Proposizione 5.2.5. Si osservi che lo stesso fatto sarebbe seguito subito, per il Corollario 4.1.9 (ii), dal fatto che le due serie sono due sviluppi ortonormali della stessa funzione rispetto a due sistemi ortonormali diversi, se si fosse dimostrato che questi sistemi sono completi. Però al momento non abbiamo ancora dimostrato la completezza: la dimostreremo nel Teorema 5.13.3. \square

Nota 5.2.7. Per ogni $f \in L^2_*$, la disuguaglianza di Bessel (Corollario 4.1.9) dice che

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \|f\|_{L^2[0,2\pi]}^2.$$

Dopo che avremo dimostrato la completezza del sistema trigonometrico, questa disuguaglianza diventerà un'uguaglianza, l'identità di Parseval (Nota 4.3.3):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|_{L^2[0,2\pi]}^2.$$

\square

Esercizio 5.2.8. (i) Se f è pari, cioè $f(x) = f(-x)$ per ogni x , allora $b_k = 0$ per ogni k , e quindi la serie di Fourier di f diventa in soli coseni:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(2\pi k \frac{x}{T}\right);$$

(ii) Se f è dispari, cioè $f(x) = -f(-x)$ per ogni x , allora $a_k = 0$ per ogni k , e quindi la serie di Fourier di f è in soli seni:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(2\pi k \frac{x}{T}\right)$$

\square

Nota 5.2.9. (Sviluppo trigonometrico in soli seni od in soli coseni.)

Anticipando un argomento che verrà analizzato in seguito nel Lemma 5.13.6, notiamo dal precedente Esercizio 5.2.8 che le funzioni pari hanno serie di Fourier i cui termini sono solo coseni, mentre per le funzioni dispari sono solo seni. Ma ogni funzione f nell'intervallo $[0, \pi)$ può essere prolungata all'intervallo $[-2\pi, 2\pi)$ (centrato nell'origine) sia in maniera pari sia in maniera dispari. Da questi due prolungamenti si ricavano due diversi sviluppi di Fourier, il primo in soli seni ed il secondo in soli coseni, i quali, ristretti all'intervallo originale $[0, 2\pi)$, sono sviluppi trigonometrici diversi associati alla stessa funzione f in $[0, 2\pi)$ (ma nessuno dei due è in generale la serie di Fourier di f in questo intervallo, perché lo sviluppo di Fourier in $[0, 2\pi)$ include sia i seni sia i coseni).

Vedremo nel Lemma 5.13.6 che questi due sviluppi convergono entrambi a f in $L^2[0, 2\pi)$ se $f \in L^2_*$, ed in condizioni ragionevolmente generali su f essi convergono entrambi a f puntualmente. \square

Esercizio 5.2.10. Sia f una funzione in L^1_* , ossia periodica (di periodo, diciamo, 2π) e tale che $\int_0^{2\pi} |f(x)| dx < \infty$. Scriviamo $\widehat{f}(n) = c_n = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$.

- (i) Sia $g(x) = \lambda_t f(x) = f(x - t)$ il traslato di passo t di f . Allora $\widehat{g}(n) = e^{-int} \widehat{f}(n)$.
- (ii) Mostrare che, per ogni t , i traslati $\cos n(x - t)$ e $\sin n(x - t)$ di $\cos nx$ e $\sin nx$ appartengono allo spazio vettoriale bidimensionale generato da $\cos nx$ e $\sin nx$, calcolarne i coefficienti dello sviluppo rispetto a questa base e mettere il risultato in relazione con la parte (i) dell'Esercizio.
- (iii) Mostrare che, se $h(x) = e^{inx} f(x)$, allora per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha $\widehat{h}(k) = \widehat{h}(k - n)$.

\square

5.3 Esempi di sviluppi di Fourier in L^2

Esempio 5.3.1. Sia $f(x) = x$ in $-\pi \leq x < \pi$ (periodicizzata al di fuori di questo intervallo, se si preferisce considerare funzioni periodiche). La funzione è dispari, e quindi i coefficienti di Fourier $\{a_n\}$ rispetto ai coseni sono tutti

nulli, perché sono l'integrale sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ (che è centrato nell'origine) della funzione dispari $f(x) \cos nx$ (questa funzione è dispari perché è il prodotto della funzione dispari x con la funzione pari $\cos nx$). I coefficienti di Fourier rispetto ai seni sono

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \right).$$

Si noti che $x \cos nx$ è una funzione dispari: pertanto

$$\left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 2 \left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = -2 \frac{\pi \cos n\pi}{n} = (-1)^{n+1} \frac{2\pi}{n}.$$

D'altra parte,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{n} \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u \, du = \int_{-\pi}^{\pi} \cos u \, du = 0,$$

perché la funzione coseno è a media nulla sul periodo. Combinando questi calcoli otteniamo, per $n = 1, 2, \dots$,

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$$

La serie di Fourier di f quindi è

$$f \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$

Lo stesso calcolo si svolge, anche più agevolmente, per i coefficienti di Fourier $c_n = \widehat{f}(n)$ rispetto agli esponenziali complessi. In effetti,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left(\left[x \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{(-i)^n \pi}{-in} - \frac{(-i)^n (-\pi)}{-in} \right) + \frac{1}{in} \left[\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) = i \frac{(-1)^n}{n}, \end{aligned}$$

perché $\left[\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ dal momento che $e^{-in\pi} = (-1)^n = e^{in\pi}$. Quindi $\widehat{f}(n) = i \frac{(-1)^n}{n}$. In particolare, viene verificata la relazione che lega i coefficienti di

Fourier in forma esponenziale ed in forma trigonometrica: $\widehat{f}(n) = c_n = (a_n - ib_n)/2$ (Proposizione 5.2.5).

Si noti che la funzione f è periodica e discontinua (ha un salto agli estremi del periodo), ed i suoi coefficienti di Fourier tendono a zero come $O(1/n)$. \square

Esempio 5.3.2. Ora scegliamo $f(x) = |x|$ per $x \in [-\pi, \pi)$ (e periodicizziamo questa funzione al di fuori di tale intervallo). Allora la funzione f è pari, ed i coefficienti di Fourier rispetto alle funzioni seno sono nulli. Invece,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2},$$

e per $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[x \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right). \end{aligned}$$

Dei due termini all'ultimo membro, questa volta quello che si annulla è il primo, perché $\sin n\pi = 0$. Pertanto

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \left[\frac{-\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1),$$

ossia $a_n = 0$ se n è pari e $a_n = -4/(\pi n^2)$ se n è dispari.

Si verifichi che i coefficienti di Fourier in forma esponenziale complessa sono $\widehat{f}(n) = 0$ se n è pari e $\widehat{f}(n) = -2/(\pi n^2)$ se n è dispari, di nuovo a conferma della relazione nella Proposizione 5.2.5.

Si osservi anche che questa funzione periodicizzata è continua ma la derivata ha punti di salto agli estremi dell'intervallo, ed i coefficienti di Fourier tendono a zero come $O(1/n^2)$. \square

Esempio 5.3.3. Sia ora $f(x) = -1$ in $-\pi \leq x < 0$ e $f(x) = 1$ in $0 \leq x < \pi$ (periodicizzata al di fuori dell'intervallo $[-\pi, \pi)$, se si preferisce considerare funzioni periodiche). La funzione f è dispari, e quindi tutti i coefficienti di

Fourier dei coseni sono nulli. Invece,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^0 \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{-n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

ovvero $b_n = 0$ se n è pari e $b_n = 4/(n\pi)$ se n è dispari. Lasciamo per esercizio al lettore il calcolo dei coefficienti di Fourier in forma esponenziale complessa. Anche in questo esempio di funzione con discontinuità di tipo salto notiamo che i coefficienti di Fourier tendono zero come $O(1/n)$. \square

Esercizio 5.3.4. È ovvio che i coefficienti di Fourier del polinomio trigonometrico $g(x) \equiv 1$ sono tutti nulli tranne $a_0/2$ che vale $1/2$. Da questa osservazione e dal precedente Esempio 5.3.3 si ricavano, per linearità, i coefficienti di Fourier della funzione caratteristica dell'intervallo $[0, \pi)$ (che non è né pari né dispari). \square

Esempio 5.3.5. Ora scegliamo $f(x) = x^2$ in $-\pi \leq x < \pi$, periodicizzata al di fuori di questo intervallo se si desidera considerare la funzione su tutto \mathbb{R} . La funzione è pari e quindi i coefficienti di Fourier rispetto ai seni sono nulli. Si ha

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{\pi^2}{3}$$

e, grazie alla parità,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x^2 \sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \right) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left(\left[-\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right) = (-1)^n \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

(abbiamo integrato due volte per parti ed usato le relazioni $\sin n\pi = 0$ e $\cos n\pi = (-1)^n$).

Ancora una volta, per questa funzione continua ma con derivata che ha un salto ai multipli di π , troviamo coefficienti di Fourier con velocità di decadimento $O(1/n^2)$. \square

Nota 5.3.6. (La somma della serie $\sum \frac{1}{n^2}$.) Dal precedente Esempio 5.3.5 risulta che la serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2$ in $[-\pi, \pi]$ è

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Se sapessimo dimostrare che questa serie converge puntualmente alla funzione f , ponendo $x = \pi$ ed usando la relazione $\cos n\pi = (-1)^n$ otterremmo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

e per $x = 0$ otterremmo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

In effetti è vero che la serie di Fourier di f converge a f puntualmente ovunque, come dimostreremo in seguito nel Corollario 5.12.4, e quindi valgono le due ultime identità. \square

Esempio 5.3.7. Ora consideriamo la funzione $f(x) = 1$ se $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, e $f(x) = 0$ per ogni x tale che $\pi/2 < |x| < \pi$. Anche questa funzione è pari, e quindi i suoi coefficienti di Fourier b_n rispetto ai seni sono nulli. Per quanto riguarda i coefficienti di Fourier a_n rispetto ai coseni, $a_0/2 = 1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 1/(2\pi) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = 1/2$, e, per $n > 0$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2},$$

ossia $a_{2n} = 0$ e

$$a_{2n+1} = \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = (-1)^n \frac{2}{(2n+1)\pi} = (-1)^n \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi}.$$

Ancora una volta, la funzione f ha discontinuità a salto, ed i coefficienti di Fourier decadono come $O(1/n)$. \square

Esercizio 5.3.8. Si ricavi il risultato del precedente Esempio 5.3.7 da quello dell'Esercizio 5.3.4 e dalla proprietà di traslazione (parte (i) dell'Esercizio 5.2.10). \square

Esercizio 5.3.9. Si estenda il risultato del precedente Esempio 5.3.7 al caso in cui f sia la funzione caratteristica dell'intervallo $[-A, A]$, con $0 < A < \pi$: si dimostri che $a_0/2 = A/\pi$, e, per $n > 0$, $b_n = 0$ e

$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{\sin An}{n}.$$

□

Esempio 5.3.10. Sia $f(x) = 0$ se $-\pi \leq x < 0$ e $f(x) = x$ se $0 \leq x < \pi$. Questa volta la funzione non è né pari né dispari. I coefficienti di Fourier sono i seguenti. Abbiamo

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi x \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Invece, per $n > 0$, usiamo l'identità

$$\int_0^\pi \cos nx \, dx = \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^\pi = 0 \quad (5.8)$$

per ottenere

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{x \sin nx}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi x \sin nx \, dx \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} \left(\left[\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos nx \, dx \right) = \frac{1}{n\pi} \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_0^\pi = \frac{1}{n\pi} ((-1)^n - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi x \cos nx \, dx \right) \\ &= -\frac{1}{n\pi} \left[\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{n\pi} \left[\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^\pi = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos n\pi}{n} = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato l'identità (5.8). □

Esempio 5.3.11. Si consideri la funzione $f(x) = x$ se $0 \leq x \leq \pi$ e $f(x) = \pi$ se $\pi < x < 2\pi$ (che, come al solito, si può immaginare prolungata ad una funzione periodica di periodo 2π su tutto \mathbb{R}). Questa funzione non è né pari né dispari. I coefficienti di Fourier sono

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi + \pi^2 \right) \\ &= \frac{3\pi^2}{2}; \end{aligned}$$

per $n > 0$, invece

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \pi \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx,$$

dal momento che $\int_\pi^{2\pi} \cos nx dx = 0$, perché una primitiva della funzione coseno è la funzione seno, che si annulla ai punti π e 2π . D'altra parte,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cos nx dx &= \left[\frac{x \sin nx}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^\pi = \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \end{aligned}$$

perché $\sin n\pi = 0$. Dalle ultime due identità abbiamo $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$ per $n > 0$. Infine,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \pi \sin nx dx.$$

Ma $\int_\pi^{2\pi} \sin nx dx = \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_\pi^{2\pi} = \frac{(-1 + (-1)^n)}{n}$, e

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \sin nx dx &= \left[-\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx dx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} + \frac{1}{n} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^\pi = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

(quest'ultimo calcolo si può semplificare grazie all'identità (5.8)). Combinando le ultime tre identità si ottiene

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}.$$

□

Esercizio 5.3.12. Si sviluppi la funzione f del precedente Esempio 5.3.11 in serie trigonometrica di soli coseni ed in serie di soli seni nel senso della Nota 5.2.9. \square

5.4 Sviluppi di Fourier di funzioni in $L^1 [0, T]$

I coefficienti di Fourier sono definiti non solo per funzioni in $L^2 [0, T]$ ma anche, più in generale, per funzioni in $L^1 [0, T]$ (rammentiamo che $L^2 [0, T] \subset L^1 [0, T]$, grazie alla Proposizione 1.17.1), perché

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos 2\pi kt/T dt \right| &\leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| |\cos 2\pi kt/T| dt \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt \\ &= \|f\|_{L^1[0,T]}, \end{aligned}$$

e analogamente

$$\left| \int_0^T f(t) \sin 2\pi kt/T dt \right| \leq \|f\|_{L^1},$$

dove abbiamo abbreviato la notazione $\|f\|_{L^1[0,T]} = \|f\|_{L^1}$ (useremo la stessa abbreviazione per tutte le norme L^p , $1 \leq p \leq \infty$ e talvolta scriveremo $\|f\|_p$ invece di $\|f\|_{L^p}$).

Quindi si può studiare la serie di Fourier di ogni funzione in $L^1 [0, T]$. Abbiamo già osservato (Proposizione 1.17.1) che, per $p > 1$, si ha l'inclusione $L^p [0, T] \subset L^1 [0, T]$: pertanto ora possiamo studiare la serie di Fourier di ogni funzione in L^p . Per $p = 2$, la serie di Fourier di $f \in L^2$ converge in L^2 (vedremo in seguito a quale somma) in base al Corollario 4.2.3.

5.5 Problematiche sulle serie di Fourier

Ora si pongono nuove domande interessanti. Ad esempio, per $1 \leq p \leq \infty$, la serie di Fourier di $f \in L^p [0, T]$ converge nella norma di L^p ? In generale questo è falso per $p = \infty$, perché una funzione L^∞ non è necessariamente continua, ma se una serie di Fourier (i cui termini sono chiaramente continui) converge uniformemente, allora la sua somma deve essere continua (Teorema 1.3.33).

Però potremmo limitare l'attenzione allo spazio delle funzioni continue in $[0, T]$ con $f(0) = f(T)$ (chiameremo questo spazio $C_*[0, T]$) munito della norma uniforme, e chiederci se per ogni $f \in C_*[0, T]$ la serie di Fourier converge uniformemente (la condizione $f(0) = f(T)$ è necessaria perché è verificata da tutti gli addendi della serie di Fourier, ed il limite uniforme, se esiste, è anche limite puntuale).

Quello che sappiamo è che $C_*[0, T] \subset L^2[0, T]$ (Proposizione 1.18.6) e $L^p[0, T] \subset L^2[0, T]$ per $2 < p \leq \infty$ (Proposizione 1.17.1), e quindi le serie di Fourier di $f \in C_*$ o $f \in L^p$, $2 < p < \infty$, convergono nel senso di L^2 , ma non sappiamo se convergono nelle norme L^∞ o L^p (per $f \in L^\infty$ ma $f \notin C_*$ sappiamo che non si ha questa convergenza per quanto osservato sopra).

Infine, per $1 \leq p < 2$, $L^p[0, T] \supset L^2[0, T]$ e da quanto detto finora non possiamo concludere nulla della convergenza nella norma in L^p . Sappiamo però che, se $f \in L^2[0, T]$, allora, per $1 \leq p < 2$, $f \in L^p[0, T]$ ed esiste una costante $C > 0$ che dipende solo da p e T tale che $\|f\|_p \leq C \|f\|_2$ (??), ed inoltre la serie di Fourier di f converge nella norma L^2 . Ma allora la successione delle sue somme parziali è di Cauchy anche nella norma L^p , per la disuguaglianza sulle norme, e quindi converge anche nella norma L^p , per la completezza di L^p (converge alla stessa somma a cui converge in L^2 - la dimostrazione di questo fatto elementare è lasciata per esercizio -, quindi la somma appartiene comunque a L^2 , ma la convergenza vale anche rispetto alla norma L^p). Tutto questo, però, vale solo per le funzioni in $L^2 \subsetneq L^p$, non per tutto L^p . In realtà, si può dimostrare che le serie di Fourier di funzioni L^p convergono nella norma di L^p per tutti i p con $1 < p < \infty$: questo è un risultato delicato, che proveremo in seguito (Corollario 7.6.38). Sappiamo che questo non succede per $p = \infty$, e fra qualche riga vedremo che non succede per $p = 1$.

Inoltre ci potremmo chiedere se la serie di Fourier di una funzione L^p o C_* converge puntualmente. Questa è una domanda molto naturale, a cui daremo una risposta positiva solo per C_* , ma con pesanti ipotesi aggiuntive. Non si può fare molto di più, perché si possono costruire esempi di funzioni in C_* la cui serie di Fourier diverge in ogni punto razionale in $[0, T]$. È stato però dimostrato da Lennart Carleson nel 1963 che la serie di Fourier di una funzione in $L^2[0, T]$ converge puntualmente tranne che in un insieme di misura di Lebesgue nulla (quindi questo fatto vale anche per $C_*[0, T] \subset L^2[0, T]$). Questo teorema è stato esteso a $L^p[0, T]$, $1 < p < \infty$, da Richard Hunt nel 1964. Esso non vale per $L^1[0, T]$: fu costruita da Kolmogorov

una funzione in $L^1[0, T]$ la cui serie di Fourier diverge ovunque (quindi, in particolare, le serie di Fourier di funzioni L^1 in generale non convergono neppure nella norma di L^1). Anche questo risultato di Kolmogorov è delicato: lo proveremo nel Capitolo 7.

Persino per funzioni continue, la serie di Fourier può divergere puntualmente quasi ovunque (ed anche questo lo proveremo nel Capitolo 7). Per questa ragione, l'ipotesi di continuità non è sufficiente per enunciare un buon teorema di convergenza puntuale per serie di Fourier, e tanto meno un buon teorema di convergenza uniforme. Vedremo che, per questo tipo di enunciati, occorre assumere proprietà di ulteriore regolarità, come ad esempio la derivabilità con derivata continua, o anche ipotesi meno forti, ma pur sempre collegate in qualche senso debole alla derivabilità, come la regolarità di Lipschitz o di Hölder, come vedremo in questo Capitolo nella Sezione 5.12. Se condizioni di regolarità di tipo C^1 sono verificate solo a tratti, con un numero finito di salti, allora ovviamente si perde la convergenza uniforme delle serie di Fourier, ma vedremo che si mantiene quella puntuale. Però le condizioni di regolarità che dovremo richiedere per la convergenza puntuale sono di poco più deboli che per la convergenza uniforme, ed infatti in questo Capitolo ne daremo la dimostrazione classica, il cui nucleo centrale è quasi unificato per convergenza puntuale ed uniforme. In seguito, nel Capitolo 7, forniremo una dimostrazione alternativa assai più semplice per la convergenza puntuale e per quella uniforme: il lettore non interessato allo sviluppo storico di questi temi è invitato a sostituire i teoremi di convergenza di questo Capitolo con quelli del Capitolo 7.

Un'altra questione interessante è il paragone fra serie di Fourier e serie di Taylor. Sappiamo che la serie di Taylor (con centro, diciamo, 0) di una funzione $f \in C^\infty$ è una serie di potenze. Essa converge alla funzione f , uniformemente all'interno dell'intervallo di convergenza, che è specificato dal suo raggio di convergenza, non necessariamente finito. Laddove essa converge, le sue somme parziali si "adagiano" successivamente in modo via via più aderente al grafico di f . Però basta cambiare il valore di f al centro di sviluppo e la serie smette di esistere (perché f non è più continua).

Invece se si cambia il valore di f in un punto, o persino in un qualunque insieme di misura zero, i coefficienti di Fourier non cambiano perché sono dati da integrali. Vedremo che per una vasta classe di funzioni continue la serie di Fourier converge uniformemente. Ma le somme parziali non seguono via via meglio la geometria del grafico di f : esse si adagiano intorno al grafico di

f in media, oscillandovi attorno, e coincidono con esso di solito solo in una successione di punti nodali equispaziati in numero uguale all'ordine della somma parziale.

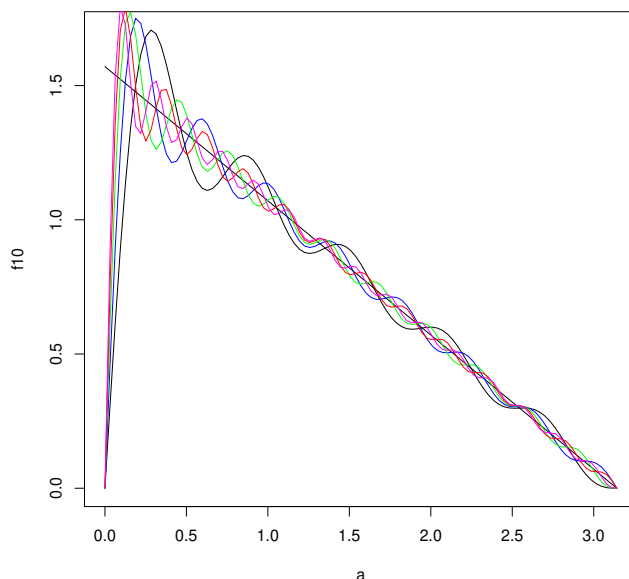


Figura 5.2: Tipo di convergenza degli approssimanti di Fourier: punti nodali

Vedremo in seguito un altro paragone interessante fra sviluppi di Taylor e di Fourier. Se si modifica una funzione $f \in C^\infty$ lontano dal centro di sviluppo (in questo caso 0), la serie di Taylor non cambia (dipende solo dalle derivate di f in 0), ma naturalmente non converge alla nuova funzione nell'intorno in cui si è apportata la modifica se ci convergeva prima. Invece se si modifica una funzione in un insieme di misura di Lebesgue positiva, tutti i coefficienti di Fourier ovviamente cambiano, ma in ogni intervallo contenuto strettamente nella zona dove la funzione non è stata modificata la somma della nuova serie di Fourier coincide con quella della serie originale (principio di localizzazione: Nota 5.9.10).

5.6 Sviluppi di Fourier di funzioni periodiche con periodo arbitrario

C'è una corrispondenza naturale fra le funzioni definite nell'intervallo $[0, T]$ che verificano $f(0) = f(T)$ e le funzioni periodiche su \mathbb{R} di periodo T (cioè che verificano $f(t+T) = f(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$). Infatti, consideriamo la mappa da

$$\mathfrak{F}_T = \{\text{funzioni periodiche di periodo } T\}$$

a

$$\mathfrak{F}^*[0, T] = \{\text{funzioni } f \text{ definite in } [0, T] \text{ con } f(0) = f(T)\}$$

data dalla restrizione, cioè dal considerare una funzione in \mathfrak{F}_T come ristretta a $[0, T]$. Questa mappa è lineare e invertibile: l'inversa è data dal prolungamento periodico a tutto \mathbb{R} (di periodo T) di una funzione definita originariamente solo in $[0, T]$.

Se $f \in L^2[0, T]$, allora possiamo introdurre una norma L^2 anche sulla funzione \tilde{f} che estende f a tutto \mathbb{R} in maniera periodica:

$$\|\tilde{f}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}.$$

È chiaro che in questo modo introduciamo una norma L^2 sullo spazio delle funzioni su \mathbb{R} periodiche di periodo T e di quadrato integrabile sul periodo. Chiameremo questo spazio L^2_* o, se necessario specificare il periodo, L^2_T . È anche chiaro che

$$\rho : L^2_T \rightarrow L^2[0, T]$$

definita più sopra è un isomorfismo isometrico. In generale, per comodità, preferiamo rappresentare le funzioni come periodiche di periodo T anziché come definite solo in $[0, T]$. Grazie al Lemma 5.1.1 possiamo scrivere i coefficienti di Fourier come

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \end{aligned} \quad (5.9)$$

ed in particolare, nel caso di $T = 2\pi$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt.$$

Osserviamo che la condizione di periodicità in

$$C_T = \{f \text{ continue su } \mathbb{R} \text{ periodiche di periodo } T\}$$

si riduce alla condizione $f(0) = f(T)$ in $C[0, T]$ (che abbiamo già introdotto in $C_*[0, T]$) (nella Sezione 2.4). Questa condizione è necessaria per poter estendere una funzione continua in $[0, T]$ a una funzione continua su \mathbb{R} e periodica di periodo T . Invece essa non è necessaria per estendere funzioni da $L^2[0, T]$ o $L^p[0, T]$ ($1 \leq p < \infty$) a tutto \mathbb{R} in maniera periodica, perché le funzioni L^p in realtà sono classi di equivalenza (Definizione 1.16.16), in cui il valore puntuale può essere modificato senza modificare la classe (cioè senza cambiare la funzione), in qualunque insieme di misura di Lebesgue zero (in particolare sulla successione $\{kT\}_{k \in \mathbb{Z}}$). Quindi tutto ciò che abbiamo detto per $L^2[0, T]$ (o $L^p[0, T]$) si può trasferire allo spazio

$$L_T^2 = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} : f(t+T) = f(t) \quad \text{per quasi ogni } t \in \mathbb{R} \right. \\ \left. \text{e } \int_0^T |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

(per L^p l'integrale è $\int_0^T |f(t)|^p \, dt$).

Per semplicità, indichiamo $L_{2\pi}^2$ con L_*^2 e $L_{2\pi}^p$ con L_*^p .

5.7 Scelta del periodo

Dedichiamo una brevissima Sezione a questo argomento solo per enfasi. Nel resto di questo libro, quando prenderemo in esame la trasformata di Fourier, faremo uso di esponenziali complessi $e^{2\pi i \omega t}$, dove la frequenza ω è un numero reale arbitrario. Poiché in generale ω non è intero, questi esponenziali sono funzioni periodiche ma con periodo diverso dall'uno all'altro. Nondimeno, sarebbe naturale ora fissare l'attenzione su sistemi ortogonali fabbricati con

gli esponenziali con frequenze intere $e^{2\pi int}$, che sono periodici di periodo 1. Invece, per evitare di trascinarci da una riga all'altra il fattore moltiplicativo 2π all'esponente, scegliamo, solo in questo Capitolo, esponenziali di periodo 2π , ossia del tipo e^{int} . Mettiamo in guardia il lettore che questa scelta non viene mantenuta nelle parti successive del libro, ad esempio nel Capitolo 10: si veda la Nota 10.3.4 riguardo alla motivazione di queste scelte. Invitiamo il lettore a modificare per esercizio ogni enunciato e dimostrazione di questo Capitolo onde riportarlo al caso di periodo 1.

5.8 Somme di Dirichlet

Vogliamo trovare condizioni sotto le quali le somme parziali (5.4)

$$S_n(x) \equiv S_n f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

della serie di Fourier convergono a f in L^2 , o nella norma uniforme, o almeno puntualmente (per semplicità, in questa capitolo scriviamo $S_n(x)$ invece di $S_n f(x)$, senza ambiguità perché consideriamo sempre una stessa funzione f , ma nel seguito ritorniamo alla notazione completa). Per questo scopo dobbiamo stimare $S_n(x) - f(x)$.

Anticipiamo subito che il risultato per la norma L^2 seguirà immediatamente dalla identità di Parseval (Nota 4.3.3) dopo che avremo provato la completezza nello spazio di Hilbert L^2 del sistema trigonometrico $\{\cos nx, \sin nx\}$: questa completezza seguirà dal risultato relativo alla convergenza uniforme. Anticipiamo anche che le stime classiche che stiamo per presentare sono faticose e delicate: il lettore interessato ad una dimostrazione facile del risultato sulla convergenza puntuale di serie di Fourier, ed a una facile di un risultato più debole sulla convergenza uniforme, può rimpiazzare una parte di questo Capitolo con la Sezione 7.2.

Cominciamo con lo studiare $S_n(x)$. Segue dalle espressioni di a_k e b_k date nelle formule (5.4) che

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} f(t) (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) \right] f(t) dt \\
&\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n(t-x) f(t) dt
\end{aligned}$$

dove

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx$$

si chiama *somma di Dirichlet di ordine n*.

Proposizione 5.8.1. (i) Per ogni n , D_n è pari.

(ii) Per ogni n

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n(u) du = 1.$$

Dimostrazione. È ovvia. Ad esempio, per provare la parte (ii), si osservi che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n(u) du &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} du + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} \cos(ku) du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} du = 1.
\end{aligned}$$

□

Allora si ha

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x-t) f(t) dt \equiv \frac{1}{\pi} (D_n * f)(x),$$

dove il simbolo $*$ rappresenta l'operazione di convoluzione, definita, per h, f in L^1 e periodiche di periodo 2π , da

$$h * f(x) = \int_0^{2\pi} h(x-t) f(t) dt.$$

Per maggiori dettagli si veda la Sezione 6.1 in seguito, in particolare la Definizione 6.1.2.

Osserviamo anche che, dal momento che D_n é pari, si ha

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x-t) f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n(u) f(u+x) du = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n(u) f(x-u) du \quad (5.10)$$

Ora troviamo una formula esplicita (non solo come sommatoria) per le somme di Dirichlet D_n .

Proposizione 5.8.2. *Per ogni n*

$$D_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} & \text{se } x \neq 2m\pi \quad m \in \mathbb{Z} \\ n + \frac{1}{2} & \text{se } x = 2m\pi \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $x = 2\pi m$ con $m \in \mathbb{Z}$, allora $\cos kx = 1$ e $D_n(x) = n + \frac{1}{2}$. Invece, se $x \neq 2m\pi$ $m \in \mathbb{Z}$, si ha $e^{ix} \neq 1$, e quindi, per la formula di somma geometrica (Sezione 1.1) si ha

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx & (5.11) \\ &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right) \\ &= -\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) \\ &= -\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right). \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} &= \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{1}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{1}{2ie^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{\sin\frac{x}{2}} \\ &= \frac{-ie^{-i\frac{x}{2}} (e^{i(n+1)x} - 1)}{2\sin\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Poiché, se $z = x + iy \in \mathbb{C}$, si ha $\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Re}(ix - y) = -\operatorname{Im}(z)$, da questo segue:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right) &= \frac{\operatorname{Im}\left(e^{-i\frac{x}{2}}(e^{i(n+1)x} - 1)\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\operatorname{Im}\left(e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x + \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Nota 5.8.3. L'identità

$$D_n(x) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad \text{se } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

si può anche dimostrare per induzione.

Dimostrazione. L'identità è vera per $n = 0$: in tal caso $D_0(x) = \frac{1}{2}$.

Inoltre, se è vera per $n = n_0 - 1$, cioè se

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n_0-1} \cos kx = \frac{\sin\left((n_0 - \frac{1}{2})x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

allora rimane vera per $n = n_0$. Infatti,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n_0} \cos kx &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n_0-1} \cos kx + \cos n_0x \\
&= \frac{\sin\left(\left(n_0 - \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} + \cos n_0x \\
&= \frac{\sin\left(\left(n_0 - \frac{1}{2}\right)x\right) + 2 \cos n_0x \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin n_0x \cos \frac{x}{2} - \cos n_0x \sin \frac{x}{2} + 2 \cos n_0x \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin n_0x \cos \frac{x}{2} + \cos n_0x \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin\left(\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

□

5.9 Stime puntuali ed uniformi per il resto n -esimo della serie di Fourier

Grazie al Lemma 5.1.1, è equivalente calcolare gli integrali sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ invece di $[0, 2\pi]$. Allora segue dalla identità (5.10) e dalla Proposizione 5.8.1 (ii) che per ogni n e per ogni x

$$\begin{aligned}
S_n f(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) (f(x+u) - f(x)) \, du \quad (5.12) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) (\Delta_u f)(x) \, du
\end{aligned}$$

dove $\Delta_u f$ è l'incremento di f di passo u :

Definizione 5.9.1. $\Delta_u f(x) = f(x+u) - f(x)$.

Ora dalla Proposizione 5.8.2 segue che, per $-\pi < x < \pi$,

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} & (5.13) \\ &= \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2} + \cos nx \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin nx}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \cos nx. \end{aligned}$$

Teorema 5.9.2. *Per ogni $f \in L^1_*$ (cioè periodica di periodo, diciamo, 2π ed integrabile con integrale finito sul periodo), per ogni n , ogni x e ogni $\eta \in (0, \pi)$, si ha*

$$\begin{aligned} S_n f(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin nu}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} + \frac{1}{2} \cos nu \right) (\Delta_u f)(x) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{\sin nu}{u} (\Delta_u f)(x) du + \rho_n(x, \eta) \end{aligned}$$

dove $\rho_n(x, \eta)$ converge a zero quando $n \rightarrow \infty$, puntualmente per ogni x ed uniformemente rispetto a x in ogni intervallo chiuso $a \leq x \leq b$ dove f è limitata.

Dimostrazione. Da (5.12) e (5.13) si ottiene

$$\begin{aligned} S_n f(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{\sin nu}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} (\Delta_u f)(x) du \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\eta < |u| < \pi} \frac{\sin nu}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} (\Delta_u f)(x) du \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nu (\Delta_u f)(x) du. \end{aligned}$$

Perciò

$$S_n f(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{\sin nu}{u} (\Delta_u f)(x) du + \rho_n(x, \eta)$$

dove

$$\begin{aligned}\rho_n(x, \eta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nu \tilde{\alpha}(u) (\Delta_u f)(x) du \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nu (\Delta_u f)(x) du\end{aligned}$$

e

$$\tilde{\alpha}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} - \frac{1}{u} & \text{se } -\eta < u < \eta, \\ \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} & \text{se } \eta \leq |u| < \pi. \end{cases}$$

Ora poniamo

$$\alpha(u) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \tilde{\alpha}(u) & \text{se } -\eta < u < \eta, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (5.14)$$

e

$$\beta(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{se } -\pi < u < \pi, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (5.15)$$

Quindi possiamo riscrivere $\rho_n(x, \eta)$ come segue:

$$\begin{aligned}\rho_n(x, \eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin nu \alpha(u) (\Delta_u f)(x) du \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \cos nu \beta(u) (\Delta_u f)(x) du.\end{aligned} \quad (5.16)$$

Per completare la dimostrazione abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari.

Lemma 5.9.3. *La funzione α definita in (5.14) nella dimostrazione del Teorema 5.9.2 è limitata.*

Dimostrazione. Per $0 < |u| < \eta < \pi$,

$$\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} - \frac{1}{u} = \frac{u - 2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}}{2u \operatorname{tg} \frac{u}{2}} = \frac{O(u^3)}{O(u^2)} = O(u) \quad \text{per } u \rightarrow 0,$$

in base allo sviluppo di Taylor di $\operatorname{tg} u$ con centro in 0.

Perciò

$$\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} - \frac{1}{u}$$

tende a zero per $u \rightarrow 0$, e ovviamente è limitata in ogni intervallo chiuso $[-\pi, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi]$ (si osservi che $\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \rightarrow 0$ se $t \rightarrow \pm\pi$). Quindi tale funzione è limitata in $[-\pi, \pi]$ per ogni η (da una costante che dipende da η). \square

Lemma 5.9.4. *(La traslazione è un operatore continuo su L^1 .)* Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + \delta) - f(x)| dx = 0$$

Più in generale, per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$, con $1 \leq p < \infty$ si ha $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\lambda f - f\|_p = 0$ e, se f è uniformemente continua, anche $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\lambda f - f\|_{\infty} = 0$.

Dimostrazione. Sappiamo che lo spazio $C_c(\mathbb{R})$ delle funzioni continue a supporto compatto è denso in $L^1(\mathbb{R})$ (Proposizione 1.18.6): per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ esiste $g \in C_c(\mathbb{R})$ tale che

$$\|f - g\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Allora, grazie all'identità

$$f(x + \delta) - f(x) = f(x + \delta) - g(x + \delta) + g(x + \delta) - g(x) + g(x) - f(x)$$

ed all'invarianza per traslazione della misura di Lebesgue su \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + \delta) - f(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + \delta) - g(x + \delta) - f(x) + g(x)| dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} |g(x + \delta) - g(x)| dx \\ &\leq 2 \|f - g\|_1 + \int_{-\infty}^{\infty} |g(x + \delta) - g(x)| dx \\ &\leq \frac{2}{3} \varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty} |g(x + \delta) - g(x)| dx. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Basta quindi dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x + \delta) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

se δ è sufficientemente piccolo, cioè che l'enunciato è vero quando g è continua a supporto compatto. Sia K il supporto di g e $m(K)$ la sua misura (cioè $m(K) = \int_K dx$). Poiché una funzione continua a supporto compatto è uniformemente continua per il Teorema di Heine (Teorema 1.8.6), allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste ρ tale che, se $\delta < \rho$,

$$|g(x + \delta) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{6m(K)}$$

per tutti gli x . Osserviamo anche che la funzione $h(x) = g(x + \delta) - g(x)$ ha supporto in $K \cup (K - \delta)$, perché $g(x) = 0$ se $x \notin K$ e $g(x + \delta) = 0$ se $x + \delta \notin K$, cioè se $x \notin K - \delta$.

Perciò, grazie all'invarianza per traslazione della misura di Lebesgue, ora si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x + \delta) - g(x)| dx &= \int_{K \cup (K - \delta)} |g(x + \delta) - g(x)| dx \\ &\leq \int_K |g(x + \delta) - g(x)| dx \\ &\quad + \int_{K - \delta} |g(x + \delta) - g(x)| dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{6m(K)} (m(K) + m(K - \delta)) = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

La dimostrazione per $1 < p < \infty$ è analoga (utilizza allo stesso modo il fatto che le funzioni continue a supporto compatto sono dense in L^p), mentre per le funzioni continue basta osservare che la continuità della traslazione è equivalente alla uniforme continuità. Nel caso di funzioni periodiche, la dimostrazione per L^p è identica. \square

Lo stesso argomento vale per funzioni in L_*^1 (in tal caso in (5.17) si usa il Lemma 5.1.1 invece dell'invarianza per traslazione della misura di Lebesgue su \mathbb{R}). Nel caso di funzioni in C_* non occorre qui assumere l'uniforme continuità, perché essa è automaticamente verificata per le funzioni continue sui compatti grazie al Teorema di Heine. Enunciamo esplicitamente il risultato per uso futuro:

Lemma 5.9.5. *Per ogni $f \in L_*^1$*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x + \delta) - f(x)| dx = 0.$$

Se $f \in L^p_*$, si ha $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\lambda f - f\|_{L^p_*} = 0$ e, se $f \in C_*$, anche $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\lambda f - f\|_\infty = 0$.

Lemma 5.9.6. (Riemann–Lebesgue). Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx = 0 = \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx.$$

Nota 5.9.7. Per $\omega \in \mathbb{Z}$, questo fatto era già stato osservato nel caso di $f \in L^2[0, 2\pi]$, come conseguenza immediata della disuguaglianza di Bessel (si veda la Proposizione 5.2.4). Abbiamo osservato nella dimostrazione del Lemma 5.9.5 che, per ogni $T > 0$, le funzioni continue con supporto compatto in $[-T, T]$ sono dense in $L^1[-T, T]$. D'altra parte, $L^2[-T, T] \subsetneq L^1[-T, T]$ (Proposizione 1.17.1), e siccome $L^2[-T, T]$ contiene $C[-T, T]$ anche esso è denso in $L^1[-T, T]$.

Da qui segue facilmente che, per $n \in \mathbb{N}$, il fatto (che sapevamo fin da prima) che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} \, dt = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{2\pi kt}{T} \, dt$$

implica già che l'enunciato del Lemma di Riemann–Lebesgue vale per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$, purché ω sia intero: cioè, che i coefficienti di Fourier di funzioni in $L^1(\mathbb{R})$ tendono a zero all'infinito. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ scegliamo T e f_T come sopra: o meglio, $\frac{1}{T} \|f - f_T\|_1 < \varepsilon/2$. Poi scegliamo $N > 0$ tale che, per ogni $|k| > N$, si abbia $\frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos(2\pi kt/T) \, dt < \varepsilon/2$, ed analogamente con $\sin(2\pi kt/T)$. Allora i coefficienti di Fourier di f_T rispetto ai coseni verificano

$$\left| \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(2\pi kt/T) \, dt - \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) \cos(2\pi kt/T) \, dt \right| \geq \frac{1}{T} \|f - f_T\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'altra parte, abbiamo già osservato che i coefficienti di Fourier

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f_T(t) \cos(2\pi kt/T) \, dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) \cos(2\pi kt/T) \, dt$$

della funzione f_T continua (e quindi in L^2_*) tendono a zero all'infinito grazie alla disuguaglianza di Bessel. Pertanto, se k è abbastanza grande, $|a_k| < \varepsilon/2$,

e

$$\left| \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(2\pi kt/T) \, dt \right| \geq \frac{1}{T} \|f - f_T\|_1 + |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e quindi $\left| \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{T\infty} f(t) \cos(2\pi kt/T) dt \right| \rightarrow 0$ quando $|k| \rightarrow \infty$. Lo stesso vale per i coefficienti di Fourier rispetto ai seni.

Il Lemma di Riemann–Lebesgue estende questo risultato a frequenze di oscillazione non intere. \square

Dimostrazione del Lemma 5.9.6. Basta mostrare che

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) - f(x) \right| dx \quad (5.18)$$

ed analogamente

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) - f(x) \right| dx. \quad (5.19)$$

Infatti queste disuguaglianze, una volta dimostrate, implicano l'enunciato grazie al Lemma 5.9.4 che ci dà

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) - f(x) \right| dx = 0.$$

Dimostriamo la disuguaglianza (5.18):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) \cos\left(\omega\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right)\right) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) \cos \omega x dx \end{aligned}$$

dalla formula di addizione del coseno, o più semplicemente perché

$$\cos\left(\omega\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right)\right) = \cos(\omega x + \pi) = -\cos \omega x.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) \cos \omega x - f\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) \cos \omega x \right) dx \quad (5.20)$$

e, poiché $|\cos(\omega x)| \leq 1$,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) - f(x) \right| dx.$$

Analoga dimostrazione vale nel caso della funzione seno. \square

Continuazione della dimostrazione del Teorema 5.9.2.

In virtù di (5.16) e del Lemma 5.9.3, per ottenere la parte dell'enunciato del Teorema 5.9.2 che concerne la convergenza puntuale basta mostrare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$, per ogni $g \in L^\infty$ a supporto compatto (diciamo in $[-\pi, \pi]$) e per ogni $0 < \eta < \pi$ fissato,

$$\begin{aligned} \rho_n^+(x, \eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin nu g(u) (\Delta_u f)(x) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin nu g(u) f(x+u) du - f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \sin nu g(u) du \end{aligned} \quad (5.21)$$

e

$$\begin{aligned} \rho_n^-(x, \eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos nu g(u) (\Delta_u f)(x) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos nu g(u) f(x+u) du - f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \cos nu g(u) du \end{aligned} \quad (5.22)$$

convergono a 0 quando $n \rightarrow \infty$.

Ma g è limitata e a supporto in $[-\pi, \pi]$, quindi $g \in L^1[-\pi, \pi]$. Inoltre $f \in L^1(\mathbb{R})$, quindi, per ogni x , la funzione $k(u) = g(u)f(x+u)$ è in $L^1(\mathbb{R})$, perché $\|k\|_1 \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$. Perciò i due integrali dell'ultimo membro di (5.21) e (5.22) convergono a zero per il Lemma 5.9.4.

Resta da dimostrare l'uniformità della convergenza rispetto a x , negli intervalli $I = [a, b]$ in cui f è limitata: diciamo $\sup_I |f(x)| = C < \infty$. Ma in questi intervalli il secondo termine nell'ultimo membro di (5.21) converge a zero uniformemente rispetto a x : se n è sufficientemente grande, allora

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \sin nu g(u) du \right| < \varepsilon$$

per il Lemma 5.9.6, e quindi

$$\left| f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \sin nu g(u) du \right| < C\varepsilon.$$

Quindi per completare la dimostrazione del Teorema 5.9.2 basta provare il seguente enunciato:

Proposizione 5.9.8. (Convergenza uniforme nel Lemma di Riemann–Lebesgue.) Se $f \in L^1_*$ (o più precisamente, periodica ed integrabile su un periodo con integrale finito) e g è limitata, misurabile ed a supporto compatto, allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin nu g(u) f(x+u) du \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos nu g(u) f(x+u) du$$

convergono a zero quando $n \rightarrow \infty$ uniformemente rispetto a x in ogni intervallo $[a, b]$.

La maggior parte della asserzione della Proposizione 5.9.8 è contenuta nel seguente lemma, che enunciamo per una frequenza reale ω invece che una frequenza intera n perché la dimostrazione è identica, visto che nel suo enunciato non ci sono più requisiti di periodicità di periodo 2π .

Lemma 5.9.9. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ con g limitata. Allora

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega u) g(u) f(x+u) du = 0$$

e

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega u) g(u) f(x+u) du = 0$$

uniformemente rispetto a x .

Dimostrazione. La dimostrazione segue dalle disuguaglianze (5.18) e (5.19) del Lemma 5.9.6 e dal Lemma 5.9.4. Infatti, per la densità di $C_c(\mathbb{R})$ in $L^1(\mathbb{R})$ (Proposizione 1.18.6), si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $h \in C_c(\mathbb{R})$ tale che

$$\|f - h\|_1 < \frac{\varepsilon}{2\|g\|_\infty}.$$

Quindi per (5.18)

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega u) g(u) f(u+x) du \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g\left(u + \frac{\pi}{\omega}\right) f\left(u + \frac{\pi}{\omega} + x\right) - g(u) f(x+u) \right| du. \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned}
 & g\left(u + \frac{\pi}{\omega}\right) f\left(u + \frac{\pi}{\omega} + x\right) - g(u)f(u+x) \\
 &= g\left(u + \frac{\pi}{\omega}\right) \left(f\left(u + \frac{\pi}{\omega} + x\right) - f(u+x)\right) \\
 &+ \left(g\left(u + \frac{\pi}{\omega}\right) - g(u)\right) (f(u+x) - h(u+x)) \\
 &\qquad\qquad\qquad + \left(g\left(u + \frac{\pi}{\omega}\right) - g(u)\right) h(u+x).
 \end{aligned}$$

Poiché

$$\left|g\left(u + \frac{\pi}{\omega}\right) - g(u)\right| \leq 2 \|g\|_{\infty} \quad \text{per ogni } u,$$

dalla disuguaglianza precedente segue

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{-\infty}^{\infty} \cos nu g(u) f(u+x) du \right| \\
 & \leq \frac{1}{2} \|g\|_{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(u + \frac{\pi}{\omega} + x\right) - f(x+u) \right| du \\
 & + \|g\|_{\infty} \|f-h\|_1 + \frac{1}{2} \|h\|_{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g\left(u + \frac{\pi}{\omega}\right) - g(u) \right| du. \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

Si noti che il secondo membro non dipende più da x (per vederlo, basta cambiare la variabile da u a $t = u+x$ nel primo integrale a secondo membro). Quindi, se dimostriamo che è minore di ε per $|\omega|$ abbastanza grande, abbiamo dimostrato la convergenza uniforme rispetto a x . A questo fine notiamo che, grazie al Lemma 5.9.5, per ogni ε esiste $\Omega > 0$ tale che, se $|\omega| > \Omega$, allora

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(u + \frac{\pi}{\omega}\right) - f(u) \right| du &< \frac{\varepsilon}{2\|g\|_{\infty}} \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \left| g\left(u + \frac{\pi}{\omega}\right) - g(u) \right| du &< \frac{\varepsilon}{2\|h\|_{\infty}}.
 \end{aligned}$$

Ricordiamo che h è stato scelto in maniera che $\|f - h\|_1 < \varepsilon/(2\|g\|_\infty)$. Per questi ω segue quindi (5.23) che

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \cos nu g(u) f(u+x) du \right| &< \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} \|h\|_\infty \frac{\varepsilon}{2\|h\|_\infty} + \|g\|_\infty \|f - h\|_1 \\ &= \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

La dimostrazione per l'integrale

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \cos nu g(u) f(u+x) du \right|$$

è identica. □

Fine della dimostrazione del Teorema 5.9.2: uniformità rispetto a x della convergenza. Come abbiamo visto, basta ormai dedurre la Proposizione 5.9.8 dal Lemma 5.9.9.

Dimostrazione della Proposizione 5.9.8. Ora $f \in L^1_*$ è periodica di periodo, diciamo, K (nel Teorema 5.9.2 il periodo è 2π). Perciò $f \notin L^1(\mathbb{R})$ e non possiamo applicare il Lemma 5.9.9 direttamente. Però g è a supporto compatto. Sia $T > 0$ tale che il supporto di g sia contenuto nell'intervallo $[-T, T]$ (nel Teorema 5.9.2 si ha $T = \pi$). Dobbiamo limitare l'attenzione all'intervallo $a \leq x \leq b$ in cui f è limitata. Allora, se $u \in \text{supp}(g) \subset [-T, T]$, si ha $x + u \in [a - T, b + T]$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\cos nu g(u) f(u+x)| du &= \int_{-T}^T |\cos nu g(u) f(u+x)| du \\ &= \int_{-T}^T |\cos nu g(u) \tilde{f}(u+x)| du \end{aligned}$$

dove

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } t \in [a - T, b + T] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ora questa funzione \tilde{f} è a supporto compatto e, dove non è nulla, coincide con la funzione f , che è periodica di periodo K ed integrabile su un intervallo lungo un periodo:

$$\int_0^K |f(x)| dx < \infty.$$

Notiamo che, per la periodicità, $|f|$ ha integrale finito su ogni intervallo di lunghezza finita. Pertanto $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Ora, finalmente, il Lemma 5.9.9 si applica, e l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos nu g(u) f(u+x) du$$

converge uniformemente a zero per $n \rightarrow \infty$.

La dimostrazione per l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin nu g(u) f(u+x) du$$

è identica. □

Nota 5.9.10. (Principio di localizzazione.) Dal Teorema 5.9.2 segue che la somma della serie di Fourier di una funzione f ad un punto x dipende solo dai valori di f in un intorno arbitrariamente piccolo di x , e che il limite uniforme della serie di Fourier in un intervallo I su cui f è limitata dipende solo dai valori di f in un intorno arbitrariamente piccolo dell'intervallo I . Questo fatto è sorprendente, perché i coefficienti di Fourier dipendono invece dai valori di f su tutto il periodo. Di più, vedremo nella Sezione 5.18 che, se f è continua e periodica e g si ottiene da f modificando f in un intervallo arbitrariamente piccolo, ma introducendo un salto, allora l'ordine di infinitesimo dei coefficienti di Fourier di g cambia rispetto a quello di f : essi tendono ancora a zero, ma più lentamente di almeno un ordine di grandezza. Eppure, nonostante questo, la somma della serie di Fourier di g coincide con quella di f dove le due funzioni coincidono, e addirittura i limiti uniformi degli approssimanti di Fourier coincidono negli intervalli in un intorno dei quali le due funzioni coincidono. □

5.10 Visualizzazione geometrica del Lemma di Riemann–Lebesgue: modulazione di ampiezza e cancellazioni

Il Teorema 5.9.2 è stato dimostrato grazie alle cancellazioni negli integrali di funzioni oscillanti, come la funzione $\frac{\sin nu}{u}$. Queste proprietà di cancellazione

5.10. VISUALIZZAZIONE DEL LEMMA DI RIEMANN–LEBESGUE 537

sono state sfruttate nel Lemma di Riemann–Lebesgue 5.9.6 e nella Proposizione 5.9.8 sulla convergenza uniforme di integrali oscillanti. Vediamo come visualizzare il Lemma di Riemann–Lebesgue in termini di cancellazioni di integrali.

Sia f una funzione (o “segnale”) in $L^1(\mathbb{R})$.

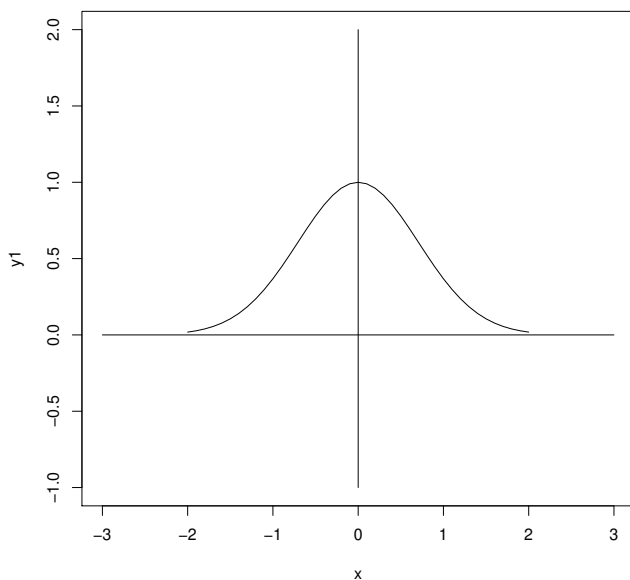


Figura 5.3: Un segnale a variazione lenta con grafico a campana

Il grafico di $f(t) \sin(\omega t)$ si ottiene da quello di $\sin(\omega t)$ mediante una modulazione di ampiezza $f(t)$ come illustrato nei grafici seguenti:

Il segnale così modulato ha un grafico con oscillazioni positive e negative. Se f è continua e a supporto compatto, queste oscillazioni danno luogo a contributi di segno opposto nell'integrale.

In tal caso, quando la frequenza ω aumenta, due oscillazioni consecutive racchiudono quasi la stessa area, ma con segni opposti nelle zone in cui $f \neq 0$. Se f si annulla in x_0 , le oscillazioni intorno a x_0 possono essere dello stesso segno, ma sono comunque piccole. Il grafico diventa:

È intuitivo che l'integrale risultante presenti cancellazioni via via più precise quando $|\omega|$ aumenta, e quindi tende a zero se $\omega \rightarrow \infty$. Se f non è continua,

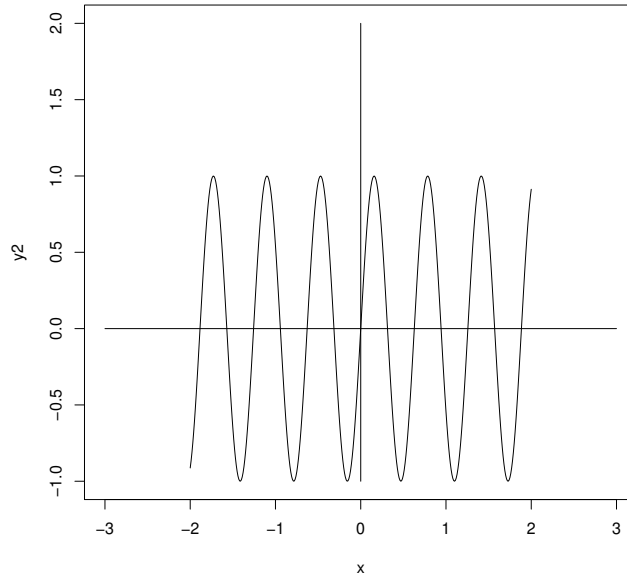


Figura 5.4: Un segnale sinusoidale

allora per grandi ω due oscillazioni consecutive potrebbero non cancellarsi abbastanza bene, perché i valori di f possono cambiare di colpo. (Ma se f è integrabile secondo Riemann, il Teorema di Lebesgue 1.9.37 dice che essa ha variazione che tende a zero in intorno appropriatamente piccoli di ciascun punto eccetto che su un insieme di misura di Lebesgue zero).

In questo caso, abbiamo approssimato f con funzioni continue a supporto compatto, ed usato per queste il principio delle cancellazioni. Questo è lo spirito della dimostrazione del Lemma 5.9.6.

5.11 Le condizioni di Lipschitz e di Hölder: gli spazi $\text{Lip}(\alpha)$

Definizione 5.11.1. (i) Una funzione definita su un intervallo (a, b) o su tutto \mathbb{R} verifica la condizione di Lipschitz se esiste M tale che per ogni

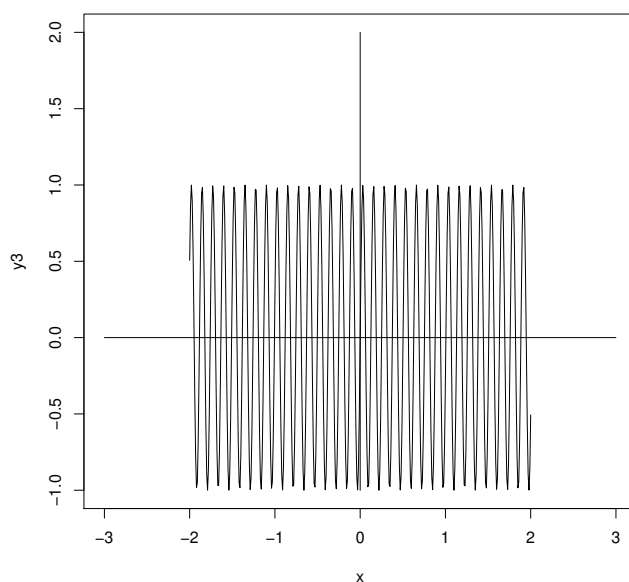


Figura 5.5: Un segnale sinusoidale rapidamente oscillante

x_1, x_2 nel dominio di definizione di f si abbia

$$|f(x_1) - f(x_2)| < M|x_1 - x_2|.$$

La più piccola costante M che verifica la disuguaglianza si chiama *costante di Lipschitz* (ovviamente essa dipende dalla scelta di f).

- (ii) Una funzione $f : (a, b) \mapsto \mathbb{C}$ (ovvero $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$) verifica la condizione di Hölder di ordine $\alpha > 0$ se esiste M tale che per ogni x_1, x_2 nel dominio di definizione di f si abbia

$$|f(x_1) - f(x_2)| < M|x_1 - x_2|^\alpha.$$

La più piccola costante M che verifica tale disuguaglianza si chiama *costante di Hölder* (dipende da f).

In particolare, la condizione di Hölder di ordine $\alpha = 1$ coincide con la condizione di Lipschitz.

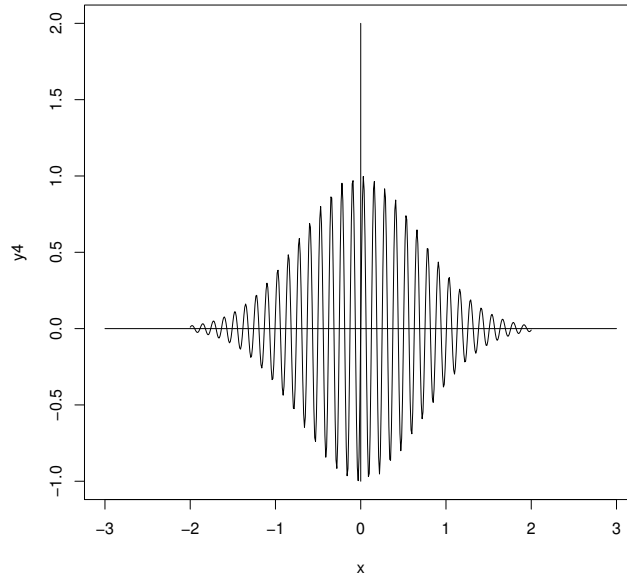


Figura 5.6: Modulazione del segnale a campana con il segnale sinusoidale ad oscillazione rapida

(iii) Lo spazio

$$\{f : (a, b) \mapsto \mathbb{C} : f \text{ soddisfa la condizione di Hölder di ordine } \alpha\}$$

si indica con $\text{Lip}(\alpha)$ o anche $\text{Lip}_\alpha([a, b])$ (e analogamente per le funzioni definite su tutto \mathbb{R}).

(iv) Una funzione $f : (a, b) \mapsto \mathbb{C}$ (ovvero $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$) verifica la condizione di Hölder locale di ordine $\alpha > 0$ al punto $x \in (a, b)$ se $\exists M = M_x$ tale che per ogni $x_1 \in (a, b)$ si abbia

$$|f(x) - f(x_1)| < M_x |x - x_1|^\alpha.$$

Esercizio 5.11.2. Si mostri che dalla Definizione 5.11.1 segue immediatamente che sia le funzioni Lipschitziane sia quelle Hölderiane sono uniformemente continue (Definizione 1.8.2).

Suggerimento: si applichi il teorema del confronto (Sezione 1.1). \square

Nota 5.11.3. Per $\alpha > 1$ lo spazio $Lip(\alpha)$ consiste solo delle costanti. Infatti, se $f \in Lip(\alpha)$ con $\alpha > 1$, si ha: per ogni x nel dominio di f , per ogni $h > 0$ tale che $x + h$ nel dominio di f ,

$$|f(x+h) - f(x)| < M|h|^\alpha$$

e quindi

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| < M|h|^{\alpha-1} \rightarrow 0$$

per $h \rightarrow 0$.

Perciò la derivata f' esiste ed è nulla ovunque. Quindi f è costante.

Ne segue che $Lip(\alpha)$ è banale per $\alpha > 1$. Da qui in avanti considereremo solo gli spazi $Lip(\alpha)$ con $\alpha \leq 1$. \square

Nota 5.11.4. È chiaro che $Lip(\alpha)$ è uno spazio vettoriale. Infatti è ovvio che per ogni $c \in \mathbb{C}$ e per ogni $f \in Lip(\alpha)$ si ha $cf \in Lip(\alpha)$. Inoltre se $f, g \in Lip(\alpha)$ anche $f + g \in Lip(\alpha)$, perché

$$\begin{aligned} |(f+g)(x_1) - (f+g)(x_2)| &= |f(x_1) - f(x_2) + g(x_1) - g(x_2)| \\ &\leq |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| \\ &\leq M_1|x_1 - x_2|^\alpha + M_2|x_1 - x_2|^\alpha \\ &\leq M|x_1 - x_2|^\alpha. \end{aligned}$$

\square

Nota 5.11.5. (i) Se $f \in Lip(1)$ è derivabile, allora $|f'(x)|$ è limitata dalla costante di Lipschitz.

(ii) $f \in Lip(1)$ non implica che f sia derivabile.

Dimostrazione.

(i) Se $f \in Lip(1)$ ed esiste $f'(x)$, allora $|f(x+h) - f(x)| < M|h|$ e quindi

$$|f'(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq M.$$

- (ii) Il seguente è un esempio di una funzione f definita ovunque che verifica la condizione di Lipschitz ma non è derivabile in 0: $f(x) = |x|$.

Infatti, per la disuguaglianza triangolare [19, Cap. 16 (Appendice)],

$$|f(x_1) - f(x_2)| = ||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|.$$

Quindi f soddisfa la condizione di Lipschitz con costante di Lipschitz uguale a 1.

□

L'esempio precedente si generalizza alle funzioni hölderiane nel modo seguente.

Esempio 5.11.6. Per $0 < \alpha < 1$ la funzione $f_\alpha(x) = |x|^\alpha$ soddisfa la condizione di Hölder di ordine α con costante di Hölder uguale a 1, ma non è derivabile in 0.

Dimostrazione. È ovvio che f non è derivabile in 0 per $0 < \alpha < 1$. Si ha, per $x_1 \neq x_2$,

$$\frac{|f_\alpha(x_1) - f_\alpha(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} = \frac{||x_1|^\alpha - |x_2|^\alpha|}{|x_1 - x_2|^\alpha}. \quad (5.24)$$

Supponiamo $|x_1| > |x_2|$ e poniamo $t = \left| \frac{x_1}{x_2} \right| > 1$. Poiché $|x_1 - x_2| \geq |x_1| - |x_2|$ (disuguaglianza triangolare) si ha

$$\left| \frac{x_1 - x_2}{x_2} \right|^\alpha \geq \left| \left| \frac{x_1}{x_2} \right| - 1 \right|^\alpha = (t - 1)^\alpha.$$

Quindi, dividendo per $|x_2|^\alpha$ il numeratore ed il denominatore del membro di destra nella (5.24), si ottiene

$$\frac{|f_\alpha(x_1) - f_\alpha(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} \leq \frac{t^\alpha - 1}{(t - 1)^\alpha} := \phi_\alpha(t).$$

Il secondo membro ϕ_α è una funzione crescente in $(1, \infty)$ perchè $\phi'_\alpha(t) > 0$ per ogni $t \geq 1$. È chiaro che $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_\alpha(t) = 1$. Ponendo $s = t - 1$ e rammentando lo sviluppo in serie di potenze della serie binomiale (1.17), si vede che

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \phi_\alpha(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{(1 + s)^\alpha - 1}{s^\alpha} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\alpha s}{s^\alpha} = 0.$$

Quindi

$$\sup \{ \phi_\alpha(t), 1 < t < \infty \} = 1.$$

Perciò f_α è hölderiana con costante di Hölder uguale a 1. \square

Proposizione 5.11.7. *Se f è derivabile in (a, b) (o in \mathbb{R}) con derivata limitata allora f verifica la condizione di Lipschitz con costante di Lipschitz uguale a $\|f'\|_\infty$.*

Dimostrazione. Per il Teorema del Valor Medio di Lagrange (Sezione 1.1) per ogni $x_1 < x_2$ esiste $\xi \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

e quindi

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \|f'\|_\infty |x_2 - x_1|.$$

\square

Definizione 5.11.8. Si dice che una funzione f definita in $[a, b]$ (o in \mathbb{R}) è continua a tratti se esiste eccetto che per un numero finito di punti $\{x_i\}$ in ogni intervallo di lunghezza finita, e per ciascuno di tali punti x_i esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$$

(in altre parole se f ha un numero finito di discontinuità in ogni intervallo di lunghezza finita, tutte di prima specie, cioè a salto finito).

Si dice che f è C^1 a tratti se f e f' sono continue a tratti, ossia se esiste un numero finito di punti $\{x_i\}$ in ogni intervallo di lunghezza finita, tali che $f \in C^1(x_i, x_{i+1})$ per ogni i e per ciascuno di tali punti x_i esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} f'(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_i^-} f'(x).$$

Nota 5.11.9. Se f è C^1 a tratti, allora è continua a tratti con discontinuità costituite da punti di salto di ampiezza finita. Infatti, siano come sopra $\{x_i\}$ i punti di salto di f' . Su ciascun intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ la funzione f' si estende ad una funzione F_i continua, quindi limitata. Ovviamente f è continua

all'interno di questi intervalli, essendo ivi derivabile. Inoltre, fissiamo un punto ξ nell'intervallo (x_{i-1}, x_i) . Allora, per il Teorema Fondamentale del Calcolo (Teorema 1.27.1), $\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) = f(\xi) + \int_{\xi}^{x_i} f'(t) dt$ è finito, e lo stesso risultato vale per $\lim_{x \rightarrow x_{i-1}^+} f(x)$. Quindi tutte le discontinuità di f sono salti finiti. \square

Proposizione 5.11.10. *Una funzione continua e C^1 a tratti definita in un intervallo $[a, b]$ di lunghezza finita soddisfa la condizione di Lipschitz.*

Dimostrazione. Siano $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ i punti di salto di f' nell'intervallo (a, b) . Per ogni $i = 1, \dots, n-1$ nell'intervallo aperto (x_i, x_{i+1}) esiste f' ed inoltre esistono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} f'(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_i^-} f'(x).$$

Poniamo $x_0 = a$ e $x_{n+1} = b$. Abbiamo visto nella Nota 5.11.9 precedente che f' si estende a una funzione continua F_i nell'intervallo chiuso $[x_i, x_{i+1}]$ (cautela: poiché f' ha un salto in x_i non è vero che $F_{i-1}(x_i) = F_i(x_i)$).

Poiché F_i è continua nell'intervallo limitato e chiuso $[x_i, x_{i+1}]$ essa ammette massimo M_i per il Teorema di Weierstrass (si veda [19, Cap. 16 (Appendice)]). Perciò per ogni x nell'intervallo aperto (x_i, x_{i+1}) si ha che $|f'(x)| \leq M_i$, e quindi f è lipschitziana in (x_i, x_{i+1}) con costante di Lipschitz M_i , grazie alla Proposizione 5.11.7.

Ora sia $M = \max \{M_1, \dots, M_{n-1}\}$ e $x < y \in (a, b)$. Se succede che x e y appartengono allo stesso intervallo (x_i, x_{i+1}) , allora sappiamo che

$$|f(y) - f(x)| \leq M_i |y - x| \leq M |y - x|$$

e quindi la condizione di Lipschitz è soddisfatta per questi x e y con costante M . A titolo di illustrazione esaminiamo cosa succede quando $x \in (x_{i-1}, x_i)$ e $y \in (x_i, x_{i+1})$. In tal caso poiché f è continua in x_i (e quindi in particolare esiste il valore $f(x_i)$), si ha

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(y) - f(x_i) + f(x_i) - f(x)| \\ &\leq |f(y) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \\ &\leq M_i(y - x_i) + M_{i-1}(x_i - x) \\ &\leq M(y - x_i) + M(x_i - x) \\ &= M(y - x_i + x_i - x) = M(y - x) \end{aligned}$$

e quindi, di nuovo, f soddisfa la disuguaglianza di Lipschitz con costante M per questi valori di x e y . In generale avremo $x_{i-1} < x < x_i < x_{i+1} < \dots < x_j < y < x_{j+1}$. In tal caso

$$f(y) - f(x) = f(y) + f(x_i) + \sum_{k=i}^{j-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) - f(x_j) - f(x)$$

da cui

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(y) - f(x_j) + \sum_{k=i}^{j-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) + f(x_i) - f(x)| \\ &\leq M_j(y - x_j) + \sum_{k=i}^{j-1} M_k(x_{k+1} - x_k) + M_{i-1}(x_i - x) \\ &\leq M(y - x_j + \sum_{k=i}^{j-1} (x_{k+1} - x_k) + x_i - x) = M(y - x). \end{aligned}$$

Perciò la condizione di Lipschitz con costante M è verificata per ogni $x < y$ in (a, b) . \square

5.12 Convergenza puntuale e uniforme di serie di Fourier di funzioni hölderiane

La condizione che f sia di Hölder è sufficiente ad assicurare che la serie di Fourier di f converga a f .

Teorema 5.12.1. (Dirichlet). *Sia $f \in L^1_*$ (cioè periodica di periodo, diciamo 2π e integrabile sul periodo) e supponiamo che nell'intervallo $[a, b]$ f soddisfi la condizione di Hölder di ordine $\alpha > 0$. Allora per ogni $\delta > 0$ la serie di Fourier di f converge a f uniformemente nell'intervallo $[a + \delta, b - \delta]$.*

Dimostrazione. Poichè f è Hölderiana in $[a, b]$ essa è ivi continua e quindi limitata, per il Teorema di Weierstrass sulla esistenza dei massimi e dei minimi delle funzioni continue su un intervallo limitato e chiuso (si veda [19, Cap. 16 (Appendice)]). Perciò si applica il Teorema 5.9.2, da cui segue che per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni $\eta > 0$,

$$S_n f(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{\sin nu}{u} (f(x+u) - f(x)) du + \rho_n(x, \eta)$$

dove $\rho_n(x, \eta) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ uniformemente rispetto a x in $[a, b]$.

Per ogni η tale che $0 < \eta < \delta$ e per ogni $x \in [a + \delta, b - \delta]$ il punto $x + u$ appartiene a $[a, b]$ per ogni u tale che $0 \leq |u| \leq \eta$. Perciò dalla condizione di Hölder segue

$$|f(x + u) - f(x)| \leq M|u|^\alpha \quad (5.25)$$

per tutti questi u e x .

Quindi, per $x \in [a + \delta, b - \delta]$ e $0 \leq \eta \leq \delta$,

$$\begin{aligned} |S_n f(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{\eta} |\sin nu| \left| \frac{f(x + u) - f(x)}{u} \right| du + |\rho_n(x, \eta)| \\ &\leq \frac{1}{\pi} M \int_{-\eta}^{\eta} \left| \frac{u^\alpha}{u} \right| du + |\rho_n(x, \eta)| \\ &\leq 2 \frac{M}{\pi} \int_0^{\eta} u^{\alpha-1} du + |\rho_n(x, \eta)| \\ &\leq \frac{2M}{\pi\alpha} \eta^\alpha + |\rho_n(x, \eta)|. \end{aligned}$$

Nell'ultimo membro il secondo termine converge a zero per ogni η uniformemente rispetto a x , e quindi per ogni ε , $\eta > 0$ esiste $N = N_{\varepsilon, \eta} \geq 0$ tale che, per ogni $n \geq N$, si ha $|\rho_n(x, \eta)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (indipendentemente da x).

Inoltre il primo termine $\frac{2M}{\pi\alpha} \eta^\alpha$ converge a zero se $\eta \rightarrow 0$ (perché $\alpha > 0$). Quindi dato $\varepsilon > 0$ esiste $\beta > 0$ tale che per ogni $\eta < \beta$ si ha

$$\frac{2M}{\pi\alpha} \eta^\alpha < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.26)$$

Dato ε , fissiamo un valore di $\eta < \beta$. Allora per ogni $n > N = N_{\varepsilon, \eta}$ valgono entrambe queste disuguaglianze, e quindi per $x \in [a + \delta, b - \delta]$ si ha

$$|S_n f(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Questo equivale alla convergenza di $S_n f$ a f uniformemente rispetto a x nell'intervallo $[a + \delta, b - \delta]$. \square

Nota 5.12.2. (Convergenza puntuale o uniforme e condizioni di Hölder locali e globali.) Nella dimostrazione del Teorema di Dirichlet 5.12.1 abbiamo usato la condizione di Hölder globale (5.25): $|f(x + u) - f(x)| \leq$

$M|u|^\alpha$ per tutti gli x e per u abbastanza piccolo. Questo porta alla disuguaglianza (5.26) (uniforme rispetto a x , e tramite essa alla convergenza uniforme della serie di Fourier).

Si noti che, se invece avessimo richiesto una disuguaglianza di Hölder *locale* al punto x (parte (iv) della Definizione 5.11.1), ossia, per x fissato,

$$|f(x+u) - f(x)| \leq M_x |u|^\alpha$$

per u abbastanza piccolo, allora la stessa dimostrazione proverebbe solo la convergenza puntuale della serie di Fourier al punto x . In particolare, la condizione aggiuntiva da imporre, per passare dalla convergenza puntuale su un intervallo aperto dove f è limitata alla convergenza uniforme in ogni sottointervallo chiuso, è che le costanti di Hölder M_x siano limitate uniformemente rispetto a x . \square

Riscriviamo quanto appena detto come enunciato separato:

Corollario 5.12.3. (Convergenza puntuale di serie di Fourier). *Sia $f \in L_*^1$ e supponiamo che ad un punto x nell'intervallo $[a, b]$ f soddisfi la condizione di Hölder locale di ordine $\alpha > 0$,*

$$|f(x+u) - f(x)| \leq M_x |u|^\alpha,$$

e quindi in particolare f è continua in x ed ha senso parlare del suo valore $f(x)$. Allora le somme parziali $S_n f(x)$ della serie di Fourier di f convergono a $f(x)$.

Corollario 5.12.4. *Sia $f \in C_*$ e supponiamo che f sia C^1 a tratti in $[0, 2\pi]$ e con limiti*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f'(x)$$

finiti (a causa della periodicità questo equivale a richiedere che f sia C^1 a tratti in un qualche intervallo $[-\delta, 2\pi + \delta]$ e quindi sempre per la periodicità, C^1 a tratti in ogni intervallo di lunghezza finita).

Allora la serie di Fourier di f converge a f uniformemente ovunque.

Dimostrazione. Per la Proposizione 5.11.10, f soddisfa la condizione di Hölder in ogni intervallo di \mathbb{R} (quindi ovunque in \mathbb{R} per la periodicità). Grazie al Teorema di Dirichlet 5.12.1, la serie di Fourier di f converge a f uniformemente in ogni intervallo. Poiché f è periodica, la convergenza uniforme vale su tutto \mathbb{R} . \square

5.13 Completezza del sistema trigonometrico in C_* , L_*^2 e L_*^p ($1 \leq p < \infty$)

Consideriamo dapprima due nuovi spazi:

Definizione 5.13.1. Indichiamo con C_*^+ il sottospazio di C_* delle funzioni pari, e con C_*^- il sottospazio di C_* delle funzioni dispari.

Corollario 5.13.2. (i) C_*^+ è isometricamente isomorfo a $C[0, \pi]$

(ii) C_*^- è isometricamente isomorfo al sottospazio C_0 di $C[0, \pi]$ di tutte le funzioni f che verificano $f(0) = f(\pi) = 0$.

Dimostrazione.

- (i) Ogni funzione h in $C[0, \pi]$ si prolunga a una funzione \tilde{h} in C_*^+ per parità: in $[-\pi, 0]$ definiamo $\tilde{h}(x) = h(-x)$ e osserviamo che quindi $\tilde{h}(-\pi) = \tilde{h}(\pi)$. Poi estendiamo \tilde{h} da $[-\pi, \pi]$ a tutto \mathbb{R} per periodicità. Poiché \tilde{h} ha lo stesso valore in π e in $-\pi$ l'estensione è continua. Viceversa se $\tilde{g} \in C_*^+$ allora la restrizione di \tilde{g} a $[0, \pi]$ appartiene a $C[0, \pi]$. Chiaramente questa corrispondenza è lineare e isometrica.
- (ii) Nel caso di funzioni dispari la corrispondenza da C_*^- a $C[0, \pi]$ è ancora la restrizione all'intervallo $[0, \pi]$. Però se $\tilde{g} \in C_*^-$ allora, poiché è dispari, si deve avere $\tilde{g}(0) = 0$ e $\tilde{g}(\pi) = -\tilde{g}(-\pi)$. Ma poiché \tilde{g} è anche periodica di periodo 2π si ha $\tilde{g}(\pi) = \tilde{g}(-\pi)$ e quindi $\tilde{g}(\pi) = \tilde{g}(-\pi) = 0$. Perciò la restrizione di \tilde{g} all'intervallo $[0, \pi]$ appartiene a C_0 . Nell'altro senso, ogni funzione in C_0 si estende a una funzione in C_*^- per disparità: se $h \in C_0$ estendiamo dapprima h all'intervallo $[-\pi, 0]$ ponendo $h(-x) = -h(x)$ (si osservi che $h(0) = h(\pi) = h(-\pi) = 0$ perché $h \in C_0$). Poi prolunghiamo h a una funzione su tutto \mathbb{R} per periodicità. Poiché h ha lo stesso valore in $-\pi$ e π l'estensione periodica è continua. Anche in questo caso l'isometria è ovvia.

□

Il Corollario 5.12.4 del Teorema di Dirichlet 5.12.1 implica il seguente fondamentale teorema di completezza:

Teorema 5.13.3 (Weierstrass). (i) *Il sistema trigonometrico (definito nel Corollario 5.1.10) è completo in C_* cioè ogni funzione $f \in C_*$ si approssima uniformemente con combinazioni lineari del tipo*

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$$

(in altre parole, lo spazio generato dal sistema trigonometrico è denso in C_*).

- (ii) *Il sistema $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ costituito dalle funzioni pari del sistema trigonometrico è completo in C_*^+ .*
- (iii) *Il sistema $\{\sin x, \sin 2x, \dots\}$ costituito dalle funzioni dispari del sistema trigonometrico è completo in C_*^- .*

Dimostrazione. Il Corollario 5.12.4 mostra che il sistema trigonometrico è completo (nella norma uniforme) nel sottospazio di C_* delle funzioni C^1 a tratti (in questo sottospazio, ogni funzione viene approssimata uniformemente dalle somme parziali della serie di Fourier). Procediamo per approssimazione. A questo scopo introduciamo il seguente lemma (parte del quale è stata sostanzialmente già vista nella dimostrazione della Proposizione 1.14.5):

Lemma 5.13.4. (i) *Il sottospazio di C_* delle funzioni C^1 a tratti è denso in C_* .*

(ii) *Il sottospazio di C_*^+ delle funzioni C^1 a tratti è denso in C_*^+ .*

(iii) *Il sottospazio di C_*^- delle funzioni C^1 a tratti è denso in C_*^- .*

In tutti e tre i casi, è denso anche il sottospazio P delle funzioni C^1 a tratti costituito dalle funzioni continue lineari a tratti (cioè quelle il cui grafico è una poligonale).

Dimostrazione.

- (i) Sia $f \in C_*$. Poiché f è continua nel compatto $[-\pi, \pi]$, f è uniformemente continua in $[-\pi, \pi]$ (e per periodicità su tutto \mathbb{R}) grazie al Teorema di Heine sulla uniforme continuità delle funzioni continue sui compatti (Teorema 1.8.6). Perciò per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $|t_1 - t_2| < \delta$, allora $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$.

Ora utilizziamo lo stesso argomento dell'Esercizio 1.14.6. Sia $x_0 = -\pi < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \pi$ una partizione di $[-\pi, \pi]$ in intervalli di ampiezza minore di δ . Costruiamo la funzione $p \in P$ (lineare a tratti) che coincide con f nei punti x_0, x_1, \dots, x_n e negli intervalli $[x_i, x_{i+1}]$ è lineare.

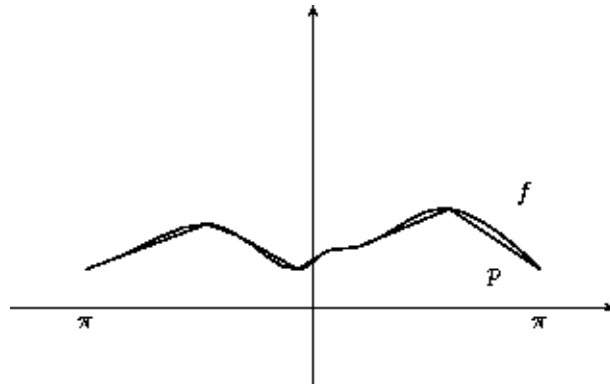


Figura 5.7: Approssimazione con funzioni lineari a tratti

Allora si ha:

- (a) $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ se $x, y \in [x_i, x_{i+1}]$ per costruzione degli x_i ; in particolare, $|f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \varepsilon$.
- (b) $|p(x_{i+1}) - p(x_i)| = |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \varepsilon$
- (c) se $x, y \in [x_i, x_{i+1}]$ allora $|p(x) - p(y)| < \varepsilon$ per linearità.

Da (a) e (b) segue che per ogni i , per ogni $t \in [x_i, x_{i+1}]$ si ha

$$|f(t) - p(t)| \leq |f(t) - f(x_i)| + |f(x_i) - p(x_i)| < 2\varepsilon.$$

Ma ogni $t \in [-\pi, \pi]$ sta in un intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ e quindi $\|f - p\|_{C[-\pi, \pi]} < 2\varepsilon$. Questo dimostra (i).

- (ii) Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato basta osservare che la funzione lineare a tratti p si può scegliere pari se f è pari: basta prendere i punti della partizione in modo simmetrico rispetto a zero (cioè $x_1 = -x_{n-1}$, $x_2 = -x_{n-2}$ e così via.)

(iii) Per dimostrare la terza parte basta osservare che se f è dispari la scelta della partizione simmetrica produce una approssimazione lineare a tratti p dispari.

□

Per inciso, la dimostrazione del precedente Lemma 5.13.4, adattata ad un compatto qualsiasi, non necessariamente $[-\pi, \pi]$, porta alla seguente conclusione che ci sarà utile in seguito:

Corollario 5.13.5. *Le funzioni C^1 su un compatto K sono uniformemente dense nello spazio $C(K)$ delle funzioni continue.*

Fine della dimostrazione del Teorema 5.13.3.

Sia $f \in C_*$. Per ogni $\varepsilon > 0$ sappiamo che esiste una funzione $p = p_\varepsilon$ lineare a tratti tale che $\|f - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Poiché p è continua, periodica e C^1 a tratti, dal Corollario 5.12.4 sappiamo che esiste n tale che l'approssimante n -simo di Fourier q_n di p

$$q_n(x) = \frac{a_0(\varepsilon)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(\varepsilon) \cos kx + b_k(\varepsilon) \sin kx)$$

verifica

$$\|p - q_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

(abbiamo scritto tutti i coefficienti di Fourier come funzioni di ε per enfatizzare che essi dipendono dalla scelta di ε perché da questa scelta dipende $p = p_\varepsilon$). Perciò per ogni $\varepsilon > 0$ esiste q_n polinomio trigonometrico (cioè combinazione lineare finita degli elementi del sistema trigonometrico) tale che

$$\|f - q_n\|_\infty \leq \|f - p_\varepsilon\|_\infty + \|p_\varepsilon - q_n\|_\infty < \varepsilon.$$

Questo dimostra (i).

Per dimostrare (ii) si osserva che se $f \in C_*^+$ allora per il Lemma 5.13.4 l'approssimante p_ε può essere scelto pari. Per dimostrare (iii) si osserva che, in modo analogo, se $f \in C_*^-$, l'approssimante può essere scelto dispari. Allora la dimostrazione di (ii) e (iii) è conseguenza immediata del seguente

Lemma 5.13.6. (i) Se $f \in L_*^1$ è pari, allora

$$b_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = 0 \quad \forall k$$

e quindi la serie di Fourier di f consiste solo di termini pari

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_k a_k \cos kx.$$

(ii) Se $f \in L_*^1$ è dispari, allora

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = 0 \quad \forall k$$

e quindi la serie di Fourier di f consiste solo di termini dispari

$$f(x) \sim \sum_k a_k \sin kx$$

Dimostrazione. Ovvio, dato il fatto che se f è pari allora $x \rightarrow f(x) \sin kx$ è dispari, e se f è dispari allora $x \rightarrow f(x) \cos kx$ è dispari. \square

Nota 5.13.7. Il Teorema di Completezza di Weierstrass 5.13.3 prova che ogni $f \in C_*$ può essere approssimata uniformemente con polinomi trigonometrici q_n di grado n . Allora, se scriviamo $r_0 = q_0$ e $r_k = q_k - q_{k-1}$ per $k = 1, 2, \dots$, f viene approssimata uniformemente dalle somme parziali della serie

$$\sum_{k=0}^n r_k(x) = (q_n(x) - q_{n-1}(x)) + \dots + (q_1(x) - q_0(x)) + q_0(x) = q_n(x).$$

Ma questo non vuol dire che ogni $f \in C_*$ sia approssimata uniformemente dalle somme parziali della sua serie di Fourier. Infatti si ha che per ogni ε esiste n tale che

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n r_k \right\|_{\infty} < \varepsilon,$$

ma non solo n , bensì anche tutti i termini r_k dipendono dalla scelta di ε . Invece nella serie di Fourier di f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

i termini dipendono solo da f , non da ε . Se si avesse approssimazione uniforme con le somme parziali della serie di Fourier, per ogni ε si potrebbe approssimare f a meno di ε con una somma parziale S_n dove soltanto n , cioè il numero degli addendi, dipende da ε , ma i singoli addendi non sono funzioni di ε . In altre parole, al decrescere di ε aumenterebbe l'ordine di n , si aggiungerebbero quindi nuovi termini in $\cos kx$ e $\sin kx$ di frequenza k elevata, ma i termini precedenti, di frequenza $k \leq n$, rimarrebbero gli stessi di prima.

In effetti, come abbiamo accennato in Sezione 5.5, esistono funzioni in L_*^1 la cui serie di Fourier non converge (anzi, diverge ovunque): per maggiori dettagli si veda il successivo Capitolo 7. \square

Siamo finalmente in grado di dimostrare l'asserzione fondamentale annunciata in 5.2.1: la completezza del sistema ortonormale

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \right\}$$

nello spazio di Hilbert L_*^2 .

Corollario 5.13.8. (*Completezza in L^2 e L^p*).

(i) *Il sistema trigonometrico è completo in L_*^2*

(ii) *Il sistema trigonometrico è completo in L_*^p per ogni p , $1 \leq p < \infty$.*

Dimostrazione. Ancora una volta si procede per approssimazione.

Per provare (i) basta ricordare che C_* è denso in L_*^2 (ovvia conseguenza del Proposizione 1.18.6) e per ogni $g \in C_*$ si ha $\|g\|_2 \leq \|g\|_\infty$. Perciò, dati $\varepsilon > 0$ e $f \in L_*^2$, esiste $h \in C_*$ tale che $\|f - h\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sappiamo anche, dal Teorema 5.13.3 (i), che il sistema trigonometrico è completo in C_* , cioè che per ogni $h \in C_*$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio trigonometrico q tale che $\|h - q\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2C}$.

Pertanto

$$\begin{aligned} \|f - q\|_2 &\leq \|f - h\|_2 + \|h - q\|_2 \\ &\leq \|f - h\|_2 + C\|h - q\|_\infty \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + C \frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Per provare (ii) si procede in maniera identica usando il fatto che C_* è denso in L_*^p per $1 \leq p < \infty$ (ma non in L_*^∞) e per ciascuno di questi p si ha

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

(Proposizione 1.18.6). □

Nota 5.13.9. Per comodità del lettore, richiamiamo brevemente, in maniera non esauriente ma sintetica, l'idea della dimostrazione del fatto che $C[0, \pi]$ è denso in $L^1[0, \pi]$ (Proposizione 1.18.6). Rammentiamo anzitutto che questo fatto segue immediatamente ed elegantemente dal Teorema di Lusin 1.14.10, ma preferiamo riproporne una dimostrazione più artigianale perchè il Teorema di Lusin non è del tutto elementare, dal momento che richiede alcuni preliminari di teoria della misura e di topologia.

Per definizione di L^1 , se $f \in L^1[0, \pi]$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione semplice

$$g = \sum_{i=1}^n c_i \chi_i$$

(dove χ_i è la funzione che vale 1 su un aperto O_i e 0 altrove) tale che

$$\|f - g\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora limitiamo l'attenzione al caso in cui gli O_i sono intervalli aperti, ossia g è una funzione a gradini (è perciò che questa dimostrazione non è esauriente, ma abbiamo dimostrato nella Proposizione 1.18.4 che questo caso particolare approssima quello generale nella norma L^1). Consideriamo gli n salti della funzione (discontinua) g e modifichiamo g rimpiazzandola con una funzione lineare negli n intervalli con centro in uno di questi punti di salto e diametro $\frac{\varepsilon}{2n\|g\|_\infty}$, esattamente come nella dimostrazione del Lemma 5.13.4(i). Come in quella dimostrazione si ottiene così una nuova funzione \tilde{g} continua, che verifica

$$\|g - \tilde{g}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quindi

$$\|f - \tilde{g}\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - \tilde{g}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Corollario 5.13.10. (Teorema di unicità). Se $f, g \in L_*^2$ e $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, allora $f = g$ in L_*^2 .

Dimostrazione. Poiché il sistema trigonometrico è completo in L_*^2 (Corollario 5.13.8) questo enunciato non è altro che il fatto che il sistema trigonometrico è massimale (Teorema 4.3.7). \square

5.14 Esempio del tipo di convergenza della serie di Fourier di una funzione con discontinuità a salto: la funzione a denti di sega

Esempio 5.14.1. La funzione a denti di sega è definita nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ in questo modo:

$$\Theta(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & \text{se } 0 < x < \pi, \\ -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & \text{se } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Inoltre poniamo $\Theta(-\pi) = \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0$. (Si noti che potremmo scegliere altri valori per Θ a questi tre punti senza che questo modifichi i coefficienti di Fourier: ma la scelta che abbiamo fatto rende più elegante il risultato sulla convergenza degli approssimanti di Fourier che stiamo per presentare). \square

Come sempre, estendiamo Θ per periodicità a tutto \mathbb{R} . Il grafico della funzione periodica Θ è in Figura 5.8.

La funzione Θ ha un salto di ampiezza π nei punti $\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Poiché questa funzione non è continua, ad essa non si applica il Teorema 5.12.1 di Dirichlet su tutto \mathbb{R} , però si applica sull'intervallo $[\delta, 2\pi - \delta]$ e sui suoi traslati di passo 2π .

Calcoliamo i coefficienti di Fourier di Θ ed il limite delle somme parziali della sua serie di Fourier per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si noti che $\Theta \in L_*^2$ e quindi i coefficienti di Fourier esistono e tendono a zero per $n \rightarrow \infty$, in base alla Proposizione 5.2.4 (conseguenza della disuguaglianza di Bessel). Inoltre $S_n \Theta \rightarrow \Theta$ per $n \rightarrow \infty$ nella norma di L^2 , in

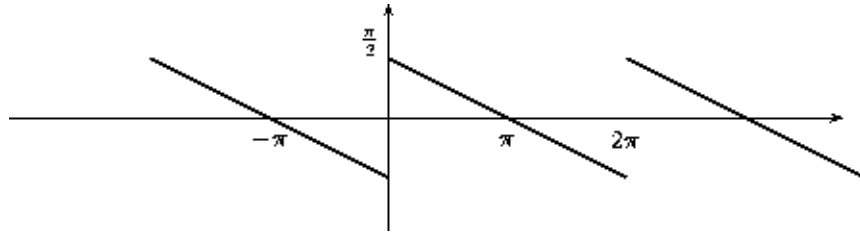


Figura 5.8: La funzione periodica a denti di sega $\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$

base al Corollario 5.13.8(i) (completezza del sistema trigonometrico) ed al Corollario 4.3.2(ii).

Per il Teorema 5.12.1 di Dirichlet, $S_n \Theta \rightarrow \Theta$ puntualmente nell'intervallo aperto $(0, 2\pi)$ e più in generale in $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$, e uniformemente in $[\delta, 2\pi - \delta]$ (e più in generale in $[2k\pi + \delta, 2(k+1)\pi - \delta]$).

Osserviamo che la funzione Θ è dispari (come rivela la sua definizione ed è ovvio dal suo grafico). Perciò i coefficienti di Fourier a_k sono tutti nulli. Calcoliamo b_k . Si ha:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Theta(t) \sin kt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin kt \, dt \\ &= \int_0^{\pi} \sin kt \, dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin kt \, dt. \end{aligned}$$

La primitiva di $\sin kt$ è $-\frac{\cos kt}{k}$. Quindi

$$\int_0^{\pi} \sin kt \, dt = -\frac{\cos kt}{k} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{k} - \frac{\cos(k\pi)}{k} = \frac{1 - (-1)^k}{k}.$$

Inoltre, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t \sin kt \, dt &= -\frac{t \cos kt}{k} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos kt}{k} \, dt \\ &= \frac{(-1)^{k+1} \pi}{k}. \end{aligned}$$

perché

$$\int_0^{k\pi} \cos t \, dt = \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos kt \, dt = 0 \quad \forall k.$$

Perciò

$$\begin{aligned} b_k &= \int_0^\pi \sin kt \, dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \sin kt \, dt \\ &= \frac{1}{k} - \frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Quindi

$$S_n \Theta(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}. \quad (5.27)$$

Si osservi che, per $x = 2m\pi$, $\sin kx = 0$ per ogni k , e quindi $S_n \Theta(x) = \Theta(x)$. Per tutti gli altri x sappiamo già che $S_n \Theta(x) \rightarrow \Theta(x)$ puntualmente. Perciò $S_n \Theta(x) \rightarrow \Theta(x)$ puntualmente su tutto \mathbb{R} .

Nota 5.14.2. Per memoria futura, notiamo che, da (5.27), i coefficienti di Fourier della funzione Θ (che ha un salto) tendono a zero per $k \rightarrow \infty$ come $\frac{1}{k}$. Inoltre, dalle formule della Proposizione 5.2.5, si ha che $\widehat{\Theta}(k) = -\frac{i}{2k} \rightarrow 0$. \square

5.15 Convergenza puntuale di serie di Fourier di funzioni periodiche C^1 a tratti e con un numero finito di discontinuità nel periodo, tutte di tipo salto

Utilizziamo il Teorema 5.12.1 di Dirichlet (è sufficiente il Corollario 5.12.4) e l'Esempio 5.14.1 per provare il seguente teorema di convergenza puntuale:

Teorema 5.15.1. *Sia $f \in L^1_*$, C^1 a tratti su un intervallo $[a, b]$ e con un unico punto di discontinuità x_0 in questo intervallo (interno all'intervallo, $x_0 \in (a, b)$). Sappiamo che la discontinuità di f in x_0 è un salto finito (Nota 5.11.9), cioè esistono finiti i limiti*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-).$$

Allora

- (i) al punto x_0 la serie di Fourier di f converge alla media aritmetica $\frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$
- (ii) per ogni $\delta > 0$ negli intervalli $[a + \delta, x_0 - \delta]$ e $[x_0 + \delta, b - \delta]$ la serie di Fourier di f converge a f uniformemente (e quindi puntualmente).

Dimostrazione. La parte (ii) segue direttamente dal Corollario 5.12.4.

Proviamo (i). Per ragioni di eleganza, assumiamo, senza perdita di generalità, che $f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$: stiamo cambiando il valore di f nel solo punto x_0 , il che non cambia i coefficienti di Fourier. Per la funzione f così definita l'enunciato assume una forma più elegante: equivale ad asserire che $S_n f(x) \rightarrow f(x)$ per ogni x .

Per provare questa asserzione, *rimuoviamo* il salto nel modo seguente: denotiamo con A l'ampiezza del salto in x_0 : $A = f(x_0^+) - f(x_0^-)$. Sia $h(x) = \frac{1}{\pi} A \Theta(x - x_0)$, dove Θ è la funzione dell'Esempio 5.14.1, che ha un salto di ampiezza π in 0.

Quindi h ha, in $[a, b]$, soltanto un salto, al punto x_0 , di ampiezza A , esattamente come f .

Poniamo $g = f - h$. Allora g è C^1 a tratti in $[a, b]$, perché f e h lo sono. Inoltre g è continua in $[a, b]$, perché f e h hanno un solo punto di discontinuità in x_0 , ma in quel punto il salto di g è zero, e quindi g è continua anche in x_0 .

Per il Corollario 5.12.4 (o più precisamente per il Teorema 5.12.1 e la Proposizione 5.11.10), $S_n g \rightarrow g$ per $n \rightarrow \infty$ uniformemente in ogni sottointervallo chiuso contenuto in (a, b) ed in particolare $S_n g(x_0) \rightarrow g(x_0)$ per $n \rightarrow \infty$. Questo prova (i) (osserviamo che la stessa proprietà di convergenza vale per ogni $x \in [a + \delta, b - \delta]$ con δ arbitrariamente piccolo).

Abbiamo già dimostrato la parte (ii), ma ecco una dimostrazione più esplicita. Abbiamo visto nell'Esempio 5.14.1 che $S_n h(x) \rightarrow h(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e la convergenza è uniforme negli intervalli $[a + \delta, b - \delta]$ con δ arbitrariamente piccolo. Quindi

$$S_n f(x) = S_n g(x) + S_n h(x) \rightarrow g(x) + h(x) = f(x)$$

per ogni $x \in [a + \delta, b - \delta]$, in particolare per x_0 , e la convergenza è uniforme in $[a + \delta, x_0 - \delta]$ e $[x_0 + \delta, b - \delta]$. \square

Corollario 5.15.2. *Lo stesso enunciato vale se f ha un numero finito di salti nel suo periodo (e quindi in ogni intervallo di lunghezza finita).*

Dimostrazione. Basta rimuovere ciascun salto iterando la procedura: al punto di salto x_i con ampiezza del salto A_i si sottrae $h_i(x) = \frac{1}{\pi}A_i\Theta(x - x_i)$ e si somma su i . \square

5.16 Derivazione ed integrazione di serie di Fourier

In questa Sezione l'esposizione è più semplice se si scrive la serie di Fourier in forma complessa:

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx},$$

dove

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} dt$$

Lemma 5.16.1. *Se $f \in C_*^1$, allora, per ogni $k \in \mathbb{Z}$,*

$$\widehat{Df}(k) = ik\widehat{f}(k).$$

Lo stesso risultato vale se f è continua e C^1 a tratti (ossia se una partizione finita di $[-\pi, \pi]$ in intervalli contigui in ciascuno dei quali f' sia continua con limiti destro e sinistro finiti agli estremi degli intervalli). Più in generale, il risultato vale se f' esiste quasi ovunque ed appartiene a L_^1 .*

Dimostrazione. Sia $f \in C_*^1$. Integrando per parti abbiamo:

$$\begin{aligned} \widehat{Df}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} [e^{-ikt}f(t)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{ik}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} dt \\ &= ik\widehat{f}(k). \end{aligned} \tag{5.28}$$

perché $e^{-ik\pi}f(\pi) = e^{ik\pi}f(-\pi)$ per la periodicità.

Ora assumiamo che f sia continua ma f' sia continua a tratti. Denotiamo con I_j , $j = 1, \dots, N$ una partizione finita di $[-\pi, \pi]$ in intervalli contigui in ciascuno dei quali f' sia continua. Scriviamo $I_j = [x_j, y_j]$. La restrizione

di f' a ciascun I_j è una funzione continua nella parte interna (x_j, y_j) ma estendibile con continuità alla chiusura $[x_j, y_j]$, dal momento che il limite destro all'estremo x_j e sinistro a y_j esistono e sono finiti. Quindi, in ciascun I_j , possiamo integrare per parti come sopra, ed otteniamo

$$\int_{x_j}^{y_j} f'(t) e^{-ikt} dt = f(y_j)e^{-iky_j} - f(x_j)e^{-ikx_j} + ik \int_{x_j}^{y_j} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Pertanto, sommando su j e grazie alla periodicità, otteniamo

$$\begin{aligned} \widehat{D}f(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{ik}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt + \sum_{j=0}^{N-1} \left(\lim_{x \rightarrow x_j^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_j^-} f(x) \right) e^{-ikx_j} \right) = ik \widehat{f}(k), \end{aligned}$$

perché i termini della somma si annullano poiché f è continua.

Se si assume solo che f' esista quasi ovunque e sia in L^1_* , si applica lo stesso argomento del caso in cui f' era continua, grazie alla variante del Teorema Fondamentale del Calcolo per funzioni con derivata in L^1 , Teorema 1.28.12. \square

Corollario 5.16.2. *La derivata termine a termine della serie di Fourier di una funzione f continua, periodica e C^1 a tratti è la serie di Fourier della sua derivata.*

Nota 5.16.3. L'ipotesi che la funzione periodica f sia C^1 a tratti assicura che f' sia continua a tratti con un numero finito di discontinuità in ciascun periodo (Nota 5.11.9). Quindi f è limitata e continua a tratti, perciò $f \in L^1_*$ ed ha senso parlare della sua serie di Fourier. Però, perché si annulli la differenza dei valori al bordo in (5.28), devono essere univocamente definiti i valori di f ai punti π e $-\pi$. Per una funzione in L^1 i valori in un punto non sono ben definiti: la funzione non cambia se la si modifica in un insieme di punti di misura di Lebesgue nulla (Definizione 1.16.16). Per questo assumiamo che f sia continua.

Si osservi anche che (5.28) implica $\widehat{D}f(0) = 0$, come deve necessariamente essere visto che

$$\widehat{D}f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = \frac{1}{2\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) = 0$$

per la periodicità di f . □

Per dimostrare un risultato analogo per l'integrazione termine a termine di serie di Fourier osserviamo prima quanto segue.

Lemma 5.16.4. *Sia $g \in L_*^1$ e*

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

Allora f è periodica (di periodo 2π) se e solo se g è a media nulla sul periodo, cioè

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = 0.$$

Dimostrazione. Se

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = 0$$

allora f è periodica, perché

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} g(t) dt \\ &= \int_0^x g(t) dt + \int_x^{x+2\pi} g(t) dt \\ &= \int_0^x g(t) dt + \int_0^{2\pi} g(t) dt = f(x) \end{aligned}$$

per il Lemma 5.1.1.

Viceversa, se f è periodica di periodo 2π , allora

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = f(2\pi) - f(0) = \int_0^0 g(t) dt = 0.$$

□

Ora il comportamento della serie di Fourier sotto integrazione è una facile conseguenza del Lemma 5.16.1.

Proposizione 5.16.5. *Sia g una funzione periodica (di periodo 2π) e continua a tratti, cioè con un numero finito di discontinuità in ciascun periodo, tutte consistenti di salti di ampiezza finita. Supponiamo inoltre che g sia a media nulla sul periodo:*

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = 0.$$

Sia

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

Allora $\widehat{g}(k) = ik\widehat{f}(k)$ e le serie di Fourier di f e di g sono legate dalla relazione

$$\int_0^x S_n g(t) dt = S_n f(x) - S_n f(0).$$

Inoltre f è continua, periodica e C^1 a tratti, e $S_n f$ converge uniformemente a f e

$$\int_0^x S_n g(t) dt = \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) \int_0^x e^{ikt} dt$$

converge uniformemente a f .

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\widehat{g}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt = 0.$$

Poiché g è continua a tratti il Teorema Fondamentale del Calcolo (Teorema 1.27.1) implica che il suo integrale f è continuo e C^1 a tratti. Inoltre f è periodica per il Lemma 5.16.4. L'identità $\widehat{g}(k) = ik\widehat{f}(k)$ è il Lemma 5.16.1. Dal momento che $\widehat{g}(0) = 0$ possiamo scrivere

$$g \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(k)e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \widehat{g}(k)e^{ikx}.$$

Poiché in questa somma manca il termine costante (cioè $k = 0$) le somme di Fourier

$$S_n g(x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k)e^{ikx}$$

sono tutte a media nulla sul periodo. Inoltre $\widehat{f}(0) = \int_0^{2\pi} g(t) dt = 0$, e quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^x S_n g(t) dt &= \int_0^x \sum_{1 \leq |k| \leq n} \widehat{g}(k) e^{ikt} dt \\
&= \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{\widehat{g}(k)}{ik} (e^{ikx} - 1) \\
&= \sum_{1 \leq |k| \leq n} \widehat{f}(k) e^{ikx} - \sum_{1 \leq |k| \leq n} \widehat{f}(k) \\
&= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} - \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) \\
&= S_n f(x) - S_n f(0).
\end{aligned}$$

In base al Corollario 5.12.4 del Teorema di Dirichlet 5.12.1, $S_n f$ converge uniformemente a f , ed inoltre $f(0) = 0$ in base alla definizione di f . Quindi

$$\int_0^x S_n g(t) dt$$

converge uniformemente a f .

Nota 5.16.6. In base al Lemma 5.16.1 e alla Proposizione 5.2.5 la relazione fra i coefficienti di Fourier a_k, b_k in forma reale di una funzione e quelli della sua derivata (che indichiamo con a'_k, b'_k) risulta, ora, essere la seguente:

$$a'_k = \frac{\widehat{Df}(k) + \widehat{Df}(-k)}{2} = ik \frac{\widehat{f}(k) - ik\widehat{f}(-k)}{2} = kb_k$$

e

$$b'_k = i \frac{\widehat{Df}(k) - \widehat{Df}(-k)}{2} = \frac{-k\widehat{f}(k) - k\widehat{f}(-k)}{2} = -ka_k.$$

Si vede quindi che, se f è una funzione pari e pertanto per il Lemma 5.13.6 ha una serie di Fourier in soli coseni, allora f' ha una serie di Fourier in soli seni, e viceversa.

Questo fatto era comunque chiaro a priori perché la derivata di una funzione pari è dispari e viceversa. \square

5.17 Velocità di convergenza della serie di Fourier

Teorema 5.17.1. (Stima del resto n -simo della serie di Fourier). Siano $m > 1$ e f periodica (di periodo 2π) di classe C_*^{m-1} (cioè con derivata $(m-1)$ -esima continua) e con derivata m -sima $f^{(m)}$ in L_*^2 . Allora

$$\begin{aligned} |S_n f(x) - f(x)| &\leq \|f^{(m)}\|_{L^2[-\pi, \pi]} \sqrt{2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{m - \frac{1}{2}}} \frac{\|f^{(m)}\|_{L_*^2}}{n^{m - \frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Lo stesso risultato vale anche per $m = 1$, se si assume anche che f' sia continua a tratti.

Dimostrazione. Dal Corollario 5.12.4 del Teorema di Dirichlet segue che $S_n f$ converge a f uniformemente (è qui che si usa il fatto che f' sia continua a tratti: se $m > 1$ questo è già racchiuso nel fatto che $f \in C_*^{m-1}$).

Allora il Lemma 5.16.1 implica

$$\begin{aligned} f(x) - S_n f(x) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\widehat{f}(k) e^{ikx} + \widehat{f}(-k) e^{-ikx} \right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(ik)^m} \widehat{f^{(m)}}(k) e^{ikx} + \frac{1}{(-ik)^m} \widehat{f^{(m)}}(-k) e^{-ikx} \right) \quad (5.29) \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con $\widehat{f^{(m)}}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, i coefficienti di Fourier di $f^{(m)}$. Osserviamo che per ogni $a, b \geq 0$ si ha $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$ e quindi $2ab \leq a^2 + b^2$. Perciò $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2)$ (la stessa disuguaglianza si ottiene anche applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ai vettori (a, b) e $(1, 1)$). Ponendo ora

$$a = \sqrt{\sum_{k>n} |\widehat{f^{(m)}}(k)|^2}$$

e

$$b = \sqrt{\sum_{k<-n} |\widehat{f^{(m)}}(k)|^2}$$

vediamo che

$$\sqrt{\sum_{k < -n} |\widehat{f^{(m)}}(k)|^2} + \sqrt{\sum_{k > n} |\widehat{f^{(m)}}(k)|^2} \leq \sqrt{2 \sum_{|k| > n} |\widehat{f^{(m)}}(k)|^2}.$$

Da questo e dal fatto che $|e^{ikx}| = 1$, concludiamo, in base alla identità (5.29) ed alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in ℓ^2 (Proposizione 4.5.1) che

$$\begin{aligned} |S_n f(x) - f(x)| &\leq \sum_{k=-\infty}^{-n-1} \frac{1}{|k|^m} |\widehat{f^{(m)}}(k)| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^m} |\widehat{f^{(m)}}(k)| \\ &\leq \sqrt{2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}} \sqrt{\sum_{|k| > n} |\widehat{f^{(m)}}(k)|^2} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}} \|f^{(m)}\|_{L_*^2}. \end{aligned}$$

Da qui segue la prima disuguaglianza dell'enunciato. Per la seconda basta osservare che se $h(x) = \frac{1}{x^{2m}}$, allora h è decrescente per $x > 0$, quindi nell'intervallo $k-1 \leq x \leq k$ si ha $\frac{1}{k^{2m}} = h(k) \leq h(x) = \frac{1}{x^{2m}}$.

Perciò

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} < \int_n^{\infty} \frac{1}{x^{2m}} dx = \frac{1}{2m-1} \frac{1}{n^{2m-1}}.$$

Questo prova la seconda disuguaglianza dell'enunciato. \square

Si noti che l'ultima parte della dimostrazione del Teorema 5.17.1 è nient'altro che il criterio di confronto di una serie numerica con un integrale, che è stato enunciato nella Sezione 1.1:

Osserviamo che le somme parziali

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} + \widehat{f}(-k) e^{-ikx}$$

sono di ordine $2n+1$ (contengono $2n+1$ addendi). Quindi le differenze consecutive $S_{n+1}f - S_n f$ contengono sempre due addendi. In realtà, però, la dimostrazione del teorema vale anche per somme parziali di ogni ordine. L'enunciato più preciso è il seguente.

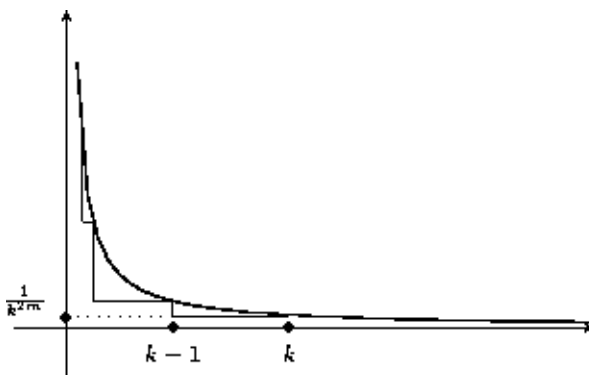


Figura 5.9: L'integrale di $1/x^{2m}$ domina la serie di $1/k^{2m}$

Teorema 5.17.2. *Sia $f \in C_*^{m-1}$ e $f^{(m)} \in L_*^2$ (se $m = 1$ supponiamo anche che f' sia continua a tratti). Siano*

$$\tilde{S}_{2n}f(x) = S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k)e^{ikx} + \hat{f}(-k)e^{-ikx}$$

e

$$\tilde{S}_{2n+1}f(x) = \sum_{k=-n}^{n+1} \hat{f}(k)e^{ikx} + \hat{f}(-k)e^{-ikx}.$$

Allora

$$\left| \tilde{S}_{2n+1}f(x) - f(x) \right| \leq \sqrt{2} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}} \|f^{(m)}\|_{L_*^2} < \sqrt{\frac{1}{m - \frac{1}{2}}} \|f^{(m)}\|_{L_*^2} \frac{1}{n^{m-\frac{1}{2}}}$$

e le stesse disuguaglianze valgono per $\left| \tilde{S}_{2n}f(x) - f(x) \right|$.

I Teoremi 5.17.1 e 5.17.2 valgono con il seguente enunciato diverso, che dà luogo a una disuguaglianza più forte: qui omettiamo la dimostrazione.

***Teorema 5.17.3.** (i) *Sia $f \in C_*^{m-1}$, $m \geq 1$ e $f^{(m)}$ limitata (condizione più forte dell'appartenenza a L_*^2). Se $m = 1$ supponiamo anche che f' sia continua a tratti (questa ipotesi è automaticamente verificata se $m > 1$). Allora esiste $C = C(m) > 0$ tale che per ogni $n > 0$,*

$$\left| \tilde{S}_n f(x) - f(x) \right| < C \|f^{(m)}\|_{\infty} \frac{\log n}{n^m}.$$

In particolare per ogni $\varepsilon > 0 \exists C' = C'(m, \varepsilon) > 0$ tale che, per ogni k ,

$$\left| \tilde{S}_n f(x) - f(x) \right| < C' \|f^{(m)}\|_\infty \frac{1}{n^{m-\varepsilon}}.$$

(ii) Più in generale, si ha anche che se $f^{(m)} \in L^2_*$ (quindi anche nel caso particolare della parte (i), quello di f continua e C^1 a tratti), esiste $C = C(f, m)$ tale che

$$|\tilde{S}_n f(x) - f(x)| \leq C \frac{1}{n^m}.$$

(iii) Se invece $f^{(m)} \in L^p_*$ con $1 < p \leq 2$, allora, esiste $C = C(f, m, p)$ tale che

$$|\tilde{S}_n f(x) - f(x)| \leq C \frac{\log(\log(\log(n)))}{n^m}.$$

Nota 5.17.4. Per $p > 2$ si ha $L^p_* \subset L^2_*$ e quindi se $f^{(m)} \in L^p$ con $p > 2$ continua a valere (ii), che è più forte di (iii) per questi p , ma molto più difficile da dimostrare.

(iv) Se infine $f^{(m)} \ln |f^{(m)}| \in L^1_*$ (o, come di solito si scrive, $f^{(m)} \in L \log L$), allora esiste $C = C(f, m)$ tale che

$$|\tilde{S}_n f(x) - f(x)| \leq C \frac{\log(\log(n))}{n^m}.$$

Le stime più precise, enunciate nelle parti (iii) e (iv) del Teorema 5.17.3, sono ottenute nella dimostrazione del Teorema di convergenza puntuale di Carleson, citato nella Sezione 5.5.

5.18 Ordine di infinitesimo dei coefficienti di Fourier

Sappiamo dal Lemma di Riemann–Lebesgue 5.9.6 che i coefficienti di Fourier di funzioni in L^1 tendono a zero all'infinito. In generale non si può dire nulla sul loro ordine di infinitesimo, come vedremo nella Sottosezione 7.6.5: il Lemma di Riemann–Lebesgue non si può migliorare, i coefficienti possono tendere a zero in maniera arbitrariamente lenta (Proposizione 7.6.31 e Nota

7.6.32). In quella stessa Sottosezione mostreremo un altro fatto interessante a questo correlato: esistono serie trigonometriche convergenti, con coefficienti $c_k \approx \frac{1}{k}$ che non sono serie di Fourier di funzioni L^1 , ossia non ogni successione convergente a zero è la successione dei coefficienti di Fourier di funzioni L^1 (Corollario 7.6.34).

Naturalmente, se si sa che $c_k = \widehat{f}(k)$ per una funzione $f \in L^2_*$ (f è la somma della serie) e $c_k \approx \frac{1}{k^\alpha}$ per qualche $\alpha > 0$, allora la disuguaglianza di Bessel (Corollario 4.1.9; si veda anche la Nota 5.2.7) dice che

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty$$

e quindi $\alpha > \frac{1}{2}$.

Invece si hanno stime precise sull'ordine di infinitesimo dei coefficienti di Fourier di funzioni derivabili m volte con continuità ($f \in C_*^m$). Naturalmente queste funzioni sono in L^2_* e quindi vale l'asserzione precedente, ma vale un risultato molto più forte: $\widehat{f}(k) \approx \frac{1}{k^m}$ o più precisamente $|\widehat{f}(k)| < \frac{1}{k^{m-\varepsilon}}$ per ogni $\varepsilon > 0$.

In effetti il risultato più forte che proveremo, Teorema 5.18.5, segue immediatamente dal Teorema 5.17.1, ma questo Teorema non l'abbiamo dimostrato (e la dimostrazione è complicata). Noi seguiremo un approccio completamente elementare.

Siamo interessati a determinare l'ordine di infinitesimo di $\widehat{f}(k)$ quando $f \in C_*^{m-1}$ con $m \geq 1$ e $f^{(m)}$ è continua a tratti (oppure anche solo misurabile e limitata, o anche soltanto integrabile con integrale finito). Cominciamo con il caso $m = 1$, cioè con funzioni periodiche con derivata continua a tratti.

Lemma 5.18.1. *Sia $f \in C_*$ e supponiamo che f' esista quasi ovunque e $f' \in L^1_*$ (questo è vero, in particolare, se f' è continua a tratti, oppure se è misurabile e limitata: assai più in generale, è vero nell'ipotesi che f sia assolutamente continua, in base alla forma generale del Teorema Fondamentale del Calcolo, Teorema 1.28.9). Allora $\widehat{f}(k)$ è infinitesimo per $|k| \rightarrow \infty$ di ordine superiore a $\frac{1}{k}$.*

Dimostrazione. Il Lemma di Riemann–Lebesgue 5.9.6 implica che $\widehat{f}'(k) \rightarrow 0$ per $|k| \rightarrow \infty$. Dal Lemma 5.16.1 si ha

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{ik} \widehat{f}'(k)$$

e quindi

$$\frac{\widehat{f}(k)}{\frac{1}{k}} \rightarrow 0$$

per $|k| \rightarrow \infty$. □

Corollario 5.18.2. *Se $f \in C_*^{m-1}$, $m \geq 1$ e $f^{(m)}$ è in L_*^1 , allora per ogni $0 \leq j \leq m$ esiste $B_j > 0$ tale che*

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{B_j}{|k|^j} \quad \forall k,$$

e $\widehat{f}(k)$ è infinitesimo di ordine superiore a $\frac{1}{|k|^m}$ per $|k| \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Sappiamo che

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L_*^1}$$

perché

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt.$$

Ripetute applicazioni del Lemma 5.16.1 portano alla disuguaglianza

$$|\widehat{f}(k)| = \frac{1}{|k|^j} |\widehat{f^{(j)}}(k)| \leq \frac{1}{|k|^j} \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f^{(j)}}\|_{L_*^1}$$

L'ultima asserzione dell'enunciato segue come nel Lemma 5.18.1. □

Ora consideriamo il caso di funzioni continue a tratti con derivata continua a tratti. Questo caso non è incluso nel Lemma 5.18.1 dove si assume che f sia continua (questa ipotesi è necessaria per poter applicare il Lemma 5.16.1).

Però abbiamo visto (Esempio 5.14.1) che per la funzione Θ a denti di sega, continua a tratti con derivata continua a tratti, si ha $\widehat{\Theta}(k) = -\frac{i}{2k}$. Estendiamo questa osservazione nel seguente risultato (una diversa estensione verrà ottenuta nel Teorema 5.18.5):

Proposizione 5.18.3. *Se f è continua a tratti (con salti non nulli) con f' anch'essa continua a tratti, allora $\widehat{f}(k)$ è infinitesimo di ordine $\frac{1}{k}$ per $k \rightarrow \pm\infty$.*

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima l'enunciato quando c'è un solo punto di salto $x_0 \in (-\pi, \pi)$. Senza perdita di generalità possiamo assumere $x_0 = 0$ (infatti ci riconduciamo a questo caso con una traslazione che non altera il modulo dei coefficienti di Fourier per il seguente esercizio).

Esercizio 5.18.4. I coefficienti di Fourier del traslato $\lambda_{x_0}h$ di una funzione $h \in L^1_*$ (qui $\lambda_{x_0}h(x) = h(x - x_0)$) sono dati da

$$\widehat{\lambda_{x_0}h}(k) = e^{-ix_0k}\widehat{h}(k)$$

e quindi

$$\left| \widehat{\lambda_{x_0}h}(k) \right| = \left| \widehat{h}(k) \right|.$$

□

Continuazione della dimostrazione della Proposizione 5.18.3.

Ora possiamo rimuovere il salto come si è fatto nella dimostrazione del Teorema 5.15.1, cioè scriviamo $f = g + \frac{1}{\pi}A\Theta$ dove $A = (f(x_0^+) - f(x_0^-))$. Rammentiamo che g è continua perché il suo salto al punto 0 vale 0: Infatti il salto di Θ vale π , come si è osservato nell'Esempio 5.14.1, e quindi il salto di $A\Theta$ ora ha la stessa ampiezza di quello di f .

Quindi possiamo applicare a g il Lemma 5.18.1. Ne segue che $\widehat{g}(k)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\frac{1}{|k|}$.

D'altra parte, per la Nota 5.14.2, $\widehat{\Theta}(k)$ è infinitesimo di ordine $\frac{1}{|k|}$, e quindi lo è anche $\widehat{f}(k)$.

Supponiamo infine che f abbia un numero finito di salti $x_1, \dots, x_n \in (-\pi, \pi)$. In tal caso li rimuoviamo tutti iterando la procedura precedente come nella dimostrazione del Corollario 5.15.2. Cioè

$$f = g + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n A_i \Theta_i$$

dove Θ_i ($\lambda_{x_i}\Theta$) è il traslato di Θ che ha punto di salto in x_i ed $A_i = (f(x_i^+) - f(x_i^-))$. Si ha nuovamente che g è continua e naturalmente g' è continua a tratti (perché lo sono gli addendi). Perciò si applica a g il Lemma 5.18.1 e la dimostrazione procede come prima. Infatti, per l'Esercizio 5.18.4 e la Nota 5.14.2, i coefficienti di Fourier del traslato Θ_j di Θ sono dati da

$$\widehat{\Theta}_j(k) = \widehat{\lambda_{x_j}\Theta}(k) = e^{-ikx_j}\widehat{\Theta}(k) = -\frac{i}{2k} e^{-ikx_j}$$

e quindi, per ogni $j = 1 \dots, n$,

$$|\widehat{\Theta}_j(k)| = |\widehat{\Theta}(k)| = \frac{1}{|k|}.$$

Pertanto i coefficienti di Fourier di

$$\psi = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n A_j \Theta_j$$

sono dati da

$$\widehat{\psi}(k) = \sum_{j=1}^n A_j e^{-ikx_j} \widehat{\Theta}(k) = -\frac{i}{2k} \sum_{j=1}^n A_j e^{-ikx_j},$$

e quindi

$$|\widehat{\psi}(k)| = \frac{1}{2|k|} \left| \sum_{j=1}^n A_j e^{-ikx_j} \right|.$$

Ne segue che

$$\widehat{\psi}(k) \sim \frac{1}{k},$$

a meno che, per un certo intero k_0 in poi, per ogni $|k| > |k_0|$ valga l'identità:

$$\sum_{j=1}^n A_j e^{-ikx_j} = 0,$$

oppure, [iù in generale, a meno che si abbia $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n A_j e^{-ikx_j} = 0$.

Ma se valesse questa identità per tutti i $|k| > |k_0|$, allora $\widehat{\psi}(k)$ sarebbe non nullo solo per un numero finito di interi k , e pertanto ψ sarebbe un polinomio trigonometrico, quindi una funzione continua: invece abbiamo fatto l'ipotesi che questa funzione debba avere almeno un punto di salto (almeno uno degli A_j è diverso da zero).

Più in generale, non può accadere che $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n A_j e^{-ikx_j} = 0$, perché, se così fosse, il vettore $v_k = (e^{-ikx_1}, \dots, e^{-ikx_n})$ apparterrebbe al sottospazio proprio di \mathbb{C}^n ortogonale al vettore (A_1, \dots, A_n) : questo è impossibile perché, per ogni k_0 , esistono $k_1, \dots, k_n > k_0$ tali che $\{v_{k_1}, \dots, v_{k_n}\}$ forma una base di \mathbb{C}^n (ossia, $\text{Span}_{k > k_0} \{v_k\} = \mathbb{C}^n$). Questo fatto è facile da vedere se i numeri x_1, \dots, x_n sono tutti sottomultipli razionali di π , perché in tal caso

le potenze e^{-ikx_j} formano sottogruppi finiti del cerchio unitario, ed il volume del poliedro nella palla unitaria di \mathbb{C}^n generato da questi punti, al variare di k , è strettamente positivo (esercizio); più in general è vero se i numeri x_1, \dots, x_n , π sono linearmente dipendenti rispetto al campo dei razionali. Se invece questi numeri sono linearmente indipendenti su \mathbb{Q} , il risultato segue da un teorema profondo dovuto a Kronecker (si veda [14, Chapter VI, Theorem 9.1]). \square

Nel prossimo teorema miglioriamo il risultato enunciato nel Corollario 5.18.2 sotto l'ipotesi che la derivata m -sima sia continua a tratti: in tal caso otteniamo che $\widehat{f}(k)$ è infinitesimo dello stesso ordine di $\frac{1}{|k|^{m+1}}$. Questo ci fa guadagnare un ordine di infinitesimo rispetto a quanto altrimenti ottenuto nel Lemma 5.18.1 e nel Corollario 5.18.2 e per la funzione Θ a denti di sega ci dà l'ordine esatto di infinitesimo, $\widehat{\Theta}(k) \approx \frac{1}{k}$, dimostrato con il calcolo diretto nell'Esempio 5.14.1 e poi riottenuta come conseguenza della Proposizione 5.18.3 (è il caso $m = 0$ nel prossimo teorema).

Teorema 5.18.5. (Ordine di infinitesimo dei coefficienti di Fourier.)
Sia $f \in C_*^{m-1}$ e C_*^m a tratti. Allora esiste $C > 0$ tale che

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^{m+1}} \quad \forall k.$$

Dimostrazione. Dal Lemma 5.16.1 segue

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{ik} \widehat{Df}(k)$$

Iterando m volte otteniamo

$$\widehat{f}(k) = \left(\frac{1}{ik}\right)^m \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(t) e^{-ikt} dt. \quad (5.30)$$

A questo punto l'enunciato segue dalla Proposizione 5.18.3. \square

Una funzione monotona a tratti in $[-\pi, \pi]$ può avere solo un insieme numerabile di discontinuità, tutte di tipo salto finito (Sezione 1.1). Pertanto è naturale studiare la variante del Teorema 5.18.5 in cui la derivata m -sima, anziché continua a tratti, si assume limitata e monotona a tratti.

Nota 5.18.6. Quanto appena detto non deve portare a pensare che il prossimo Teorema sia più forte dei risultati precedenti. La stima è più forte, ma

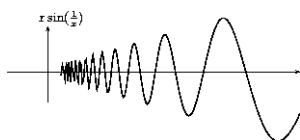


Figura 5.10: La funzione $x \sin \frac{1}{x}$ non è monotona a tratti

l'ipotesi (monotonia a tratti della derivata m -sima) è diversa da quella dei risultati precedenti (continuità a tratti della derivata m -sima) ed in particolare la monotonia a tratti non segue dalla continuità a tratti. Ad esempio, la seguente funzione già studiata negli Esempi 1.26.4 e 1.28.3,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

non è monotona a tratti nell'intervallo $[0, 1]$, perché oscilla attorno all'asse x un numero illimitato di volte quando $x \rightarrow 0^+$, però è continua in $[0, 1]$. In effetti, l'unico punto in cui la continuità non è ovvia è il punto $x = 0$, dove però essa segue dal Teorema del Confronto (Sezione 1.1). Ciò che è vero, invece, è che una funzione monotona su un intervallo è ivi continua tranne che per una successione di punti di salto (Sezione 1.1), ma questa successione può non essere finita. Quindi, in particolare, una funzione monotona a tratti è continua tranne che su un insieme al più numerabile: solo se questo insieme è finito essa è continua a tratti.

□

Teorema 5.18.7. (Ordine di infinitesimo dei coefficienti di Fourier sotto ipotesi di monotonia a tratti della derivata m -sima.) Sia $f \in C_*^{m-1}$ tale che $f^{(m)}$ esista quasi ovunque, sia in L_*^∞ e monotona a tratti. Allora esiste $C > 0$ tale che

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^{m+1}} \quad \forall k.$$

Dimostrazione. Poiché $f^{(m)}$ è monotona a tratti, l'intervallo $[-\pi, \pi]$ si spezza in un numero finito di segmenti $\{I_j, j = 1, \dots, N\}$ su ciascuno dei quali $f^{(m)}$ è monotona. Perciò

$$\hat{f}(k) = -i^m \frac{1}{k^m} \sum_{j=1}^N \int_{I_j} f^{(m)}(t) e^{-ikt} dt. \quad (5.31)$$

Per concludere la dimostrazione abbiamo bisogno del ben noto risultato seguente di Analisi Matematica.

Lemma 5.18.8. (Teorema della media pesata per gli integrali). *Supponiamo che $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sia continua e di segno costante e f sia non decrescente (oppure non crescente) in $[a, b]$. Allora esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che*

$$\int_a^b g(t)f(t) dt = f(a) \int_a^{x_0} g(t) dt + f(b) \int_{x_0}^b g(t) dt.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$h(x) = f(a) \int_a^x g(t) dt + f(b) \int_x^b g(t) dt.$$

Dobbiamo mostrare che

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = h(x_0)$$

per qualche $a \leq x_0 \leq b$.

Osserviamo che h è continua in $[a, b]$ (di più, h è derivabile, per il Teorema Fondamentale del Calcolo (Teorema 1.27.1)) e per come è stata definita si ha

$$h(a) = f(b) \int_a^b g(t) dt$$

e

$$h(b) = f(a) \int_a^b g(t) dt.$$

Per il Teorema dei Valori Intermedi per le funzioni continue (Sezione 1.1) h assume in $[a, b]$ ogni valore compreso tra $h(a)$ e $h(b)$. Supponiamo per semplicità che f sia non decrescente e $g \geq 0$ (il caso $g \leq 0$ ha una dimostrazione simmetrica, e così pure il caso che f sia non crescente). Abbiamo

$$f(a) = \min_{a \leq x \leq b} f(x) \quad \text{e} \quad f(b) = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$$

perché f è non decrescente. Quindi per il Teorema della Media Integrale (Sezione 1.1) abbiamo:

$$h(b) = f(a) \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq f(b) \int_a^b g(t) dt = h(a).$$

Perciò per il Teorema dei Valori Intermedi esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$h(x_0) = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

□

Questo Lemma ha il seguente Corollario, di cui il Teorema 5.18.7 è una conseguenza immediata, grazie allo stesso argomento che prova il Teorema 5.18.5.

Corollario 5.18.9. *Se $f \in L_*^\infty$ e monotona a tratti, allora esiste una costante $C = C(f)$ tale che per ogni $k \in \mathbb{Z}$*

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|}.$$

Dimostrazione. Denotiamo con I_j , $j = 1 \dots, N$ una partizione finita di $[-\pi, \pi]$ in intervalli contigui in ciascuno dei quali f è non decrescente o non crescente. Scriviamo $I_j = [x_j, y_j]$. Vorremmo applicare il Lemma 5.18.8 all'integrale $\int_{x_j}^{y_j} f(t) e^{-ikt} dt$, ma il peso $g(t) = e^{-ikt}$ non verifica la condizione di segno costante del Lemma (non è neppure un peso, perché è a valori complessi). Però si può spezzare l'integrale in parte reale e parte immaginaria: nelle due parti il peso diventa rispettivamente $\cos kt$ e $\sin kt$. Queste due funzioni non hanno segno costante, ma per ciascun valore di k , possiamo se necessario suddividere ulteriormente gli intervalli I_j in due parti nelle quali esse abbiano segno costante. Perciò possiamo applicare il Lemma 5.18.8 alla situazione presente. In base a tale Lemma, esiste z_j con $x_j \leq z_j \leq y_j$, tale che

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{j=1}^N f(x_j) \int_{x_j}^{z_j} e^{-ikt} dt + f(y_j) \int_{z_j}^{y_j} e^{-ikt} dt \right|. \end{aligned}$$

D'altra parte, per ogni $a \leq b$ si ha

$$\left| \int_a^b e^{-ikt} dt \right| = \left| \frac{e^{-ikb} - e^{-ika}}{ik} \right| \leq \frac{2}{|k|}.$$

Quindi

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{\pi|k|} \sum_{j=1}^N (|f(x_j)| + |f(y_j)|) = C \frac{1}{|k|}.$$

□

Esercizio 5.18.10. Calcolare i coefficienti di Fourier di $f_c(x) = |x - c|$, $x \in [-\pi, \pi)$, dove c è un parametro in $(-1, 1)$. Qual è il loro ordine di infinitesimo?

Svolgimento. Il valore assoluto corrisponde ad un cambiamento di segno nel dominio in cui il suo argomento è negativo: quindi possiamo sbarazzarcene scrivendo $|x - c| = x - c$ se $x \geq c$ e $|x - c| = c - x$ se $x < c$. Pertanto

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x - c| e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^c (c - x) e^{-inx} dx + \int_c^{\pi} (x - c) e^{-inx} dx \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Per ogni $a, b \in [-\pi, \pi]$, calcoliamo integrando per parti (si veda la Sezione 1.1) l'integrale

$$I_a^b \equiv \int_a^b x e^{-inx} dx = - \frac{x e^{-inx}}{in} \Big|_a^b - \frac{e^{-inx}}{n^2} \Big|_a^b \quad (5.33)$$

e direttamente l'integrale

$$J_a^b \equiv \int_a^b e^{-inx} dx = \frac{e^{-inx}}{in} \Big|_a^b. \quad (5.34)$$

Segue da (5.33) e (5.34) che

$$\begin{aligned} K_a^b \equiv \frac{1}{2\pi} \int_a^b (x - c) e^{-inx} dx &= I_a^b - c J_a^b = - \frac{x e^{-inx}}{in} \Big|_a^b \\ &\quad - \frac{e^{-inx}}{n^2} \Big|_a^b + c \frac{x e^{-inx}}{in} \Big|_a^b \\ &= \frac{(c - x) e^{-inx}}{in} \Big|_a^b - \frac{e^{-inx}}{n^2} \Big|_a^b. \end{aligned}$$

D'altra parte, $e^{-inx} = (-1)^n$ se $x = \pm\pi$, e quindi dalla precedente identità e da (5.32) segue

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) = -K_{-\pi}^c + K_c^\pi &= (-1)^n \frac{c + \pi}{in} + (-1)^n \frac{c - \pi}{in} + 2 \frac{e^{-inc} - (-1)^n}{n^2} \\ &= (-1)^n \frac{2c}{in} + 2 \frac{e^{-inc} - (-1)^n}{n^2}.\end{aligned}$$

Pertanto $\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ se $c \neq 0$, ma $\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ se $c = 0$.

Questo conferma il Teorema 5.18.5. Infatti, se $c \neq 0$, la funzione $|x - c|$ (traslato di $|x|$ di passo c) non è pari, e quindi, periodicizzandola sull'intervallo centrato $[-\pi, \pi)$, otteniamo una funzione C^1 a tratti e continua a tratti con un salto di ampiezza finita agli estremi dell'intervallo. Invece, se $c = 0$, allora la funzione è pari: quindi, periodicizzandola sullo stesso intervallo centrato in 0, non introduciamo salti ed otteniamo una funzione continua e C^1 a tratti.

□

5.19 Il fenomeno di Gibbs

Abbiamo visto nella Sezione 5.15 che la serie di Fourier di una funzione f periodica continua a tratti e C^1 a tratti converge puntualmente ovunque. Nei punti di salto la serie di Fourier converge al valore intermedio dei limiti destro e sinistro di f in tali punti.

Ora mostreremo che, intorno al punto di salto, le somme parziali S_n della serie di Fourier compiono un'oscillazione di escursione superiore alla ampiezza del salto (se n è sufficientemente grande). Quando $n \rightarrow \infty$ la frequenza di queste oscillazioni aumenta, e quindi la loro ampiezza si riduce in ascisse, ma non in ordinate (*fenomeno di Gibbs*).

Vedremo prima questo fenomeno per l'esempio tipico della funzione a denti di sega

$$\Theta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

introdotta nell'Esempio 5.14.1, e poi lo esporteremo ad ogni altra funzione continua a tratti e C^1 a tratti con un salto in $(-\pi, \pi)$. Varie parti del calcolo sono presentate separatamente in una serie di lemmi.

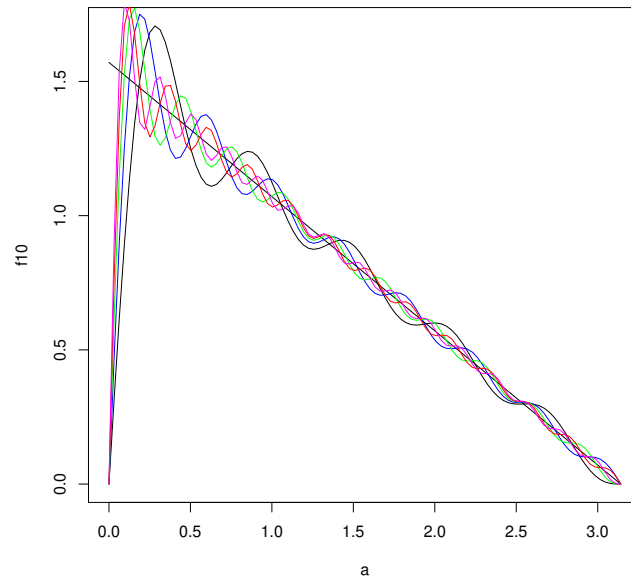


Figura 5.11: *Ringing* nella approssimazione di Fourier della funzione a denti di sega

Lemma 5.19.1. Per $x \geq 0$ poniamo

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,$$

e poniamo anche $x_k = k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$). Allora i punti di massimo e minimo locale della funzione φ sono rispettivamente i punti x_{2k-1} e x_{2k} , e $|\varphi(x_{k+1})| < |\varphi(x_k)|$ per ogni k . In particolare, il punto di massimo assoluto di $|\varphi|$ è $x = \pi$. Inoltre, esiste il limite $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\sin x}{x} dx$.

Dimostrazione. Per il Teorema Fondamentale del Calcolo (Teorema 1.27.1) si ha: $\varphi'(x) = \frac{\sin x}{x} = 0$ se e solo se $x = k\pi = x_k$. Inoltre

$$\begin{aligned} \varphi(x_k) &= \int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \dots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+\pi} dt + \dots + (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+(k-1)\pi} dt, \end{aligned}$$

perché $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ per ogni x . Consideriamo questi integrali

$$a_m := \int_0^\pi \frac{\sin t}{t + (m-1)\pi} dt = |\varphi(x_m) - \varphi(x_{m-1})|.$$

Nei loro integrandi, il numeratore è sempre lo stesso, ma il denominatore aumenta all'aumentare di m , e, visto che il numeratore è limitato in modulo da 1, gli integrandi tendono a zero uniformemente nell'intervallo $[0, \pi]$. Quindi ciascuno dei termini a segno alterno nell'ultimo membro dell'identità è, in valore assoluto, minore del precedente, ed inoltre $\lim_m a_m = 0$. L'enunciato segue in maniera ovvia da questo fatto (si tratta dello stesso argomento che si usa per la dimostrazione della monotonia delle somme parziali pari e dispari in una serie numerica a segni alterni (Sezione 1.1)). In particolare, per ogni m valgono le relazioni

$$\begin{aligned} 0 &< \varphi(x_{2m+1}) < \varphi(x_{2m-1}) \\ 0 &< \varphi(x_{2m}) < \varphi(x_{2m+2}) \\ 0 &< \varphi(x_{2m+1}) - \varphi(x_{2m}) \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Da qui segue che esiste il limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t} dt$ (ed è uguale a $\inf_k \varphi(x_{2k-1}) = \sup_k \varphi(x_{2k})$). Poiché φ è monotona in tutti gli intervalli $[x_k, x_{k+1}]$, da questo a propria volta segue che la variazione di φ nella semiretta $[x_k, +\infty)$ tende a zero con k , e quindi che esiste il limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. \square

Corollario 5.19.2.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx < \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx.$$

Dimostrazione. Per il Teorema Fondamentale del Calcolo (Sezione 1.1), la funzione $\varphi(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ ha massimi e minimi locali nei punti $x_k = k\pi$ dove si annulla il suo integrando, ed è monotona (alternativamente crescente e decrescente) negli intervalli fra questi punti. Quindi $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_{2k})$ e $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_{2k-1})$. Allora l'enunciato segue immediatamente dal Lemma 5.19.1.

\square

Lemma 5.19.3.

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che, in base al Lemma 5.19.1,

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt. \quad (5.35)$$

Quindi basta dimostrare che l'ultimo integrale tende a $\pi/2$ per $n \rightarrow \infty$. Segue dalla Proposizione 5.8.2 e dalla Proposizione 5.8.1 che

$$\int_0^\pi \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (5.36)$$

Abbiamo anche visto (5.12) che

$$\frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} + \frac{1}{2} \cos nt \quad \text{se } t \neq 0$$

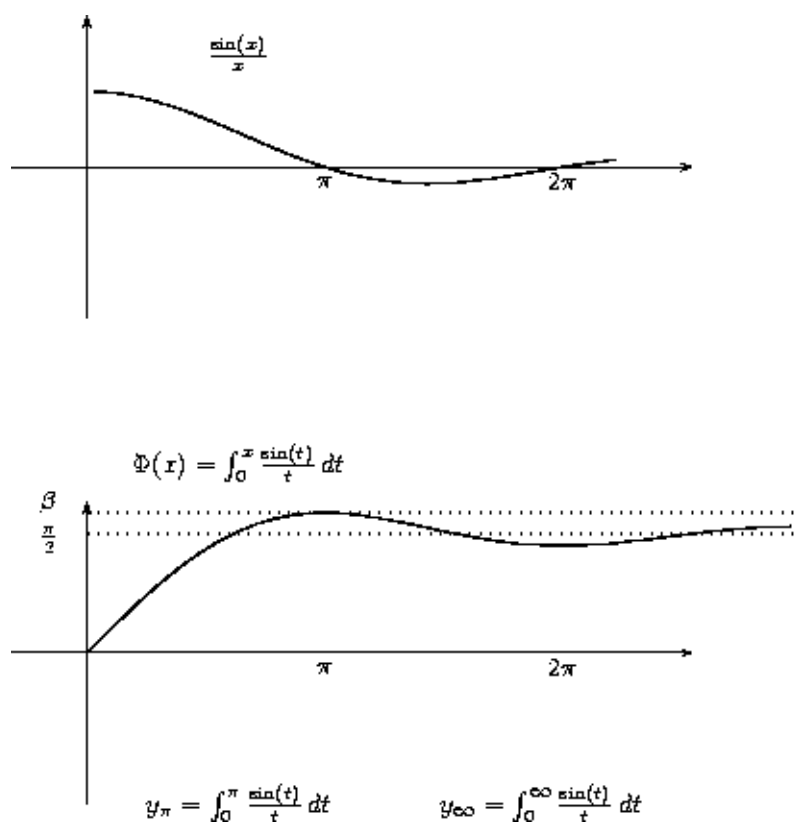


Figura 5.12: Grafico di $\frac{\sin x}{x}$ e della sua primitiva

e quindi in $(0, \pi)$ si ha

$$\frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}} = \sin nt \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) + \frac{\sin nt}{t} + \frac{1}{2} \cos nt. \quad (5.37)$$

Quindi, per (5.36),

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\pi \frac{\sin nt}{t} dt + \rho_n$$

dove

$$\rho_n = \int_0^\pi \sin nt \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos nt dt.$$

(Per maggiore compatibilità con la notazione che stiamo per adottare, dovremmo scrivere $\rho_n(\pi)$ invece che ρ_n). L'ultimo integrale vale 0: infatti,

$$\int_0^\pi \cos nt dt = \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} \cos u du = \frac{\sin n\pi}{n} = 0.$$

In base al Lemma 5.9.3 il primo integrando è limitato, e l'integrale è su un intervallo di lunghezza finita. Estendiamo tale integrando a tutto \mathbb{R} ponendolo zero al di fuori di $(0, \pi)$. In tal modo si ottiene una funzione $g \in L^1$, ed il primo integrale altro non è che $\int_{-\infty}^{\infty} \sin nt g(t) dt$, che tende a zero con n per il Lemma di Riemann–Lebesgue 5.9.6. Pertanto, $\rho_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Perciò

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin nt}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Ma

$$\int_0^\pi \frac{\sin nt}{t} dt = \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt,$$

quindi, grazie a (5.35),

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

□

Sia Θ la funzione a denti di sega dell'Esempio 5.14.1 (la periodizzata di periodo 2π della funzione $\Theta(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ per $0 < x < 2\pi$). Poniamo $\Theta(0) = 0$. Dall'Esempio 5.14.1 sappiamo che la serie di Fourier di Θ converge a Θ puntualmente, ed in particolare, per ogni x

$$\Theta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Indichiamo con

$$S_n \Theta(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$$

le somme parziali di questa serie di Fourier.

Lemma 5.19.4.

$$S_n \Theta(x) = \int_0^x \frac{\sin nt}{t} dt - \frac{x}{2} + \rho_n(x)$$

con $\rho_n(x) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ uniformemente rispetto a $x \in (0, \pi)$.

Dimostrazione. L'argomento è del tutto analogo a quello dell'ultima parte della dimostrazione del Teorema 5.9.2; non applichiamo direttamente quel teorema perché in esso l'integrando contiene un fattore aggiuntivo $\Delta_t \Theta(x)$ che qui manca (nel caso presente, se t è abbastanza piccolo che $x+t \neq \pi$, questo fattore vale $-\frac{t}{2}$: lasciamo al lettore il facile esercizio di usare questo fatto per trovare una dimostrazione alternativa che si riduce ad una applicazione del Teorema 5.9.2).

Si ha

$$\frac{x}{2} + S_n \Theta(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt.$$

Ma abbiamo visto nella Proposizione 5.8.2 che vale

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

se $t \neq 2m\pi$ (e che il primo membro è uguale a $n + \frac{1}{2}$ se $t = 2m\pi$).

Grazie a (5.37) nel Lemma 5.19.3 ora abbiamo che

$$\frac{x}{2} + S_n \Theta(x) = \int_0^x \frac{\sin nt}{t} dt + \rho_n(x)$$

dove

$$\rho_n(x) = \int_0^x \sin nt \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) dt + \frac{1}{2} \int_0^x \cos nt dt.$$

Abbiamo già osservato che, in base al Lemma 5.9.3, il primo integrando, che per brevità indichiamo con g , è limitato. Ovviamente lo è anche il secondo.

Perciò procediamo come nella dimostrazione della Proposizione 5.9.8, ponendo in quell'enunciato al posto di $f(x+u)$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, x]$: lasciamo al lettore la banale verifica del fatto che la dimostrazione del Lemma 5.9.9 vale riga per riga sotto questa diversa ipotesi. La convergenza uniforme discende dal fatto che ora, negli integrali dell'enunciato del Lemma, scriviamo $\chi_{[0,x]}(u)$ invece di $f(x+u)$, e quindi nella sua dimostrazione, invece di $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u + \frac{\pi}{\omega} + x) - f(x+u)| du = \int_{-\infty}^{\infty} |f(u + \frac{\pi}{\omega}) - f(u)| du$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \chi_{[0,x]} \left(u + \frac{\pi}{\omega} \right) - \chi_{[0,x]}(u) \right| du \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_{[0,\pi/\omega]}(u) + \chi_{[x, x+\pi/\omega]}(u)) du = \frac{2\pi}{\omega}, \end{aligned}$$

che non dipende da x .

Allora otteniamo che $\rho_n(x)$ converge uniformemente a zero quando $n \rightarrow \infty$ per $x \in (0, \pi)$. \square

Raccogliendo questi risultati preliminari ora proviamo il risultato annunciato.

Teorema 5.19.5. (Fenomeno di Gibbs per la funzione a denti di sega). *Sia*

$$\beta = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Allora $\beta > \frac{\pi}{2}$, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \Theta \left(\frac{\pi}{n} \right) = \beta,$$

mentre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta \left(\frac{\pi}{n} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Viceversa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \Theta \left(-\frac{\pi}{n} \right) = -\beta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta \left(-\frac{\pi}{n} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Quindi il rapporto fra l'escursione di $S_n \Theta \left(\frac{\pi}{n} \right)$ e quella di Θ tende a

$$\beta / \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.089490 \dots$$

per $n \rightarrow \infty$ (questa oscillazione, illustrata nella Figura 5.11, si chiama ringing).

Dimostrazione. Il fatto che $\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$ segue direttamente dalla definizione di Θ (Esempio 5.14.1).

Abbiamo visto nel Corollario 5.19.2 che

$$\beta = \max \varphi > \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

e nel Lemma 5.19.3 che

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Dal Lemma 5.19.4 segue

$$S_n \Theta\left(\frac{\pi}{n}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin nt}{t} dt - \frac{\pi}{2n} + \rho_n\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Naturalmente $\frac{\pi}{2n}$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$. Inoltre, $\rho_n\left(\frac{\pi}{n}\right) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$: infatti sappiamo che $\rho_n(x) \rightarrow 0$ uniformemente rispetto a $x \in (0, \pi)$, ossia per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N = N_\varepsilon$ (indipendente da x) tale che, se $n > N$, si ha $|\rho_n(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in (0, \pi)$. Ma siccome questa disuguaglianza vale simultaneamente per tutti gli x , scegliendo $x = \pi/n$ otteniamo $|\rho_n(\pi/n)| < \varepsilon$ per $n > N$: in altre parole, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(\pi/n) = 0$.

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \Theta\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin nt}{t} dt.$$

D'altra parte,

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin nt}{t} dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du = \beta$$

(indipendente da n). Questo prova la parte dell'enunciato che calcola il limite di $S_n \Theta$ lungo la successione $\frac{\pi}{n}$. Poiché Θ è dispari i limiti dell'enunciato cambiano di segno quando vengono calcolati lungo la successione $-\frac{\pi}{n}$.

Infine, l'approssimazione dell'integrale

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.089490$$

si ottiene per via numerica. □

Nota 5.19.6. Lo scarto fra i valori massimo e minimo di $S_n\Theta$ in un intorno di zero è quindi maggiore del salto di Θ di una percentuale che, per $n \rightarrow \infty$, converge a 8.949%. In particolare, la norma uniforme dell'approssimante non converge a quella della funzione approssimata, ma si mantiene più elevata. \square

Nota 5.19.7. Per n grande, il punto $\frac{\pi}{n}$ è approssimativamente il punto dove $S_n\Theta$ raggiunge il valore massimo. Infatti, la funzione $\phi(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ ha massimo in $x = \pi$ (Lemma 5.19.1), D'altra parte, $\phi(x) = \int_0^{\frac{x}{n}} \frac{\sin nt}{t} dt$: perciò il termine integrale nell'espressione di $S_n\Theta$ data nel Lemma 5.19.4 si può scrivere come $\psi(x) = \phi(nx)$, ed è massimo esattamente per $x = \frac{\pi}{n}$. Gli altri due addendi nell'espressione di $S_n\Theta$ nel Lemma 5.19.4 tendono a zero quando calcolati in $x = \frac{\pi}{n} \rightarrow 0$, perciò, per grandi n , non perturbano apprezzabilmente il valore del termine principale $\psi(x)$ che invece tende a $\beta \neq 0$.

\square

Teorema 5.19.8. (Fenomeno di Gibbs per funzioni continue a tratti e C^1 a tratti.) *Sia $x_0 \in (-\pi, \pi)$ e f di classe C^1 in $(-\pi, x_0)$ e (x_0, π) con limiti finiti*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f'(x).$$

Allora il fenomeno di ringing illustrato nel Teorema 5.19.5 per gli approssimati di Fourier della funzione a denti di sega Θ vale anche per la funzione f .

Dimostrazione. Basta scrivere $f = h + A\lambda_{x_0}\Theta$ dove

$$A = f(x_0^+) - f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

In altre parole, si "rimuove" il salto di f come già facemmo nel Teorema 5.15.1: in tal modo si ottiene una funzione h continua e C^1 a tratti. Per il Corollario 5.12.4 la serie di Fourier di h converge a h uniformemente, e non presenta alcun ringing perché il suo salto in x_0 vale zero. L'altro addendo $A\lambda_{x_0}\Theta(x) = A\Theta(x - x_0)$ è un multiplo di un traslato di Θ e quindi presenta il ringing di escursione 1.089490... determinato nel Teorema 5.19.5.

\square

5.20 Esercizi sulle serie di Fourier

Esercizio 5.20.1. Dimostrare l'ortogonalità del sistema trigonometrico direttamente con le formule di prostaferesi, senza cioè far uso degli esponenziali complessi, come invece si è fatto nella Proposizione 5.1.5. \square

Svolgimento. Rammentiamo la notazione. In $L^2([-\pi, \pi])$ consideriamo le funzioni

$$\phi_0(x) = 1, \phi_{2n-1}(x) = \sin(nx), \phi_{2n}(x) = \cos(nx) \quad n = 1, 2, \dots$$

Osserviamo come prima cosa che la funzione ϕ_0 è ortogonale alle ϕ_{2n-1} e alle $\phi_{2n} \forall n = 1, 2, \dots$

Infatti

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(nx) dx = 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) dx = 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Anche le funzioni ϕ_{2m-1} e ϕ_{2n} sono ortogonali tra loro. Infatti

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{2m-1} \phi_{2n} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)) dx = 0 \\ &\forall m, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{2m-1} \phi_{2n-1} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)) dx = 0 \\ &\forall m, n = 1, 2, \dots m \neq n. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{2m} \phi_{2n} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = 0 \\ &\forall m, n = 1, 2, \dots m \neq n. \end{aligned}$$

Le funzioni $\phi_j, j = 0, 1, 2, \dots$ costituiscono un sistema ortogonale. \square

Esercizio 5.20.2. Sia $0 < a < \pi$. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione caratteristica $\chi_{[-a,a]}$ che vale 1 in $[-a, a]$ e 0 altrove, e mostrare che $b_k = 0$ per ogni k (come deve essere per motivi di parità) e

$$a_0 = \frac{a}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2 \sin(ka)}{\pi k} \quad \text{se } k \neq 0.$$

Cosa si troverebbe invece per $a = \pi$? □

Esercizio 5.20.3. Assumendo che la serie di Fourier della funzione f di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi]$ da $f(x) = x$ sia

$$2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx,$$

si ottiene che la serie di Fourier della funzione g di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi]$ da $g(x) = x - \frac{\pi}{2}$ è

1. □ $-\frac{\pi}{4} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$

2. □ $-\frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin kx;$

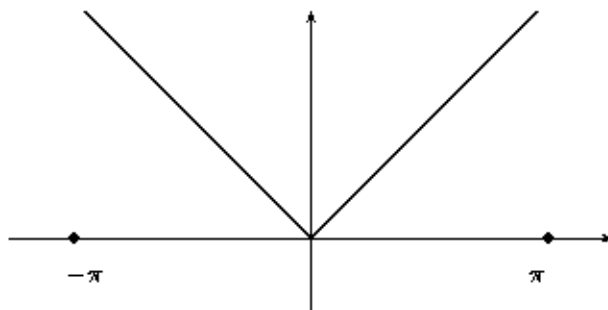
3. □ $-\frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$

4. □ $\frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$

5. □ $\frac{\pi}{4} - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$

□

Esercizio 5.20.4. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi]$:



Allora la sua serie di Fourier è

1. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2};$
2. $-\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2};$
3. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin kx;$
4. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2};$
5. $-\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin 2kx}{(2k)^2};$

□

Esercizio 5.20.5. Sia f la funzione di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi]$ da

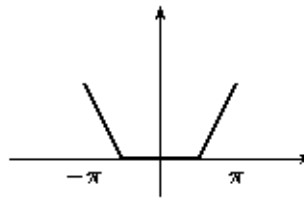
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi] \\ -\frac{1}{2} & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

Allora la sua serie di Fourier

1. converge uniformemente su tutto \mathbb{R}
2. converge uniformemente nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$
3. non converge uniformemente in alcun intervallo
4. nulla si può dire sulla convergenza uniforme

Motivare la risposta. □

Esercizio 5.20.6. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi]$:

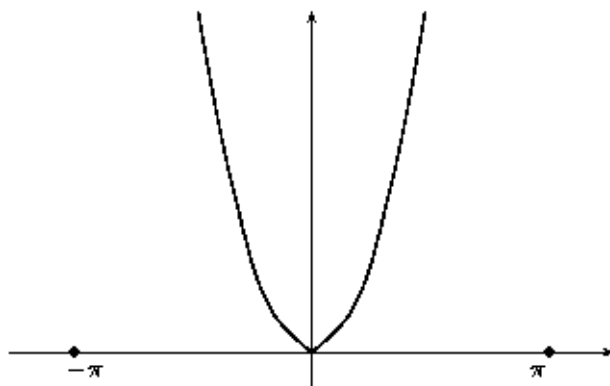


La sua serie di Fourier è una delle seguenti. Quale?

1. $\frac{9}{8} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k - \cos(\frac{k\pi}{4})}{k^2} \cos(kx) + \frac{\sin(\frac{k\pi}{4})}{k^2} \sin kx \right]$
2. $\frac{9}{8} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - \cos(\frac{k\pi}{4})}{k^2} \cos(kx)$
3. $\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + \sin(\frac{k\pi}{4})}{k^2} \sin kx$
4. $\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - \cos(\frac{k\pi}{4})}{k^2} \cos(kx)$

Motivare la risposta. □

Esercizio 5.20.7. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi]$:



Allora i suoi coefficienti di Fourier sono infinitesimi dello stesso ordine di

1. $\frac{1}{k^3}$
2. $\frac{1}{k}$
3. $\frac{1}{k^2}$
4. non si può stabilire l'ordine di infinitesimo

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.8. Assumendo che la serie di Fourier della funzione f di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $f(x) = x$ sia

$$2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx,$$

si ottiene che la serie di Fourier della funzione g di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $g(x) = \pi - x$ è

1. $\frac{\pi}{2} + 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$
2. $\pi - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$

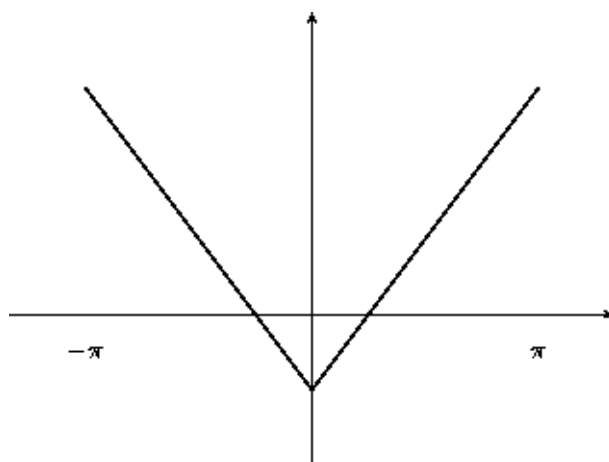
$$3. \quad \square \quad \pi - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

$$4. \quad \square \quad \pi - 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

$$5. \quad \square \quad \frac{\pi}{2} - 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

□

Esercizio 5.20.9. Sia f la funzione di periodo 2π che in $[-\pi, \pi)$ ha il grafico seguente:



La sua serie di Fourier è una delle seguenti. Quale?

$$1. \quad \square \quad \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k - \sin(\frac{k\pi}{4})}{k^2} \sin kx;$$

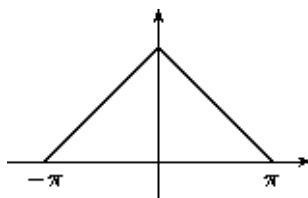
$$2. \quad \square \quad \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k - \cos(\frac{k\pi}{4})}{k^2} \cos kx;$$

$$3. \quad \square \quad \frac{9}{8} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k - \cos(\frac{k\pi}{4})}{k^2} \cos kx + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k - \sin(\frac{k\pi}{4})}{k^2} \sin kx;$$

$$4. \quad \square \quad \frac{9}{8} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k - \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k^2} \cos kx;$$

□

Esercizio 5.20.10. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi)$:



Allora i suoi coefficienti di Fourier sono infinitesimi dello stesso ordine di

1. $\frac{1}{k^3}$
2. $\frac{1}{k}$
3. $\frac{1}{k^2}$
4. non si può stabilire l'ordine di infinitesimo

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.11. Sia f la funzione di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da

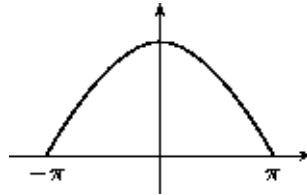
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in [0, \pi) \\ -\frac{3}{2} & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

Allora la sua serie di Fourier

1. converge uniformemente su tutto \mathbb{R}
2. converge uniformemente nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$
3. non converge uniformemente su tutto \mathbb{R} , ma converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$
4. nulla si può dire sulla convergenza uniforme

Motivare la risposta. □

Esercizio 5.20.12. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi)$:



Allora i suoi coefficienti di Fourier sono infinitesimi dello stesso ordine di

1. $\frac{1}{k}$
2. $\frac{1}{k^2}$
3. $\frac{1}{k^3}$
4. non si può stabilire l'ordine di infinitesimo

Motivare la risposta. □

Esercizio 5.20.13. Assumendo che la serie di Fourier della funzione f di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $f(x) = x$ sia

$$2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx,$$

si ottiene che la serie di Fourier della funzione g di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $g(x) = -x + \frac{\pi}{2}$ è

1. $\frac{\pi}{2} - \pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$
2. $\frac{\pi}{2} - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$
3. $\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$

$$4. \quad \square \quad -\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

$$5. \quad \square \quad \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

□

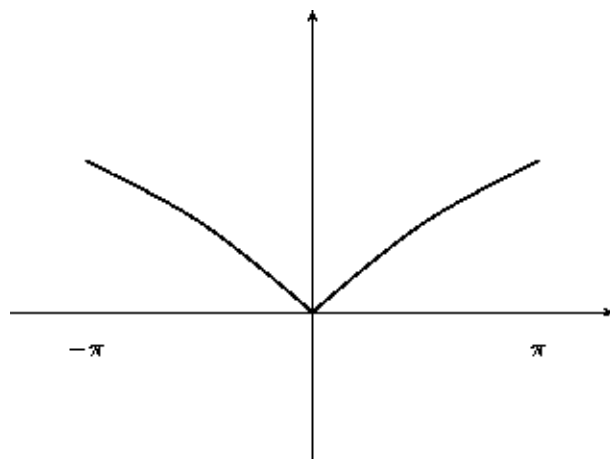
Esercizio 5.20.14. Sia f la funzione di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $f(x) = |x|$. Allora la sua serie di Fourier

1. converge uniformemente su tutto \mathbb{R}
2. converge uniformemente nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$
3. non converge uniformemente su tutto \mathbb{R} , ma converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$
4. nulla si può dire sulla convergenza uniforme

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.15. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi)$:



La sua serie di Fourier è una delle seguenti. Quale?

$$1. \quad \square \quad \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(6kx)}{1-4k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(4kx)}{1-4k^2};$$

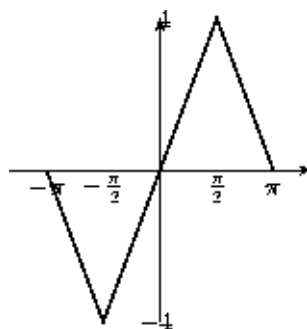
$$2. \quad \square \quad \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(4kx)}{1-4k^2};$$

$$3. \quad \square \quad \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(6kx)}{1-4k^2};$$

$$4. \quad \square \quad \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(6kx)}{1-4k^2};$$

□

Esercizio 5.20.16. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi)$:



La sua serie di Fourier è una delle seguenti. Quale?

$$1. \quad \square \quad \frac{32}{\pi} + \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin((2k+1)x);$$

$$2. \quad \square \quad \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin((2k+1)x);$$

$$3. \quad \square \quad \frac{32}{\pi} + \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin((2k+1)x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)^2} \cos(2kx);$$

$$4. \quad \square \quad \frac{32}{\pi} + \frac{32}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)^2} \cos(2kx);$$

□

Esercizio 5.20.17. Sia f la funzione di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0, \pi) \\ -2 & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

Allora la sua serie di Fourier

1. converge uniformemente su tutto \mathbb{R}
2. converge uniformemente nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$
3. non converge uniformemente su tutto \mathbb{R} , ma converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$
4. nulla si può dire sulla convergenza uniforme
5. non vale nessuna delle precedenti asserzioni

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.18. Assumendo che la serie di Fourier della funzione f di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $f(x) = x$ sia

$$2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx,$$

si ottiene che la serie di Fourier della funzione g di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$ è

1. $-\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$
2. $\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin kx;$

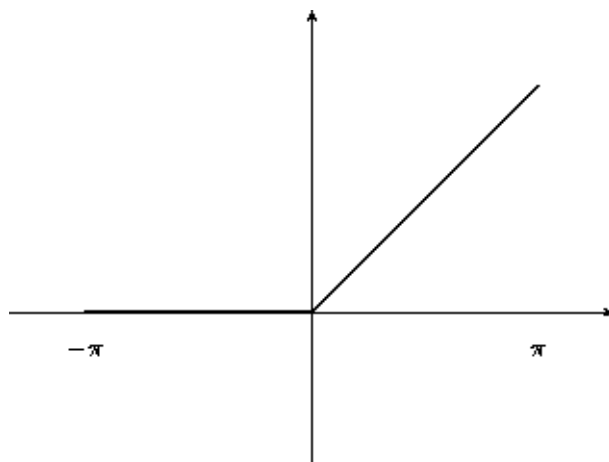
$$3. \quad \square \quad \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

$$4. \quad \square \quad \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

$$5. \quad \square \quad \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

Motivare la risposta. □

Esercizio 5.20.19. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi)$:



Allora i suoi coefficienti di Fourier sono infinitesimi dello stesso ordine di

$$1. \quad \square \quad \frac{1}{k}$$

$$2. \quad \square \quad \frac{1}{k^2}$$

$$3. \quad \square \quad \frac{1}{k^3}$$

4. non si può stabilire l'ordine di infinitesimo

Motivare la risposta. □

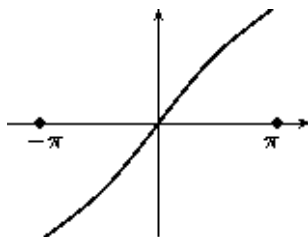
Esercizio 5.20.20. Sia f la funzione di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi]$ da $f(x) = x^2$. Allora la sua serie di Fourier

1. converge uniformemente su tutto \mathbb{R}
2. converge uniformemente nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$
3. non converge uniformemente su tutto \mathbb{R} , ma converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$
4. nulla si può dire sulla convergenza uniforme

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.21. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi]$:

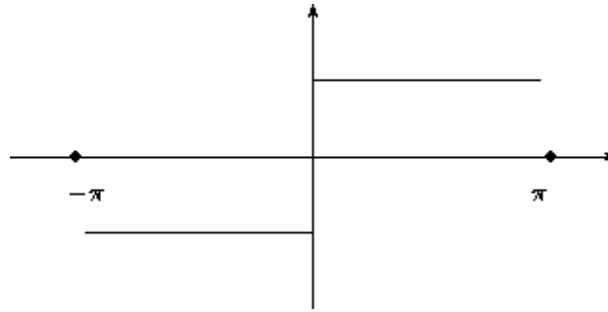


La sua serie di Fourier è una delle seguenti. Quale?

1. $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^3};$
2. $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3};$
3. $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3};$
4. $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^3} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3};$

Motivare la risposta. □

Esercizio 5.20.22. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi)$:



Allora i suoi coefficienti di Fourier sono infinitesimi dello stesso ordine di

1. $\frac{1}{k^2}$
2. $\frac{1}{k}$
3. $\frac{1}{k^3}$
4. non si può stabilire l'ordine di infinitesimo

Motivare la risposta. □

Esercizio 5.20.23. Assumendo che la serie di Fourier della funzione f di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $f(x) = x$ sia

$$2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx,$$

si ottiene che la serie di Fourier della funzione g di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $g(x) = \pi + x$ è

1. $\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$
2. $\pi + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$

$$3. \quad \square \quad \pi + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

$$4. \quad \square \quad \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

$$5. \quad \square \quad \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

Motivare la risposta. □

Esercizio 5.20.24. Assumendo che la serie di Fourier della funzione f di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $f(x) = x$ sia

$$2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx,$$

si ottiene che la serie di Fourier della funzione g di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $g(x) = x - \frac{\pi}{2}$ è

$$1. \quad \square \quad -\frac{\pi}{4} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

$$2. \quad \square \quad -\frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin kx;$$

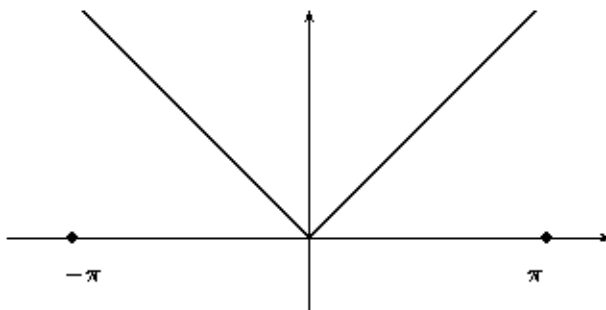
$$3. \quad \square \quad -\frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

$$4. \quad \square \quad \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

$$5. \quad \square \quad \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

Motivare la risposta. □

Esercizio 5.20.25. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi)$:



La sua serie di Fourier è una delle seguenti. Quale?

1. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2};$
2. $-\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2};$
3. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin kx;$
4. $-\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin 2kx}{(2k)^2};$

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.26. Sia f la funzione di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi) \\ -\frac{x}{2} & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

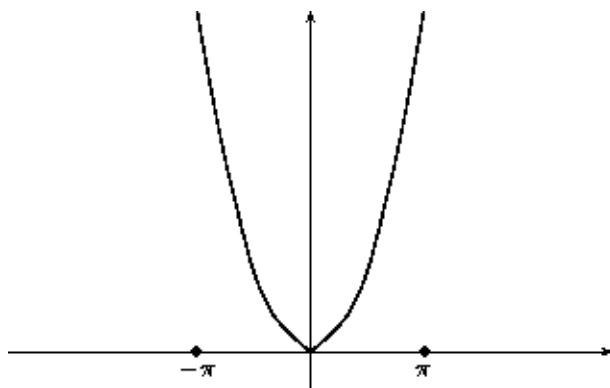
Allora la sua serie di Fourier

1. converge uniformemente su tutto \mathbb{R}
2. converge uniformemente nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$
3. non converge uniformemente su tutto \mathbb{R} , ma converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$
4. nulla si può dire sulla convergenza uniforme

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.27. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi)$:



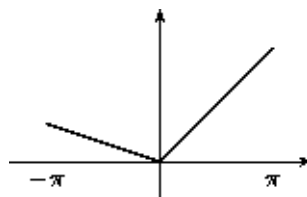
Allora i suoi coefficienti di Fourier sono infinitesimi dello stesso ordine di

1. $\frac{1}{k^3}$
2. $\frac{1}{k}$
3. $\frac{1}{k^2}$
4. non si può stabilire l'ordine di infinitesimo

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.28. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi)$:



Allora i suoi coefficienti di Fourier sono infinitesimi dello stesso ordine di

1. $\frac{1}{k}$
2. $\frac{1}{k^2}$
3. $\frac{1}{k^3}$
4. non si può stabilire l'ordine di infinitesimo

Motivare la risposta.

□

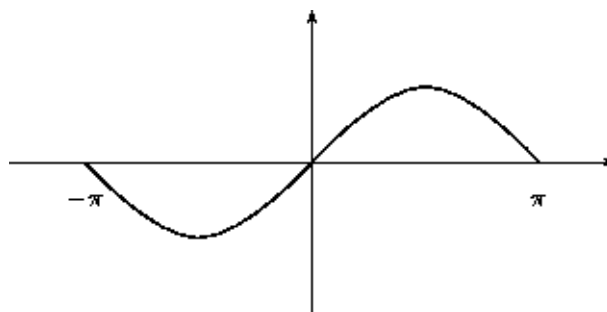
Esercizio 5.20.29. Sia f la funzione di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $f(x) = |\cos x|$. Allora la sua serie di Fourier

1. converge uniformemente su tutto \mathbb{R}
2. converge uniformemente nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$
3. non converge uniformemente su tutto \mathbb{R} , ma converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$
4. nulla si può dire sulla convergenza uniforme

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.30. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi)$:



La sua serie di Fourier è una delle seguenti. Quale?

1. $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3};$
2. $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2kx}{(2k)^3};$
3. $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2kx}{(2k)^3};$
4. $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3};$

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.31. Assumendo che la serie di Fourier della funzione f di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $f(x) = x$ sia

$$2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx,$$

si ottiene che la serie di Fourier della funzione g di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $g(x) = \pi - x$ è

1. $\frac{\pi}{2} - 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$
2. $-\frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin kx;$
3. $\frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$
4. $\frac{\pi}{4} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$

$$5. \quad \square \quad \pi - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx;$$

Motivare la risposta. □

Esercizio 5.20.32. Sia f una funzione periodica di periodo 2π e sia

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

la sua serie di Fourier. Scrivere l'espressione del coefficiente a_0 . Quanto vale a_0 se la funzione f è pari? Quanto vale a_0 se la funzione f è dispari?

□

Esercizio 5.20.33. Sia f la funzione di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ x^2 & \text{se } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Allora la sua serie di Fourier

1. □ converge uniformemente su tutto \mathbb{R}
2. □ converge uniformemente nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$
3. □ non converge uniformemente su tutto \mathbb{R} , ma converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$
4. □ nulla si può dire sulla convergenza uniforme

Motivare la risposta. □

Esercizio 5.20.34. Sia $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Che ipotesi deve soddisfare f affinché F sia periodica?

Se la serie di Fourier di $f(t)$ è

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

e la serie di Fourier di $F(t)$ è

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

allora

1. $a_n = \frac{c_n}{n}$
2. $a_n = nc_n$
3. $a_n = c_n$
4. non vi è alcuna relazione tra i coefficienti a_n e c_n .

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.35. Sia f una funzione periodica di periodo 2π di classe C^1 . Sia

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$

la serie di Fourier di f . Se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

è la serie di Fourier di f' , quale relazione intercorre tra i coefficienti a_n e c_n ?

1. $c_n = \frac{a_n}{in}$
2. $c_n = ina_n$
3. $c_n = na_n$
4. $c_n = \frac{a_n}{n}$

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.36. Se $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ è la serie di Fourier di una funzione f , qual è la serie di Fourier di $g(x) = f(x) + 1$?

1. $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k + 1) \sin kx$
2. $\frac{a_0}{2} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + 1) \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k + 1) \sin kx$
3. $\frac{a_0}{2} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$
4. $\frac{a_0}{2} + (a_1 + 1) \cos x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$

5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.37. Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ la serie di Fourier di una funzione periodica e integrabile. Allora

1. la successione $\{a_k\}$ converge a zero per $k \rightarrow \infty$
2. la successione $\{a_k\}$ diverge per $k \rightarrow \infty$
3. la successione $\{a_k\}$ converge a 1 per $k \rightarrow \infty$
4. la successione $\{a_k\}$ non ammette limite per $k \rightarrow \infty$
5. non si hanno informazioni sulla successione $\{a_k\}$

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.38. Assumendo che la serie di Fourier della funzione f di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ definita da $f(x) = x$ sia $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx$, si ottiene che la serie di Fourier della funzione di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ definita da $g(x) = x - \frac{\pi}{4}$ è

1. $-\frac{\pi}{4} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx$
2. $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx$
3. $-\frac{\pi}{8} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx$
4. $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin k(x - \frac{\pi}{4})$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.39. Sia f la funzione di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da

$$f(x) = \begin{cases} -\cos(x) & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ 1 & \text{se } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Allora la sua serie di Fourier

1. converge uniformemente su tutto \mathbb{R}
2. converge uniformemente nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$
3. non converge uniformemente su tutto \mathbb{R} , ma converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$
4. nulla si può dire sulla convergenza uniforme

Motivare la risposta. □

Esercizio 5.20.40. Sia f la funzione di periodo 2π definita da $f(x) = x^2$ in $[-\pi, \pi)$. Quale delle seguenti è la sua serie di Fourier?

1. $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$
2. $4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \cos kx$
3. $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \cos kx$
4. $4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \sin kx$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 5.20.41. Sia f la funzione di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ x & \text{se } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Allora la sua serie di Fourier

1. converge uniformemente su tutto \mathbb{R}

2. converge uniformemente nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$
3. non converge uniformemente su tutto \mathbb{R} , ma converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$
4. nulla si può dire sulla convergenza uniforme

Motivare la risposta.

□

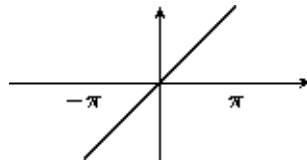
Esercizio 5.20.42. Sia f la funzione di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi]$ da $f(x) = |\sin x|$. Allora la sua serie di Fourier

1. converge uniformemente su tutto \mathbb{R}
2. converge uniformemente nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$
3. non converge uniformemente su tutto \mathbb{R} , ma converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$
4. nulla si può dire sulla convergenza uniforme

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.43. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi]$:



Allora la sua serie di Fourier è una delle seguenti. Quale?

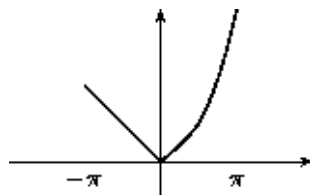
1. $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx$
2. $\frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx$
3. $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \sin kx$
4. $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cos(kx)$

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.44. Sia f la funzione di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $f(x) = x^2$. Assumendo che la serie di Fourier di f sia $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx$, scrivere l'espressione della serie di Fourier della funzione g di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $g(x) = x$. □

Esercizio 5.20.45. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi)$:



Allora i suoi coefficienti di Fourier sono infinitesimi dello stesso ordine di

1. $\frac{1}{k^3}$
2. $\frac{1}{k}$
3. $\frac{1}{k^2}$
4. non si può stabilire l'ordine di infinitesimo.

Motivare la risposta.

□

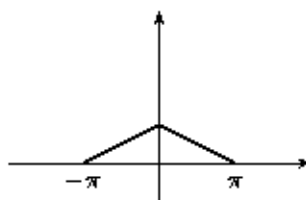
Esercizio 5.20.46. Sia f la funzione di periodo 2π definita in $[-\pi, \pi)$ da $f(x) = x^2$. Allora i suoi coefficienti di Fourier sono infinitesimi dello stesso ordine di

1. $\frac{1}{k^3}$
2. $\frac{1}{k}$
3. $\frac{1}{k^2}$
4. non si può stabilire l'ordine di infinitesimo.

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.47. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi)$:



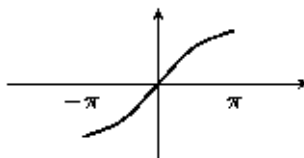
Allora i suoi coefficienti di Fourier sono infinitesimi dello stesso ordine di

1. $\frac{1}{k^3}$
2. $\frac{1}{k}$
3. $\frac{1}{k^2}$
4. non si può stabilire l'ordine di infinitesimo.

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.48. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi)$:



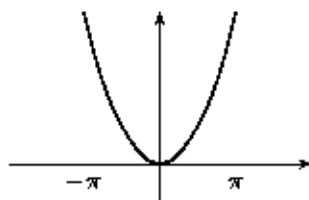
La sua serie di Fourier è una delle seguenti. Quale?

1. $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^3}$
2. $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$
3. $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$
4. $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.49. Sia f la funzione di periodo 2π con il seguente grafico in $[-\pi, \pi]$:



Allora i suoi coefficienti di Fourier sono infinitesimi dello stesso ordine di

1. $\frac{1}{k^3}$
2. $\frac{1}{k}$
3. $\frac{1}{k^2}$
4. non si può stabilire l'ordine di infinitesimo.

Motivare la risposta.

□

Esercizio 5.20.50. Consideriamo la serie di Fourier della funzione $f(x) = \arctan x$ in $[-\pi, \pi)$, ossia la serie trigonometrica i cui coefficienti sono i coefficienti di Fourier di $f(x)$ in $[-\pi, \pi)$. Senza calcolare tali coefficienti, rispondere alle seguenti domande:

- (i) La serie converge in $L^2[-\pi, \pi]$?
- (ii) La serie converge puntualmente su \mathbb{R} ?
- (iii) La serie converge uniformemente su \mathbb{R} ?
- (iv) Qual è l'ordine di infinitesimo dei coefficienti?

□

Esercizio 5.20.51. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - n} e^{2\pi i n \theta}.$$

- (i) La serie converge uniformemente?
- (ii) La serie converge puntualmente?
- (iii) La serie è la serie di Fourier di qualche funzione? Se sì, quale? Se no, perché?
- (iv) Se invece consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{2\pi i n \theta}.$$

mostrare che lo stesso argomento non serve a rispondere alla domanda (iii). *Cautela:* questo non vuol dire che questa serie non sia una serie di Fourier. In effetti, grazie a (5.27), la sua parte immaginaria è riconducibile alla serie di Fourier della funzione a denti di sega dell'Esempio 5.14.1; per la parte reale, più delicata da studiare, si veda la Proposizione 7.6.31 nel seguito.

□

Esercizio 5.20.52. Per $x \in [0, 2\pi]$, sia

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}x^2.$$

Si mostri che questa funzione è pari rispetto alla riflessione $x \mapsto 2\pi - x$. In analogia all'Esempio 5.3.5, si mostri che i coefficienti di Fourier di f sono in soli coseni, e valgono $a_0 = 0$, e $a_k = 1/k^2$ per $k > 0$. Si ricavi da questo fatto un modo di calcolare la somma della serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ alternativo a quello della Nota 5.3.6. □

Esercizio 5.20.53. Per $x \in [0, 2\pi]$, sia

$$f(x) = \frac{1}{12}x(x - \pi)(x - 2\pi).$$

Si mostri che questa funzione è dispari rispetto alla riflessione $x \mapsto 2\pi - x$. Si mostri che i coefficienti di Fourier di f sono in soli seni, e valgono $b_k = 1/k^3$. Si ricavi da questo l'identità

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

(si veda la Nota 5.3.6). □

Esercizio 5.20.54. Per $x \in [0, 2\pi]$, sia

$$f(x) = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2}{12}x^2 + \frac{\pi}{12}x^3 - \frac{1}{48}x^4.$$

Si mostri che questa funzione è pari rispetto alla riflessione $x \mapsto 2\pi - x$. Si mostri che i coefficienti di Fourier di f sono in soli coseni, e valgono $a_0 = 0$, e $a_k = 1/k^4$ per $k > 0$. Si ricavi da questo l'identità

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

(si vedano la Nota 5.3.6 ed il precedente Esercizio 5.20.53). □

Capitolo 6

Identità approssimate ed approssimazione con polinomi trigonometrici ed algebrici

6.1 Approssimazione uniforme con polinomi trigonometrici e identità approssimate

Abbiamo visto che i polinomi trigonometrici sono densi nello spazio delle funzioni continue e periodiche nella norma uniforme (Teorema di Completezza di Weierstrass 5.13.3).

Di questo fatto abbiamo dato una dimostrazione costruttiva: una funzione $f \in C_*$ viene approssimata a meno di $\frac{\varepsilon}{2}$ con funzioni lineari a tratti e ciascuna di queste viene approssimata a meno di $\frac{\varepsilon}{2}$ con qualche somma parziale della sua serie di Fourier. Ma questo metodo è numericamente insostenibile: di ciascun approssimante q_n lineare a tratti si devono calcolare un numero sufficiente di coefficienti di Fourier. Quanti siano si può stimare grazie al Teorema 5.17.1, ma comunque per ogni nuovo approssimante q_n si devono ricalcolare tutti i coefficienti di Fourier. Quindi il metodo è molto più lento persino del calcolo delle somme parziali della serie di Fourier, per le quali ad ogni passo n di approssimazione si deve calcolare solo il nuovo coefficiente di Fourier cioè il coefficiente n -esimo, ma naturalmente queste somme parziali non si possono usare per l'approssimazione, perché la serie di Fourier di una funzione continua di solito non converge uniformemente (come accennato in Sezione 5.5). In questa Sezione e nella prossima studieremo metodi nume-

ricamente efficienti per l'approssimazione uniforme di $f \in C_*$ con polinomi trigonometrici.

Nota 6.1.1. (Scelta di periodo unitario.) In questo e nei successivi capitoli avremo frequentemente bisogno di presentare enunciati che valgono in maniera identica per funzioni in $L^1(\mathbb{R})$ e per funzioni L_*^1 . Di conseguenza è comodo normalizzare nello stesso modo gli integrali nei due casi. A questo scopo, in questa Sezione scegliamo il periodo delle funzioni periodiche in modo adeguato a questo scopo: consideriamo solo funzioni di periodo 1. La norma di f in L_*^1 diventa quindi $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t)| dt$, ed analogamente per le norme in L_*^p (rammentiamo che le norme in $L^1[0, 1]$, e quindi in L_*^1 , e più in generale in L_*^p per $1 < p < \infty$, sono state introdotte nella Definizione 5.1.3. I coefficienti di Fourier diventano

$$\widehat{f}(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) e^{-2\pi int} dt \quad (6.1)$$

(si noti la periodicità di periodo 1 degli esponenziali complessi nell'integrand).
 Questa scelta del periodo sarà mantenuta nel resto di quest'opera, tranne, per motivi storici, nella Sezione 6.2 e nel Capitolo 7, ove il periodo ritornerà ad essere 2π . \square

Per prima cosa, introduciamo l'operazione di convoluzione di funzioni periodiche:

Per prima cosa, introduciamo l'operazione di convoluzione di funzioni periodiche:

Definizione 6.1.2. Siano $f, g \in L_*^2$, o, più in generale, $f \in L_*^p$ e $g \in L_*^q$ con p e q indici coniugati, ovvero $1/p + 1/q = 1$ (Definizione 1.16.4). Definiamo il prodotto di convoluzione $f * g$ come la funzione

$$f * g(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t)g(t) dt.$$

L'integrale converge in base alla disuguaglianza di Hölder (Teorema 1.16.6). Più in generale, definiamo allo stesso modo $f * g$ quando $f, g \in L_*^1$: in tal caso la convoluzione può non essere definita puntualmente ovunque, ma è una funzione in L_*^1 .

Se si intende definire la convoluzione con un periodo diverso, diciamo $T > 0$, allora si può normalizzare così:

$$f * g(x) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} f(x-t)g(t) dt.$$

Nota 6.1.3. Se $f, g \in L_*^1$, la loro convoluzione è un'operazione commutativa: $f * g(x) = g * f(x)$. Infatti:

$$f * g(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t)g(t) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)g(x-t) dt = g * f(x).$$

□

Esercizio 6.1.4. La convoluzione è associativa: $(f * g) * h = f * (g * h)$ per ogni f, g, h in L_*^1 (o più in generale, per ogni terna di funzioni per cui la convoluzione abbia senso).

Suggerimento: lo scambio dell'ordine di integrazione è permesso dal Teorema di Fubini (parte (ii) del Teorema 1.20.4).

(Rivedremo questo stesso argomento nel caso della misura discreta (counting measure), ossia per la commutatività della convoluzione di successioni, nella Nota 19.3.1). □

Proposizione 6.1.5. Siano $f, g \in L_*^1$.

(i) $f * g \in L_*^1$ e $\|f * g\|_{L_*^1} \leq \|f\|_{L_*^1} \|g\|_{L_*^1}$ (in particolare, lo spazio vettoriale L_*^1 è chiuso rispetto al prodotto di convoluzione, nel senso che la convoluzione di due funzioni in L_*^1 è ancora in L_*^1 : si dice che L_*^1 è un'algebra per convoluzione).

(Analogamente, se $f \in L_*^1$ e $g \in L_*^p$, allora $f * g \in L_*^p$ e $\|f * g\|_{L_*^p} \leq \|f\|_{L_*^1} \|g\|_{L_*^p}$.)

(ii) Se g è limitata, allora $f * g$ è continua e $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_{L_*^1} \|g\|_\infty$. Più in generale, se $f \in L_*^p$ e $g \in L_*^q$ con p, q indici coniugati nel senso della Definizione 1.16.4 (ossia $1 \leq p, q \leq \infty$ e $1/p + 1/q = 1$), allora $f * g \in C_*$ e $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_{L_*^p} \|g\|_{L_*^q}$.

(iii) Se g è derivabile allora $f * g$ è derivabile, e $(f * g)' = f * g'$; se f è derivabile, $f * g$ è derivabile, e $(f * g)' = f' * g$. In generale, se $f \in C^k$ e $g \in L^1$, allora $f * g \in C^k$ e $D^k(f * g) = D^k f * g$.

Dimostrazione. La disuguaglianza nella parte (i) segue immediatamente dallo scambio dell'ordine di integrazione, grazie al Teorema di Fubini (Teorema

1.20.4) per integrandi positivi, nell'ultimo integrale doppio nella disuguaglianza

$$\|f * g\|_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t)g(t) dt \right| dx \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x-t)| |g(t)| dt dx.$$

La continuità della convoluzione segue dal fatto che la funzione integrale è continua (anzi di più, assolutamente continua: Lemma 1.27.2).

Per quanto riguarda (ii), la disuguaglianza $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_{L^1_*} \|g\|_\infty$ è evidente. La continuità segue dal Lemma 5.9.4 e da questa disuguaglianza, che è conseguenza di (i):

$$|f * g(x+h) - f * g(x)| \leq \|\lambda_{-h}f - f\|_{L^1_*} \|g\|_\infty$$

(dove abbiamo posto $\lambda_h f(x) = f(x-h)$, come nell'Esercizio 5.18.4).

Se $f \in L^p_*$ e $g \in L^q_*$ con p, q indici coniugati, allora, ponendo $f^\dagger(u) = f(-u)$, per ogni x si ha $\lambda_x f^\dagger(u) = f(x-u)$, e quindi $|f * g(x)| := |\langle \lambda_x f^\dagger, g \rangle| \leq \|f\|_{L^p_*} \|g\|_{L^q_*}$ in base alla disuguaglianza di Hölder (Teorema 1.16.6).

Infine, (iii) segue dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale su domini illimitati (Corollario 1.23.7). \square

Proposizione 6.1.6. *I coefficienti di Fourier sono moltiplicativi rispetto al prodotto di convoluzione: per ogni intero n ,*

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n).$$

Dimostrazione. Ancora grazie al Teorema di Fubini 1.20.4,

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f * g)(t) e^{-2\pi i n t} dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t-u) g(u) du e^{-2\pi i n t} dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t-u) e^{-2\pi i n(t-u)} g(u) e^{-2\pi i n u} du dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(y) e^{-2\pi i n y} dy \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(u) e^{-2\pi i n u} du \\ &= \widehat{f}(n) \widehat{g}(n). \end{aligned}$$

□

Sia ora g un polinomio trigonometrico. Allora g ha solo un numero finito di coefficienti di Fourier non nulli. Segue dalla Proposizione 6.1.6 che anche $g * f$ è un polinomio trigonometrico, per qualunque $f \in L_*^1$.

Se $f \in C_*$, come possiamo costruire una successione di polinomi trigonometrici g_n tali che $g_n * f \rightarrow f$ uniformemente per $n \rightarrow \infty$? Dalla Definizione 6.1.2 si vede che, se

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t) dt = 1,$$

allora $g * f(x)$ è una media integrale dei valori di f intorno a x pesati con il peso $g(x-t) = g^\dagger(t-x)$.

Normalmente, per parlare di media integrale, si preferisce fare l'ipotesi che il peso sia positivo. Assumiamo quindi $g \geq 0$. È chiaro che, se vogliamo che le medie integrali $g_n * f$ convergano al valore $f(x)$, dovremo richiedere che i pesi $g_n^\dagger(t)$ diventino piccoli al crescere di n tranne che per valori di t vicini a zero. Perciò poniamo:

Definizione 6.1.7. Una successione di funzioni h_n è un'identità approssimata in L_*^1 se verifica le seguenti condizioni:

(i) $h_n \in L_*^1$ e $h_n(x) \geq 0$ ovunque (quasi ovunque se h_n non è continua)

(ii)

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(t) dt = 1 \quad \text{per ogni } n$$

(iii) Per ogni δ , $0 < \delta < \frac{1}{2}$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{-\delta} h_n(t) dt + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} h_n(t) dt \right) = 0.$$

Nel seguito assumeremo spesso che tutte le h_n siano funzioni pari (in tal caso i due integrali nella parte (iii) della Definizione (6.1.7) sono uguali. Nella prossima Sezione studieremo alcuni esempi dove le h_n sono polinomi trigonometrici.

Le identità approssimate si chiamano così proprio perché, per ogni $f \in C_*$,

$$h_n * f \rightarrow f$$

uniformemente per $n \rightarrow \infty$, come dimostriamo nel seguente teorema:

Teorema 6.1.8. (Convergenza di identità approssimate a funzioni continue). *Se h_n è un'identità approssimata, allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n * f - f\|_\infty = 0 \quad \text{per ogni } f \in C_*.$$

Per la dimostrazione abbiamo bisogno del seguente richiamo sulla uniforme continuità:

Nota 6.1.9. Una funzione f è uniformemente continua se la quantità

$$\omega(\delta) = \omega_f(\delta) = \sup \{|f(x) - f(y)| : |x - y| < \delta\}$$

(definita per $\delta > 0$ e detta *modulo di continuità* di f) verifica la proprietà

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(\delta) = 0.$$

Infatti dire che il limite è nullo è un altro modo di scrivere la definizione di uniforme continuità: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - y| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Si noti che ovviamente $\omega(\delta)$ è monotona non decrescente al variare di $\delta > 0$. \square

Dimostrazione del Teorema 6.1.8. Dalla proprietà (ii) della Definizione 6.1.7 si ha

$$\begin{aligned} h_n * f(x) - f(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(t) f(x-t) dt - f(x) \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(t) f(x-t) dt - \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(t) dt \right) f(x) \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(t) f(x-t) du - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(t) f(x) dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(t) (f(x-t) - f(x)) dt. \end{aligned}$$

Perciò, con la terminologia della Nota 6.1.9, dalla proprietà (i) della Definizione 6.1.7 segue

$$\begin{aligned} |h_n * f(x) - f(x)| &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt \\ &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(t) \omega(|t|) dt. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Ma, poiché f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, essa è uniformemente continua per il Teorema di Heine sulla uniforme continuità (Teorema 1.8.6). Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste quindi $\delta > 0$ tale che $\omega(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ grazie alla Nota 6.1.9.

Fissiamo ε ed il corrispondente δ . Allora, per la proprietà (iii) della Definizione 6.1.7, esiste n_0 (che dipende da ε e da δ) tale che, se n è sufficientemente grande, ossia maggiore di n_0 , si ha

$$\int_{\delta}^{\frac{1}{2}} h_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{-\delta} h_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{4M} \quad (6.3)$$

dove

$$M = \omega(1) = \max \left\{ |f(x) - f(y)| : x, y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} \leq 2 \|f\|_{\infty}.$$

Da tutte queste disuguaglianze e da (6.2) segue che, se n è maggiore di un opportuno intero n_0 che dipende da ε e δ ,

$$\begin{aligned} |h_n * f(x) - f(x)| &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(t) \omega(|t|) dt \\ &= \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \right) h_n(t) \omega(|t|) dt \\ &\leq \omega(\delta) \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t) dt + 2M \frac{\varepsilon}{4M} \end{aligned}$$

(per il primo addendo abbiamo usato il fatto che ω è non decrescente, per il secondo abbiamo usato anche (6.3)). Ora di nuovo dalla proprietà (ii) della Definizione 6.1.7, si ha

$$|h_n * f(x) - f(x)| \leq \omega(\delta) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

purché, fissato $\varepsilon > 0$ si scelga δ in funzione di ε (ma non di n) come indicato sopra (cioè così piccolo che $\omega(\delta) < \varepsilon/2$), e dato questo δ si scelga $n > n_0 = n_0(\delta, \varepsilon)$. Abbiamo provato che $h_n * f$ converge a f uniformemente rispetto a x .

Se avessimo anche usato l'ipotesi aggiuntiva che h_n fosse pari, allora la dimostrazione sarebbe risultata leggermente semplificata (ma sostanzialmente la stessa). La dimostrazione è identica se si assume $f \in C(\mathbb{R})$. \square

Teorema 6.1.10. (Convergenza di identità approssimate nella norma di L_*^1 o L_*^p). *Se h_n è un'identità approssimata in L_*^1 , allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n * f - f\|_{L_*^1} = 0 \quad \text{per ogni } f \in L_*^1.$$

Lo stesso risultato vale per $f \in L_^p$, $1 \leq p < \infty$ (il limite si prende nella norma in L_*^p).*

Dimostrazione. Da (6.2) si ha

$$\begin{aligned} \|h_n * f - f\|_{L_*^1} &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt dx & (6.4) \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(t) |f(x-t) - f(x)| dx dt. \end{aligned}$$

Abbiamo scambiato l'ordine di integrazione grazie al Teorema di Fubini (Teorema 1.20.4), che si può applicare perché l'integrando è non negativo.

Sia

$$F(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x-t) - f(x)| dx.$$

Osserviamo che F è una funzione continua della variabile $t \in \mathbb{R}$, anzi uniformemente continua, perché per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $|t_1 - t_2| < \delta$,

$$\begin{aligned} |F(t_1) - F(t_2)| &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| |f(x-t_1) - f(x)| - |f(x-t_2) - f(x)| \right| dx \\ &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x-t_1) - f(x-t_2)| dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x - (t_1 - t_2)) - f(x)| dx < \varepsilon \end{aligned}$$

grazie alla disuguaglianza triangolare $\|a| - |b| \leq |a - b|$, al Lemma 5.1.1 ed alla continuità della traslazione rispetto alla norma L_*^1 (Lemma 5.9.4).

Quindi da (6.4) segue

$$\|h_n * f - f\|_{L_*^1} \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(t) F(t) dt = h_n * F^\dagger(0)$$

(rammentiamo la notazione $F^\dagger(t) = F(-t)$). Poiché F è continua (e quindi anche F^\dagger) si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n * F^\dagger(0) = F^\dagger(0) = 0$$

dal Teorema 6.1.8.

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n * f - f\|_{L_*^1} = 0.$$

Il caso di $f \in L_*^p$ si ottiene tramite approssimazione delle funzioni in L_*^p con funzioni continue (Proposizione 1.18.6), come nelle disuguaglianze (5.17) del Lemma 5.9.4 sulla continuità dell'operatore di traslazione (che in effetti è un caso particolare, come vedremo in seguito nella Sezione 11.15, dove esprimeremo l'operatore di traslazione come un operatore di convoluzione). In effetti, per ogni $f \in L_*^p$ e $\varepsilon > 0$, scegliamo $g \in C_*$ tale che $\|f - g\|_{L_*^p} < \varepsilon/3$, ed osserviamo che, in base alla parte (i) della Proposizione 6.1.5 ed alla normalizzazione delle identità approssimate (proprietà (ii) della Definizione 6.1.7),

$$\|h_n * f - h_n * g\|_{L_*^p} \leq \|h_n\|_{L_*^1} \|f - g\|_{L_*^p} = \|f - g\|_{L_*^p} < \varepsilon/3. \quad (6.5)$$

Ora, per il teorema di convergenza uniforme di identità approssimate (Teorema 6.1.8), esiste n_0 tale che, per ogni $n \geq n_0$, si ha $\|h_n * g - g\|_\infty < \varepsilon$, e quindi, per $n \geq n_0$,

$$\|h_n * g - g\|_{L_*^p} \leq \|h_n * g - g\|_\infty < \varepsilon/3. \quad (6.6)$$

Combinando (6.5) e (6.6) con la condizione di approssimazione $\|f - g\|_{L_*^p} < \varepsilon/3$, ed usando la disuguaglianza triangolare come in (5.17), si deduce che $\|h_n * f - f\|_{L_*^p} < \varepsilon$ per $n \geq n_0$ ossia la convergenza di $h_n * f$ a f nella norma di L_*^p . \square

Passiamo ora a considerare il caso di funzioni in $C(\mathbb{R})$ o $L^1(\mathbb{R})$ invece che in C_* o L_*^1 .

Definizione 6.1.11. Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ la convoluzione di f e g è definita da:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt.$$

Nota 6.1.12. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ è a supporto compatto, allora $f * g(x)$ esiste finito per ogni x non solo per ogni $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ ma anche per ogni g localmente integrabile (ossia con integrale finito su ogni compatto). Però, se f non è a supporto compatto, allora $f * g(x)$ diverge per ogni x se la crescita asintotica di g è troppo rapida, ad esempio se $fg(x)$ ha un andamento asintotico più lento di $1/x$. \square

Esercizio 6.1.13. Come per la convoluzione periodica della Definizione 6.1.2, anche qui, esattamente per lo stesso argomento della Nota 6.1.3, la convoluzione è commutativa: $f * g = g * f$. Come nell'Esercizio 6.1.4, la convoluzione è associativa: $(f * g) * h = f * (g * h)$ quando le tre funzioni appartengono a $L^1(\mathbb{R})$, o più in generale sono tali che le convoluzioni abbiano senso. L'integrale nella Definizione 6.1.11 è convergente e $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. Di più, si ha

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \quad (6.7)$$

Come nella Proposizione 6.1.5 (i), $f * g \in C(\mathbb{R})$ se $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$ con $1 \leq p, q \leq \infty$ e $1/p + 1/q = 1$, e $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Inoltre se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, allora $f * g \in L^p(\mathbb{R})$, e $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. Infine, se $f \in C^k$ e $g \in L^1$, allora $f * g \in C^k$ e $D^k(f * g) = D^k f * g$. \square

Nota 6.1.14. La definizione di convoluzione data nell'enunciato del Teorema 6.1.8 nel caso in cui h è in L^1_* e f in $L^1(\mathbb{R})$ si riduce alla Definizione 6.1.11 se si rimpiazza la funzione $h \in L^1_*$ con $\tilde{h} \in L^1(\mathbb{R})$ definita da $\tilde{h}(x) = h(x)$ se $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ e $\tilde{h}(x) = 0$ altrimenti. \square

Definizione 6.1.15. Una successione di funzioni h_n è un'identità approssimata in $L^1(\mathbb{R})$ se verifica:

$$(i) \quad h_n \in L^1(\mathbb{R}) \text{ e } h_n(x) \geq 0 \quad \text{per tutti gli } n \text{ e } x$$

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(t) dt = 1 \quad \text{per ogni } n$$

(iii) per ogni $\delta > 0$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} h_n(t) dt + \int_{\delta}^{\infty} h_n(t) dt \right) = 0.$$

Teorema 6.1.16. (Convergenza di identità approssimate su \mathbb{R}). *I Teoremi 6.1.8 e 6.1.10 valgono se h_n è un'identità approssimata in $L^1(\mathbb{R})$ e se f è uniformemente continua e limitata su \mathbb{R} , oppure, rispettivamente, se $f \in L^1(\mathbb{R})$. Più precisamente*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n * f - f\|_{\infty} = 0$$

se f è uniformemente continua e limitata su \mathbb{R} (in particolare, si ha anche convergenza puntuale di $h_n * f(x)$ a $f(x)$ per ogni x : nel successivo Teorema 6.1.18 vedremo che per la convergenza puntuale è sufficiente assumere che f sia limitata e continua, non anche uniformemente continua);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n * f - f\|_1 = 0$$

se $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Inoltre, per ogni p con $1 \leq p < \infty$, vale lo stesso risultato: $h_n * f \in L^p(\mathbb{R})$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n * f - f\|_p = 0$$

per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. La dimostrazione è identica a quella data per i Teoremi 6.1.8 e 6.1.10. L'ipotesi aggiuntiva che f sia limitata serve a garantire che l'integrale

$$h_n * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x-y) f(t) dy$$

sia convergente se $h_n \in L^1(\mathbb{R})$. La condizione di uniforme continuità, pesantemente usata nella dimostrazione del Teorema 6.1.8, era garantita in quel Teorema dalla continuità di f sull'intervallo compatto dato dal periodo (grazie al Teorema di Heine 1.8.6), ma qui deve essere assunta come ipotesi perché la funzione non è più considerata su un compatto bensì su tutto \mathbb{R} .

Il caso $1 < p < \infty$ si dimostra tramite approssimazione con funzioni continue, come nella dimostrazione per il caso periodico (Teorema 6.1.10). Ripetiamo

qui la dimostrazione. Data $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$, per definizione di integrale esiste un compatto $K = [a, b]$ tale che la coda di f al di fuori di K , ossia la funzione $f - f\chi_K$ (dove χ_K è la funzione caratteristica di K) abbia norma L^p arbitrariamente piccola, diciamo $\|f - f\chi_K\|_p < \varepsilon/4$. Utilizziamo la densità in $L^p(K)$ dello spazio delle funzioni continue a supporto in K (Proposizione 1.18.6) per scegliere g continua tale che $\|f\chi_K - g\|_p < \varepsilon/4$. Osserviamo che, in base alla disuguaglianze in norma per la convoluzione (Esercizio 6.1.13) ed alla normalizzazione delle identità approssimate (proprietà (ii) della Definizione 6.1.15),

$$\|h_n * f - h_n * g\|_p \leq \|h_n\|_1 \|f - g\|_p = \|f - g\|_p < \varepsilon/4.$$

Osserviamo che

$$\|h_n * g - g\|_p \leq C \|h_n * g - g\|_\infty < \varepsilon/4,$$

dove la costante C , calcolata dopo la disuguaglianza (1.46), è indipendente da n , ma dipende solo dalla misura del supporto K di g : poiché K ormai è fissato, è fissata anche C . Ora, per il teorema di convergenza uniforme di identità approssimate (Teorema 6.1.8), esiste n_0 tale che, per ogni $n \geq n_0$, si ha $\|h_n * g - g\|_\infty < \varepsilon$, e quindi, per $n \geq n_0$,

$$\|h_n * g - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4C},$$

e quindi $\|h_n * g - g\|_p \leq \varepsilon/4$. Da queste disuguaglianze segue

$$\|h_n * f - f\|_p \leq \|h_n * f - h_n * g\|_p + \|h_n * g - g\|_p + \|g - f\chi_K\|_p + \|f\chi_K - f\|_p < \varepsilon.$$

□

Nota 6.1.17. L'ipotesi del precedente Teorema 6.1.16, per quanto riguarda la convergenza uniforme, richiede che f sia uniformemente continua e limitata su \mathbb{R} , mentre, nel caso di funzioni periodiche (Teorema 6.1.8), queste proprietà seguivano automaticamente dall'ipotesi che f fosse continua. In generale, queste proprietà seguono automaticamente dal fatto che f sia continua a supporto compatto, in base al Teorema di Heine di uniforme continuità e dal teorema di Weierstrass di limitatezza di funzioni continue sui compatti (Sezione 1.1). Osserviamo inoltre che, affinché una funzione continua f su \mathbb{R} sia anche limitata ed uniformemente continua, basta assumere che f tenda

a zero all'infinito. Infatti, se così è, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto K al di fuori del quale $|f(x)| < \varepsilon/4$, e quindi il modulo di continuità introdotto nella Nota 6.1.9 verifica $\omega_\delta(x) < \varepsilon$ se δ è sufficientemente piccolo (così piccolo che l'intervallo $(x - \delta, x + \delta)$ sia disgiunto da K). Invece, se $x \in K$, dato ε esiste δ tale che $\omega_\delta(x) < \varepsilon$, in base al Teorema di Heine (per questa riformulazione del Teorema di Heine si veda la Nota 6.1.9). Pertanto, la disuguaglianza $\omega_\delta(x) < \varepsilon$ vale dappertutto se δ è sufficientemente piccolo, e quindi f è uniformemente continua su \mathbb{R} . Il fatto che sia limitata segue banalmente, grazie al Teorema di Weierstrass, dal fatto che è continua e tende a zero all'infinito. \square

Avremo bisogno del seguente teorema di convergenza puntuale:

Teorema 6.1.18. (Convergenza puntuale di identità approssimate). *Sia h_n un'identità approssimata in $L^1(\mathbb{R})$ e sia $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ (o rispettivamente, sia h_n un'identità approssimata in L_*^1 e $f \in L_*^\infty$): quindi $h_n * f \in C(\mathbb{R})$ per l'Esercizio 6.1.13, o rispettivamente $h_n * f \in C_*$ per la Proposizione 6.1.5 (ii). Allora, ad ogni punto di continuità x di f ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n * f(x) = f(x).$$

Dimostrazione. Presentiamo la dimostrazione nel caso $h_n \in L^1(\mathbb{R})$: l'argomento per $h_n \in L_*^1$ è sostanzialmente identico.

Si usa la stessa idea del Teorema 6.1.8. Analogamente alla disuguaglianza (6.2) di quel Teorema, osservando che

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(t) dt = 1$$

(Definizione 6.1.15(ii)), si ottiene

$$\begin{aligned} h_n * f(x) - f(x) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} h_n(t) f(x-t) dt - f(x) \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t) dt \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t) (f(x-t) - f(x)) dt \end{aligned}$$

da cui

$$|h_n * f(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt. \quad (6.8)$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché f è continua in x , esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon/2$ se $|t| < \delta$.

In corrispondenza a questo δ esiste un valore n_0 tale che, se $n > n_0$,

$$\int_{-\infty}^{-\delta} h_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{8\|f\|_\infty}$$

e

$$\int_{\delta}^{\infty} h_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{8\|f\|_\infty}$$

(Definizione 6.1.15 (iii)). Poiché $|f(x-t) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty$ per ogni $x, t \in \mathbb{R}$ segue da (6.8) e dalla Definizione 6.1.15 (ii) che, per $n > n_0$,

$$\begin{aligned} |h_n * f(x) - f(x)| &\leq \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) h_n(x) |f(x-t) - f(x)| dt \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{8\|f\|_\infty} 2\|f\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t) dt + \frac{\varepsilon}{8\|f\|_\infty} 2\|f\|_\infty \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t) dt + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Esercizio 6.1.19. Sia $c \in \mathbb{R}$ e $c_n \rightarrow c$. Data una identità approssimata h_n in L^1_* , si consideri il traslato $g_n = \lambda_{c_n} h_n$, ovvero $g_n(x) = h_n(x - c_n)$. Si mostri che

- (i) per ogni $f \in L^p_*$ con $1 \leq p < \infty$, $g_n * f$ converge a $\lambda_c f$ in L^p_* ;
- (ii) per ogni $f \in C_*$, $g_n * f$ converge a $\lambda_c f$ uniformemente.

Se invece si considera una identità approssimata $\{h_n\}$ in $L^1(\mathbb{R})$, si mostri che

- (iii) per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$, $g_n * f$ converge a $\lambda_c f$ in $L^p(\mathbb{R})$;
- (iv) per ogni f uniformemente continua e limitata su \mathbb{R} , $g_n * f$ converge a $\lambda_c f$ uniformemente.

Suggerimento: si verifichi che $h_n * (\lambda_{c_n} f) = \lambda_{c_n}(h_n * f) = \lambda_{c_n}(h_n) * f = g_n * f$. Quindi, grazie all'invarianza per traslazione delle norme, senza perdita di generalità possiamo assumere $c = 0$. Inoltre $g_n * f - f = \lambda_{c_n}(h_n * f - f) + \lambda_{c_n} f - f$. Il termine $\lambda_{c_n} f - f$ tende a zero nella norma di L^p ed uniformemente, grazie ai Lemmi 5.9.4 e 5.9.6. Quindi basta considerare il termine $\lambda_{c_n}(h_n * f - f)$. Di nuovo in base alla invarianza per traslazione delle norme, la convergenza a zero di questo termine segue dai Teoremi di convergenza 6.1.8 e 6.1.10 per le parti (i) e (ii), e dal Teorema 6.1.16 per le parti (iii) e (iv). \square

6.2 Sommabilità secondo Féjèr ed altri nuclei di sommabilità: approssimazione trigonometrica

Nota 6.2.1. In questa Sezione le funzioni periodiche hanno periodo 2π , e l'espressione dei coefficienti di Fourier ritorna ad essere quella data in (5.7):

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

(si veda la Nota 6.1.1), la convoluzione diventa

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) dt$$

e $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n)$, e $f * e^{int} = \widehat{f}(n) e^{int}$. \square

Adottiamo ora un approccio diverso da quello della Sezione 6.1 al problema dell'approssimazione uniforme di funzioni continue mediante polinomi trigonometrici. Abbiamo visto che possiamo approssimare $f \in C_*$ con $h_n * f$ dove $\{h_n\}$ è un'identità approssimata. Ma per il calcolo numerico è importante decidere come scegliere l'identità approssimata. Il metodo che proponiamo in questa Sezione è quello di sceglierla specificando i coefficienti di Fourier. Dalla Proposizione 6.1.6 sappiamo che l'azione di h_n tramite convoluzione manda f nella funzione continua e periodica i cui coefficienti sono $\{\widehat{h}_n(k) \widehat{f}(k)\}$. In altre parole, se consideriamo le funzioni come determinate dalla successione dei loro coefficienti di Fourier, le identità approssimate

agiscono su questa successione come moltiplicatori: al variare di n , esse moltiplicano volta per volta questa successione per la successione $\{\widehat{h}_n(k), k \in \mathbb{Z}\}$. Quale è allora l'identità approssimata più comoda per il calcolo numerico? C'è una speranza ovvia: quella di prendere

$$\widehat{h}_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } |k| \leq n \\ 0 & \text{se } |k| > n \end{cases}$$

Questa scelta ha il vantaggio inestimabile che i coefficienti di Fourier $\widehat{h}_{n+1}(k)$ coincidono con quelli di $\widehat{h}_n(k)$ per $|k| \leq n$: perciò, quando si calcola il valore del polinomio trigonometrico $h_n * f$, il calcolo progressivo all'aumentare di n richiede che se ne calcolino i coefficienti di Fourier solo all'ultima frequenza $\pm n$: gli altri sono stati già calcolati al passo precedente. Purtroppo, però, con questa scelta di h_n non si ottiene un'identità approssimata: infatti si ha $h_n * f = S_n[f]$ la somma parziale di ordine n della serie di Fourier, e abbiamo accennato in Sezione 5.5 che esistono funzioni continue e periodiche la cui serie di Fourier non converge puntualmente (diverge in un punto, o anche su una successione di punti in $[-\pi, \pi]$, o persino su tutto un insieme di misura zero). In effetti, si osservi anche che le funzioni h_n così costruite sono

$$h_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n (e^{ikx} + e^{-ikx}) = 2D_n(x)$$

dove D_n sono le somme di Dirichlet definite e studiate in Sezione 5.8, e D_n non verifica le proprietà (i) e (ii) della Definizione 6.1.7. Soprattutto, dimostreremo in seguito che $\|h_n\|_1 \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$ (Proposizione 7.6.2).

Dobbiamo quindi rinunciare alla speranza che \widehat{h}_n sia una successione a supporto in $[-n, n]$ che coincide con \widehat{h}_{n+1} in $[-n-1, n+1]$.

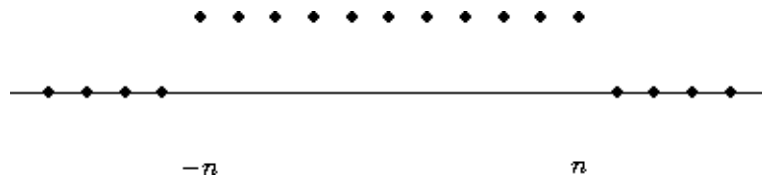


Figura 6.1: I coefficienti di Fourier del nucleo di Dirichlet

6.2.1 Nucleo di Féjèr

Una scelta leggermente diversa è data dai polinomi trigonometrici $K_n(x)$ tali che $\widehat{K}_n(0) = 1$, l'andamento di $\widehat{K}_n(m)$ sia lineare tra 0 e n e tra 0 e $-n$ e $\widehat{K}_n(m) = 0$ per $|m| > n$. Ovvero,

$$K_n(x) = \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt}. \quad (6.9)$$

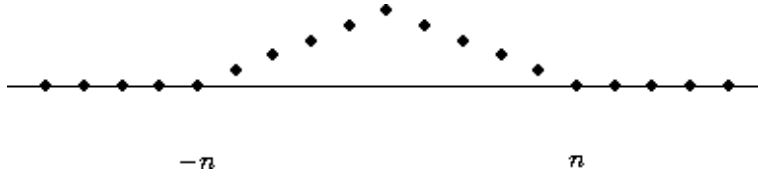


Figura 6.2: I coefficienti di Fourier del nucleo di Féjèr

Questo equivale ovviamente a scegliere

Definizione 6.2.2. (Nucleo di Féjèr.) Poniamo

$$K_n * f = \frac{S_0 + \dots + S_n}{n+1}$$

dove $S_n = S_n[f]$ è la somma parziale n -esima della serie di Fourier. Quindi l'azione del convolutore di passo n è quella di calcolare la media aritmetica delle prime n somme di Fourier. Il nucleo di convoluzione K_n si chiama *nucleo di Féjèr*. Scriviamo $\sigma_n[f] = K_n * f$.

Teorema 6.2.3. *Il nucleo di Féjèr è un'identità approssimata.*

Dimostrazione. Segue da (5.10) e dalla normalizzazione nella Definizione 6.1.2 di convoluzione che

$$\sigma_n[f](x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(x) = \frac{1}{n+1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^n D_k(t-x) \right) f(t) dt \quad (6.10)$$

(osserviamo che $\sum_{k=0}^n D_k$ è pari perché D_k lo è).

Ora dalla Proposizione 5.8.2 segue che, per ogni $u \neq 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=0}^n D_k(u) = \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2}} \sum_{k=0}^n \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) u \right). \quad (6.11)$$

D'altra parte, se $u \neq 2m\pi$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) u &= \operatorname{Im} \sum_{k=0}^n e^{i(k+\frac{1}{2})u} \\ &= \operatorname{Im} \frac{e^{i\frac{u}{2}} - e^{i(n+\frac{3}{2})u}}{1 - e^{iu}} \\ &= \operatorname{Im} \frac{1 - e^{i(n+1)u}}{e^{-i\frac{u}{2}} - e^{i\frac{u}{2}}} \\ &= -\operatorname{Im} \frac{1 - e^{i(n+1)u}}{2i \sin \frac{u}{2}} \\ &= \frac{\operatorname{Re}(1 - e^{i(n+1)u})}{2 \sin \frac{u}{2}} \\ &= \frac{1 - \cos((n+1)u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

perché $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ (si confronti questo punto con la dimostrazione della Proposizione 5.8.2). Se $u = 2m\pi$ allora

$$\sum_{k=0}^n \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) u = 0.$$

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ vale l'identità trigonometrica $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, che, applicata all'ultimo membro di (6.12), ci dà:

$$\sum_{k=0}^n \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) u = \frac{\sin^2 \left(\frac{n+1}{2} u \right)}{\sin \frac{u}{2}},$$

e quindi, da (6.11),

$$\sum_{k=0}^n D_k(u) = \frac{\sin^2 \left(\frac{n+1}{2} u \right)}{2 \sin^2 \frac{u}{2}}. \quad (6.13)$$

Perciò segue da (6.11) e dalla normalizzazione nella Definizione 6.1.2 di convoluzione che

$$\sigma_n[f](x) = K_n * f(x) \tag{6.14}$$

con

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2. \tag{6.15}$$

Di conseguenza vale la proprietà (i) della Definizione 6.1.7:

$$K_n(x) \geq 0 \tag{6.16}$$

per ogni x .

Inoltre, da (6.10) e dalla normalizzazione nella Definizione 6.1.2,

$$K_n(x) = \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n D_m$$

e

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(t) dt = 1$$

per $m > 0$. Quindi vale la proprietà (ii) della Definizione 6.1.7:

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_m(t) dt = 1. \tag{6.17}$$

Questa proprietà segue anche da (6.9) visto che, per $m = 1, \dots, n$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt dt = 0$$

in virtù dell'ortogonalità del sistema trigonometrico ($\cos mt \perp 1$).

Infine, mostriamo che vale la proprietà (iii) della Definizione 6.1.7: per ogni δ che verifica $0 < \delta < \pi$ segue da (6.15) che, per $n \rightarrow \infty$,

$$\int_{\delta}^{\pi} K_n(t) dt \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} dt = \frac{\pi - \delta}{2\pi(n+1) \sin^2 \frac{\delta}{2}} \rightarrow 0.$$

Poiché K_n è pari,

$$\int_{-\pi}^{-\delta} K_n(t) dt = \int_{\delta}^{\pi} K_n(t) dt$$

e la proprietà (iii) è provata. Quindi $\{K_n\}$ è un'identità approssimata.

□

Nota 6.2.4. Ora il Teorema 6.1.8 assicura la convergenza uniforme di $\sigma_n[f]$ a f per ogni f continua. Inoltre, se $f \in L^1$, si ha un interessante risultato anche sulla convergenza puntuale, presentato nel prossimo teorema, che estende il teorema di convergenza puntuale di identità approssimate (Teorema 6.1.18). Queste proprietà si chiamano *sommabilità secondo Féjèr*. \square

Teorema 6.2.5. (Féjèr.) *Siano $f \in L^1_{\ast}$ e t_0 un punto tale che il limite puntuale $\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) + f(t_0 - h) := 2\check{f}(t_0)$ esista (finito oppure infinito; si noti che tale limite dipende solo dalla classe di Lebesgue di f introdotta nella Definizione 1.16.16, non dalla scelta rappresentante nella classe). Allora le somme di Féjèr convergono puntualmente a $\check{f}(t_0)$ nel punto t_0 . In particolare, esse convergono alla media aritmetica dei limiti destro e sinistro di f se questi limiti esistono (anche quando le somme di Fourier non convergono!). In particolare, se f è continua in t_0 , allora $\lim_n \sigma_n[f](t_0) \rightarrow f(t_0)$. Inoltre, se f è continua in un intervallo chiuso I , la convergenza è uniforme in I .*

Nota 6.2.6. È facile verificare che $\check{f} = f$ ad ogni punto di Lebesgue di f (Definizione 1.9.34), quindi quasi ovunque, in base al Teorema 1.9.37. In particolare, vale questa identità che useremo in seguito:

$$\|\check{f}\|_{L^1_{\ast}} = \|f\|_{L^1_{\ast}}. \quad (6.18)$$

\square

Dimostrazione del Teorema 6.2.5. Facciamo uso delle seguenti due proprietà ovvie del nucleo di Féjèr:

- (i) K_n è pari (segue direttamente dalla sua definizione (6.9));
- (ii) per ogni δ , con $0 < \delta < \pi$, K_n converge a zero uniformemente nell'intervallo $[\delta, \pi]$ (ed ovviamente anche in $[-\pi, -\delta]$, per (i)).

Assumiamo che \check{f} sia finito: l'altro caso si dimostra in maniera del tutto analoga. Si ha

$$\begin{aligned} \sigma_n[f](t_0) - \check{f}(t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \left(f(t_0 - t) - \check{f}(t_0) \right) dt \quad (6.19) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) K_n(t) \left(f(t_0 - t) - \check{f}(t_0) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) K_n(t) \left(\frac{f(t_0 + t) + f(t_0 - t)}{2} - \check{f}(t_0) \right) dt, \end{aligned}$$

dove la prima identità segue dalla proprietà (ii) della Definizione 6.1.7, e l'ultima dalla parità di K_n (proprietà (i) qui sopra). Osserviamo che, nell'ultimo integrale, compare la funzione $t \mapsto \left(\frac{f(t_0+t)+f(t_0-t)}{2} - \check{f}(t_0) \right)$, che appartiene a L_*^1 (la sua norma L_*^1 si migliora con $\|f\|_{L_*^1} + \|\check{f}(t_0)\|_{L_*^1} = 2\|f\|_{L_*^1}$). Poiché $\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0+h) + f(t_0-h) = \check{f}(t_0)$ è finito, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo scegliere δ in modo tale che, per $0 \leq t < \delta$, si abbia

$$\left| \frac{f(t_0+t) + f(t_0-t)}{2} - \check{f}(t_0) \right| < \varepsilon. \quad (6.20)$$

Fissato questo valore di δ , grazie alla proprietà (ii) più sopra (convergenza uniforme a zero di K_n), esiste n_0 tale che, per $n > n_0$, si ha $\sup_{\delta < t < \pi} K_n(t) < \varepsilon$. Applicando queste disuguaglianze in (6.19) otteniamo che, per $n > n_0$,

$$\sigma_n[f](t_0) - \check{f}(t_0) < \left(1 + \|f - \check{f}(t_0)\|_{L_*^1}\right) \varepsilon.$$

Infine, se f è continua in un intervallo I , allora f è ivi uniformemente continua per il teorema di Heine (Sezione 1.1), ed il numero δ in 6.20 dipende solo da ε ma non da $x+0 \in I$. Inoltre $|\check{f}|$ ha massimo finito in I . Quindi, in base all'ultima disuguaglianza, la convergenza è uniforme in I . \square

***Teorema 6.2.7. (Teorema di Lebesgue sulla convergenza puntuale delle somme di Féjèr.)** Sia $f \in L^1[0, 2\pi]$.

- (i) La conclusione del Teorema di Féjèr 6.2.5 vale per qualsiasi identità approssimata F_n pari e tale che, per ogni δ , con $0 < \delta < \pi$, F_n converge a zero uniformemente nell'intervallo $[\delta, \pi]$.
- (ii) Più in generale, nel caso del il nucleo di Féjèr, la conclusione del Teorema 6.2.5 vale anche se l'ipotesi che esista il limite puntuale $\check{f}(t_0) := \lim_{h \rightarrow 0} f(t_0+h) + f(t_0-h)$ viene rimpiazzata da un'ipotesi più debole, data dalla seguente stima della media integrale della variazione di f : supponiamo che esista un numero $\check{f}(t_0)$ tale che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{f(t_0+t) + f(t_0-t)}{2} - \check{f}(t_0) \right| dt = 0 \quad (6.21)$$

(si osservi che questa condizione è verificata ad ogni punto di Lebesgue di f).

In particolare, le somme di Féjèr convergono a $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t_0+t)+f(t_0-t)}{2}$ in ogni punto t_0 dove il limite esiste. (Questo conferma il Teorema di Féjèr 6.2.5, ed anche il fatto che le somme di Féjèr convergono a $f(t_0)$ ad ogni punto di Lebesgue di f - e quindi quasi ovunque - come sappiamo dal Teorema 6.1.18.)

Dimostrazione. La parte (i) è provata nella dimostrazione del precedente Teorema di Féjèr 6.2.5.

Per la parte (ii), rammentiamo l'identità (6.15),

$$K_n(x) = \frac{1}{(n+1)} \left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2,$$

dalla quale segue

$$K_n(t) \leq n+1 \tag{6.22}$$

e, per $0 < t < \pi/2$,

$$K_n(t) \leq \frac{\pi^2}{(n+1)t^2} \tag{6.23}$$

perché $\sin \frac{t}{2} > \frac{t}{\pi}$ nell'intervallo $(0, \pi)$, dal momento che la funzione seno in questo intervallo è concava e la retta $y = t/\pi$ è la corda sottesa dai punti iniziale e finale del grafico.

Ora ripartiamo dall'identità (6.19),

$$\sigma_n[f](t_0) - \check{f}(t_0) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) K_n(t) \left(\frac{f(t_0+t) + f(t_0-t)}{2} - \check{f}(t_0) \right) dt,$$

Ora, al secondo membro, lasciamo variare δ con n e scriviamo δ_n invece di δ . Dalla disuguaglianza (6.23) segue che il secondo integrale nel membro di destra tende a zero se $(n+1)\delta_n^2 \rightarrow \infty$, ossia se

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = o(\delta_n), \tag{6.24}$$

perché

$$\int_{\delta_n}^\pi K_n(t) \left(\frac{f(t_0+t) + f(t_0-t)}{2} - \check{f}(t_0) \right) dt \leq \frac{\pi^3}{(n+1)\delta_n^2} \|f\|_{L^1[-\pi, \pi]}.$$

Dobbiamo quindi mostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta_n} K_n(t) \left(\frac{f(t_0+t) + f(t_0-t)}{2} - \check{f}(t_0) \right) dt = 0. \tag{6.25}$$

Introduciamo la primitiva

$$G(h) = \int_0^h \left| \frac{f(t_0+t) + f(t_0-t)}{2} - \check{f}(t_0) \right| dt. \quad (6.26)$$

Osservando che δ_n è definitivamente minore di $1/n$ a causa di (6.24), spezziamo il dominio di integrazione in (6.25)

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta_n} K_n(t) \left(\frac{f(t_0+t) + f(t_0-t)}{2} - \check{f}(t_0) \right) dt = \\ & \int_0^{\frac{1}{n}} K_n(t) \left(\frac{f(t_0+t) + f(t_0-t)}{2} - \check{f}(t_0) \right) dt \\ & + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta_n} K_n(t) \left(\frac{f(t_0+t) + f(t_0-t)}{2} - \check{f}(t_0) \right) dt. \end{aligned}$$

Stimando il primo integrale grazie a (6.22)

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} K_n(t) \left(\frac{f(t_0+t) + f(t_0-t)}{2} - \check{f}(t_0) \right) dt \right| \leq (n+1) G\left(\frac{1}{n}\right),$$

vediamo che esso tende a zero con n a causa dell'ipotesi (6.21).

Stimiamo il secondo integrale usando la disuguaglianza (6.23) ed integriamo per parti:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\frac{1}{n}}^{\delta_n} K_n(t) \left(\frac{f(t_0+t) + f(t_0-t)}{2} - \check{f}(t_0) \right) dt \right| \\ & \leq \frac{\pi^2}{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta_n} \frac{G(t)}{t^2} dt = \frac{\pi^2}{n+1} \frac{G(t)}{t^2} \Big|_{\frac{1}{n}}^{\delta_n} + \frac{2\pi^2}{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta_n} \frac{G(t)}{t^3} dt. \quad (6.27) \end{aligned}$$

Per mostrare che l'ultimo membro tende a zero, fissiamo arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e notiamo che per l'ipotesi (6.21) esiste un opportuno intero n_ε tale che, per $n > n_\varepsilon$ (e quindi al tendere di δ_n a 0), si ha $G(t)/t < \varepsilon$ per $0 < t < \delta_n$. Pertanto

$$\frac{G(t)}{t^2} \Big|_{\frac{1}{n}}^{\delta_n} < n\varepsilon,$$

e

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\delta_n} \frac{G(t)}{t^3} dt = \frac{\varepsilon}{t^2} \Big|_{\frac{1}{n}}^{\delta_n} < n\varepsilon.$$

Pertanto l'ultimo membro della disuguaglianza (6.27) è limitato da 3ε . Poiché ε è arbitrario, il limite vale 0, come asserito nell'enunciato. \square

Nelle approssimazioni numeriche si usano anche altri nuclei di sommabilità, oltre al nucleo di Féjèr calcolato nella dimostrazione del Teorema 6.2.3. Ne studiamo due nella prossima Sezione.

6.2.2 *Nucleo di Poisson

Introduciamo un altro esempio importante di nucleo di sommabilità per le serie di Fourier:

Definizione 6.2.8. (Integrale di Poisson.) Per $0 < r < 1$, il nucleo di sommabilità $\{r^{|n|}\}$ si chiama il *nucleo di Abel* (o anche di *Poisson*).

In particolare, esso opera sulle funzioni $f \in L^1(\mathbb{T})$ nel modo seguente. Per $T \in \mathbb{T}$ indichiamo con P_r (*nucleo di Poisson*) la funzione con coefficienti di Fourier $\widehat{P}_r(n) = r^{|n|}$: essa è in $L^1(\mathbb{T})$, perché la sua serie di Fourier converge uniformemente, essendo maggiorata da una serie geometrica (esercizio!), e l'azione del nucleo è la seguente *trasformata di Poisson* (o anche *integrale di Poisson*):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int} \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{int}. \quad (6.28)$$

Più esplicitamente, scriviamo

$$f(r, t) \equiv f_r(t) \equiv f(re^{it}) := P_r * f(t).$$

Allora, grazie alla moltiplicatività per convoluzione dei coefficienti di Fourier (Proposizione 6.1.6), la precedente trasformata diventa

$$f(t) \mapsto f(re^{it}) = P_r * f(t) \quad \text{ovvero} \quad f \mapsto P_r * f. \quad (6.29)$$

ed in base a (6.28) sappiamo che, per ogni n ,

$$\widehat{P}_r(n) = |r|^n. \quad (6.30)$$

Nota 6.2.9. Ponendo $f_0(e^{it}) := f(re^{it})$ si ha

$$P_r * f_0(t) = f_0(re^{it}) = f(r_0re^{it}) = P_{r_0r} * f(t),$$

ossia l'integrale di Poisson commuta con le dilatazioni. □

Esercizio 6.2.10. Si mostri che il nucleo di Poisson $P(r, t) \equiv P(re^{it}) := P_r(t)$ verifica

$$P(r, t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} = \operatorname{Re} C(z). \quad (6.31)$$

dove

$$C(z) = C(re^{it}) := \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}.$$

Si verifichi che C è una funzione olomorfa se $r < 1$. In particolare, il nucleo di Poisson è la parte reale di una funzione olomorfa, e quindi è una funzione armonica (si veda la Definizione 2.2.2). □

Nota 6.2.11. Dal precedente Esercizio 6.2.10 vediamo che il nucleo di Poisson è una identità approssimata. Infatti vediamo da (6.31) che P_r è una funzione pari, decrescente fra 0 e π , e quindi che, per ogni $0 < \delta < t \leq \pi$,

$$P_r(t) < P_r(\delta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0.$$

Pertanto P_r converge uniformemente a zero nell'intervallo $[\delta, \pi]$. Infine, vediamo che $P_r > 0$, e, dal momento che $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = \widehat{P}_r(0) = 1$ a causa della definizione (6.28), abbiamo verificato tutte le proprietà della Definizione 6.1.7 di identità approssimata in L_*^1 . □

Come conseguenza immediata del fatto che il nucleo di Poisson è una identità approssimata e della parte (i) del Teorema 6.2.7, abbiamo immediatamente il fatto seguente:

Corollario 6.2.12. *L'integrale di Poisson $P_r * f(t_0)$ converge a $\check{f}(t_0)$ in ogni punto t_0 in cui esiste il limite*

$$\check{f}(t_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + t) + f(t_0 - t)}{2},$$

e quindi converge a $f(t_0)$ per ogni punto di Lebesgue di f , in particolare quasi ovunque (in base al Teorema 1.9.37).

Però, a differenza del caso del nucleo di Féjèr considerato nella parte (ii) del Teorema 6.2.7, ora sappiamo (dalla Nota 6.2.11) che il nucleo di Poisson è decrescente fra 0 e π . Questo ci permette di provare, per l'integrale di Poisson, un risultato equivalente alla parte (ii) di quel teorema sotto un'ipotesi meno stringente sulle medie integrali della variazione locale di f :

***Teorema 6.2.13. (Fatou.)** *Sia $f \in L^1[0, 2\pi]$. Nel caso del nucleo di Poisson, la convergenza puntuale di $P_r * f$ rispetta la conclusione del Teorema 6.2.5 anche sotto l'ipotesi (più debole di (6.21)) che esista un numero $\check{f}(t_0)$ tale che*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{f(t_0 + t) + f(t_0 - t)}{2} - \check{f}(t_0) \right) dt = 0. \quad (6.32)$$

In particolare,

$$\lim_{r \rightarrow 1^+} P_r * f(t_0) = \check{f}(t_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + t) + f(t_0 - t)}{2}$$

in ogni punto t_0 dove il limite esiste. (Questo conferma la parte (i) del Teorema di Lebesgue 6.2.7, ed in particolare il fatto che l'integrale di Poisson converge a $f(t_0)$ ad ogni punto di Lebesgue di f - e quindi quasi ovunque - come sappiamo dal Teorema 6.1.18.)

Dimostrazione. Anche per questa estensione del Teorema di convergenza puntuale ripartiamo dall'identità (6.19), che adesso diventa

$$P_r * f(t_0) - \check{f}(t_0) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) P_r(t) \left(\frac{f(t_0 + t) + f(t_0 - t)}{2} - \check{f}(t_0) \right) dt.$$

Scriviamo

$$u(t) \equiv u_{t_0}(t) := \frac{f(t_0 + t) + f(t_0 - t)}{2} - \check{f}(t_0)$$

e notiamo, come nella dimostrazione del Teorema 6.2.7, che $\|u\|_{L_*^1} \leq 2\|f\|_{L_*^1}$. L'enunciato equivale ad asserire che

$$\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) P_r(t) u(t) dt \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0. \quad (6.33)$$

Facciamo variare δ con r , scriviamo $\delta = \delta_r$, e scegliamo

$$\delta_r = 1 - r - (1 - r)^2 = r - r^2. \quad (6.34)$$

Si noti che $\delta_r < 1 - r$, e $\delta_r/(1 - r) = r$

Osserviamo da (6.31) che $P_r(0) = (1 + r)/(1 - r)$, e per la decrescenza (osservata nell'Esercizio 6.2.10) abbiamo $P_r(t) \leq P_r(0)$. Quindi, da (6.34),

$$\left| \int_0^{\delta_r} P_r(t) u(t) dt \right| \leq \frac{1+r}{1-r} \delta_r \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$$

Ora consideriamo l'integrale sull'intervallo $[1 - r, \pi]$. Questa volta, rispetto alla dimostrazione del Teorema 6.2.7, consideriamo una primitiva diversa da quella in (6.26), la primitiva della stessa funzione ma senza valore assoluto:

$$H(h) = \int_0^h \left(\frac{f(t_0 + t) + f(t_0 - t)}{2} - \check{f}(t_0) \right) dt.$$

Integriamo quindi per parti:

$$\int_{1-r}^{\pi} P_r(t) u(t) dt = P_r(\pi) H(\pi) - P_r(1-r) H(1-r) - \int_{1-r}^{\pi} P_r'(t) u(t) dt. \tag{6.35}$$

Usiamo l'identità (6.31) per stimare $P_r(\pi)$ e $P_r(1 - r)$. Nel primo caso si ha

$$P_r(\pi) = \frac{1 - r^2}{1 + 2r + r^2} = \frac{1 - r}{1 + r} = O(1 - r),$$

e quindi il termine $P_r(\pi) H(\pi)$ tende a zero per $r \rightarrow 1^-$. Invece, nel secondo caso,

$$P_r(1 - r) \leq P_r(0) \frac{1 - r_2}{1 - 2r + r^2} = \frac{1 + r}{1 - r} = O\left(\frac{1}{1 - r}\right),$$

e quindi $\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(1 - r) H(1 - r) = 0$ perché, in base all'ipotesi (6.32), sappiamo che $H(1 - r) = o(1 - r)$ per $r \rightarrow 1^-$. Rimane quindi da stimare l'integrale al secondo membro di (6.35), per il quale osserviamo che

$$\left| \int_{1-r}^{\pi} P_r'(t) u(t) dt \right| \leq 2 \|f\|_{L_*^1} \int_{1-r}^{\pi} |P_r'(t)|.$$

Usiamo di nuovo il fatto che P_r è decrescente in $[0, \pi]$, per cui $|P_r'(t)| = -P_r'(t)$ per i valori di t in questo intervallo. D'altra parte,

$$-P_r'(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} 2r \sin t.$$

Quindi ciò che resta da provare è che

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1-r^2}{(1+r^2)^2} \int_{1-r}^{\pi} \frac{2r \sin t}{\left(1 - \frac{2r}{1+r^2} \cos t\right)^2} dt = 0. \quad (6.36)$$

Applichiamo la trasformazione di coordinate $u(t) := 2r \cos t / (1+r^2)$, ed osserviamo che gli estremi di integrazione diventano:

$$\begin{aligned} u_- \equiv u_-(r) &= u(1-r) = -\frac{2r}{1+r^2} \cos(1-r) = -\frac{2r}{1+r^2} + O((1-r)^2) \\ u_+ \equiv u_+(r) &= u(\pi) = \frac{2r}{1+r^2}. \end{aligned}$$

È anche chiaro che $\frac{1-r^2}{(1+r^2)^2} = O(1-r)$. Da queste stime segue che, per qualche $C > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1-r^2}{(1+r^2)^2} \int_{1-r}^{\pi} \frac{2r \sin t}{\left(1 - \frac{2r}{1+r^2} \cos t\right)^2} dt &= \frac{1-r^2}{1+r^2} \int_{u_-(r)}^{u_+(r)} \frac{du}{(1-u)^2} \\ &\leq C(1-r) \frac{1}{1-u} \Big|_{u_-(r)}^{u_+(r)} = O(1-r). \end{aligned}$$

Questo prova (6.36), e quindi il teorema. \square

6.2.3 *Nucleo di de la Vallée-Poussin

Un nucleo usato frequentemente è il nucleo di de la Vallée-Poussin $\{v_n\}$ definito da

$$\widehat{v}_{2n}(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } |k| \leq n \\ \frac{2n+1-k}{2n+1} & \text{se } n < |k| \leq 2n \\ 0 & \text{se } |k| > 2n \end{cases}$$

Questo nucleo ha un vantaggio rispetto al nucleo di Féjèr: all'aumentare di n il coefficiente di Fourier k -esimo di v_{2n} vale 1 quando n diventa maggiore di $|k|$: pertanto i coefficienti nuovi da calcolare per determinare l'azione di v_{2n} non sono $4n+1$ ma solo $2n$, poiché i $2n+1$ coefficienti $\widehat{v}_{2n}(k)$ per $-n \leq k \leq n$ valgono 1 e non devono quindi essere calcolati.

Per i dettagli che provano che $\{v_n\}$ è un'identità approssimata si veda [14, Cap.1, Sezione 2.13]

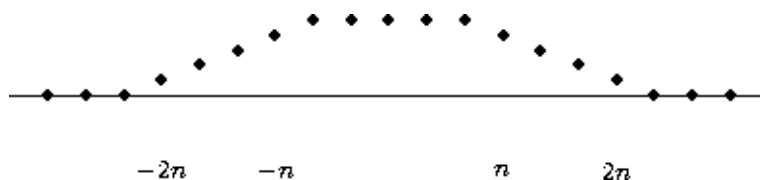


Figura 6.3: I coefficienti di Fourier del nucleo di de la Vallée-Poussin

Nota 6.2.14. Il Teorema 6.2.3 mostra che i polinomi trigonometrici sono uniformemente densi in C_* . In tal modo abbiamo dimostrato il teorema di Weierstrass sulla completezza del sistema trigonometrico (Teorema 5.13.3) senza utilizzare il laborioso macchinario del teorema di Dirichlet (Teorema 5.12.1). \square

Nota 6.2.15. Il Teorema 6.2.3 dà luogo a una dimostrazione alternativa, molto più semplice, del lemma di Riemann–Lebesgue (Lemma 5.9.6).

In realtà questa dimostrazione semplice segue dal Teorema di Completezza di Weierstrass (Teorema 5.13.3), ma non l'abbiamo data prima perché il Lemma 5.9.6 è stato usato per provare questo Teorema (infatti l'abbiamo usato nella dimostrazione del Teorema 5.9.2 che è un passo cruciale per provare il Teorema 5.12.1 di Dirichlet, dal quale abbiamo dedotto il Teorema 5.13.3). Ma ora la Nota 6.2.14 ci dà una dimostrazione alternativa del teorema di Weierstrass 5.13.3, e quindi non si commette più un giro vizioso nell'usare questo Teorema per provare in maniera più semplice il Lemma 5.9.6 \square

Ecco la dimostrazione.

Dimostrazione alternativa del Lemma 5.9.6. Siano $f \in L^1_*$, $\varepsilon > 0$ e sia q un polinomio trigonometrico tale che $\|f - q\| < \varepsilon$. Un tale q esiste per il Teorema di Completezza 5.13.3 e per il suo Corollario 5.1.10(ii). Sia n_0 il grado di q . Se $|n| > n_0$,

$$\left| \widehat{f}(n) \right| = \left| \widehat{f}(n) - \widehat{q}(n) \right| = \left| \widehat{f - q}(n) \right| \leq \|f - q\|_1 < \varepsilon.$$

Quindi

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

\square

6.3 *Teorema di approssimazione polinomiale di Weierstrass

In questa Sezione consideriamo l'approssimazione di funzioni con polinomi e dimostriamo un risultato analogo al Teorema di Weierstrass sulla completezza del sistema trigonometrico in C_* (Teorema 5.13.3 e Nota 6.2.14); anche questo risultato di approssimazione polinomiale è dovuto a Weierstrass.

Teorema 6.3.1. *Siano a, b numeri reali e consideriamo gli spazi completi $C[a, b]$ (munito della norma uniforme) e $L^p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$ (munito della norma L^p). I polinomi sono densi in tutti questi spazi. In altre parole, se $\varepsilon > 0$ e $f \in C[a, b]$, esiste un polinomio p tale che $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$, e lo stesso enunciato vale per la norma $\|\cdot\|_p$ se $f \in L^p[a, b]$.*

Lemma 6.3.2. *Se il Teorema 6.3.1 vale per $C[a, b]$ esso si estende automaticamente a $L^p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$.*

Dimostrazione. Se $f \in C[a, b]$ si ha

$$\|f\|_{L^p[a,b]} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty.$$

Inoltre $C[a, b]$ è denso in $L^p[a, b]$ (si veda la dimostrazione del Corollario 5.13.8) e quindi per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni $f \in L^p[a, b]$, esiste $g \in C[a, b]$ tale che

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ma se vale il Teorema 6.3.1 abbiamo che, per ogni $g \in C[a, b]$, esiste un polinomio q tale che

$$\|g - q\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(b-a)^{\frac{1}{p}}}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \|f - q\|_p &\leq \|f - g\|_p + \|g - q\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p + (b-a)^{\frac{1}{p}} \|g - q\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

e quindi il teorema vale anche per $L^p[a, b]$. □

Lemma 6.3.3. *Se il Teorema 6.3.1 vale per $C[0, \pi]$, allora vale per $C[a, b]$ per ogni $a < b$.*

Dimostrazione. Le dilatazioni, $f(x) \mapsto f(\alpha x)$, sono mappe invettive e suggestive da $C[0, \pi]$ a $C[0, \alpha\pi]$ e sono isometrie nella norma uniforme. Perciò, se il Teorema 6.3.1 vale per $C[0, \pi]$, esso vale anche per $C[0, \alpha\pi]$. Prendendo $\alpha = (b - a)/\pi$ vediamo che il Teorema vale per $C[0, b - a]$. Ma anche le traslazioni sono isometrie suggestive degli spazi delle funzioni continue nei rispettivi intervalli, e quindi il Teorema vale anche per $C[a, b]$. Questo conclude la dimostrazione. \square

Esercizio 6.3.4. Si dia una variante diretta della precedente dimostrazione, che non usi le proprietà astratte delle dilatazioni e delle traslazioni, ma costruisca le dilatazioni e traslazioni effettivamente usate.

Svolgimento. Esiste una funzione lineare h (anzi, nel senso dell'algebra lineare, dovremmo dire *affine*; un polinomio di grado 1) che manda $[0, \pi]$ su $[a, b]$ in maniera biunivoca: la si ottiene esplicitamente richiedendo che h sia lineare (cioè $h(t) = mt + q$ per opportune costanti m, q) ed imponendo le condizioni $h(0) = a$ e $h(\pi) = b$. Il risultato è

$$h(t) = a + \frac{b - a}{\pi}t.$$

L'inversa $h^{-1} = g$ che manda $[a, b]$ su $[0, \pi]$ è

$$g(x) = \frac{\pi}{b - a}(x - a).$$

Sia $f \in C[a, b]$ e consideriamo la funzione composta $u = f \circ h$, cioè

$$u(x) = f(h(x)) = f\left(a + \frac{b - a}{\pi}t\right).$$

Si osservi che u appartiene a $C[0, \pi]$ perché f e h sono continue, $h : [0, \pi] \rightarrow [a, b]$ e f è definita su $[a, b]$.

Supponiamo che il Teorema 6.3.1 valga per $C[0, \pi]$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio s tale che per ogni $t \in [0, \pi]$

$$|u(t) - s(t)| < \varepsilon.$$

Consideriamo la funzione composta $p = s \circ g$. Poiché s e g sono polinomi lo è anche $s \circ g$. Inoltre per ogni $x \in [a, b]$ si ha $x = h(t)$ per qualche $t \in [0, \pi]$ e quindi

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &= |f(h(t)) - p(h(t))| \\ &= |u(t) - s \circ g \circ h(t)| \\ &= |u(t) - s(t)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Perciò f è approssimabile in $[a, b]$ con il polinomio p a meno di ε . \square

Dimostrazione del Teorema 6.3.1. Grazie ai Lemmi 6.3.2 e 6.3.3 è sufficiente dimostrare il teorema per $f \in C[0, \pi]$. Prolunghiamo f a una funzione continua pari su $[-\pi, \pi]$: $f(-x) = f(x)$. Ora prolunghiamo questa f da $[-\pi, \pi]$ a tutto \mathbb{R} per periodicità di periodo 2π : $f(x + 2\pi) = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi ora $f \in C_*$. Ma allora per il Teorema 5.13.3 esiste un polinomio trigonometrico u tale che

$$\|f - u\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Questa funzione u è del tipo

$$u(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}.$$

Perciò le sue parti reale e immaginaria sono combinazioni lineari finite delle funzioni $\cos kx$ e $\sin kx$ per $0 \leq k \leq N$. Ma queste funzioni sono tutte approssimabili con polinomi uniformemente in $[0, \pi]$ a meno di una precisione arbitraria, in base al Teorema di Taylor (Sezione 1.1).

Perciò esistono polinomi p_1 e p_2 tali che

$$|\operatorname{Re} u(x) - p_1(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{e} \quad |\operatorname{Im} u(x) - p_2(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall x \in [0, \pi].$$

Quindi per tutti questi valori di x

$$|u(x) - (p_1(x) + ip_2(x))| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ma allora

$$|f(x) - (p_1(x) + ip_2(x))| \leq \|f - u\|_{C[0, \pi]} + \|u - (p_1 + ip_2)\|_{C[0, \pi]} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ora la funzione $p = p_1 + ip_2$ è la somma a coefficienti complessi di due polinomi a valori reali (i polinomi p_1 e p_2 sono rispettivamente la sua parte reale e immaginaria) e quindi è un polinomio (a valori complessi) e si ha

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in [0, \pi].$$

□

Capitolo 7

*Complementi sulla convergenza di serie di Fourier

Le idee presentate in questo Capitolo, nonché molti dei suoi enunciati e dimostrazioni, sono tratte da [14, Chapters I, II, III]. Alcuni punti sono ispirati anche da He83 o StW71; una presentazione più completa di vari passi essenziali è in [39, Chapter II, Sections 10, 11, 12].

7.1 Premessa notazionale

In conformità alla tradizione vigente nella letteratura specialistica, in questo Capitolo ritorniamo a considerare funzioni periodiche di periodo 2π , e l'espressione dei coefficienti di Fourier ritorna ad essere quella data in (5.7) (si veda la Nota 6.2.1). In particolare,

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

(si veda la Nota 6.1.1), il prodotto scalare in $L^2[-\pi, \pi]$ è

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

la convoluzione diventa

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) dt$$

e si ha $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$, e $f * e^{int} = \widehat{f}(n)e^{int}$.

Avendo fissato il periodo a 2π , indicheremo interscambiabilmente gli spazi delle funzioni periodiche e L^p sul periodo con il simbolo L_*^p o $L^p(\mathbb{T})$. In alcune dimostrazioni che fanno uso dell'analisi complessa, \mathbb{T} sarà identificato come la frontiera della palla unitaria nel piano complesso.

7.2 Dimostrazioni semplici della convergenza di serie di Fourier

Nella Sezione 5.12 abbiamo provato il seguente teorema di convergenza uniforme per le serie di Fourier:

Teorema 1. (Dirichlet.) *Sia $f \in L_*^1$ (cioè periodica di periodo, diciamo 2π e integrabile sul periodo) e supponiamo che nell'intervallo $[a, b]$ f soddisfi la condizione di Hölder di ordine $\alpha > 0$. Allora per ogni $\delta > 0$ la serie di Fourier di f converge a f uniformemente nell'intervallo $[a + \delta, b - \delta]$.*

Non abbiamo dimostrato un teorema separato per la convergenza puntuale, perché per questo scopo non bastano le ipotesi naturali. L'ipotesi naturale affinché la serie di Fourier di una funzione $f \in L^1(\mathbb{T})$ converga al punto x al valore $f(x)$ richiede che questo valore esista, tipicamente quindi che f sia continua al punto x . Ma abbiamo già annunciato nella Sezione 5.5 (e lo dimostreremo in questo Capitolo nella Sezione 7.9) che la serie di Fourier di una funzione continua può divergere in un punto (e persino quasi ovunque). Le ipotesi meno restrittive per la convergenza della serie di Fourier di f in un punto x hanno a che fare con la derivabilità di f in x , ed abbiamo concentrato l'attenzione su una situazione un po' più generale, ossia che f sia lipschitziana in un intorno di x , o ancora più generale, che sia hölderiana (Sezione 5.11). Ma sotto queste condizioni la convergenza è anche uniforme, e quindi abbiamo provato un teorema unico per convergenza puntuale ed uniforme, salvo poi estendere il risultato di convergenza puntuale al caso in cui f non è hölderiana perché ha un punto di salto, all'avvicinarsi al quale, però, la derivata ha limiti destro e sinistro finiti (Teorema 5.15.1). Il teorema unico è quello appena enunciato, il quale richiede stime faticose sulla convergenza dell'integrale di Dirichlet (per un sommario si veda la Sezione 7.5). Nonostante ciò, una dimostrazione assai più semplice, nelle ipotesi di Hölder del Teorema 5.12.1, permette di dimostrare almeno la convergenza puntuale:

anzi, in realtà l'ipotesi di Hölder occorre solo in media integrale, e quindi l'enunciato che stiamo per provare è più generale del Teorema 5.12.1 limitatamente alla convergenza puntuale. Questo argomento prescinde completamente dalle stime per l'integrale di Dirichlet, e quindi non può provare la convergenza uniforme in un intervallo in cui la funzione f sia limitata (ossia l'effetto del principio di localizzazione: Nota 5.9.10), ma solo globalmente ovunque, sotto ipotesi assai più forti (si veda il Teorema 7.2.3 più sotto). Lo esponiamo nel prossimo teorema, dovuto a Chernoff [8] (la dimostrazione che diamo qui è una lieve generalizzazione di [8]).

Teorema 7.2.1. (Convergenza puntuale di serie di Fourier - dimostrazione di Chernoff.) *Sia $f \in L^1_*$ (cioè periodica di periodo, diciamo 2π e integrabile sul periodo), fissiamo un punto $x \in [0, 2\pi)$ in cui f sia continua e supponiamo che per $y \in [0, 2\pi]$, la funzione*

$$g(y) = g_x(y) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \text{se } y \neq x \quad (7.1)$$

sia in $L^1[0, 2\pi]$. Allora la serie di Fourier di f converge a $f(x)$ al punto x .

Corollario 7.2.2. *Sia $x \in [0, 2\pi)$ un punto fissato. Supponiamo che $f \in L^1(\mathbb{T})$ soddisfi la seguente condizione di tipo Hölder di ordine $\alpha > 0$ al punto x : per ogni $y \in [0, 2\pi)$,*

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y|^\alpha. \quad (7.2)$$

Allora la serie di Fourier di f converge al punto x al valore $f(x)$. Notiamo che, nel caso particolare $\alpha = 1$, la condizione 7.2 è una condizione di tipo Lipschitz (si confronti con la Definizione 5.11.1). Osserviamo che, se f è ovunque limitata e derivabile al punto x , allora questa condizione di tipo Lipschitz è soddisfatta al punto x , e quindi la serie di Fourier di f al punto x converge a $f(x)$.

Dimostrazione del Corollario. Come al solito, possiamo restringere l'attenzione ai valori $0 < \alpha \leq 1$, perché per $\alpha > 1$ la condizione (7.2) obbliga f ad essere costante, ed in questo caso il risultato è ovvio. Anzitutto, notiamo, grazie al teorema del confronto per i limiti di funzioni (Sezione 1.1), che (7.2) implica che f è continua al punto x . Inoltre, sempre per (7.2), la funzione $g_x(y)$ del Teorema 7.2.1 è maggiorata in modulo da $|x - y|^{\alpha-1}$, e, siccome l'esponente $\alpha - 1$ è maggiore di -1 , per i ben noti risultati sugli integrali impropri (Sezione 1.1) la funzione $g_x(y)$ è in $L^1[0, 2\pi)$. Pertanto l'enunciato segue dal Teorema 7.2.1. \square

Dimostrazione del Teorema 7.2.1. È sufficiente limitare l'attenzione al caso $x = 0$, perché il caso generale si ottiene immediatamente da questo tramite una traslazione (Esercizio 5.2.10). Quindi f si assume continua in 0, e la funzione

$$g(y) = \frac{f(y) - f(0)}{y} \quad \text{se } y \neq 0 \quad (7.3)$$

è in $L^1[0, 2\pi]$.

Poiché $e^{iy} - 1 \sim iy$ in base allo sviluppo di Taylor dell'esponenziale (Sezione 1.1), anche la funzione

$$h(y) := \frac{f(y) - f(0)}{e^{iy} - 1} \quad \text{se } y \neq 0 \quad (7.4)$$

è in $L^1[0, 2\pi]$. Osserviamo che il legame fra f ed h è

$$f(y) = f(0) + e^{iy}h(y) - h(y)$$

e quindi, per la parte (iii) dell'Esercizio 5.2.10, $\widehat{f}(0) = f(0) + \widehat{h}(-1) - \widehat{h}(0)$, mentre, per $n \neq 0$, si trova $\widehat{f}(n) = \widehat{h}(n-1) - \widehat{h}(n)$. Segue da queste identità che

$$\begin{aligned} S_N f(0) &= \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) = f(0) + \sum_{n=-N}^N (\widehat{h}(n-1) - \widehat{h}(n)) \\ &= f(0) + \widehat{h}(-N-1) - \widehat{h}(N). \end{aligned}$$

Poiché $h \in L^1[0, 2\pi]$, sappiamo dal Lemma di Riemann–Lebesgue 5.9.6 (applicato alla funzione su \mathbb{R} nulla fuori di $T = [0, 2\pi]$ e che coincide con h in T) che $\lim_{N \rightarrow \pm\infty} \widehat{h}(N) = 0$. Pertanto $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N f(0) = f(0)$. \square

Teorema 7.2.3. *Sia f una funzione derivabile quasi ovunque in $[0, 2\pi]$ con derivata $Df \in L^2[0, 2\pi]$. Allora la serie di Fourier di f converge assolutamente ed uniformemente, e converge al valore $f(x)$ ad ogni punto x in cui f è derivabile.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che la serie di Fourier converge assolutamente, ossia che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n) e^{inx}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty,$$

perché in tal caso la convergenza uniforme è conseguenza del test di Weierstrass (Teorema 1.3.29). Ma allora, basta provare che

$$\sum_{n \neq 0} |\widehat{f}(n)| < \infty.$$

Questa disuguaglianza segue dalla formula per i coefficienti di Fourier della derivata (Lemma 5.16.1), dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz in ℓ^2 (Proposizione 4.5.1) e dalla disuguaglianza di Bessel (Nota 5.2.7):

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq 0} |\widehat{f}(n)| &= \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} |\widehat{Df}(n)| = \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \neq 0} |\widehat{Df}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|Df\|_2 < \infty. \end{aligned}$$

Si osservi che in realtà l'ultima disuguaglianza è un'uguaglianza, l'identità di Parseval, perché il sistema trigonometrico è completo (si veda la Nota 5.2.7), ma qui non abbiamo usato l'uguaglianza perché la presente dimostrazione rimpiazza quella del teorema di Dirichlet 5.12.1 sulla convergenza uniforme per le serie di Fourier, che è lo strumento grazie al quale abbiamo dimostrato la completezza del sistema trigonometrico.

Corollario 7.2.4. *Se $f \in C(\mathbb{T})$ (continua e periodica di periodo 2π) è derivabile ovunque eccetto che in un numero finito di punti e la derivata è limitata, allora la serie di Fourier converge uniformemente a f ovunque.*

Nel Teorema 5.15.1 abbiamo esteso il teorema di convergenza puntuale ed uniforme di serie di Fourier, dimostrato originariamente per funzioni hölderiane (Teorema 5.12.1) a funzioni C^1 a tratti con un numero finito di salti nel periodo (nei quali però esistono finiti i limiti sinistro e destro della derivata). Questo risultato è stato ridotto al precedente tramite l'eliminazione dei salti ottenuta sottraendo, per ogni salto, una funzione a dente di sega con la stessa ampiezza del salto. Questa idea elementare, combinata con il precedente Teorema 7.2.1, porta ad un risultato più forte di convergenza puntuale ai punti di salto ottenuto con una dimostrazione più semplice [?]: in effetti, si potrebbe semplificare ulteriormente sottraendo, anziché una funzione a denti di sega, una funzione a gradini (lasciamo la banale verifica al lettore come esercizio).

Teorema 7.2.5. (*Convergenza puntuale di serie di Fourier ad un punto di salto di f e f' - dimostrazione di Redheffer.*) Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$. Sia x_0 un punto di salto, nel senso che esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-).$$

Supponiamo inoltre che x_0 sia un punto di salto per la derivata f' , nel senso che esistano finiti i limiti dei rapporti incrementali destro e sinistro a x_0 :

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} \quad e \quad f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}.$$

Allora al punto x_0 la serie di Fourier di f converge (puntualmente) alla media aritmetica $\frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$.

Dimostrazione. Come nella dimostrazione del Teorema 7.2.1, è sufficiente restringere l'attenzione a $x_0 = 0$: il caso generale si ottiene da questo tramite traslazione. Quindi dobbiamo dimostrare che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) = \frac{(f(0^-) + f(0^+))}{2}.$$

Poniamo $M := \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$ il valor medio dei limiti sinistro e destro di f , $A := f(x_0^+) - f(x_0^-)$ l'ampiezza del salto e $h = \frac{A}{\pi}\Theta$, dove Θ è la funzione a denti di sega con salto di ampiezza π nell'origine definita nell'Esempio 5.14.1. Per comodità del lettore, ripetiamo qui la definizione della funzione Θ :

$$\Theta(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & 0 < x < \pi \\ -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

(Nota: come accennato prima dell'enunciato, se invece che la funzione a denti di sega Θ utilizzassimo la funzione a gradini $\Psi(x) = -\pi/2$ per $x \in (-\pi, 0)$ e $\Psi(x) = \pi/2$ per $x \in (0, \pi)$, il resto della dimostrazione sarebbe essenzialmente identico, parola per parola.)

Osserviamo che l'ampiezza del salto di h nell'origine è A . Poniamo $g = f - h$. Allora

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) &= f(0^+) - \frac{A}{2} = f(0^+) - \frac{f(0^+)}{2} + \frac{f(0^-)}{2} = M \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) &= f(0^-) + \frac{A}{2} = f(0^-) + \frac{f(0^+)}{2} - \frac{f(0^-)}{2} = M. \end{aligned}$$

Pertanto definiamo $g(0) = M$, ed in tal modo rendiamo g continua al punto 0. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) - M = f(0^+) - \frac{A}{2} - M = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) - M = f(0^-) + \frac{A}{2} - M = 0.$$

Ne segue che la funzione

$$k(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

è limitata in un intorno di 0. Al di fuori di un intorno di 0, certamente $k \in L^1$, poiché sia f sia h lo sono. Ne segue che k appartiene a $L^1(\mathbb{T})$, ossia a $L^1[-\pi, \pi]$. Allora possiamo applicare il Teorema 7.2.1 e concludere che $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n) = g(0) = M$. Ma allora

$$M = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(n). \quad (7.5)$$

Ma h è una funzione reale dispari, e quindi i suoi coefficienti di Fourier *reali* a_n rispetto ai coseni $\cos nx$ sono tutti nulli; i coefficienti di Fourier b_n rispetto ai seni $\sin nx$ non sono nulli, ma dalla Proposizione 5.2.5 sappiamo che

$$\widehat{h}(n)e^{inx} + \widehat{h}(-n)e^{-inx} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{inx} = b_n \sin nx,$$

e quindi, per $x = 0$, $\widehat{h}(n) + \widehat{h}(-n) = 0$. Ne segue che $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(n) = 0$. Da qui e (7.5) segue che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) = M \equiv \frac{(f(0^-) + f(0^+))}{2},$$

che è quanto dovevamo dimostrare. \square

7.3 Ordine di infinitesimo dei coefficienti di Fourier di funzioni a variazione limitata e di funzioni Hölderiane

Abbiamo già ricavato nella Sezione 5.18 l'andamento asintotico dei coefficienti di Fourier all'aumentare dell'ordine di differenziabilità. Qui estendiamo tali stime al caso più generale di funzioni a variazione limitata o Lipschitziane.

Proposizione 7.3.1. *Se f è di variazione limitata su \mathbb{T} (Definizione 1.26.1), allora*

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{\text{Var}(f)}{2\pi|n|}.$$

Dimostrazione. Integrando per parti in base al Corollario 1.28.16 troviamo

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right| = \left| \frac{1}{2\pi in} \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu_f(t) \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi|n|} \mu_f(\mathbb{T}) = \frac{\text{Var}(f)}{2\pi|n|}. \end{aligned}$$

Definizione 7.3.2. (Modulo integrale di continuità.) Data una funzione continua f su \mathbb{T} , il suo *modulo integrale di continuità* è la funzione Ω_f su \mathbb{T} data da

$$\Omega_f(h) = \|f(t+h) - f(t)\|_{L^1(\mathbb{T}, dt)}.$$

Una definizione analoga vale per funzioni su \mathbb{R}_+ .

Nota 7.3.3. È chiaro che $\Omega_f(h) \leq \omega_f(|h|)$, dove è il modulo di continuità

$$\omega_f(h) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| < h\}.$$

introdotto nella Definizione 1.8.3. □

Lemma 7.3.4. *Per ogni $f \in L^1(\mathbb{T})$,*

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2} \Omega_f\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

7.4. CONVERGENZA PUNTUALE DI SERIE DI FOURIER DI FUNZIONI BV659

Dimostrazione. Con lo stesso approccio della dimostrazione delle disuguaglianze (5.18), (5.19) e (5.20) vediamo che

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-in(t+\frac{\pi}{n})} dt,$$

e quindi

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - f(t) \right) e^{-int} dt.$$

La disuguaglianza dell'enunciato segue direttamente da questa. \square

Corollario 7.3.5. *Per ogni $f \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$ (Definizione 5.11.1), $\widehat{f}(n) = O(n^{-\alpha})$.*

Dimostrazione. In base alla parte (ii) della definizione di funzione hölderiana, f è nella classe $\text{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$ se e solo se il suo modulo di continuità verifica $\omega_f(|h|) < C|h|^{-\alpha}$ per qualche costante $C > 0$. Pertanto l'enunciato segue dal precedente Corollario 7.3.5 e dalla Nota 7.3.3. \square

7.4 Convergenza puntuale di serie di Fourier di funzioni a variazione limitata

Teorema 7.4.1. (Somme di Féjèr approssimano somme di Dirichlet se i coefficienti di Fourier decadono come $1/n$.) *Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$ tale che $\widehat{f}(n) = O(1/n)$. Allora le somme di Dirichlet $S_n[f](t)$ convergono se e solo se convergono le somme di Féjèr $\sigma_n[f](t)$ (Definizione 6.2.2), e le due somme convergono allo stesso limite. Inoltre $S_n[f]$ converge uniformemente negli insiemi in cui converge uniformemente $\sigma_n[f]$.*

Dimostrazione. Poiché dobbiamo paragonare $\sigma_n[f]$ a $S_n[f]$, scriviamo $c_j \equiv c_j(t) := \widehat{f}(j) e^{ijt}$ e cominciamo a confrontare, per $n < |j| \leq k$, i polinomi trigonometrici

$$\sigma_k[f] := \sum_{|j| \leq k} \left(1 - \frac{|j|}{k+1}\right) c_j(t) = \frac{1}{k+1}, \sum_{|j| \leq k} (k+1-j) c_j$$

e $Q_{n,k}[f] := \sum_{n < |j| \leq k} \left(1 - \frac{|j|}{k+1}\right) c_j(t)$. Evidentemente, la differenza fra questi polinomi trigonometrici ha componenti nulle rispetto a tutti gli esponenziali

$c_j(t) := \widehat{f}(j) e^{ijt}$ con $n < |j| \leq k$, ed invece, per $|j| \leq n$, le componenti di $\sigma_k[f] - Q_{n,k}[f]$ sono le stesse di $\sigma_k[f]$, ossia $(k+1-j)c_j$. Ne segue che il polinomio trigonometrico $(k+1)(\sigma_k[f] - Q_{n,k}[f]) - (n+1)\sigma_n[f]$ è di grado n (ossia i suoi termini di massima frequenza sono $c_{\pm n}(t)$), e

$$\begin{aligned} (k+1)(\sigma_k[f] - Q_{n,k}[f]) - (n+1)\sigma_n[f] &= \sum_{|j| \leq n} ((k+1-j) - (n+1-j)) c_j \\ &= \sum_{|j| \leq n} (k-n) c_j = (k-n) S_n[f]. \end{aligned}$$

Riassumendo, abbiamo dimostrato la seguente identità: per ogni $k > n$,

$$S_n[f] = \frac{k+1}{k-n} \sigma_k[f] - \frac{n+1}{k-n} \sigma_n[f] - \frac{k+1}{k-n} \sum_{n < |j| \leq k} \left(1 - \frac{|j|}{k+1}\right) c_j. \quad (7.6)$$

Ora ricordiamo che $\sum j = 1^m 1/j \approx \ln m$, e quindi, per ogni $\alpha > 1$, si ha $\sum j = 1^{\alpha n} 1/j - \sum j = 1^n 1/j \approx \ln(\alpha n) - \ln n = \ln \alpha$, costante. Pertanto, l'ipotesi $|c_j(t)| = |\widehat{f}(j)| = O(1/j)$ assicura che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\eta > 1$ tale che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{n < |j| \leq \eta n} |c_j| \approx \ln \eta < \varepsilon. \quad (7.7)$$

Allora prendiamo $k = [\eta n]$ in (7.6). Poiché, per $n < |j| \leq [\eta n]$ si ha

$$\frac{[\eta n] + 1 - |j|}{[\eta n] - n} < 1,$$

vediamo da (7.7) che l'ultimo termine di (7.6) è limitato da ε . Allora segue ancora da (7.6) che se, per un f dato t , $\sigma_n[f](t)$ converge ad un limite $\sigma[f](t)$, si ha anche $|S_n[f](t) - \sigma[f](t)| < 2\varepsilon$ per n sufficientemente grande, e la stessa disuguaglianza vale uniformemente rispetto a t nei domini in cui $\sigma_n[f](t)$ converge uniformemente a $\sigma[f](t)$. \square

Corollario 7.4.2. (Convergenza di serie di Fourier di funzioni a variazione limitata.) *Sia f di variazione limitata su \mathbb{T} , e rammentiamo che allora i limiti destro e sinistro di f , ossia $f(t^+) := \lim_{s \searrow t} f(s)$ e $f(t^-) := \lim_{s \nearrow t} f(s)$, esistono (non necessariamente uguali ma entrambi finiti) per ogni $t \in \mathbb{T}$, in base al Corollario 1.26.7. Allora, per ogni $t \in \mathbb{T}$, la somma parziale $S_n[f](t)$ della serie di Fourier di f converge alla media aritmetica $\frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$. La convergenza è uniforme sui sottointervalli chiusi in cui f è continua.*

Dimostrazione. Se f è a variazione limitata, in base alla Proposizione 7.3.1 vale la condizione espressa nel precedente Teorema 7.4.1. Allora l'enunciato segue dalla approssimazione puntuale ed uniforme di $S_n[f]$ con $\sigma_n[f]$ stabilita in tale Teorema, tenendo conto che esso vale per gli approssimanti di Féjèr $\sigma_n[f]$ grazie al Teorema 6.2.5. \square

7.5 Criteri di convergenza di Dini e di Jordan

Ricapitoliamo i passi che ci hanno condotto alla dimostrazione classica della convergenza puntuale ed uniforme di serie di Fourier nel Capitolo 5. Per il momento limitiamo l'attenzione alla convergenza puntuale. Abbiamo visto nella Sezione 5.9a somma parziale n -sima $S_n[f]$ della serie di Fourier di una funzione periodica integrabile f è la convoluzione $S_n[f] = f * D_n$, dove il nucleo di Dirichlet $D_n(x)$, per $x \neq 2k\pi$, è dato da

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad (7.8)$$

(Proposizione 5.8.2). Riscrivendo l'integrale in $(-\pi, \pi)$ in (5.12) come un integrale fra 0 e π , si simmetrizza l'incremento $\Delta_u f$, che nella definizione originale (5.9.1) è un incremento destro, e si ricava

$$S_n[f](x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

Poiché la funzione

$$F(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad (7.9)$$

per $0 < t \leq \pi$, e $F(0) = 0$, è limitata (per lo stesso argomento che prova il Lemma 5.9.3), il Lemma di Riemann–Lebesgue 5.9.6 assicura che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \right) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = 0,$$

e quindi dimostrare che $S_n[f](x) - f(x)$ tende a zero equivale a mostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{t} dt = 0.$$

L'integrando ha un denominatore t che si annulla solo per $t = 0$: pertanto, per ogni $\delta > 0$, l'integrale in $(\delta, \pi]$ tende a zero, di nuovo per il Lemma di Riemann–Lebesgue 5.9.6, e quindi la convergenza puntuale della serie di Fourier al punto x equivale al fatto che, per un $\delta > 0$ arbitrario, l'integrale di Dirichlet

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{t} dt = 0 \quad (7.10)$$

abbia limite per $n \rightarrow \infty$, ed in tal caso $S_n[f](x)$ converge allo stesso limite (il fatto che basti limitare l'attenzione ad un intorno arbitrariamente piccolo di 0 è il principio di localizzazione (Nota 5.9.10)).

Per la convergenza uniforme in un intervallo, basta dimostrare che l'integrale di Dirichlet in (7.10) tende a zero uniformemente rispetto a x : per questo scopo occorre usare la variante (un po' più difficile) del Lemma di Riemann–Lebesgue adatta per la convergenza uniforme (Proposizione 5.9.8), e richiedere che

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \right| dt < \infty$$

uniformemente rispetto a x : si veda l'argomento nella dimostrazione del Teorema di Dirichlet 5.12.1 basato sulla disuguaglianza (5.26), e la Nota 5.12.2.

In definitiva, abbiamo provato il seguente enunciato di convergenza puntuale ed uniforme per le serie di Fourier, che incorpora il principio di localizzazione sopra citato:

Proposizione 7.5.1. *Sia $f \in L^1[x, x+\delta]$. Allora $S_n[f](x)$ converge a $f(x)$ se e solo se l'integrale di Dirichlet della funzione $g_x(t) = (f(x+t) + f(x-t))/2 \in L^1[0, \delta]$ verifica*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g_x(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \lim_{t \rightarrow 0} g_x(t) := g_x(0^+).$$

La convergenza di $S_n[f]$ a f è uniforme in un intervallo $[a, b]$ se f è continua in $[a, b]$ e l'integrale di Dirichlet qui sopra converge a $g_x(0^+)$ uniformemente.

Un criterio di convergenza per le serie di Fourier è quindi una condizione sufficiente per l'esistenza del limite del nucleo di Dirichlet nel senso appena visto. In questa Sezione dimostriamo due criteri classici per la convergenza puntuale delle serie di Fourier.

Proviamo ora un criterio di convergenza che estende in maniera diretta il Teorema di convergenza puntuale 7.2.1. Dobbiamo prima chiarire la terminologia.

Notazione 7.5.2. Nel resto di questa Sezione consideriamo criteri di convergenza delle serie di Fourier puntuale ad un punto x ed uniforme in un intervallo $[a, b]$. Nel secondo caso, ovviamente, su $[a, b]$ f deve essere continua e $S_n[f] \rightarrow f$. Perciò dobbiamo richiedere che la restrizione di f all'intervallo $[a, b]$ sia continua. Ci sono due modi di intendere l'asserzione che la restrizione di f ad $[a, b]$ sia continua. Il senso debole è quello letterale: i punti di $[a, b]$ sono punti di continuità di $f|_{[a,b]}$. In tal caso, la funzione f , considerata come funzione su $[-\pi, \pi]$, è continua a destra al punto a ed a sinistra al punto b , ma i punti a e b potrebbero non essere punti di continuità (bilateri) di f . Invece, il senso forte è di assumere che ogni punto di $[a, b]$, compresi i punti estremi, sia un punto di continuità di f . In questo secondo caso f è limitata in un intorno di $[a, b]$, diciamo in $[a - \delta, b + \delta]$ per qualche $\delta > 0$ (perché una funzione che ha limite per $x \rightarrow a$ è limitata in un intorno di a , ed analogamente per b). Invece, nel primo caso non è detto che f sia limitata in un intorno di a e b : ad esempio, la funzione $1/x$ per $-\pi \leq x < 0$ e 0 per $0 \leq x < \pi$) ha restrizione continua a $[0, 1]$ nel secondo senso ma non nel primo, e non è limitata in un intorno di 0 (lo è in un intorno destro). Nei prossimi teoremi le condizioni sono più semplici da enunciare se la nozione di continuità in un intervallo è intesa nel senso forte: ma naturalmente, questa semplificazione è solo un artificio terminologico, ed in ogni enunciato faremo un richiamo alla presente osservazione notazionale.

Teorema 7.5.3. (Criterio di Dini.) Fissato x , sia $f \in L^1(\mathbb{T})$, $g_x(t) = (f(x+t) + f(x-t))/2$, e supponiamo che esista il limite

$$g_x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

e che, per qualche $\delta > 0$, la funzione $\phi_x(t) = (g_x(t) - g_x(0^+))/t$ sia integrabile:

$$\int_0^\delta \frac{g_x(t) - g_x(0^+)}{t} dt < \infty.$$

Allora vale la proprietà della Proposizione 7.5.1:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g_x(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \lim_{t \rightarrow 0} g_x(t) := g_x(0^+).$$

Di conseguenza le somme parziali $S_n[f](x)$ della serie di Fourier convergono a $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

Inoltre, la convergenza in (7.5.3) è uniforme rispetto a $x \in [a, b]$ se le funzioni ϕ_x sono uniformemente limitate nella norma $L^1([0, \delta])$, ossia se $\|\phi_x\|_1 < C$ indipendente da x in $[a, b]$, e se f è continua in $[a, b]$ (ed anche limitata in un intorno di $[a, b]$ se la continuità della restrizione è intesa nel senso debole della Notazione 7.5.2), e di conseguenza, sotto tale ipotesi, la convergenza di $S_n[f]$ a f è uniforme in $[a, b]$ in base alla Proposizione 7.5.1.

Dimostrazione. Nell'identità

$$\int_0^\delta g_x(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \int_0^\delta \frac{g_x(t) - g_x(0^+)}{t} \sin \alpha t dt + g_x(0^+) \int_0^{\alpha\delta} \frac{\sin t}{t} dt \quad (7.11)$$

facciamo tendere α a $+\infty$. Il primo termine sulla destra tende a zero per il Lemma di Riemann–Lebesgue 5.9.6, ed il secondo termine tende a $\frac{\pi}{2}g_x(0^+)$ per il Lemma 5.19.3 (è il calcolo dell'integrale della funzione sinc svolto nella Sezione 5.19 sul fenomeno di Gibbs). Questo dimostra la convergenza puntuale.

Per la convergenza uniforme occorre provare che la convergenza dell'integrale di Dirichlet al primo membro di (7.11) al limite $\frac{\pi}{2}g_x(0^+)$ è uniforme. Ma si osservi che, se $\|\phi_x\|_1 < C$ indipendente da x in $[a, b]$, allora vale la maggiorazione uniforme $\sup_x \int_0^\delta \frac{g_x(t) - g_x(0^+)}{t} dt < C\delta$. Quindi il primo termine del lato destro di (7.11) converge uniformemente in base alla Proposizione 5.9.8 (*cautela:* la funzione che in quella Proposizione si chiama f qui si è rimpiazzata da g_x , mentre la funzione che lì è indicata con g qui è la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, \delta]$), purché f sia continua (quindi $g_x(0^+) = f(x)$) e $\int_{-\delta}^\delta |(f(x+t) - f(x))/t| dt = \frac{1}{2} \int_{-\delta}^\delta |(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x))/t| dt$ sia uniformemente limitato rispetto a $x \in [a, b]$ (di nuovo, si veda la parte della dimostrazione del Teorema di Dirichlet 5.12.1 relativa alla disuguaglianza (5.26)).

Il secondo termine del lato destro di (7.11) è il prodotto della funzione $g_x(0^+)$ della variabile x e di una funzione di α che non dipende da x e tende a zero per $\alpha \rightarrow +\infty$: quindi la convergenza è uniforme rispetto a x in ogni intervallo in cui la funzione $x \mapsto g_x(0^+)$ è uniformemente limitata. Rammentiamo che $g_x(u) = f(x+u)$. Pertanto $g_x(0^+)$ dipende solo dai valori di f in un intorno arbitrariamente piccolo di x . Quindi, se f è limitata in un intervallo $(a+\delta, b-\delta)$ per un arbitrario $\delta > 0$, allora la funzione $g_x(0^+)$ dipende solo dai valori di f in questo intervallo, ed è limitata da due volte la norma uniforme

di f . Questo prova che la convergenza di questo secondo termine è uniforme negli intervalli $[a, b]$ tali che f sia limitata in un loro intorno. \square

Corollario 7.5.4. *Le ipotesi per la convergenza uniforme nel Teorema di Dini 7.5.3 sono verificate se, per qualche $\delta > 0$, la funzione $f \in L^1(\mathbb{T})$ è limitata in $[a - \delta, b + \delta]$, e*

$$\int_0^\delta \frac{g_x(t) - g_x(0^+)}{t} dt < \infty$$

e la funzione modulo di continuità

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta, x, y \in [a, b]} |f(x) - f(y)|$$

verifica

$$\int_0^\delta \frac{\omega(s)}{s} ds < \infty.$$

Dimostrazione. L'integrabilità di $\omega(s)/s$ implica che $\lim_{s \rightarrow 0^+} \omega(s) = 0$ e quindi che f sia continua. Inoltre, la stessa condizione implica che

$$\int_0^\delta \left| \frac{g_x(t) - g_x(0^+)}{t} \right| dt$$

sia limitato uniformemente rispetto a $x \in [a, b]$. Per completare la dimostrazione della convergenza uniforme, quindi, basta assumere che f sia limitata in un intorno di $[a, b]$ (su $[a, b]$ lo è perché è continua). \square

Nota 7.5.5. Le condizioni del criterio di Dini (Teorema 7.5.3 qui sopra) sono verificate, come caso particolare, se la funzione $g_x(t) - g_x(0^+)$ è hölderiana in $(0, \delta]$ (parte (ii) della Definizione 5.11.1): quindi la parte sulla convergenza puntuale dell'enunciato del Teorema di Dini implica il Teorema 7.2.1. In particolare, il Teorema di Dini vale se f è lipschitziana in $(0, \delta]$ (parte (i) della stessa Definizione), ed ancora più in particolare se f è continua e C^1 a tratti, il che ridimostra il Teorema di Dirichlet 5.12.1. \square

Teorema 7.5.6. (Criterio di Jordan.) *Fissati $-\pi \leq x \leq \pi$ e $\delta > 0$, sia $f \in L^1(\mathbb{T})$ di variazione limitata in $[x - \delta, x + \delta]$ (Definizione 1.26.1) e $g_x(t) = (f(x+t) + f(x-t))/2$. Supponiamo che esista il limite*

$$g_x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}.$$

Allora

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g_x(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt = g_x(0^+). \quad (7.12)$$

Di conseguenza le somme parziali $S_n[f](x)$ della serie di Fourier convergono a $g_x(0^+)$.

Inoltre, assumiamo f di variazione limitata in $[a, b]$ e continua in $[a - \delta, b + \delta]$. Allora la convergenza in (7.12) è uniforme rispetto a $x \in [a, b]$, e di conseguenza, sotto tale ipotesi, $S_n[f]$ converge uniformemente a f in $[a, b]$.

Dimostrazione. Per $\alpha > 0$ e per qualche $0 < \eta < \delta$, decomponiamo il primo membro di (7.12) in maniera simile a (7.11):

$$\begin{aligned} \int_0^\delta g_x(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt &= \int_0^\eta \frac{g_x(t) - g_x(0^+)}{t} \sin \alpha t dt + g_x(0^+) \int_0^\eta \frac{\sin t}{t} dt \\ &\quad + \int_\eta^\delta g_x(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Osserviamo che $g_x \in L^1[-\pi, \pi]$ e che $g_x(t)/t$ appartiene a $L^1[\eta, \delta]$. Perciò l'ultimo termine del secondo membro di (7.13), $\int_\eta^\delta g_x(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt$, tende a zero quando $\alpha \rightarrow +\infty$ per il Lemma di Riemann–Lebesgue 5.9.6. Inoltre, per ogni x la norma di g_x in $L^1[-\pi, \pi]$ è limitata da $2\|f\|_{L^1[-\pi, \pi]}$, e quindi anche la norma di $g_x(t)/t$ in $L^1[\eta, \delta]$ è uniformemente limitata (da $2\|f\|_{L^1[-\pi, \pi]}/\eta$). Pertanto, la convergenza è uniforme rispetto a x in ogni intervallo $[a, b]$ in base alla versione uniforme dello stesso lemma (Proposizione 5.9.8).

Analogamente, osserviamo che il termine centrale al secondo membro di (7.13), $g_x(0^+) \int_0^\eta \frac{\sin t}{t} dt$, è esattamente lo stesso del secondo termine del lato destro di (7.11), e, come abbiamo visto nella dimostrazione del Teorema di Dini qui sopra, quando $\alpha \rightarrow +\infty$ tale termine tende a zero per ogni x fissato, ed uniformemente rispetto a x in ogni intervallo $[a, b]$ su cui f sia continua (ed in un intorno del quale la funzione f sia limitata, se la continuità della restrizione).

Veniamo quindi a discutere il primo termine al lato destro di (7.13). Visto il Teorema 1.26.6, è sufficiente assumere che f sia monotona, diciamo non decrescente, in $[0, \delta]$. Sappiamo dal Lemma 5.19.1 che

$$\left| \int_c^d \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq M := 2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \quad (7.14)$$

per ogni $0 \leq c \leq d$. Inoltre, poiché esiste il limite $g_x(0^+)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\eta = \eta_x$ tale che $0 < \eta < \delta$ e

$$|g_x(\eta) - g_x(0^+)| < \frac{\varepsilon}{3M}. \quad (7.15)$$

Se si assume anche che f sia continua in $[a - \delta, b + \delta]$, allora

$$\begin{aligned} g_x(t) - g_x(0^+) &= \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x) \\ &= \frac{f(x+t) - f(x)}{2} + \frac{f(x-t) - f(x)}{2} \end{aligned}$$

è continua in $[a, b] \times [0, \delta]$ e quindi uniformemente continua, per il teorema di Heine sulla uniforme continuità delle funzioni continue sui compatti (Teorema 1.8.6): quindi il valore di η_x in (7.15) si può fissare indipendentemente da x . Fissiamo dunque η una volta per tutte.

Visto che g è non decrescente, possiamo applicare il teorema della media pesata per gli integrali, Lemma 5.18.8 e ne ricaviamo l'esistenza di un numero $\xi = \xi_x$ tale che $0 < \xi < \eta$ e

$$\int_0^\eta \frac{g_x(t) - g_x(0^+)}{t} \sin \alpha t \, dt = (g(\eta) - g(0^+)) \int_\xi^\eta \sin \alpha t \, dt.$$

Qui ξ_x dipende da x , ma per ogni ξ_x , in base alle disuguaglianze (7.15) e (7.14), si ha

$$\int_0^\eta \frac{g_x(t) - g_x(0^+)}{t} \sin \alpha t \, dt \leq \frac{\varepsilon}{3M} M = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (7.16)$$

Questa è la maggiorazione di cui avevamo bisogno per il primo termine a secondo membro di (7.13). Per il valore di η che abbiamo fissato, scegliamo K tale che, per $\alpha > K$, gli altri due termini in (7.13), che abbiamo già maggiorato precedentemente, soddisfino le disuguaglianze

$$\begin{aligned} |g_x(0^+)| \left| \int_0^\eta \frac{\sin t}{t} \, dt - \frac{\pi}{2} \right| &< \frac{\varepsilon}{3} \\ \left| \int_\eta^\delta g_x(t) \frac{\sin \alpha t}{t} \, dt \right| &< \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Abbiamo già visto perché queste maggiorazioni valgano in $[a, b]$ uniformemente rispetto a x se f è continua in $[a, b]$. Combinando queste disuguaglianze con (7.16)

$$\left| \int_0^\delta g_x(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt - \frac{\pi}{2} g_x(0^+) \right| < \varepsilon$$

per $\alpha > K$ (uniformemente rispetto a $a \leq x \leq b$ se f è continua in $[a - \delta, b + \delta]$). \square

Per alcuni lievi miglioramenti di questi enunciati e vari significativi approfondimenti, si veda [39, Chapter II, Sections 10, 11, 12].

7.6 Convergenza in norma di serie di Fourier

Questa Sezione studia il problema della convergenza in norma delle serie di Fourier su spazi normati di funzioni periodiche, diciamo di periodo 2π . Scriviamo $\mathbb{T} := \mathbb{R} \bmod 2\pi = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (questo spazio \mathbb{T} è topologicamente identico ad una circonferenza, e si chiama il *toro* unidimensionale). Nel resto di questo capitolo, scriviamo intercambiabilmente $\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$ o $\|f\|_{L^1[0,2\pi]}$ o $\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$, e talvolta, per semplificare, perfino $\|f\|_1$ (in tal caso abusiamo della notazione, perché quest'ultima norma potrebbe essere fraintesa con $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$, la quale però non ha senso per funzioni periodiche).

Come già richiamato all'inizio della Sezione 7.5, la somma parziale $S_n[f]$ della serie di Fourier di una funzione f si scrive come

$$S_n[f] = D_n * f,$$

dove D_n è il nucleo di Dirichlet scritto esplicitamente ad esempio in (7.8). Il fatto che il numeratore ed il denominatore del nucleo di Dirichlet siano infinitesimi dello stesso ordine ci dice che il nucleo di Dirichlet D_n è limitato in un intorno di 0. Altrove non ha singolarità, e quindi appartiene a $L^1(\mathbb{T})$ (ed a $L^p(\mathbb{T})$ per tutti i p , ed anche a $C(\mathbb{T})$, perché è definito nell'origine in maniera da risultare ivi continuo (altrove lo è evidentemente).

Se vogliamo studiare la convergenza in norma di queste somme parziali, dovremmo chiederci preliminarmente se tali somme parziali siano almeno limitate in norma. Per introdurre gli ingredienti necessari alla risposta, consideriamo dapprima il caso più tipico, quello degli spazi di funzioni $L^p(\mathbb{T}) = L^p_*$ con $1 \leq p \leq \infty$. In tal caso, in base alla parte (i) della Proposizione 6.1.5, abbiamo

$$\|S_n[f]\|_p \leq \|D_n\|_1 \|f\|_p \tag{7.17}$$

Pertanto, se le norme $\|D_n\|_1$ dei nuclei di Dirichlet fossero limitate al variare di n (ossia uniformemente rispetto a n), avremmo automaticamente la limitatezza delle somme parziali delle serie di Fourier per tutti gli spazi $L^p(\mathbb{T})$. Questo strumento risulterà essere di tale importanza che si usa dare un nome specifico a tali norme:

Definizione 7.6.1. I numeri $L_n := \|D_n\|_{L^1[0,2\pi]}$ si chiamano le *costanti di Lebesgue*.

Quindi la naturale condizione sufficiente per la limitatezza in norma delle somme parziali della serie di Fourier è che le costanti di Lebesgue siano uniformemente limitate. Mostriamo adesso che purtroppo questa condizione non vale (e come conseguenza vedremo che le somme parziali delle serie di Fourier non convergono nella norma di L^1 (Sezione 7.9); ma, per altri motivi, si comportano meglio in L^p per $1 < p < \infty$ (sottosezione 7.6.6).

7.6.1 Divergenza delle costanti di Lebesgue

Proposizione 7.6.2. Le costanti di Lebesgue L_n della Definizione 7.6.1 verificano

$$L_n = \frac{2}{\pi^2} \ln n + O(1),$$

ossia $L_n - \frac{2}{\pi^2} \ln n$ è una successione limitata.

Dimostrazione. Sappiamo che la funzione

$$F(t) := \frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

è limitata, come osservato dopo (7.9), quindi con norma finita in $L^1_{[0,2\pi]}$. Pertanto

$$\left| \int_0^\pi \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt - \int_0^\pi \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} \right| dt \right| \leq \int_0^\pi |F(t)| dt < \infty.$$

Quindi

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi |D_n(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} \right| dt + O(1). \end{aligned} \quad (7.18)$$

La funzione $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t$ si annulla in $[0, \pi]$ nei punti $t_j = j\pi/(n + \frac{1}{2})$, con $j = 0, \dots, n$, e quindi è di segno costante in ciascun intervallo (t_j, t_{j+1}) . È elementare il calcolo del suo integrale in questi intervalli, che risulta essere

$$\left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \right| = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \right| dt = \frac{2}{n + \frac{1}{2}}.$$

Osserviamo ora che, dal teorema della media integrale rispetto alla misura di Borel finita $d\mu(t) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt$ (Proposizione 1.9.32), per $j = 1 \dots, n-1$ si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_{j+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \right| dt &\leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \right|}{t} dt \\ &\leq \frac{1}{t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \right| dt. \end{aligned}$$

In base a (7.6.1) ed alla definizione $t_j = j\pi/(n + \frac{1}{2})$, questa identità diventa

$$\frac{2}{(j+1)\pi} \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \right|}{t} dt \leq \frac{2}{j\pi}$$

per $j = 1 \dots, n-1$. Per il nostro scopo, è più opportuno riformulare questa stima della media integrale come nell'ultima parte della Proposizione 1.9.32):

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \right|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\xi_j}, \quad (7.19)$$

dove ξ_j è un opportuno punto nell'intervallo (t_j, t_{j+1}) .

Invece, nell'intervallo con $j = 0$, ovvero per t vicino a 0, abbiamo $\frac{\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \right|}{t} \sim n + \frac{1}{2}$, e quindi

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \right|}{t} dt \sim \int_0^{\frac{\pi}{n + \frac{1}{2}}} \left(n + \frac{1}{2}\right) dt = O(1).$$

Pertanto, finalmente, da (7.18) e da queste stime si trova

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t} \right| dt + O(1) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t} \right| dt + O(1) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2}{\pi \xi_j} + O(1) \quad (7.20) \end{aligned}$$

(rammentiamo che i punti ξ_j introdotti in (7.19) verificano $(n + \frac{1}{2})\pi/(j+1) \leq \xi_j \leq (n + \frac{1}{2})\pi/j$.

D'altra parte, una primitiva di $1/t$ in $(0, \pi)$ è $\ln t$, e quindi le somme $\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{t_j}$ sono somme di Riemann per la funzione $1/t$ nell'intervallo $(\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}, \frac{n\pi}{n+\frac{1}{2}})$. Le somme di Riemann convergono all'integrale definito, che su questo intervallo è $\ln \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + O(1) = \ln n + O(1)$. Quindi si ha $\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2}{\pi \xi_j} = \frac{2}{\pi^2} \ln n + O(1)$.

Da questo fatto e da (7.20) segue l'enunciato. \square

7.6.2 Spazi di Banach omogenei sul toro

Siamo interessati a studiare la convergenza in norma delle serie di Fourier su spazi di Banach (ossia normati e completi rispetto alla norma) di funzioni sul toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ del tipo di quelli visti finora. Per questo introduciamo una classe assai generale di sottospazi di $L^1(\mathbb{T})$:

Definizione 7.6.3. (Spazi di Banach omogenei di funzioni su \mathbb{T} .) Uno spazio di Banach (ossia normato e completo) $B \subset L^1(\mathbb{T}) = L^1_*$ di funzioni su $\mathbb{T} = \mathbb{R} \bmod 2\pi\mathbb{Z} = [0, 2\pi)$ si dice *omogeneo* se l'immersione $B \rightarrow L^1$ è continua (ossia $\|f\|_B \geq C\|f\|_1$ per qualche costante C e per ogni $f \in B$), e se le traslazioni sono operazioni isometriche e continue: ossia, per ogni $f \in B$ e per ogni traslazione λ_x ,

$$\begin{aligned} \|\lambda_x f\|_B &= \|f\|_B \\ \|\lambda_x f - \lambda_{x_0} f\|_B &\rightarrow 0 \quad \text{se } x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

Esercizio 7.6.4. Gli spazi L^p sul toro, con $1 \leq p < \infty$, sono spazi di Banach omogenei. Lasciamo al lettore, per esercizio, verificare che la stessa cosa è vera per gli spazi di Hölder $\text{Lip}(\alpha)$, per lo spazio delle funzioni continue sul toro (ossia continue e periodiche su \mathbb{R}), e più in generale per gli spazi C^k delle funzioni periodiche derivabili k volte con derivate continue (con norma $\|f\|_{C^k} \equiv \sum_{j=0}^k \|D^j f\|_\infty$) e tutti gli altri spazi considerati ad esempio nella successiva Sezione 11.3. Per tutti questi spazi, si tratta di verificare che le traslazioni sono continue nel senso della precedente definizione (nel caso di L^1 , la continuità della traslazione è stata dimostrata nel Lemma 5.9.4). Per agevolare il lettore interessato, dimostriamo subito dopo la fine del presente Esercizio la continuità della traslazione per lo spazio delle funzioni continue e periodiche, come enunciato separato.

Invece lo spazio L^∞ non è uno spazio di Banach omogeneo, perché su di esso le traslazioni non sono uniformemente continue: ad esempio, il traslato $\lambda_x \chi$, dove χ è la funzione caratteristica di un insieme di misura positiva, non tende uniformemente a χ quando x tende a zero. \square

Proposizione 7.6.5. *Per ogni $f \in C(\mathbb{T})$ si ha $\lim_{t \rightarrow 0} \|\lambda_t f - f\|_\infty = 0$. Più in generale, per ogni $f \in C(\mathbb{R})$ uniformemente continua, $\lim_{t \rightarrow 0} \|\lambda_t f - f\|_\infty = 0$.*

Dimostrazione. Sia $f \in C(\mathbb{T})$. Poiché f è continua sul compatto \mathbb{T} essa è uniformemente continua per il Teorema di Heine (Sezione 1.1). Questo equivale a dire che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni x in $[-\pi, \pi]$ e $|h| < \delta$, si ha $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$ (qui δ dipende solo da ε , non anche da x). Quest'ultima asserzione significa precisamente che la traslazione è continua nella norma uniforme. Per questo abbiamo solo usato la uniforme continuità di f , da cui l'ultima asserzione dell'enunciato. \square

Proposizione 7.6.6. (Convergenza di identità approssimate su spazi di Banach omogenei.) *Sia Se h_n è un'identità approssimata in $L^1(\mathbb{T})$, allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n * f - f\|_B = 0 \quad \text{per ogni } f \in B.$$

Dimostrazione. La dimostrazione ricalca quella che abbiamo fornito nel caso $B = L^1(\mathbb{T})$ nel Teorema 6.1.10. Poiché la norma verifica la disuguaglianza triangolare, per ogni g definita su \mathbb{T} a valori in B si ha $\left\| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt \right\| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \|g(t)\| dt$. Allora poniamo $g(t) = \lambda_t f - f$, una funzione continua della variabile t a valori in B grazie alla seconda proprietà nella Definizione 7.6.3.

Otteniamo

$$\begin{aligned}
\|h_n * f - f\|_B &\leq \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} h_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt \right\|_B \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_n(t) \|g(t)\|_B dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\delta}^{-\delta} h_n(t) \|g(t)\|_B dt + \int_{\{\delta \leq |t| \leq \pi - \delta\}} h_n(t) \|g(t)\|_B dt \right) \\
&\leq \max_{|t| \leq \delta} \|g(t)\|_B \|h_n\|_{L^1(\mathbb{T})} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \max_{-\pi \leq t \leq \pi} \|g(t)\|_B \int_{\{\delta \leq |t| \leq \pi - \delta\}} |h_n(t)| dt. \tag{7.21}
\end{aligned}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che il primo addendo all'ultimo membro è minore di ε , grazie alla proprietà (i) della Definizione 6.1.7 di identità approssimata, ed al fatto che la funzione $\|g\|_B$ è continua sul compatto $[0, 2\pi]$ (per la Definizione 7.6.3 di spazio omogeneo) e quindi uniformemente continua per il teorema di Heine (Sezione ??). Ma allora, fissato questo δ , il secondo addendo deve anch'esso essere minore di ε se n è grande, in base alla proprietà (iii) della Definizione 6.1.7. Quindi l'ultimo membro di (7.21) è minore di 2ε per n grande. \square

Dato uno spazio di Banach omogeneo $B \subset L^1(\mathbb{T})$, consideriamo ora lo spazio duale B' , che consiste di tutti i funzionali lineari continui su B . Il duale B' è anch'esso uno spazio normato, come si è visto nella Definizione 3.3.14.

Definizione 7.6.7. I coefficienti di Fourier di un funzionale lineare $F \in B'$ si definiscono nel modo seguente: per ogni $n \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{F}(n) := \langle F, e^{-int} \rangle.$$

Nota 7.6.8. Questa Definizione è coerente con la nozione abituale di coefficiente di Fourier quando il funzionale F si identifica con una funzione. Ad esempio, se $B = L^p(\mathbb{T})$ e q è l'indice coniugato (Definizione 1.16.4), allora, in base al Teorema 1.19.6, $B' = L^q(\mathbb{T})$, nel senso che per ogni funzionale continuo F su $L^p(\mathbb{T})$ esiste una funzione $f \in L^q(\mathbb{T})$ tale che, per ogni $h \in L^p(\mathbb{T})$, si ha

$$F(h) \equiv \langle F, h \rangle = \langle f, h \rangle = \int f(t) h(t) dt.$$

In questo caso la Definizione 7.6.7 diventa

$$\widehat{F}(n) = \langle F, e^{-int} \rangle = \langle f, e^{-int} \rangle \int f(t) e^{-int} dt = \widehat{f}(n).$$

□

Corollario 7.6.9. (Formula di Plancherel per il duale di uno spazio omogeneo.) Per ogni f in uno spazio omogeneo B (Definizione 7.6.3) e per ogni F nel suo spazio duale B' , vale l'identità

$$\langle f, F \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \widehat{f}(n) \overline{\widehat{F}(n)}.$$

Più in generale, per ogni identità approssimata h_j in $L^1[-\pi, \pi]$ consistente di polinomi trigonometrici (più precisamente tale che, per ogni j , esiste un intero N_j tale che $\widehat{h}_j(n) = 0$ per $|n| > N_j$, si ha

$$\langle f, F \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=-N_j}^{N_j} \widehat{h}_j(n) \widehat{f}(n) \overline{\widehat{F}(n)} \quad (7.22)$$

(la formula precedente coincide con questa nel caso in cui k_j è il nucleo di Féjèr, definito in (6.9)).

Dimostrazione. Se f è un polinomio trigonometrico, $f = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{int}$, è ovvio per linearità che $\langle f, F \rangle = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) \overline{\widehat{F}(n)}$. Quindi la proprietà (7.22) vale per i polinomi trigonometrici.

In generale, in base alla Proposizione 7.6.6 sulla convergenza in B delle identità approssimate, $f = \lim_j k_j * f$ nella norma di B , e quindi f è limite in norma dei polinomi trigonometrici $k_j * f$, i cui coefficienti di Fourier verificano $\widehat{k_j * f}(n) = \widehat{k}_j(n) \widehat{f}(n)$. Quindi la proprietà (7.22) si estende a tutto B . □

7.6.3 Divergenza in norma in L^1 e C

Su qualsiasi spazio di funzioni B su \mathbb{T} , le somme parziali delle serie di Fourier definiscono una famiglia di operatori nel modo ovvio seguente:

Definizione 7.6.10. L'operatore $\mathbf{S}_n : B \rightarrow B$ è definito da

$$\mathbf{S}_n : f \mapsto S_n[f].$$

Se B è uno spazio normato, allora è di interesse considerare la norma dell'operatore \mathbf{S}_n (che, per evitare ambiguità, qui indichiamo con il simbolo $\|\cdot\|_B$, ma quando non c'è adito a dubbi omettiamo l'indice B , tranne che nel caso degli spazi L^p).

$$\|\mathbf{S}_n\|_B = \sup\{\|S_n[f]\|_B : \|f\|_B \leq 1\}.$$

Si dice che uno spazio di Banach di funzioni sul toro ammette convergenza in norma per le serie di Fourier se, per ogni $f \in B$, le somme parziali $S_n[f]$ convergono a f nella norma di B .

Teorema 7.6.11. *Uno spazio di Banach omogeneo ammette convergenza in norma se e solo se le norme $\|\mathbf{S}_n\|_B$ sono limitate rispetto a n : ossia, esiste $C > 0$ tale che*

$$\|S_n[f]\|_B \leq C \|f\|_B \quad (7.23)$$

per ogni $f \in B$ e per ogni intero n .

Dimostrazione. È chiaro che, se B ammette convergenza in norma, ossia se per ogni $f \in B$ le somme parziali $S_n[f]$ convergono a f in norma, allora la successione $S_n[f]$ deve essere limitata in norma (da una costante C che non dipende da n). Questo vale per ciascuna singola funzione f , e quindi C dipende dalla scelta di f , ma in base al principio di uniforme limitatezza (Teorema 3.14.3, e più in particolare Corollario 3.14.7) le norme $\|S_n[f]\|_B$ si maggiorano uniformemente rispetto a f , ossia si maggiorano con una costante per la norma di f . Ciò dimostra che (7.23) è una condizione necessaria per la convergenza in norma.

Mostriamo che la condizione è anche sufficiente. Grazie ai teoremi sulle identità approssimate della Sezione 6.1, sappiamo che i polinomi trigonometrici sono densi in B . Fissata $f \in B$, sia Q un polinomio trigonometrico (diciamo, di grado k) tale che $\|Q - f\|_B \leq \varepsilon/(C + 1)$, e osserviamo che, per $n > k$, necessariamente si ha $S_n[Q] = Q$ perché il polinomio trigonometrico Q è di grado k . Ora, per $n > k$,

$$\begin{aligned} \|S_n[f] - f\|_B &= \|S_n[f] - S_n[Q] + Q - f\|_B \leq \|S_n[f - Q]\|_B + \|Q - f\|_B \\ &\leq C\|Q - f\|_B + \|Q - f\|_B = C\frac{\varepsilon}{C + 1} + \frac{\varepsilon}{C + 1} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Proposizione 7.6.12. (Divergenza nelle norme L^1 e uniforme delle somme parziali di Fourier.) *Se $B = L^1(\mathbb{T})$ o $B = C(\mathbb{T})$ (funzioni periodiche e continue), allora $\|\mathbf{S}_n\|_B = L_n$ (le costanti di Lebesgue della Definizione 7.6.1).*

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza (7.17), per tutte le norme di $B = L^p(\mathbb{T})$ (ed in particolare anche per lo spazio di Banach $C(\mathbb{T})$ munito della norma uniforme, ovvero quella di L^∞), sappiamo che

$$\|\mathbf{S}_n\|_B \leq \|D_n\|_{L^1[0,2\pi]} = L_n.$$

Per provare la disuguaglianza inversa, consideriamo una qualche identità approssimata, ad esempio il nucleo di Féjèr K_N della Definizione 6.2.2, e come in quella Definizione scriviamo $\sigma_N[f] = K_N * f$. Allora $\|K_N\|_1 = 1$, e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N[f] - f\|_B = 0 \tag{7.24}$$

per i Teoremi 6.2.3, 6.1.10 e 6.1.8. Trattiamo prima il caso $B = L^1[0, 2\pi]$, e per semplicità scriviamo $\|f\|_1$ invece di $\|f\|_{L^1[0,2\pi]}$.

In base alla espressione (6.9) del nucleo di Féjèr, per ogni n e N si ha

$$S_n[K_N](x) = \sum_{m=0}^{\min\{n,N\}} \frac{n+1-m}{n+1} \cos mx = \sigma_N[D_n](x).$$

Pertanto

$$\|\mathbf{S}_n\|_1 \geq \|S_n[K_N]\|_1 = \|\sigma_n[D_N]\|_1. \tag{7.25}$$

Grazie a (7.24), per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni intero n , esiste un intero N tale che $\|\sigma_n[D_N]\|_1 > (1 - \varepsilon)\|D_n\|_{L^1[0,2\pi]}$. Pertanto la precedente disuguaglianza implica che $\|\mathbf{S}_n\|_1 \geq \|D_n\|_{L^1[0,2\pi]} = L_n$.

Ora consideriamo invece lo spazio $B = C(\mathbb{T})$. Sia $g_n = \text{sgn}(D_n)$ la funzione che vale 1 dove $D_n > 0$ e -1 dove $D_n < 0$ (nei punti dove $D_n = 0$ non importa quale valore gli si dà). Allora g_n è costante in ciascuno degli intervalli consecutivi (t_j, t_{j+1}) già considerati nella dimostrazione del Teorema 7.6.2, e quindi discontinua ma continua a tratti, e $\|g_n\|_\infty = 1$. Modifichiamo g_n interpolandola linearmente fra i valori 1 e -1 , in modo da ottenere una funzione h_n continua, che si annulla dove $D_n = 0$ e che verifica $\|h_n\|_\infty = 1$.

Pertanto $h_n = g_n$ eccetto che su intervalli del tipo $I_j = (t_j - \delta, t_j + \delta)$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e scegliamo tali raccordi lineari così ripidi che la somma $2n\delta$ delle lunghezze di questi sottointervalli sia inferiore a $\varepsilon/2n$. Dal momento che $D_n g_n = |D_n|$, $D_n h_n \geq 0$ e (da (7.8)) $D_n \leq n + \frac{1}{2} < 2n$, al posto di (7.25) ora otteniamo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{S}_n\|_{C(\mathbb{T})} &\geq \|S_n[h_n]\|_\infty \geq S_n[h_n](0) = D_n * h_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x) h_n(x) dx \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi] \setminus \cup_j I_j} D_n(x) g_n(x) dx = \|D_n\|_1 - \varepsilon = L_n - \varepsilon. \end{aligned}$$

Questo prova che $\|\mathbf{S}_n\|_{C(\mathbb{T})} \geq L_n$ e conclude la dimostrazione. \square

Da questo risultato, dal Teorema 7.6.11 e dalla illimitatezza delle costanti di Lebesgue (Teorema 7.6.2) segue immediatamente:

Corollario 7.6.13. *Se $B = L^1(\mathbb{T})$ o $C(\mathbb{T})$, allora B non ammette convergenza in norma.*

Dal fatto che le serie di Fourier di funzioni continue divergono nella norma uniforme segue anche la loro divergenza puntuale:

Corollario 7.6.14. *Esiste una funzione continua la cui serie di Fourier diverge in un punto (e quindi, formando serie uniformemente convergenti di dilagati dei suoi traslati, abbiamo anche funzioni continue le cui serie di Fourier divergono in una famiglia numerabile di punti).*

Dimostrazione. Fissiamo ad arbitrio un punto $t \in \mathbb{T} \sim [0, 2\pi)$, ad esempio $t = 0$. Alla fine della dimostrazione della Proposizione 7.6.12, abbiamo costruito funzioni $h_n \in C_* = C(\mathbb{T})$ tali che $S_n[h_n](0)$ diverge per $n \rightarrow \infty$. In altre parole, la famiglia di funzionali lineari continui su $C(\mathbb{T})$ definita da $\{f \mapsto S_n[f](0) : n \in \mathbb{N}\}$ non è equilimitata su $C(\mathbb{T})$ (o equivalentemente non è equicontinua, nel senso della Definizione 3.14.1).

Allora, per il Teorema di Uniforme Limitatezza (nella versione del Corollario 3.14.7), questa famiglia non è *puntualmente* limitata, ossia deve esistere qualche $f \in C(\mathbb{T})$ tale che $\sup_n |S_n[f](0)| = \infty$. \square

7.6.4 La funzione coniugata

Il problema della convergenza in norma negli spazi L^p con $1 < p < \infty$ ci porta, in questa e nelle prossime Sottosezioni, ad un inciso relativo alla funzione coniugata, un concetto che si basa sul nucleo di sommabilità di Poisson (Definizione 6.2.8).

Rivediamo la nozione di nucleo di sommabilità per le serie di Fourier, introdotta in maniera alternativa nella Sezione 6.2: si tratta di successioni $\{a_n^{(m)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ di moltiplicatori dei coefficienti di Fourier, $\widehat{f}_n \mapsto a_n^{(m)} \widehat{f}_n$ che sono i coefficienti di Fourier di una successione di funzioni A_m che forma una identità approssimata non negativa. In particolare, $a_0^{(m)} = 1$ per ogni m , perché $\|A_m\|_{L^1[0,2\pi]} = 1$, e $\lim_m a_n^{(m)} = 1$ per ogni n , perché A_m converge nel senso delle identità approssimate (con linguaggio più appropriato, in seguito diremo che $A_m \rightarrow \delta_0$ nel senso delle distribuzioni (Definizione 11.5.2)). L'indice m può essere intero o reale: in questa Sezione consideriamo un indice reale compreso fra 0 e 1, che indichiamo con r invece di m , e facciamo tendere a 1 invece che ad infinito.

Rammentiamo la definizione di nucleo di Poisson (Definizione 6.2.8), ed il risultato dell'Esercizio 6.2.10: il nucleo di Poisson $P(r, t) \equiv P(re^{it}) := P_r(t)$ verifica $\widehat{P}_r(n) = |r|^n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, ed ha l'espressione esplicita

$$P(r, t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} = \operatorname{Re} \left(\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \right).$$

Definizione 7.6.15. (Nucleo di Poisson coniugato.) Rammentiamo che nell'Esercizio 6.2.10 abbiamo considerato la funzione a valori complessi

$$C_r(t) \equiv C(r, t) \equiv C(re^{it}) := \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \quad (7.26)$$

ovvero

$$C(z) = \frac{1 + z}{1 - z}$$

che si chiama il *nucleo di Cauchy*, ed abbiamo mostrato che essa è una funzione olomorfa in $D = \{re^{it} : 0 \leq r < 1\}$; abbiamo anche osservato che $P(r, t) = \operatorname{Re} C(r, t)$ è una funzione armonica.

Introduciamo il *nucleo di Poisson coniugato* $Q(r, t) := \operatorname{Im} C(r, t)$. La funzione

$$\tilde{f}(r, t) \equiv \tilde{f}_r(t) \equiv \tilde{f}(re^{it}) := Q_r * f(t) \quad (7.27)$$

è la (o meglio, una, a meno di costanti additive) funzione armonica coniugata di f , nel senso del Corollario 2.2.3. (*Cautela*: non si tratta della funzione complessa coniugata: P_r è a valori reali!)

Esercizio 7.6.16. Mostrare, a partire da (7.26), che il nucleo di Poisson coniugato $Q_r(t) \equiv Q(r, t) = \text{Im } C(r, t)$ verifica

$$Q_r(t) = \frac{2r \sin t}{1 - 2r \cos t + r^2},$$

e da questo dedurre, utilizzando la formula di somma geometrica (Sezione 1.1), che

$$Q_r(t) = -i \sum_{n \neq 0} \text{sgn}(n) r^{|n|} e^{int}. \quad (7.28)$$

In altre parole, per ogni $n \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{Q}_r(n) = -i \text{sgn}(n) r^{|n|}, \quad (7.29)$$

dove si è posto $\text{sgn}(0) = 0$.

Infine, utilizzare la proprietà moltiplicativa dei coefficienti di Fourier della convoluzione (Proposizione 6.1.6) per concludere che, per ogni $f \in L^1(\mathbb{T})$, la trasformata di Poisson coniugata assume la forma

$$Q_r * f(t) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sgn}(n) r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{int}. \quad (7.30)$$

In particolare, si noti che, per $r = 0$, si ha $Q_0(t) = 0$ per ogni t . \square

È ora necessario estendere il risultato di armonicITÀ dell'Esercizio 6.2.10:

Corollario 7.6.17. *Per ogni $f \in L^1[0, 2\pi]$, l'integrale di Poisson $f(re^{it}) := P_r * f$ è una funzione armonica sul disco unitario D , e $\tilde{f}(re^{it}) := Q_r * f(t)$ è una sua funzione armonica coniugata, nel senso del Corollario 2.2.3. In particolare, la funzione $f + i\tilde{f}$ è olomorfa in D .*

Dimostrazione. Abbiamo visto nell'Esercizio 6.2.10 che $P(r, t) \equiv P_r(t) = \text{Re } C(r, t)$ è armonica. Quindi l'integrale di Poisson $P_r * f(t) = \int_0^{2\pi} P_r(t-s) f(s) ds$ è integrale di funzioni armoniche: asseriamo che esso è ancora una funzione armonica. Per provare questo bisogna mostrare che l'integrale viene annullato quando gli si applica l'operatore di Laplace (rispetto ai parametri

cartesiani x e y che corrispondono a quelli polari r e t secondo la regola $x + iy = z = re^{it}$. Ma allora basta mostrare che il Laplaciano commuta con il segno di integrale. D'altra parte questo è vero perché le derivate parziali ∂_x e ∂_y commutano con il segno di integrale rispetto ad una altra variabile s sul compatto $[0, 2\pi]$ per il Teorema 1.23.1 di derivazione sotto il segno di integrale.

Poiché $Q_r(t)$ è la parte immaginaria della funzione olomorfa C , la stessa conclusione (basata sul ragionamento dell'Esercizio 6.2.10) si applica anche alla funzione $\tilde{f}(re^{it})$. Inoltre,

$$f(re^{it}) + i\tilde{f}(re^{it}) = (P_r + iQ_r) * f(t) = C_r * f(t) = \int_0^{2\pi} C(r, t-s) f(s) ds,$$

dove la convoluzione è fatta rispetto al parametro t della variabile $z = re^{it}$. Esattamente la stessa commutazione fra derivate parziali ed integrale mostra che la funzione $f + i\tilde{f}$ soddisfa le equazioni di Cauchy–Riemann (2.4) (perché le soddisfa la funzione olomorfa C : Definizione 2.2.1), e quindi che $f + i\tilde{f}$ è olomorfa in D . \square

Corollario 7.6.18. *Per ogni $f \in L^1(\mathbb{T})$ si ha $\tilde{f}(0) \equiv \tilde{f}(re^{it})|_{r=0} = 0$.*

Dimostrazione. Questo segue dall'ultima osservazione dell'Esercizio 7.6.16, o equivalentemente dal fatto che $C_r(t) = (1 + re^{it})/(1 - re^{it})$ (identità 7.26) e quindi $C_0 \equiv 1$ è a valori reali, per cui $f + i\tilde{f}(0) = C_0 * f = f(0)$. \square

Nota 7.6.19. È spesso di grande interesse studiare il nucleo di Poisson coniugato e la funzione armonica coniugata. Ad esempio, significativi approfondimenti dei criteri di convergenza per le serie di Fourier presentati nella Sezione 7.5 si ottengono considerando separatamente la convergenza delle somme parziali di Fourier di $P_r * f$ e $Q_r * f$: si veda [39, Chapter II, Sections 10,11, 12]. Con maggiore precisione, qui si dovrebbe parlare della *funzione coniugata* di f nel senso della successiva Definizione 7.6.23. \square

Proposizione 7.6.20. (Rappresentazione di Poisson.) *Sia D il disco aperto in $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ con centro l'origine e raggio 1, e f una funzione armonica limitata in D . Allora f è l'integrale di Poisson (introdotta in (6.2.8)) di qualche funzione limitata sul cerchio $\mathbb{T} = \partial D$ dato dalla frontiera di D :*

$$f(re^{it}) = P_r * F(t)$$

per qualche $F \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Dimostrazione. Sia $0 < r_n < 1$ e $r_n \rightarrow 1$. Consideriamo le restrizioni circolari $f_n(e^{it}) = f(r_n e^{it})$. Poiché f è limitata sul disco, tutte le f_n sono equilimitate sul cerchio: $\|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^\infty(D)} < \infty$. Per il teorema di Banach–Alaoglu (Teorema 3.10.7) esiste una sottosuccessione f_{n_j} che converge nella topologia debole* di $L^\infty(\mathbb{T})$ (ossia rispetto ai funzionali nel preduale $L^1(\mathbb{T})$) a qualche funzione $F \in L^\infty(\mathbb{T})$. Notiamo però che, per ogni r fra 0 e 1, il nucleo di Poisson P_r appartiene a $L^1(\mathbb{T})$, come osservato nella Definizione 6.2.8. Quindi la convergenza debole* implica che

$$\begin{aligned} P_r * F(e^{it}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, e^{i(t-s)}) F(e^{is}) ds \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, e^{i(t-s)}) f_{n_j}(e^{is}) ds = \lim_{j \rightarrow \infty} f(r_{n_j} e^{it}) = f(re^{it}) \end{aligned}$$

(l'ultima identità segue dalla Nota 6.2.9). \square

Corollario 7.6.21. (*Proprietà della media per funzioni armoniche limitate.*) Sia $D = \{|z| < 1\}$ il disco di raggio 1 e $\partial D = \{|z| = 1\}$ la sua frontiera (quindi $\bar{D} = D \cup \partial D$).

- (i) (**Proprietà della media.**) Se f è una funzione a valori reali, armonica in D e limitata su \bar{D} , allora, per ogni $z \in D$, si ha $\inf_{\partial D} f \leq f(z) \leq \sup_{\partial D} f$. Una proprietà analoga vale per ogni disco D_ρ di raggio $\rho > 0$ e centro w arbitrario, purché contenuto nel dominio in cui f è armonica limitata.
- (ii) (**Principio del massimo.**) Se inoltre f è continua su \bar{D} , allora i punti dove f assume i propri valori massimi e minimi giacciono sulla frontiera ∂D . In particolare, f non ha estremi locali interni a D .

Dimostrazione. La stima (i) sul disco D_1 segue immediatamente dalla rappresentazione integrale di Poisson $f(re^{it}) = P_r * f(t)$ data nella Proposizione 7.6.20 e dal fatto che $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1$ (il nucleo di Poisson è una identità approssimata, Nota 6.2.11). Dilatando la scala di un fattore ρ si trasporta lo stesso risultato al disco D_ρ (l'operatore di Laplace commuta con le dilatazioni e con le traslazioni, e quindi la funzione $z \mapsto f(w + z/\rho)$ è ancora armonica).

La parte (ii) segue a sua volta dalla (i): se f avesse un punto di massimo locale z_0 in D , ossia interno a \bar{D} , allora, per ogni disco D_ρ di raggio sufficientemente piccolo con centro in z_0 e per ogni $z \in \partial D_\rho$, si avrebbe $f(z_0) > f(z)$, il che contraddice la proprietà della media della parte (i). \square

Proposizione 7.6.22. (*Esistenza di limiti radiali delle funzioni coniugate di funzioni armoniche con dati al bordo in L^1 .*) Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$ e $\tilde{f}(re^{it})$ definita come in (7.27). Allora, per quasi ogni t , esiste il limite radiale (puntuale) $\lim_{r \rightarrow 1^-} \tilde{f}(re^{it})$.

Dimostrazione. Spezziamo $f \in L^1$ come combinazione lineare di quattro funzioni positive o nulle: se f è a valori reali scriviamo $f^+ = \max\{f, 0\}$ per la sua parte non negativa e $f^- = -\min\{f, 0\}$ per la parte non positiva, cosicché $f^+, f^- \geq 0$ e $f = f^+ - f^-$. Più in generale, se f è a valori complessi, la spezziamo come $f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i(\operatorname{Im} f)^+ - i(\operatorname{Im} f)^-$. Poiché la mappa $f \mapsto \tilde{f}(re^{it})$ è lineare, senza perdita di generalità possiamo ora assumere che f sia non negativa su $\mathbb{T} = \partial D$. Pertanto anche il suo integrale di Poisson, che, con abuso di notazione, continuiamo a denotare con $f(z)$, è non negativo su D . Notiamo anche che \tilde{f} è reale, in quanto funzione armonica coniugata di una funzione reale (in altre parole, perché il nucleo di Poisson coniugato è reale).

Sappiamo dal Corollario 7.6.17 che $f + i\tilde{f}$ è una funzione olomorfa nel disco D , e quindi ivi anche armonica. Allora (per il teorema di derivazione di funzione composta, Sezione 1.1!) è olomorfo anche il suo esponenziale

$$F(z) = e^{-f(z) - i\tilde{f}(z)}. \quad (7.31)$$

D'altra parte,

$$|F(z)| = e^{\operatorname{Re}(-f(z) - i\tilde{f}(z))} = e^{-f(z)} \leq 1 \quad (7.32)$$

perché abbiamo assunto $f \leq 0$ e come conseguenza abbiamo visto che \tilde{f} è a valori reali. Ma allora F è una funzione armonica (essendo olomorfa!) limitata in D , e quindi possiamo applicare la Proposizione 7.6.20 per concludere che $F(z)$ è un integrale di Poisson, ed il Corollario 6.2.12 per dedurre che F ha limiti radiali quasi ovunque per $0 \leq t \leq 2\pi$ quando facciamo tendere r a 1. In base all'identità 7.32, il modulo $|F(re^{it})|$ ha limite radiale $e^{-f(e^{it})}$ quasi ovunque (ovvero, nella notazione precedente, possiamo scrivere questo limite radiale come $e^{-f(t)}$, per quasi ogni $0 \leq t \leq 2\pi$). D'altra parte $f \in L^1$ deve essere finita quasi ovunque, e quindi $\lim_{r \rightarrow 1^-} F(re^{it}) = e^{-f(e^{it})} \neq 0$ quasi ovunque. Ormai per provare l'enunciato basta osservare che, a causa della definizione (7.31), ad ogni punto in cui esiste questo limite radiale anche $\tilde{f}(re^{it})$ deve avere limite radiale finito. \square

Definizione 7.6.23. (La funzione coniugata e spazi invarianti per coniugazione.) La funzione coniugata di $f \in L^1_* \equiv L^1[0, 2\pi]$ è la funzione

$$\tilde{f}(t) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \tilde{f}(re^{it}) := \lim_{r \rightarrow 1^-} Q_r * f(t)$$

(il limite (puntuale) esiste per quasi ogni t grazie alla Proposizione 7.6.22). Un sottospazio $B \subset L^1(\mathbb{T})$ è *invariante per coniugazione*, o *ammette coniugazione*, se per ogni $f \in B$ la funzione coniugata \tilde{f} appartiene anch'essa a B (in altre parole, l'operatore coniugato $f \mapsto \tilde{f}$ è un endomorfismo di B (una trasformazione lineare di B in sé).

Corollario 7.6.24. Per ogni $f \in L^1[-\pi, \pi]$, la funzione coniugata della serie trigonometrica $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int}$ è

$$\tilde{f}(t) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(n) \widehat{f}(n) e^{int},$$

dove abbiamo posto $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

Dimostrazione. Abbiamo già osservato, nella precedente Definizione 7.6.23, che il limite puntuale che definisce la funzione coniugata $\tilde{f} = \lim_{r \rightarrow 1^-} Q_r * f(t)$ esiste finito quasi ovunque. Passando r al limite in (7.30) si ottiene l'identità nell'enunciato. Il limite si scambia con il segno di serie in base al teorema di Convergenza Monotona di Lebesgue (applicato allo spazio ℓ^1 , ossia alla misura discreta naturale su \mathbb{Z} (la misura che conta). Naturalmente, per applicare questo teorema occorre prima spezzare $\widehat{f}(n)$ come combinazione lineare (a coefficienti complessi) di quattro termini positivi, esattamente come facemmo con $f(t)$ all'inizio della dimostrazione della Proposizione 7.6.22. \square

Nota 7.6.25. Il precedente Corollario 7.6.24 mostra che $\widehat{\tilde{f}}(0) = 0$ per ogni $f \in L^1(\mathbb{T})$. Questo equivale all'identità $\int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(e^{it}) dt = 0$, e quindi al Corollario 7.6.18. \square

Corollario 7.6.26. L'operatore $f \rightarrow \tilde{f}$ è una isometria di $L^2(\mathbb{T})$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal precedente Corollario 7.6.24 e dalla identità di Parseval (Nota 4.3.3). \square

Corollario 7.6.27. *Un sottospazio $B \subset L^1(\mathbb{T})$ è invariante per coniugazione se e solo se una delle due seguenti due condizioni equivalenti è soddisfatta:*

- (i) *l'operatore coniugato è un operatore lineare limitato da B in B ;*
- (ii) *l'operatore di troncamento (o proiezione ortogonale, nel caso dello spazio di Hilbert L^2) alla parte positiva dello spettro di Fourier, definito da*

$$f \mapsto f^b = \frac{1}{2}\widehat{f}(0) + \frac{1}{2}(f + i\tilde{f}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int} \quad (7.33)$$

è un operatore lineare limitato da B in B .

Dimostrazione. La linearità dell'operatore coniugato e del proiettore della parte (ii) sono ovvie. Se l'operatore coniugato manda B in B , allora B è invariante per coniugazione direttamente in base alla Definizione 7.6.23. Per il viceversa della parte (i) occorre provare che l'operatore coniugato è limitato su B . A questo scopo, in base al teorema del grafico chiuso (Teorema ??) basta provare che è un operatore chiuso, ossia che, se $\lim_n f_n = f$ e $\lim_n \tilde{f}_n = g$ nella norma di B , allora $g = \tilde{f}$. Per provare questa asserzione, rammentiamo che $f \mapsto \widehat{f}(0)$ è un funzionale lineare continuo su B , perché $|\widehat{f}(0)| \leq \|f\|_1 \leq C\|f\|_B$ (si veda la Definizione 7.6.3 di spazio di Banach omogeneo), ed osserviamo che, grazie alla convergenza in norma L^1 ed al Corollario 7.6.24, per ogni m si ha

$$\widehat{g}(m) = \lim_n \widehat{\tilde{f}_n}(m) = -i \operatorname{sgn}(m) \lim_n \widehat{f_n}(m) = -i \operatorname{sgn}(m) \widehat{f}(m) = \widehat{\tilde{f}}(m).$$

Per quanto riguarda la parte (ii), è ovvio che l'operatore $f \mapsto f^b$ è limitato se lo è l'operatore coniugato $f \mapsto \tilde{f}$, ed è vero anche il viceversa perché il secondo operatore si esprime in termini del primo così: $\tilde{f} = -i(2f^b - f - \widehat{f}(0))$.

□

Nota 7.6.28. Per futura memoria, si osservi che $f \mapsto f e^{int}$ è una traslazione di n passi in avanti nel dominio delle frequenze, ossia una traslazione di n passi in avanti dei coefficienti di Fourier, dal momento che

$$\widehat{f e^{int}}(j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{i(n-j)t} dt = \widehat{f}(j-n).$$

Pertanto $g := (f e^{-int})^b$ è la funzione con coefficienti di Fourier $\widehat{g}(j) = 0$ se $j < 0$, e $\widehat{g}(j) = \widehat{f}(j+n)$ se $j \geq 0$. Quindi, commutando l'azione di questa

traslazione e del troncamento, otteniamo la seguente relazione di commutazione: $e^{int}(f e^{-int})^b$ è la funzione i cui coefficienti di Fourier coincidono con quelli di f a partire dall'indice $n + 1$ e sono nulli per tutti gli indici minori o uguali a n .

In particolare, il troncamento alla parte positiva dello spettro della somma parziale n -sima della serie di Fourier di f è esattamente

$$\sum_{j=0}^n \widehat{f}(j) e^{ijt} = f^b - e^{i(n+1)t}(f e^{-i(n+1)t})^b. \quad (7.34)$$

□

Per il prossimo Corollario, rammentiamo che l'operatore aggiunto su B' di un operatore S su B è stato introdotto nella Definizione 3.17.2.

Corollario 7.6.29. *(L'operatore coniugato su $L^p(\mathbb{T})$ è l'aggiunto di quello su $L^q(\mathbb{T})$.) Poiché $L^p[-\pi, \pi] \subset L^1[-\pi, \pi]$ per $p > 1$, la definizione di funzione coniugata ha senso per $L^p[-\pi, \pi]$, e dà luogo ad un operatore su $L^p[-\pi, \pi]$ che chiamiamo l'operatore coniugato.*

Se p e q sono indici coniugati nel senso della Definizione 1.16.4), allora l'operatore coniugato su $L^p[-\pi, \pi]$ è l'aggiunto di quello su $L^q[-\pi, \pi]$, rispetto alla dualità $\langle f, g \rangle = \langle f, \bar{g} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{g}(x) dx$ utilizzata nell'identità (11.5) dell'Esempio 11.3.3 (dove si mostra che il duale di L^p è L^q per $1 \leq p < \infty$).

Dimostrazione. Dal Corollario 7.6.24 e dalla formula di Plancherel per L^p e L^q (Corollario 7.6.9) segue che

$$\langle \tilde{f}, g \rangle = -i \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \operatorname{sgn}(n) \widehat{f}(n) \widehat{g}(n) = \langle f, \tilde{g} \rangle.$$

Quindi l'operatore aggiunto, rispetto alla succitata dualità, dell'operatore coniugato su $L^p(\mathbb{T})$ è l'operatore coniugato su $L^q(\mathbb{T})$. □

Nota 7.6.30. Rammentiamo che, dato un operatore su uno spazio normato B ed una dualità fra B ed il suo duale B' , quale sia l'operatore coniugato dipende dalla scelta della dualità. Abbiamo dimostrato nel precedente Corollario 7.6.29 che l'aggiunto dell'operatore coniugato su $L^p(\mathbb{T})$ è l'operatore coniugato su $L^q(\mathbb{T})$ se come dualità si sceglie la forma bilineare

$\langle f, g \rangle = \int f(x) g(x) dx$ e se sugli spazi dei loro coefficienti di Fourier si sceglie la forma antilineare (con coniugazione sulla seconda variabile) che abbiamo usato nel teorema di Plancherel (Corollario 7.6.9). Potremmo invece scegliere, come dualità fra $L^p(\mathbb{T})$ e $L^q(\mathbb{T})$, la forma antilineare sulla seconda variabile $(f, g) = \int f(x) \overline{g(x)} dx$ (che coincide con il prodotto scalare usuale quando $f, g \in L^2$, ossia precisamente quella che abbiamo impiegato nel Teorema di rappresentazione di Riesz 11.2.1 per caratterizzare il duale di L^2). In tal caso, a causa del coefficiente immaginario nella espressione dei coefficienti di Fourier della funzione coniugata (Corollario 7.6.24) l'aggiunto dell'operatore coniugato su $L^p(\mathbb{T})$ risulterebbe essere l'operatore coniugato su $L^q(\mathbb{T})$ cambiato di segno. Lo stesso operatore aggiunto si sarebbe trovato se avessimo invece scelto una forma bilineare (senza coniugazione sulla seconda variabile) nel teorema di Plancherel. \square

7.6.5 Serie trigonometriche di soli coseni che sono serie di Fourier anche se i coefficienti tendono a zero in maniera lenta; le loro serie coniugate, in soli seni, non sono serie di Fourier

Abbiamo annunciato all'inizio della Sezione 5.18 che non si può dire nulla sull'ordine di infinitesimo dei coefficienti di Fourier di funzioni in $L^1[0, 2\pi]$: i coefficienti possono tendere a zero in maniera arbitrariamente lenta, come il prossimo risultato dimostra.

Proposizione 7.6.31. *Siano $\{c_n \geq 0\}$ una successione bilatera pari, ossia tale che $c_n = c_{-n}$, che tende a zero all'infinito e che soddisfa la condizione di convessità*

$$c_{n-1} - 2c_n + c_{n+1} \geq 0. \quad (7.35)$$

Osserviamo che la condizione di parità implica che la serie di Fourier di f è $\sum_0^\infty a_n \cos nx$, in soli coseni (con $a_0 = c_0$ e $a_n = 2c_n$).

Allora esiste una funzione $f \in L^1(\mathbb{T})$ tale che $\widehat{f}(n) = c_n$ per tutti gli n .

Quindi per una serie trigonometrica in soli coseni la condizione di convessità dei coefficienti c_n (positivi e che tendono a zero all'infinito) è sufficiente ad assicurare che essa sia una serie di Fourier, senza ipotesi sulla velocità di decadimento.

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che la condizione (7.35) implica che, per ogni $n > 0$, vale la proprietà di monotonia

$$c_n - c_{n+1} \leq c_{n-1} - c_n.$$

Pertanto

$$|c_0 - c_n| = \left| \sum_{m=0}^{n-1} c_m - c_{m+1} \right| \geq n |c_{n-1} - c_n|.$$

Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, segue dal Lemma 1.1.4 che

$$c_{n-1} - c_n = o(1/n). \quad (7.36)$$

Perciò

$$\sum_{n=1}^k n(c_{n+1} - 2c_n + c_{n-1}) = c_0 - c_k + k(c_k - c_{k+1}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} c_0. \quad (7.37)$$

Allora poniamo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(c_{n+1} - 2c_n + c_{n-1})K_{n-1}(x) \quad (7.38)$$

dove K_n è il nucleo di Féjèr (Definizione 6.2.2). Sappiamo che $K_n > 0$ (6.16) e $\|K_n\|_{L^1(\mathbb{T})} = 1$ (6.17). Pertanto, grazie alla convergenza in (7.37), la serie in (7.38) converge nella norma di $L^1(\mathbb{T})$, e la sua somma f è una funzione non negativa perché tali sono i suoi termini. Per il Teorema di Convergenza Monotona 1.9.53 possiamo allora integrare sotto il segno di serie, e quindi

$$\widehat{f}(j) = \sum_{n=1}^{\infty} n(c_{n+1} - 2c_n + c_{n-1})\widehat{K}_{n-1}(j). \quad (7.39)$$

D'altra parte, in base a (6.9),

$$\widehat{K}_{n-1}(j) = \begin{cases} 0 & \text{se } |j| \geq n \\ 1 - \frac{|j|}{n} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Pertanto (7.39) diventa

$$\begin{aligned}\widehat{f}(j) &= \sum_{n=|j|+1}^{\infty} n(c_{n+1} - 2c_n + c_{n-1}) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) \\ &= \sum_{n=|j|+1}^{\infty} n(c_{n+1} - 2c_n + c_{n-1}) - |j| \sum_{n=|j|+1}^{\infty} (c_{n+1} - 2c_n + c_{n-1})\end{aligned}\quad (7.40)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=|j|+1}^N n(c_{n+1} - 2c_n + c_{n-1}) - |j| \sum_{n=|j|+1}^N (c_{n+1} - 2c_n + c_{n-1}) \right).\quad (7.41)$$

Per semplicità poniamo $m := |j|$ e $b_n := n(c_{n+1} - 2c_n + c_{n-1})$. Calcoliamo la prima delle due somme al membro di destra di (7.40) grazie all'identità (7.37):

$$\begin{aligned}\sum_{n=m+1}^N b_n &= \sum_{n=1}^N b_n - \sum_{n=1}^m b_n \\ &= c_0 - c_N - N(c_N - c_{N+1}) - (c_0 - c_m - m(c_m - c_{m+1})) \\ &= c_m - c_N - N(c_N - c_{N+1}) + m(c_m - c_{m+1}).\end{aligned}$$

Invece la seconda somma è si calcola direttamente perché è una somma telescopica:

$$\begin{aligned}\sum_{n=m+1}^N (c_{n-1} - 2c_n + c_{n+1}) &= \sum_{n=m+1}^N ((c_{n+1} - c_n) - (c_n - c_{n-1})) \\ &= c_{N+1} - c_N - (c_{m+1} - c_m).\end{aligned}$$

Ritornando a scrivere $|j|$ invece di m , dalle ultime tre identità, da (7.36) e dal fatto che la successione $\{c_{|j|}\}$ è infinitesima otteniamo:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(j) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(c_{|j|} - c_N - N(c_N - c_{N+1}) + |j|(c_{|j|} - c_{|j|+1}) + |j|(c_{|j|+1} - c_{|j|}) \right. \\ &\quad \left. - |j|(c_{N+1} - c_N) \right) = c_{|j|}.\end{aligned}\quad (7.42)$$

Questo dimostra l'enunciato. \square

Nota 7.6.32. La precedente Proposizione 7.6.31 rivela che le serie trigonometriche in soli coseni possono essere serie di Fourier anche se i loro coefficienti tendono a zero in maniera (quasi) arbitrariamente lenta. Infatti la condizione di convessità (7.35) non comporta alcuna conseguenza circa la velocità di convergenza a zero dei coefficienti. Per accorgersene basta osservare che la condizione (7.35) è soddisfatta se i coefficienti c_n sono i valori agli interi n di una funzione h convessa. Prendiamo h derivabile: allora h è convessa se h' è crescente, ed in virtù del Teorema del valor medio di Lagrange (Sezione 1.1) in questa ipotesi vale anche la condizione (7.35). Allora, consideriamo la successione

$$c_n = \frac{1}{\ln \circ \ln \circ \cdots \circ \ln n} := \frac{1}{g^{(k)}(n)}$$

(k volte). Per k arbitrariamente elevato questa successione converge a zero in maniera (quasi) arbitrariamente lenta, eppure verifica la condizione di convessità, almeno per n sufficientemente grande. Infatti,

$$Dg(x) = -\frac{1}{\ln^2(g^{k-1}(x))} \frac{1}{g^{k-2}(x)} \cdots \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x},$$

e questa funzione, per grandi x , è negativa ma crescente.

Viceversa, ora mostreremo (Proposizione 7.6.33) che la situazione è completamente diversa per serie trigonometriche in soli seni, ossia del tipo

$$\sum_1^{\infty} a_n \sin nx = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

con $c_n = -c_{-n} = 2ia_n$, una successione bilatera *dispari*.

In effetti, nel risultato precedente abbiamo visto che una velocità elevata di decadimento dei coefficienti di Fourier non è necessaria affinché una serie trigonometrica con coefficienti pari sia la serie di Fourier di qualche funzione $f \in L^1(\mathbb{T})$. Naturalmente, in certi casi la velocità di convergenza è sufficiente perché le serie trigonometriche siano serie di Fourier: se $a_n = O(1/n^\alpha)$ con $\alpha > 1$, allora le serie trigonometriche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$ sono entrambe uniformemente convergenti (per il test di Weierstrass, Teorema 1.3.29) e quindi sono le serie di Fourier delle loro funzioni somma (per il Teorema 1.3.17 di passaggio al limite sotto il segno di integrale). Però, se a_n tende a zero più lentamente, allora le cose cambiano in maniera inaspettata: il prossimo risultato mostra che, se $a_n > 0$ e $\sum_{n>0} a_n/n = \infty$, quando si estende $\{a_n : n = 1, 2, \dots\}$ ad una successione dispari su \mathbb{Z} (ovviamente

ponendola zero per $n = 0$), la serie trigonometrica con questi coefficienti *non* è la serie di Fourier di una funzione in $L^1(\mathbb{T})$ (anche nel caso in cui la serie trigonometrica converga puntualmente ad una somma f , non è la serie di Fourier di f : ma si può dimostrare che in questa circostanza $f \notin L^1(\mathbb{T})$ [14, Chapter III, remark 1.4, Theorem 3.11, Corollary 3.11]). \square

Proposizione 7.6.33. *Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$ una funzione i cui coefficienti di Fourier sono una successione dispari, ossia $\widehat{f}(-n) = -\widehat{f}(n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, ed inoltre $\widehat{f}(n) \geq 0$ per ogni $n \geq 0$. Allora $\sum_{n \neq 0} \widehat{f}(n)/n < \infty$.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo sommare a f una costante scelta in modo da assicurare che si abbia $\widehat{f}(0) = 0$. Questo equivale a scegliere f a media nulla sul periodo (perché $\widehat{f}(0)$ è la sua media sul periodo). Sia F la primitiva $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Allora F è periodica (grazie al Lemma 5.16.4) e continua (per il Lemma 1.27.2), e

$$i \widehat{F}(n) = \widehat{f}(n)/n \quad (7.43)$$

per $n \neq 0$ (Proposizione 5.16.5). Poiché F è continua, possiamo applicare al punto $t = 0$ il Teorema 6.1.18 di convergenza puntuale della identità approssimate per funzioni continue (o più direttamente, come caso particolare, il Teorema di Féjèr 6.2.5), per ottenere

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(i \widehat{F}(0) + \sum_{1 \leq |n| \leq N} \left(1 - \frac{n}{N+1} \right) \frac{\widehat{f}(n)}{n} \right) \\ = i \widehat{F}(0) + 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N+1} \right) \frac{\widehat{f}(n)}{n} = iF(0) = 0 \end{aligned} \quad (7.44)$$

da (7.43) e dal fatto che $\widehat{f}(-n) = \widehat{f}(n)$ e $F(0) = 0$. Quindi il limite di queste somme è finito. Ora, se per assurdo si avesse $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n)/n = \infty$, allora il limite delle somme in (7.44) dovrebbe divergere, in base al Teorema di Convergenza Monotona (che si applica alla misura discreta su \mathbb{N} grazie all'ipotesi $\widehat{f}(n) \geq 0$, la quale assicura che i termini della somma sono positivi). \square

Corollario 7.6.34. *La serie trigonometrica*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}$$

è una serie di Fourier (essa converge puntualmente ad una somma $f \in L^1(\mathbb{T})$ ed è la serie di Fourier di f). Invece la serie trigonometrica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n}$$

converge puntualmente ovunque, ma non è la serie di Fourier di nessuna funzione in $L^1(\mathbb{T})$.

Dimostrazione. La prima asserzione discende direttamente dalla Proposizione 7.6.31, dal momento che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} \right) \frac{e^{int}}{\log |n|}$$

verifica la condizione di convessità enunciata in quella Proposizione.

La seconda è un caso particolare della Proposizione 7.6.33, dal momento che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n} = -\frac{i}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} \right) \frac{\operatorname{sgn}(n)}{\log |n|} e^{int}$$

e la serie $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n \log n)$ diverge. □

Corollario 7.6.35. $L_*^1 = L^1(\mathbb{T})$ non è invariante per coniugazione.

7.6.6 $L^p(\mathbb{T})$ è invariante per coniugazione per $1 < p < \infty$

Teorema 7.6.36 (Marcel Riesz). *(L'operatore coniugato è limitato su $L^p(\mathbb{T})$ per $1 < p < \infty$.) Per $1 < p < \infty$, l'operatore coniugato è limitato nella norma di L^p (e quindi manda $L^p(\mathbb{T})$ in $L^p(\mathbb{T})$).*

Dimostrazione. Grazie al Corollario 7.6.26, l'operatore coniugato è una isometria nella norma L^2 , e quindi il risultato è ovvio per $p = 2$.

In base al Corollario 7.6.29, se p e q sono indici coniugati (Definizione 1.16.4)

allora gli operatori coniugati su $L^p(\mathbb{T})$ e su $L^q(\mathbb{T})$ sono aggiunti uno dell'altro, e quindi hanno la stessa norma su questi due spazi (Teorema 3.17.1). Quindi basta provare il risultato per $1 < p < 2$, e nel resto della dimostrazione assumiamo $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $1 < p < 2$. Inoltre, ogni funzione a valori complessi è la combinazione lineare di quattro funzioni non negative: le parti positiva e negativa delle parti reale ed immaginaria, rispettivamente (come ad esempio nella dimostrazione della Proposizione 7.6.22). Quindi, poiché l'operatore coniugato è lineare, senza perdita di generalità assumiamo $f \geq 0$.

La dimostrazione che presentiamo qui utilizza in maniera intelligente l'interrelazione fra armonicità ed olomorfia. Come d'abitudine, indichiamo con $f(z) = f(re^{it})$ l'integrale di Poisson di $f = f(e^{it})$, e con $\tilde{f}(re^{it}) := Q_r * f(t)$ la sua funzione coniugata (Definizione 7.6.15). Poiché la funzione $f(e^{it})$ è non negativa e chiaramente possiamo assumerla non identicamente nulla, si ha che il suo integrale di Poisson $f(z) = f(re^{it})$ è strettamente positivo ovunque. Allora, poiché f è una funzione armonica (Esercizio 6.2.10) e \tilde{f} è la sua armonica coniugata, la funzione $H(z) = f(z) + i\tilde{f}(z)$ è olomorfa nel disco unitario aperto D (Corollario 2.2.3). Poiché la sua parte reale $f(z)$ non si annulla mai in D , nemmeno H si annulla:

$$\{z \in D : H(z) \neq 0\} = D. \quad (7.45)$$

Osserviamo che $H(0) = f(0) + i\tilde{f}(0) = f(0) > 0$, perché $\tilde{f}(0) = Q_0 * f = 0$ per l'ultima asserzione dell'Esercizio 7.6.16, o equivalentemente per il Corollario 7.6.18. Siamo interessati all'elevazione alla potenza p , ossia $G(re^{it}) = H(re^{it})^p$. Avendo ora a che fare con funzioni a valori complessi dobbiamo definire la potenza p facendo riferimento ad una scelta di ramo olomorfo della funzione $G(re^{it}) = e^{p \ln H(re^{it})}$ (si veda l'Esempio 2.14.18). Poiché $H(0) > 0$ è naturale scegliere come ramo olomorfo quello che è reale a $z = 0$, in modo che $G(0) = H(0)^p$ sia la consueta radice p -esima reale (ed in particolare $G(0) > 0$). Questo significa che, per il logaritmo $G(z) = e^{p \ln H(z)} = e^{p(\ln |H(z)| + i(\arg H(z) + 2k\pi))}$, stiamo scegliendo $k = 0$, e quindi $G(z)$ è una funzione olomorfa nel dominio $\{H(z) \neq 0\} = D$ (grazie a (7.45), e

$$|G(z)| = |e^{p(\ln |H(z)| + i(\arg H(z) + 2k\pi))}| = e^{p \ln |H(z)|} = |H(z)|^p \quad (7.46)$$

(nell'ultimo membro, ovviamente, la potenza p -esima è nel senso delle potenze reali).

Ora scegliamo $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che $\pi/2p < \gamma < \pi/2$, ossia, tenendo conto del fatto

che $1 < p < 2$,

$$\gamma < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < p\gamma < \pi. \quad (7.47)$$

Per $0 < r < 1$, consideriamo l'angolo $\theta = \arg H(re^{it}) = \arctan \tilde{f}(z)/f(z)$. Osserviamo che la condizione $f(z) > 0$ implica che $H(z)$ giace sempre nel semipiano destro (parte reale positiva), e quindi $\theta \leq \pi/2$. Allora i due archi in $\mathbb{T} \sim \partial D$ definiti da $A := \{t : |\arg H(re^{it})| < \gamma\}$ e $B := \{t : \gamma \leq |\arg H(re^{it})| < \pi/2\}$ (che dipendono da r) sono complementari. Osserviamo anche che, se si scrive $w = u + iv$, la condizione $|\arg w| < \gamma < \pi/2$ equivale a

$$\frac{u}{|w|} = \frac{\operatorname{Re} w}{|w|} = \cos \arg w > \cos \gamma \quad (7.48)$$

(qui non c'è bisogno di prendere il valore assoluto di $\operatorname{Re} w$ perché $\operatorname{Re} w > 0$ in quanto $|\arg w| < \pi/2$). Pertanto, ponendo $w = H(z) = H(re^{it})$, abbiamo che $u = f(z)$ e $|H(z)| < f(z)/\cos \gamma$ per ogni $t \in A$. Quindi, da (7.46), per $t \in A$ troviamo

$$|G(re^{it})| = |H(z)|^p < \frac{|f(z)|^p}{(\cos \gamma)^p}. \quad (7.49)$$

Per comodità di esposizione, scriviamo la costante in questa disuguaglianza come $J_p := (\cos \gamma)^{-p}$.

Viceversa, se $t \in B$, abbiamo $\gamma \leq |\arg H(re^{it})|$ e quindi $p\gamma < p|\arg H(re^{it})| = |\arg G(re^{it})|$, dal momento che $p\gamma < \pi$ in base alle disuguaglianze (7.47). Ma poiché, per le stesse disuguaglianze, si ha anche $p\gamma > \pi/2$, dobbiamo notare che (7.48) ora diventa: per $|\arg w| > p\gamma$

$$\frac{|\operatorname{Re} w|}{|w|} = |\cos \arg w| > |\cos(p\gamma)|.$$

D'altra parte per $t \in B$ risulta $\operatorname{Re} w := \operatorname{Re} G(re^{it}) < 0$ e $\cos(p\gamma) < 0$: quindi la precedente disuguaglianza diventa

$$|G(re^{it})| \leq \frac{\operatorname{Re} G(re^{it})}{\cos(p\gamma)} \quad (7.50)$$

per ogni $t \in B$. Per comodità di esposizione, scriviamo la costante in questa stima come $K_p := |\cos(p\gamma)|^{-1}$.

Grazie a queste disuguaglianze possiamo ora stimare gli integrali

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G(re^{it})| dt = \frac{1}{2\pi} \int_A |G(re^{it})| dt + \frac{1}{2\pi} \int_B |G(re^{it})| dt. \quad (7.51)$$

Invece che agli integrali del modulo di G nel lato destro di (7.51), siamo adesso interessati agli integrali della sua parte reale. Per quanto riguarda il primo integrale al lato destro di (7.51), segue da (7.49) che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_A |\operatorname{Re} G(re^{it})| dt &< \frac{1}{2\pi} \int_A |G(re^{it})| dt \\ &< \frac{J_p}{2\pi} \int_A |f(re^{it})|^p dt = \frac{1}{(\cos \gamma)^p} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p. \end{aligned} \quad (7.52)$$

D'altra parte, su B si ha $|\arg G(z)| \geq \gamma > \pi/2$ e quindi $\operatorname{Re} G(z) < 0$. Pertanto $\int_B |\operatorname{Re} G(z)| dt = -\int_B \operatorname{Re} G(z) dt$. Vediamo allora come in (7.51) che

$$\int_B \operatorname{Re} G(re^{it}) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} G(re^{it}) dt - \int_A \operatorname{Re} G(re^{it}) dt$$

e da qui e (7.52) si ottiene

$$\int_B |\operatorname{Re} G(re^{it})| dt = -\int_B \operatorname{Re} G(re^{it}) dt \leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} G(re^{it}) dt \right| + J_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p. \quad (7.53)$$

Per fare uso di quest'ultima disuguaglianza occorre prima stimare l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} G(re^{it}) dt$. Qui usiamo di nuovo le proprietà delle funzioni armoniche: G è olomorfa su tutto D e quindi $\operatorname{Re} G$ è armonica in D , ed è limitata nel disco $|w| < r < 1$. Pertanto $\operatorname{Re} G$ soddisfa la proprietà della media (parte (i) del Corollario 7.6.21), e quindi, rammentando che $H(0) = f(0) > 0$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} G(re^{it}) dt = \operatorname{Re} G(0) = \operatorname{Re}(H(0)^p) = f(0)^p > 0.$$

Pertanto il valore assoluto intorno al primo integrale al lato destro di (7.53) non è necessario, e da (7.53) si ottiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_B |\operatorname{Re} G(re^{it})| dt \leq f(0)^p + J_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p.$$

Ma allora da (7.50) segue

$$\frac{1}{2\pi} \int_B |G(re^{it})| dt \leq \frac{K_p}{2\pi} \int_B |\operatorname{Re} G(re^{it})| dt \leq K_p (f(0)^p + J_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p). \quad (7.54)$$

Finalmente, combinando la seconda disuguaglianza in (7.52) con (7.54), da (7.51) otteniamo

$$\frac{1}{2\pi} \int_B |G(re^{it})| dt \leq \frac{K_p}{2\pi} \int_B |\operatorname{Re} G(re^{it})| dt \leq K_p f(0)^p + K_p (1+J_p) \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p. \quad (7.55)$$

Ma non abbiamo ancora finito di sfruttare le proprietà delle funzioni armoniche! Infatti, l'integrale di Poisson $f(re^{it}) = P_r * f(e^{it})$ è una funzione armonica (l'abbiamo già osservato all'inizio di questa dimostrazione, ma ecco di nuovo il riferimento: Esercizio 6.2.10), e quindi, di nuovo per la proprietà della media del Corollario 7.6.21, abbiamo $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(e^{it}) dt = \widehat{f}(0)$. Ma allora

$$|f(0)| = |\widehat{f}(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(e^{it})| dt = \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})},$$

perché $p > 1$ (la disuguaglianza fra le norme L^1 e L^p era stata provata in (1.47).

Da questa disuguaglianza e da (7.55) segue

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G(re^{it})| dt \leq K_p (2 + J_p) \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p = C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p, \quad (7.56)$$

dove C_p è una costante che dipende solo da p (ma non da f e r).

Ora ricordiamo che $H(z) = f(z) + i\tilde{f}(z)$ e quindi $|\tilde{f}(z)| \leq |H(z)|$. Pertanto $|\tilde{f}(z)|^p \leq |H(z)|^p = |G(z)|$. Allora la disuguaglianza (7.56) implica

$$\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C_p^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})},$$

e con questo abbiamo finalmente provato l'enunciato: l'operatore coniugato è limitato nella norma di L^p per $1 < p < \infty$. \square

7.6.7 Convergenza in norma in spazi omogenei che ammettono coniugazione

In questa Sottosezione, finalmente, colleghiamo la nozione di spazio invariante per coniugazione a quella di convergenza in norma delle serie di Fourier.

Teorema 7.6.37. *Sia B uno spazio di Banach omogeneo (Definizione 7.6.3) in cui i polinomi trigonometrici siano densi e la moltiplicazione per la funzione e^{int} sia una isometria: ossia, per ogni $f \in B$,*

$$\|e^{int}f\|_B = \|f\|_B \quad (7.57)$$

(in base alla parte (iii) dell'Esercizio 5.2.10, (7.57) questo equivale ad assumere che la traslazione in frequenza, ossia la traslazione dei coefficienti di Fourier, sia una isometria).

Allora B è invariante per coniugazione se e solo se le serie di Fourier di funzioni in B convergono nella norma di B .

Dimostrazione. In base al Teorema 7.6.11 ed al Corollario 7.6.27, ciò che dobbiamo provare è che gli operatori \mathbf{S}_n di somma parziale della serie di Fourier (Definizione 7.6.10) sono uniformemente limitati rispetto a n se e solo se il troncamento alla parte positiva dello spettro di Fourier $f \rightarrow f^b$ definito in (7.33) è un operatore limitato (nel senso usuale della Definizione 3.3.7).

Assumiamo che \mathbf{S}_n siano operatori uniformemente limitati: per qualche $C > 0$,

$$\|\|\mathbf{S}_n\|\| \leq C. \quad (7.58)$$

Intrallacciamo S_n con la moltiplicazione per la funzione e^{int} per produrre una traslazione di n passi verso destra dello spettro di Fourier ed in tal modo traslare in frequenza $S_n f$ ad un polinomio trigonometrico $S_{2n}^b f$ con supporto spettrale positivo: ossia, poniamo

$$S_{2n}^b f := (S_{2n} f)^b = \sum_{k=0}^{2n} \widehat{f}(k) e^{ikt} = e^{int} S_n(e^{-int} f) \quad (7.59)$$

(l'ultima identità è conseguenza di (7.34). Grazie a (7.58) ed all'ipotesi (7.57) dell'enunciato, sappiamo che

$$\|\|\mathbf{S}_{2n}^b\|\| \leq C. \quad (7.60)$$

Per $f \in B$ e $\varepsilon > 0$, sia p un polinomio trigonometrico tale che $\|f - p\|_B < \varepsilon/2C$ (è qui che si usa la densità dei polinomi trigonometrici). Allora, in base alla stima uniforme (7.60),

$$\|S_{2n}^b f - S_{2n}^b p\|_B \leq C \|f - p\|_B \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia k il grado del polinomio trigonometrico p . Per $j > k$ i coefficienti di Fourier $\widehat{p}(j)$ sono nulli, e quindi, per tutti gli $n, m > k/2$ si ha $S_{2n}^b p = S_{2m}^b p$. Pertanto

$$\|S_{2n}^b f - S_{2m}^b f\|_B \leq \|S_{2n}^b f - S_{2n}^b p\|_B + \|S_{2m}^b p - S_{2m}^b f\|_B \leq \varepsilon.$$

In altre parole, la successione $\{S_{2n}^b f\}$ è di Cauchy nella norma di B , e quindi converge ad una funzione $g \in B$. Grazie all'ortogonalità delle funzioni e^{ikt} e l'identità (7.59), è immediato verificare che la serie di Fourier di g è $\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikt}$, e quindi

$$\lim_n S_{2n}^b f := g = f^b.$$

Pertanto $\|f^b\| = \|\lim_n S_{2n}^b f\| < C\|f\|$, in base alla disuguaglianza (7.58), e quindi l'operatore $f \mapsto f^b$ è limitato nella norma di B . Questo completa la prima parte della dimostrazione.

Viceversa, assumiamo ora che l'operatore $f \mapsto f^b$ sia limitato nella norma di B . Segue dall'identità (7.34) che

$$S_{2n}^b f = f^b - e^{i(2n+1)t} (f e^{-i(2n+1)t})^b,$$

e quindi, applicando due volte l'ipotesi (7.57),

$$\|S_{2n}^b\|_B \leq \|f^b\|_B + \|(f e^{-i(2n+1)t})^b\|_B \leq 2K\|f\|_B,$$

dove K è la norma dell'operatore limitato $f \rightarrow f^b$ (come sempre, nel senso della Definizione 3.3.7). In altre parole, abbiamo provato che le norme $\|S_{2n}^b\|$ sono uniformemente limitate al variare di n . D'altra parte, visto che $S_{2n}^b f = e^{int} S_n(e^{-int} f)$ in base a (7.59), esattamente per lo stesso argomento $\|S_n\| = \|S_{2n}^b\|$, e quindi gli operatori di somma parziale di Fourier sono uniformemente limitati nella norma di B . \square

In base al Teorema 7.6.36, questo ci permette di generalizzare allo spazio L^p un fatto che già ben conosciamo nel caso $p = 2$ grazie alla completezza in L^2 del sistema trigonometrico (Corollario 5.13.8) e naturalmente alle proprietà dei sistemi completi negli spazi di Hilbert (Corollario 4.3.2):

Corollario 7.6.38. *Per $1 < p < \infty$ la serie di Fourier di $f \in L^p(\mathbb{T})$ converge nella norma L^p .*

7.7 *Appendice: l'operatore coniugato (o *trasformata di Hilbert*) è di tipo debole 1-1

7.7.1 La funzione di distribuzione

Definizione 7.7.1. (*Funzione di distribuzione.*)

(i) Per ogni funzione misurabile $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, la *funzione di distribuzione* di f è la funzione su \mathbb{R}^+ definita da

$$\mathbf{m}_f(\lambda) := m(\{t : f(t) \leq \lambda\}),$$

dove m è la misura di Lebesgue su $(0, 2\pi] \sim \mathbb{T}$.

(ii) Per semplicità di notazione, scriveremo

$$\mathbf{m}_f^+(\lambda) := m(\{t : f(t) > \lambda\}) = 2\pi - \mathbf{m}_f(\lambda),$$

Nota 7.7.2. La funzione di distribuzione $\mathbf{m}_f(\lambda)$ ha limite 0 per $\lambda \rightarrow 0$ e 2π per $\lambda \rightarrow \infty$, è monotona non decrescente, e quindi ha solo discontinuità di tipo salto finito, in quantità al più numerabile. Inoltre, $\cup_n \{t : f(t) \leq \lambda - \frac{1}{n}\} = \{t : f(t) \leq \lambda\}$, e quindi, grazie alla numerabile additività della misura di Lebesgue, $\mathbf{m}_f(\lambda)$ è continua a destra ad ogni $\lambda \in \mathbb{R}^+$. \square

Lemma 7.7.3. *Per ogni $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e per ogni $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continua,*

$$\int_0^{2\pi} \phi(f(x)) dx = \int_0^\infty \phi(\lambda) d\mathbf{m}_f(\lambda). \quad (7.61)$$

Dimostrazione. In base all'Esercizio 1.14.6, la funzione misurabile f si approssima con funzioni a gradini a meno di un $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo tranne che su un insieme di misura inferiore a ε . Da questo segue l'Esercizio che basta dimostrare l'identità (7.61) nel caso in cui f è la funzione caratteristica di un intervallo (o più precisamente, l'Esercizio fornisce una successione di funzioni a gradini che approssimano f puntualmente quasi ovunque, e quindi uniformemente a meno di un insieme arbitrariamente piccolo, per il teorema di Egoroff (Corollario 1.14.9, quindi, passando al limite sotto il segno di integrale, basta dimostrare (7.61) per tutte le funzioni a gradini, e quindi basta dimostrarlo per tutte le funzioni caratteristiche degli

intervalli).

Ma se $f = \chi_{[\alpha, \beta]}$ (con $\alpha < \beta \leq 2\pi$), il primo membro di (7.61) vale $(\beta - \alpha)\phi(1) + (2\pi - (\beta - \alpha))\phi(0)$. D'altra parte, in questo caso la funzione di distribuzione vale $\mathbf{m}_f(\lambda) = 2\pi - (\beta - \alpha)$ se $\lambda \leq 1$ e 2π se $\lambda > 1$: pertanto il secondo membro di (7.61) coincide col primo. \square

In particolare, per ogni $p > 0$, la funzione $\lambda \mapsto \lambda^p$ è misurabile non negativa, e quindi:

Corollario 7.7.4. *Per ogni funzione f misurabile,*

$$\int_0^{2\pi} |h(x)|^p dx = \int_0^\infty \lambda^p d\mathbf{m}_f(\lambda).$$

7.7.2 Lo spazio L^p debole

Definizione 7.7.5. (Lo spazio L^p debole.) Sia $0 < p < \infty$ e f una funzione misurabile su $[(0, 2\pi]$. Si dice che f è di tipo L^p debole se esiste $C > 0$ tale che, per ogni $\lambda > 0$,

$$\mathbf{m}_{|f|}^+(\lambda) \leq \frac{C}{\lambda^p},$$

ossia $\mathbf{m}_{|f|}(\lambda) \geq 2\pi - \frac{C}{\lambda^p}$, ossia ancora

$$m\{t : |f(t)| \geq \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda^p}.$$

Lo spazio vettoriale delle funzioni di tipo L^p debole si denota con L_w^p .

Lemma 7.7.6. *Per ogni $0 < r < p$ si ha $L^p \subset L_w^p \subset L^r$.*

Dimostrazione. Proviamo dapprima l'inclusione $L^p \subset L_w^p$ per ogni $0 < p < \infty$. Sia $f \in L^p$. Allora $\mathbf{m}_{|f|}^+(\lambda) = 2\pi - \mathbf{m}_{|f|}(\lambda) = \int_\lambda^\infty d\mathbf{m}_{|f|}(x) dx$, perché $\mathbf{m}_{|f|}$ tende a 2π quando la variabile tende a infinito. Pertanto, per il Corollario 7.7.4,

$$\begin{aligned} \lambda^p (2\pi - \mathbf{m}_{|f|}(\lambda)) &\leq \int_\lambda^\infty x^p d\mathbf{m}_{|f|}(x) \\ &\leq \int_0^\infty x^p d\mathbf{m}_{|f|}(x) = \int_0^\infty |f(x)|^p dx < \infty. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Questo prova che f è in L^p , ed anche che

$$2\pi - \mathbf{m}_{|f|}(\lambda) = \mathbf{m}_{|f|}^+(\lambda) = O(\lambda^{-p}). \quad (7.63)$$

(quest'ultimo risultato vale per $0 < p < \infty$, ma per $p > 1$ è banale).

Ora sia $0 < r < p$ e f in L_w^p . La Proposizione 1.17.1 assicura che $L^r \supset L^p$. Lo stesso Corollario di prima implica che $\int_0^{2\pi} |f(t)|^r dt = \int_0^\infty x^r d\mathbf{m}_{|f|}(x)$. Spezziamo l'ultimo integrale nei domini $[0, 1]$ e $(1, \infty)$. Il primo pezzo si maggiora così:

$$\int_0^1 x^r d\mathbf{m}_{|f|}(x) \leq \mathbf{m}_{|f|}(1) \leq 2\pi.$$

Integriamo l'altro pezzo per parti (in base al Corollario 1.28.16) ed utilizziamo la notazione $\mathbf{m}_{|f|}^+ = 2\pi - \mathbf{m}_{|f|}$ introdotta nella parte (ii) della Definizione 7.7.1:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty x^r d\mathbf{m}_{|f|}(x) &= - \int_1^\infty x^r d\mathbf{m}_{|f|}^+(x) \\ &= - [x^r (2\pi - \mathbf{m}_{|f|}(x))]_1^\infty + \int_1^\infty \mathbf{m}_{|f|}^+(x) d(x^r). \end{aligned}$$

Poiché $r < p$, sappiamo da (7.63) che $x^r (2\pi - \mathbf{m}_{|f|}(x)) = x^r \mathbf{m}_{|f|}^+(x) = O(x^{r-p})$, e quindi $\lim_{x \rightarrow \infty} x^r (2\pi - \mathbf{m}_{|f|}(x)) = 0$. Pertanto il termine di bordo dell'integrazione per parti si maggiora così:

$$0 \leq [x^r (2\pi - \mathbf{m}_{|f|}(x))]_1^\infty = 2\pi - \mathbf{m}_{|f|}(1) \leq 2\pi.$$

Allora, sommando i due pezzi in cui abbiamo spezzato l'integrale, troviamo $\int_0^{2\pi} |f(t)|^r dt < 2\pi + \int_1^\infty \mathbf{m}_{|f|}(x) d(x^r)$. Ma l'ipotesi $f \in L_w^p$ asserisce che

$$\mathbf{m}_{|f|}(x) < Cx^{-p}. \quad (7.64)$$

Quindi

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^r dt \leq 2\pi + C \int_1^\infty x^{-p} d(x^r) = 2\pi + Cr \int_1^\infty x^{r-p-1} dx < \infty \quad (7.65)$$

perché $r - p - 1 < -1$. Questo prova che L_w^p è contenuto in L^r per $r < p$, e completa la dimostrazione. \square

Esercizio 7.7.7. Mostriamo che entrambe le inclusioni nel precedente Lemma ?? sono strette. Ad esempio, per ogni p si consideri la funzione f_p che vale $1/\sqrt[p]{|t|}$ in $[-\pi, pi]$, si calcoli la sua funzione di distribuzione, si esamini la convergenza dell'integrale improprio e si verifichi che questa funzione appartiene a L_w^p ma non a L^p : questo mostra che la prima inclusione è stretta. Si verifichi anche che questa funzione non appartiene a L_w^s per nessun $s > p$. Ne segue che, per ogni $0 < r < t < p$ si ha $L^p \subsetneq L_w^p \subsetneq L_w^t \subsetneq L^r$, e quindi anche la seconda inclusione è stretta. \square

Esercizio 7.7.8. Si dia una dimostrazione diretta della disuguaglianza $\mathbf{m}_{|f|}^+(\lambda) = O(1/\lambda^p)$ per $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{T})$.

Svolgimento. Scriviamo $E_\lambda := \{t : |f(t)| > \lambda\}$, cosicché $\mathbf{m}_{|f|}^+(\lambda) = m(E_\lambda)$, e spezziamo l'integrale come

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt = \int_{E_\lambda} + \int_{\mathbb{T} \setminus E_\lambda} \geq \int_{\mathbb{T} \setminus E_\lambda} |f(t)|^p dt > \lambda^p m(E_\lambda),$$

da cui l'enunciato. \square

Riformuliamo il precedente Corollario 7.7.6 in termini di norme.

Definizione 7.7.9. (Norma L^p debole.) Definiamo la “norma” di $f \in L_w^p$ come la più piccola costante $C > 0$ tale che $m(\{f(t) > \lambda\}) \leq C\lambda^{-p}$, ossia

$$\|f\|_p^{(w)} = \left(\sup_{\lambda > 0} \lambda^p \mathbf{m}_{|f|}^+(\lambda) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si noti che questa “norma” è una funzione omogenea per moltiplicazione per scalari positivi, ma verifica la disuguaglianza triangolare (e quindi è una vera norma) solo per $p \geq 1$, esattamente come succede per la norma L^p .

Corollario 7.7.10. *Esistono costanti K_1, K_2 che dipendono solo da r e p tali che, per ogni $f \in L^p$ e per $0 < r < p$, si ha $\|f\|_r \leq K_1 \|f\|_p^{(w)} \leq K_2 \|f\|_p$.*

Dimostrazione. La prima disuguaglianza segue direttamente dalla stima (7.62), la quale asserisce che

$$\lambda^p \mathbf{m}_{|f|}(\lambda) \leq \int_0^\infty |f(x)|^p dx = 2\pi \|f\|_p^p,$$

da cui $\|f\|_p^{(w)} \leq \sqrt[p]{2\pi} \|f\|_p$.

Per quanto concerne la seconda disuguaglianza, osserviamo anzitutto che, se f appartiene a L_w^p , per definizione si ha $\mathbf{m}_{|f|}^+(1) \leq \|f\|_p^{(w)}$. Inoltre, in base a (7.64), l'estremo inferiore delle costanti C in (7.65) è esattamente $\|f\|_p^{(w)}$. Pertanto (7.65) diventa

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^r dt \leq \mathbf{m}_{|f|}^+(1) + \|f\|_p^{(w)r} \int_1^\infty x^{r-p-1} dx = \left(1 + \frac{r}{p-r}\right) \|f\|_p^{(w)}.$$

Quindi

$$\|f\|_r^r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^r dt \leq \left(1 + \frac{r}{p-r}\right) \|f\|_p^{(w)}.$$

□

7.7.3 L'operatore coniugato è di tipo debole 1-1

Definizione 7.7.11. Un operatore T definito su $L^1(\mathbb{T})$ si dice di tipo debole 1-1 se manda L^1 in L_w^1 , ossia se, per ogni $f \in L^1$,

$$m\{t : |Tf(t)| \geq \lambda\} \leq C \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

Teorema 7.7.12. *L'operatore coniugato è di tipo debole 1-1 (nel senso della precedente Definizione 7.7.11). In altre parole, esiste una costante $K > 0$ tale che $\|\tilde{f}\|_1^{(w)} \leq K \|f\|_1$, nel senso della norma L^1 debole introdotta nella Definizione 7.7.9.*

Dimostrazione. Per ogni $\lambda > 0$, si consideri la seguente mappa conforme, strettamente imparentata al nucleo di Cauchy della Definizione 7.6.15:

$$w(z) = 1 + \frac{z - \lambda}{z + \lambda}.$$

Si osservi che la funzione $z \mapsto \frac{z-\lambda}{z+\lambda}$ manda ogni numero immaginario in un numero complesso di modulo 1 (esercizio), e manda λ in 0, quindi, essendo conforme (olomorfa con inversa olomorfa), manda il semipiano destro $H := \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ nel disco U di raggio 1 con centro l'origine. Pertanto la funzione w manda il semipiano H nel disco $U = 1 + D$ di raggio 1 con centro in $w = 1$. Inoltre, vale la seguente asserzione, che il lettore

può facilmente verificare: la funzione w manda il settore circolare illimitato $J := \{|z| \geq \lambda, \operatorname{Re} z > 0\}$ nella metà destra U_+ del disco U , ovvero $U_+ = \{z \in U : \operatorname{Re} z \geq 1\}$.

Supponiamo dapprima $f \geq 0$ e limitata, e normalizziamo, scegliendo $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = 1$.

Consideriamo la funzione G olomorfa sul disco unitario D i cui valori al bordo sono $g = f + i\tilde{f}$ (l'olomorfia fu provata nel Corollario 7.6.17) e nella Proposizione 7.6.22. Poiché G è olomorfa in D , segue dalla formula di rappresentazione di Cauchy (Corollario 2.5.1), o anche dalla proprietà della media (Corollario 7.6.21), che

$$G(0) = \int_0^{2\pi} g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(e^{it}) + i\tilde{f}(e^{it})) dt = 1,$$

perché, in base al Corollario 7.6.18 o anche 7.6.24, il valor medio di \tilde{f} , ossia $\tilde{f}(0)$, vale 0 (si noti che in questa dimostrazione il far ricorso a funzioni olomorfe da integrare sul cerchio di raggio 1 ci obbliga a scrivere le variabili di f e \tilde{f} in forma complessa).

Inoltre $w \circ g$ è composizione di funzioni olomorfe, quindi è olomorfa in U , ed allora, sempre per la formula di rappresentazione di Cauchy o la proprietà della media,

$$w(1)w(G(0)) = 1 + \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{g(e^{it}) - \lambda}{g(e^{it}) + \lambda} \right) dt. \quad (7.66)$$

Poniamo ora

$$E := \left\{ t \in (0, 2\pi] : \left| \tilde{f}(e^{it}) \right| \geq \lambda \right\}.$$

Poiché $|g| \geq |\operatorname{Im} g| = |\tilde{f}|$, su E vale anche $\left| \tilde{f}(e^{it}) \right| \geq \lambda$. Allora, in base all'asserzione all'inizio di questa dimostrazione, su E l'integrando $1 + (g(e^{it}) - \lambda)/(g(e^{it}) + \lambda)$ ha valori in U_+ , ossia ha parte reale non inferiore a 1. D'altra parte, al di fuori di E questo integrando ha parte reale non negativa, perché i suoi valori sono del tipo $w(g(e^{it}))$ con $\operatorname{Re} g(e^{it}) = f(e^{it}) \geq 0$, ed abbiamo osservato all'inizio della dimostrazione che g manda il semipiano destro nel disco con centro 1 e raggio 1, che è contenuto nel semipiano destro. Ma allora

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(1 + \frac{g(e^{it}) - \lambda}{g(e^{it}) + \lambda} \right) dt \geq \int_E \operatorname{Re} \left(1 + \frac{g(e^{it}) - \lambda}{g(e^{it}) + \lambda} \right) dt \geq m(E).$$

Pertanto, da (7.66),

$$\frac{2}{1+\lambda} = 1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \geq \frac{1}{2\pi} m(E). \quad (7.67)$$

Ora eliminiamo l'ipotesi che f abbia valor medio 1, sostituendola con l'ipotesi che abbia valor medio minore o uguale a 1. In tal caso, l'integrale in (7.66) vale

$$1 + \frac{\widehat{f}(0) - \lambda}{\widehat{f}(0) + \lambda} = w(\widehat{f}(0))$$

che è nel disco $U \subset H$ dal momento che abbiamo supposto $\widehat{f}(0) \in [0, 1] \subset H$. Quindi lo stesso argomento prova la disuguaglianza (7.67) anche in questo caso.

Ora eliminiamo l'ipotesi che f sia non negativa, ma supponiamo f a valori reali. Allora $f = f_+ - f_-$, la differenza fra le sue parti positiva e negativa, che sono a supporto disgiunto, e $\tilde{f} = \tilde{f}_+ - \tilde{f}_-$: queste due ultime funzioni non sono a supporto disgiunto, ma se $|\tilde{f}| \geq \lambda$ allora o $|\tilde{f}_+| \geq \lambda/2$ o $|\tilde{f}_-| \geq \lambda/2$ (o entrambe). Allora poniamo $E_{\pm} := \left\{ t \in (0, 2\pi] : \left| \tilde{f}_{\pm}(e^{it}) \right| \geq \frac{\lambda}{2} \right\}$, ed abbiamo $E \subset E_+ \cup E_-$. Inoltre, $\|f_+\|_1 \leq \|f\|_1 \leq 1$, ed analogamente per $\|f_-\|_1$. Allora, in base alla disuguaglianza (7.67), si ha

$$m(E_{\pm}) \leq \frac{4\pi}{1 + \frac{\lambda}{2}}$$

e pertanto $m(E) \leq 2 \frac{4\pi}{1 + \frac{\lambda}{2}} = \frac{16\pi}{2 + \lambda}$.

Ora eliminiamo l'ipotesi che f sia a valori reali: scrivendo $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ e ripetendo il ragionamento troviamo ora $m(E) \leq \frac{32\pi}{2 + \lambda}$.

Ora eliminiamo la normalizzazione $\|f\|_1 \leq 1$: applichiamo l'ultima disuguaglianza a $h = f/\|f\|_1$ ed otteniamo

$$m(E) = m \left(\left\{ t \in (0, 2\pi] : \left| \frac{\tilde{f}}{\|\tilde{f}\|_1}(e^{it}) \right| \geq \lambda \right\} \right) \leq \frac{32\pi}{2 + \lambda}$$

ossia

$$m \left(\left\{ t \in (0, 2\pi] : \left| \tilde{f}(e^{it}) \right| \geq \lambda \right\} \right) \geq 2\pi - \frac{32\pi}{2 + \lambda} \|\tilde{f}\|_1$$

Questo dimostra il teorema per funzioni $f \in L^\infty$: esiste una costante C tale che $\left| \tilde{f}(e^{it}) \right| \leq \lambda$ tranne che su un sottoinsieme di \mathbb{T} di misura inferiore a

$C\|f\|_1/\lambda$.

Ora eliminiamo l'ipotesi di limitatezza: poiché $L^\infty(0, 2\pi]$ è denso in $L^1(0, 2\pi]$ (Lemma 1.18.3, o anche Proposizione 1.18.6), esiste una successione $f_n \in L^\infty$ che converge a f nella norma L^1 : in particolare converge puntualmente quasi ovunque. Pertanto,

$$m\left(\left\{t \in (0, 2\pi] : \left|\tilde{f}_n(e^{it})\right| \geq \lambda\right\}\right) \rightarrow m\left(\left\{t \in (0, 2\pi] : \left|\tilde{f}(e^{it})\right| \geq \lambda\right\}\right).$$

Ma $\|f_n\|_1 \rightarrow \|f\|_1$, e quindi la dimostrazione si estende a tutte le funzioni in L^1 . \square

Dal Corollario 7.7.10 ora segue:

Corollario 7.7.13. *Per ogni $f \in L^1(\mathbb{T})$ e per ogni $r < 1$ si ha $\|\tilde{f}\|_r \leq K_1 \|\tilde{f}\|_1^{(w)} \leq K \|f\|_1$.*

7.7.4 **L'operatore coniugato manda $L \log L$ in L^1

La dimostrazione del teorema principale in questa Sottosezione è tratta da [13, Chapter 4, Section 3]. Per una dimostrazione che utilizza solo le funzioni di distribuzione, e quindi l'analisi reale, si veda [14, Chapter III, Theorem 1.7].

Abbiamo visto che l'operatore coniugato è una isometria di $L^2 = L^2(\mathbb{T})$ (Corollario 7.6.26) e manda L^p in L^p se $1 < p < \infty$ (Corollario 7.6.38), ma che è solo di tipo debole 1-1, invece che limitato su L^1 . D'altra parte, ora mostriamo che \tilde{f} è in L^1 se f appartiene ad uno spazio non molto più piccolo di L^1 .

Definizione 7.7.14. Poniamo $\log^+(x) := \max\{0, \log x\}$, e definiamo lo spazio $L \log L$ come lo spazio vettoriale delle funzioni f su \mathbb{T} tali che $\|f \log^+ |f|\|_1 < \infty$. Evidentemente, se f è limitata, $f \in L^1$ se e solo se $f \in L \log L$. Invece, nelle zone in cui f è illimitata, il termine logaritmico diverge e rende più difficile la convergenza dell'integrale $\int |f| \log^+ |f|$ rispetto all'integrale $\int |f|$. Perciò $L \log L$ è contenuto in L^1 .

Nota 7.7.15. La quantità $\int_0^{2\pi} |f| \log^+ |f| dx$ non è una norma, perché si annulla sulla funzione di valore costante 1. Per esprimere il concetto che un operatore lineare manda $L \log L$ a L^1 non possiamo quindi dimostrare una disuguaglianza del tipo $\|Tf\|_1 < C\|f \log^+ |f|\|_1$: dobbiamo invece dimostrare la disuguaglianza $\|Tf\|_1 < A + B\|f \log^+ |f|\|_1$ per opportune costanti $A, B > 0$. \square

Teorema 7.7.16. *L'operatore coniugato manda $L \log L$ in L^1 : ovvero, esistono $A, B > 0$ tali che, per ogni $f \in L \log L$,*

$$\int_{\mathbb{T}} |\tilde{f}| \leq A + B \int_{\mathbb{T}} |f| \log^+ |f|, \tag{7.68}$$

Viceversa, se $\tilde{f} \in L^1$ per qualche $f \in L^1$, $f \geq 0$, allora $\int_{\mathbb{T}} |f| \log^+ |f| < \infty$.

Dimostrazione. Osserviamo che, se $f \in L \log L$, anche $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ appartengono a $L \log L$, perché dominate in modulo da $|f|$. Inoltre, $\tilde{f} = \operatorname{Re} \tilde{f} + i \operatorname{Im} \tilde{f}$ per linearità. Quindi, se il risultato vale per tutte le funzioni a valori reali, allora vale per qualsiasi $f \in L \log L$. Quindi possiamo limitarci a dimostrarlo per funzioni a valori reali. È ovvio che, se il risultato vale per f , allora vale anche per $-f$: quindi, per lo stesso argomento, separando ogni funzione a valori reali come la somma a supporto disgiunto della sua parte positive e negativa, possiamo limitarci a dimostrare il teorema per funzioni non negative.

Inizialmente facciamo un'ulteriore ipotesi, che fra poco rinforzeremo ma alla fine elimineremo: ossia $f \geq 1$. In tal modo la funzione $\log^+ |f|$ diventa $\log f$. Come nella dimostrazione del Teorema 7.6.36, consideriamo la funzione olomorfa $g = f + i\tilde{f}$ nel disco unitario complesso D , e scriviamo la variabile $x \in \mathbb{T}$ come $x = e^{it}$, e $z \in D$ come $z = r e^{it}$. Rammentiamo anche che, con questa notazione, $\tilde{f}(0) := \tilde{f}(z)|_{z=0} = 0$ (Corollario 7.6.18). Come allora, anche qui g è olomorfa in D e $\operatorname{Re} g = f \geq 0$, quindi g ha valori nel semipiano destro. Possiamo allora definire $\log g$ utilizzando il ramo principale del logaritmo complesso (quello che coincide con il logaritmo reale in $(0, \infty)$ ed il cui dominio di olomorfia è $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$). In particolare, $\log g$ è olomorfa su D perché composizione di funzioni olomorfe. Allora $g \log g$ è anch'essa olomorfa in D , e segue dalla formula di rappresentazione di Cauchy (Corollario 2.5.1), o anche dalla proprietà della media (Corollario 7.6.21), che

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g \log g(e^{it}) dt = g(0) \log g(0) = 2\pi f(0) \log f(0)$$

perché $g(0) = f(0) := f(z)|_{z=0}$ in quanto $\tilde{f}(z)|_{z=0} = 0$. Poiché $f \geq 1$, ora abbiamo $f(0) \log f(0) > 0$, e $\int_0^{2\pi} g \log g(e^{it}) dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(g \log g)$. Scriviamo $g(z) = f(z) + i\tilde{f}(z) = |g(z)| e^{iy(z)}$, ossia

$$y = \arctan \frac{\tilde{f}}{f}. \tag{7.69}$$

Allora $\operatorname{Re}(g \log g) = f \log |g| - y\tilde{f}$. Osserviamo che il fatto che g abbia valori nel semipiano destro implica che $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, ed inoltre, per (7.69), $y > 0$ se e solo se $\tilde{f} > 0$, ossia $y\tilde{f} \geq 0$.

Riassumendo, $y\tilde{f} \geq 0$ e

$$\int_0^{2\pi} (f \log |g| - y\tilde{f})(e^{it}) dt = \int_0^{2\pi} g \log g(e^{it}) dt = 2\pi f(0) \log f(0) > 0, \quad (7.70)$$

e quindi

$$\int_0^{2\pi} y\tilde{f} \leq \int_0^{2\pi} f \log |g| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f \log(f^2 + \tilde{f}^2 t). \quad (7.71)$$

Scriviamo per semplicità $f = a$ e $|\tilde{f}| = b$, ed osserviamo che l'ultimo integrando è $a \log(a^2 + b^2)$. Per $b = 0$ questa espressione vale $2a \log a$, ed è crescente al crescere di $b > 0$, con derivata rispetto a b data da $2ab/(a^2 + b^2) \leq 1$. Da questo segue che, per $b \geq 0$, l'integrando $a \log(a^2 + b^2)$ è dominato dall'espressione lineare $2a \log a + b$. Pertanto la disuguaglianza (7.71) diventa

$$\int_0^{2\pi} y\tilde{f} \leq \int_0^{2\pi} f \log f + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\tilde{f}|. \quad (7.72)$$

Ora rinforziamo l'ipotesi $f \geq 1$ richiedendo di più: $f \geq e$.

Sappiamo che l'argomento y di g varia in $[-\pi/2, \pi/2]$. Spezziamo l'integrale $\int_0^{2\pi} |\tilde{f}|$ nei due domini $E_+ := \{y \geq \pi/4\}$ e $E_- := \{y < \pi/4\}$. In base a (7.69), ciò significa $E_- = \{t : |\tilde{f}(e^{it})| < f(e^{it})\}$ ed $E_+ = \{t : |\tilde{f}(e^{it})| \geq f(e^{it})\}$.

Allora

$$\int_{E_-} |\tilde{f}| \leq \int_{E_-} f \leq \int_{\mathbb{T}} f \leq \int_{\mathbb{T}} f \log f$$

(l'ultima disuguaglianza vale perché $\log f \geq 1$, dal momento che abbiamo assunto $f \geq e$). D'altra parte, su E_+ si ha $y \geq \pi/4$ e quindi, rammentando che $y\tilde{f}$ è sempre non negativo,

$$\int_{E_+} |\tilde{f}| \leq \frac{4}{\pi} \int_{E_+} y\tilde{f} \leq \frac{4}{\pi} \int_{\mathbb{T}} y\tilde{f} \leq \frac{4}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(f \log f + \frac{1}{2} |\tilde{f}| \right)$$

(l'ultima disuguaglianza segue da (7.72)). Sommando le due ultime disuguaglianze si ottiene a primo membro l'integrale di \tilde{f} , che però compare anche a secondo membro: portando questo contributo a primo membro si trova

$$(1 - \frac{2}{\pi}) \int_0^{2\pi} \tilde{f} \leq (1 + \frac{4}{\pi}) \int_0^{2\pi} f \log f,$$

ossia, scrivendo $B = (1 + \frac{4}{\pi}) / (1 - \frac{2}{\pi}) > 0$,

$$\int_0^{2\pi} \tilde{f} \leq B \int_0^{2\pi} f \log f. \quad (7.73)$$

Infine, eliminiamo l'ipotesi $f \geq e$, ma mantenendo, senza perdita di generalità, l'ipotesi $f \geq 0$. Per le funzioni f che non soddisfano $f \geq e$, poniamo $f_+ = \max\{f, e\}$, $f_- = \min\{f, e\}$: pertanto $|f_-| \leq e$. Sia $K_+ := \{t : f(e^{it}) = f_+(e^{it})\} = \{|f| \geq e\}$ e $K_- = \{|f| \leq e\}$. Allora $\tilde{f} = \tilde{f}_+ + \tilde{f}_-$ per linearità, e basta stimare gli integrali di questi due addendi. Ora, f_+ verifica l'ipotesi $f_+ \geq e$ sotto la quale è valida la disuguaglianza 7.73). Da questo e dal fatto che, su K_- , si ha $f_+ \equiv e \equiv f_+ \log f_+$, segue

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \tilde{f}_+ &\leq B \int_0^{2\pi} f_+ \log f_+ \leq B \left(\int_{K_+} f \log f + e m(K_-) \right) \\ &\leq B \int_0^{2\pi} f \log f dt + 2\pi B e. \end{aligned}$$

D'altra parte, l'operatore coniugato è una isometria su L^2 (Corollario 7.6.26), e la norma L^2 sui compatti domina la norma L^1 : quindi segue dalle disuguaglianze $0 \leq f_- \leq e$ che

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}_- \leq \|f_-\|_{L^2[0,2\pi]} \leq e.$$

Da queste ultime due disuguaglianze segue la stima (7.68) dell'enunciato.

Infine, proviamo l'ultima asserzione dell'enunciato, ossia che, se $f \geq 0$ e $\tilde{f} \in L^1$, allora $f \in L \log L$. Per questo è sufficiente assumere che $f \geq 1$, perché, se aggiungiamo a f una costante positiva $c > 0$, la funzione coniugata \tilde{f} non cambia, in quanto il prolungamento olomorfo sul disco D della costante c è ancora la costante c , e quindi la parte immaginaria del prolungamento è nulla. Allora assumiamo $f \geq 1$, quindi $0 \leq \log f \leq |g|$. Allora, in base alla identità (7.70) (che fu provata proprio sotto l'ipotesi $f \geq 1$), si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f \log f &\leq \int_0^{2\pi} f \log |g| \\ &= 2\pi f(0) \log f(0) + \int_0^{2\pi} y \tilde{f} \\ &\leq 2\pi f(0) \log f(0) + \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} |\tilde{f}|, \end{aligned}$$

perché $|y(e^{it})| \leq \pi 2$ per ogni t . Quindi $f \log^+ f \in L^1$. \square

7.7.5 **L'operatore coniugato come operatore integrale singolare

7.8 *Appendice: il teorema massimale di Hardy–Littlewood

7.8.1 Operatori massimali

Definizione 7.8.1. *Funzioni massimali ed operatore massimale di Hardy–Littlewood*

(i) La *funzione massimale* di $f \in L^1(\mathbb{T})$ è la funzione

$$M_f(t) := \sup_{0 < s \leq \pi} \left| \frac{1}{2s} \int_{t-s}^{t+s} f(u) du \right|,$$

indicata talvolta anche con il simbolo f^* .

L'operatore $M : f \rightarrow M_f$ si chiama l'*operatore massimale di Hardy–Littlewood*.

(ii) Data $f \in L^1(\mathbb{T})$, indichiamo ora la variabile $t \in \mathbb{T}$ in notazione complessa, $t = e^{ix}$, e denotiamo con f_* la *funzione massimale radiale*

$$f_*(e^{ix}) := \sup_{0 < r < 1} |P_r * f(e^{ix})| \equiv \sup_{0 < r < 1} \left| \int_0^{2\pi} P(r, e^{i(x-s)}) f(e^{is}) ds \right|,$$

dove $P(r, e^{ix}) \equiv P_r(e^{ix})$ è il nucleo di Poisson (Definizione 6.2.8).

Nota 7.8.2. (i) A causa dell'estremo superiore nella precedente Definizione 7.8.1, gli operatori massimali sono sublineari: se $f = g + h$ allora $M_f \leq M_g + M_h$, ed analogamente per f_* .

(ii) Evidentemente, gli operatori massimali sono *monotòni*, nel senso che, se $0 \leq f \leq g$, allora $0 < M_f \leq M_g$, ed analogamente $f_* \leq g_*$. \square

Proposizione 7.8.3. *Per ogni $f \in L^1$, $f_* \leq f^* \equiv M_f$ (notazione della precedente Definizione 7.8.1), e (ritornando alla notazione complessa per la funzione coniugata sul disco unitario) $\tilde{f}(r e^{it}) \leq M_f(t)$.*

Dimostrazione. Ritornando momentaneamente alla notazione in cui i punti di \mathbb{T} sono rappresentati da angoli fra 0 e 2π , osserviamo che $f_* = \sup_{0 < r < 1} |P_r * f|$ e $P_r * f(\theta) = \int_0^{2\pi} P(r, e^{i(\theta-s)}) f(e^{is}) ds$. Ma P_r è una funzione continua di integrale 1, pari, non negativa e decrescente fra 0 e π . Scindendo la sua immagine (un sottoinsieme di \mathbb{R}^+) in intervalli di diametro ε arbitrariamente piccolo, vediamo che P_r si approssima uniformemente con funzioni a gradini, e quindi con combinazioni convesse di funzioni caratteristiche normalizzate del tipo $\frac{1}{2s} \chi_{[-s, s]}$. Ma allora l'enunciato segue direttamente dalla Definizione 7.8.1.

Per la seconda asserzione, applichiamo lo stesso ragionamento osservando che $\tilde{f}(r e^{it}) = P_r * \tilde{f}(e^{it})$ (Proposizione 7.6.20 e Proposizione 7.6.22). \square

7.8.2 Limitatezza dell'operatore massimale di Hardy–Littlewood

Teorema 7.8.4. (Teorema massimale di Hardy–Littlewood.) *L'operatore massimale di Hardy–Littlewood $f \rightarrow M_f$ è di tipo debole 1-1 (Definizione 7.7.11).*

Dimostrazione. Sia $E_\lambda := \{t : |M_f(t)| > \lambda\}$. Dobbiamo mostrare che, se f è in L^1 , allora M_f è in L^1 debole, ovvero che, per ogni $\lambda > 0$, si ha $m(E_\lambda) \leq C \|f\|_1 / \lambda$ per qualche costante $C > 0$ che non dipende da f .

Poiché $0 \leq M_f \leq M_{|f|}$ per la sua definizione (parte (i) della Definizione 7.8.1), senza perdita di generalità assumiamo $f \geq 0$. Sia $t \in \mathbb{T}$ tale che $M_f(t) > \lambda$: allora, ancora per definizione, esiste un intervallo aperto B_t centrato in t tale che $\frac{1}{m(B_t)} \int_{B_t} f(s) ds > \lambda$, ossia

$$m(B_t) < \frac{1}{\lambda} \int_{B_t} f(s) ds.$$

Questi intervalli B_t costituiscono quindi un ricoprimento di E_λ . Allora, per il Lemma di ricoprimento di Vitali (Lemma 1.24.3), esiste un sottoricoprimento numerabile (che con abuso di notazione indichiamo ancora con $\{B_n\}$) tale che

$$m(E_\lambda) \leq m(\cup_t B_t) \leq 4m(\cup_n B_n) \leq \frac{4}{\lambda} \int_{\cup B_n} f(s) ds \leq \frac{4}{\lambda} \int_{\mathbb{T}} f(s) ds, \quad (7.74)$$

e questa è la disuguaglianza voluta. \square

Lemma 7.8.5. *Per ogni $f \in L^1(\mathbb{T})$,*

$$m(\{t : M_f > 2\lambda\}) \leq \frac{4}{\lambda} \int_{\lambda^+}^{\infty} t \, d\mathbf{m}_{|f|}(t).$$

(La notazione λ^+ al bordo inferiore di integrazione è necessaria perché la misura $d\mathbf{m}_{|f|}$ associata alla funzione f potrebbe avere un atomo al punto λ : si consideri ad esempio il caso in cui f abbia punti di salto).

Dimostrazione. Sia $J_\lambda := \{t : f(t) > \lambda\}$, e scriviamo $h := f|_{J_\lambda}$, $g := f|_{\mathbb{C}J_\lambda}$, cosicché $f = h + g$ e pertanto $M_f \leq M_g + M_h$ come osservato nella parte (i) della Nota 7.8.2. Ma g ha supporto in $\mathbb{C}J_\lambda$ ed ivi coincide con f , quindi $M_g \leq \lambda$ dappertutto, per la parte (ii) della stessa Nota. Quindi $M_f \leq \lambda + M_h$, ed allora $M_h > \lambda$ se $M_f > 2\lambda$. Pertanto, in base alla disuguaglianza (7.74),

$$m(\{t : M_f > 2\lambda\}) \leq m(\{t : M_h > \lambda\}) \leq \frac{4}{\lambda} \int_0^{2\pi} |h(s)| \, ds = \frac{4}{\lambda} \int_{\lambda^+}^{\infty} t \, d\mathbf{m}_{|f|}(t).$$

(Al bordo inferiore di integrazione abbiamo λ^+ perché h coincide con f solo laddove $|f|$ è maggiore di λ). \square

Teorema 7.8.6. *Per $1 < p < \infty$, l'operatore massimale di Hardy–Littlewood è limitato su L^p . Se f è in $L \log L$, ossia $f \log^+ |f| \in L^1$, allora M_f è in L^1 .*

Dimostrazione. Come in tutte le precedenti dimostrazioni, spezzando f come somma di due funzioni reali non negative e due immaginarie non negative, ci riduciamo, senza perdita di generalità, al caso $f \geq 0$.

Dimostriamo dapprima che M_f manda L^p in L^p_w .

Indichiamo per semplicità con f^* la funzione massimale di Hardy–Littlewood di $f \in L^1(\mathbb{T})$. Dal Lemma 7.8.5,

$$\mathbf{m}_{f^*}^+(2\lambda) \leq \frac{4}{\lambda} \int_{\lambda^+}^{\infty} t \, d\mathbf{m}_{|f|}(t). \quad (7.75)$$

Se $t > \lambda$, la funzione $p \mapsto (t/\lambda)^p$ è crescente, e quindi il lato destro della precedente disuguaglianza si maggiora con $(\frac{4}{\lambda})^p \int_{\lambda^+}^{\infty} t^p \, d\mathbf{m}_{|f|}(t)$ per ogni $p \geq 1$, e ne risulta

$$2\pi - \mathbf{m}_{f^*}(2\lambda) = \mathbf{m}_{f^*}^+(2\lambda) \leq \left(\frac{4}{\lambda}\right)^p \int_{\lambda^+}^{\infty} t^p \, d\mathbf{m}_{|f|}(t). \quad (7.76)$$

Poiché $f \in L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, questo integrale converge, e quindi tende a zero per $\lambda \rightarrow \infty$. Pertanto

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^p \mathbf{m}_{f^*}^+(2\lambda) = 0. \quad (7.77)$$

Quindi $f \in L^p_*$, direttamente dalla Definizione 7.7.5.

Ora proviamo l'asserzione più forte che f è in L^p . In base al Corollario 7.7.4,

$$\|f^*\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(x)|^p dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \lambda^p d\mathbf{m}_{f^*}(\lambda) = \frac{2^p}{2\pi} \int_0^\infty \lambda^p d\mathbf{m}_{f^*}(2\lambda). \quad (7.78)$$

Integriamo l'ultimo integrale per parti (Corollario 1.28.16):

$$\int_0^\infty \lambda^p d\mathbf{m}_{f^*}(2\lambda) = [\lambda^p ((2\pi - \mathbf{m}_{f^*}(2\lambda)))]_0^\infty - \int_0^\infty -p\lambda^{p-1} (2\pi - \mathbf{m}_{f^*}(2\lambda)) d\lambda. \quad (7.79)$$

Il termine di bordo al lato destro si annulla grazie a (7.77), e quindi, da (7.75):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^p d\mathbf{m}_{f^*}(2\lambda) &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} (2\pi - \mathbf{m}_{f^*}(2\lambda)) d\lambda \\ &\leq 4p \int_0^\infty \lambda^{p-2} \int_{\lambda^+}^\infty t d\mathbf{m}_{|f|}(t) d\lambda. \end{aligned}$$

Ora supponiamo $p > 1$, e scambiamo l'ordine di integrazione nell'ultimo integrale (il cui integrando è non negativo, e quindi si applica il Teorema di Fubini 1.20.4 (ii)). Per $p > 1$ si ottiene un integrale convergente:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^{p-2} \int_{\lambda^+}^\infty t d\mathbf{m}_{|f|}(t) d\lambda &= \int_0^\infty \int_0^t \lambda^{p-2} d\lambda t d\mathbf{m}_{|f|}(t) \\ &= \frac{1}{p-1} \int_0^\infty t^p d\mathbf{m}_{|f|}(t) = \frac{2\pi}{p-1} \|f\|_p^p \end{aligned}$$

(l'ultima disuguaglianza segue di nuovo dal Corollario 7.7.4). Questo dimostra la limitatezza dell'operatore massimale su L^p per $1 < p < \infty$.

Veniamo al caso $p = 1$. Riscriviamo in questo caso le stime (7.78) e (7.79), scambiando l'ordine di integrazione ed utilizzando come sempre il Corollario

7.7.4, e troviamo

$$\begin{aligned}
\|f^*\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \lambda \, d\mathbf{m}_{f^*}(\lambda) = \frac{2}{2\pi} \int_0^\infty \lambda \, d\mathbf{m}_{f^*}(2\lambda) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (2\pi - \mathbf{m}_{f^*}(2\lambda)) \, d\lambda \leq \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) \\
&\leq 2 + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty (2\pi - \mathbf{m}_{f^*}(2\lambda)) \, d\lambda \leq 2 + \frac{4}{\pi} \int_1^\infty \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda^+}^\infty t \, d\mathbf{m}_{|f|}(t) \, d\lambda \\
&= 2 + \frac{4}{\pi} \int_1^\infty t \int_1^t \frac{d\lambda}{\lambda} \, d\mathbf{m}_{|f|}(t) = 2 + \frac{4}{\pi} \int_1^\infty t \log t \, d\mathbf{m}_{|f|}(t) \\
&= 2 + \frac{4}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |f| \log |f| \, dx.
\end{aligned}$$

Questo dimostra la seconda asserzione dell'enunciato. \square

7.8.3 **Limitatezza dell'operatore coniugato massimale radiale

Notazione 7.8.7. (Operatore coniugato massimale radiale.) Combinando la definizione di funzione coniugata e quella di funzione massimale radiale f_* (Definizione 7.8.1), introduciamo la *funzione coniugata massimale radiale*:

$$\tilde{f}_*(e^{it}) := \sup_{0 < r < 1} \tilde{f}(r e^{it})$$

Corollario 7.8.8. Per $1 < p < \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{T})$, esiste una costante C_p che non dipende da f tale che $\|\tilde{f}_*\|_p < C_p \|f\|_p$.

Dimostrazione. Rammentando che $|\tilde{f}(r e^{it})| \leq M_{\tilde{f}}(t)$ e $\sup_r |h(r e^{it})| \leq M_h(t)$ otteniamo $|\tilde{f}_*(e^{it})| \leq M_{\tilde{f}}(t)$ (Proposizione 7.8.3). Pertanto, se $f \in L^p$, allora

$$\|\tilde{f}_*\|_p < \|M_{\tilde{f}}\|_p < A \|\tilde{f}\|_p < B \|f\|_p$$

per opportune costanti A e B , in base alla prima parte del Teorema 7.8.6 ed al Teorema di Marcel Riesz 7.6.36. \square

7.9 Insiemi di divergenza puntuale di serie di Fourier

7.10 Appendice: la disuguaglianza di Hausdorff–Young

In questa Sezione, seguendo [4] e [13, Chapter 1, Section 9], diamo una dimostrazione elementare della disuguaglianza di Hausdorff–Young (Teorema 7.10.1), che verrà poi riproposta nella Sezione 7.11 nel consueto ambito naturale, come conseguenza di un più sofisticato risultato di analisi complessa, il teorema di interpolazione di Riesz–Thorin (Teorema ??): la presente dimostrazione utilizza esattamente le stesse idee, ma le formula in un contesto semplificato meno generale e faticoso.

Cominciamo con il rammentare le seguenti due proprietà ben note che valgono sia per la trasformata di Fourier, sia per la successione dei coefficienti di Fourier: $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ (teorema di Parseval, Nota 4.3.3, e teorema di Plancherel, Corollario 8.5.2), e $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ (Proposizione 8.2.3). Vogliamo interpolare queste disuguaglianze per tutti i q fra 2 e ∞ , per ottenere:

Teorema 7.10.1 (Hausdorff–Young). *Per $2 \leq q \leq \infty$, ponendo $p = (1 - \frac{1}{q})^{-1}$ l'indice coniugato di q (Definizione 1.16.4), che varia fra 1 e 2, vale la disuguaglianza*

$$\|\widehat{f}\|_q \leq \|f\|_p,$$

dove $f \in L^p(\mathbb{T})$, e $\{\widehat{f}\}$ è la successione dei coefficienti di Fourier e la norma $\|\widehat{f}\|_q$ è quella di ℓ^q (la stessa disuguaglianza vale anche per funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$ se \widehat{f} indica la trasformata di Fourier: la dimostreremo in seguito nel Capitolo ?? sugli approfondimenti sulla trasformata di Fourier e l'interpolazione di operatori).

Dimostrazione. Anzitutto, è chiaro che basta provare la disuguaglianza per tutti i polinomi trigonometrici F tali che $\|f\|_p = 1$, perché essi sono densi in $L^p(\mathbb{T})$ (Corollario 5.13.8) e perché la disuguaglianza in oggetto è invariante per normalizzazione. Limitiamoci quindi a tali funzioni. Scriviamo, come d'abitudine $c_n = \widehat{f}(n)$: allora, per la Definizione 3.3.7 di norma di funzionale lineare e per il fatto che il duale di ℓ^q è isometricamente isomorfo a ℓ^p (Teorema 1.19.6).

7.10. APPENDICE: LA DISUGUAGLIANZA DI HAUSDORFF-YOUNG 715

La disuguaglianza $\|\{c_n\}\|_q \leq 1$ equivale alla seguente: per ogni successione $\{d_n\}$ tale che $\|\{d_n\}\|_{\ell^p} = 1$,

$$|\langle \{c_n\}, \{d_n\} \rangle| \equiv \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n \right| \leq 1. \quad (7.80)$$

Separando modulo e fase, scriviamo $f = F^{\frac{1}{p}} E$, $d_n = D_n^{\frac{1}{p}} e_n$, con $|E_n| = |e_n| = 1$, $F, D_n \geq 0$ e

$$\|F\|_1 = 1 \quad (7.81)$$

$$\|\{D_n\}\|_{\ell^1} = 1. \quad (7.82)$$

Il primo membro di (7.80) è

$$\left| \sum_n D_n^{\frac{1}{p}} e_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F^{\frac{1}{p}}(t) E(t) e^{-int} dt \right| = .$$

La serie a secondo membro è in realtà una somma finita, perché il polinomio trigonometrico f ha un numero finito di coefficienti di Fourier non nulli, e quindi ha una estensione olomorfa, che si ottiene sostituendo a $1/p$ la variabile $z \in \mathbb{C}$:

$$H(z) = \sum_n D_n^z e_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F^z(t) E(t) e^{-int} dt.$$

Poiché $p > 2$ si ha $1/2 \leq 1/p \leq 1$, e possiamo restringere l'attenzione alla striscia $1/2 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$. Scriviamo $z = x + iy$. Portando il modulo dentro somma ed integrale troviamo

$$|H(x + iy)| \leq \sum_n |D_n^x| \frac{1}{2\pi} \int |F^x| dx, \quad (7.83)$$

e da questo segue che $|H(x + iy)|$ è limitato uniformemente rispetto a y . Infatti, ciascuno degli addendi di $|H(1 + iy)|$ è limitato da 1 perché $|H(1 + it)| \leq \sum_n |D_n| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(t)| dt \leq 1$ grazie a (7.81). Allora, per $1/2 \leq x \leq 1$, ciascun addendo è ancora limitato perché $\int_0^{2\pi} |F^x(t)| dt \leq \int_0^{2\pi} |F(t)| dt$ in base alla Proposizione 1.17.1 sulle inclusioni fra spazi L^p sui compatti. Quindi tutti gli addendi di $|H|$ sono limitati nella striscia $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$, e poiché c'è solo un numero finito di addendi anche H è limitata in tale striscia.

Ora, per $x = 1/2$, miglioriamo (7.83) grazie alla disuguaglianza di Cauchy (Proposizione 4.5.1), che, se poniamo $g := F^{\frac{1}{2}+it} E$, conduce a

$$\begin{aligned} \left| H\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| &\leq \left(\sum_n D_n \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} F^{\frac{1}{2}+it}(s) E(s) e^{-ins} ds \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_n D_n \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n |\widehat{g}|^2(n) \right)^{\frac{1}{2}} = \|F^{\frac{1}{2}+it}\|_2 = \|F^{\frac{1}{2}}\|_2 = 1, \end{aligned}$$

in base all'identità di Parseval (Nota 4.3.3) ed a (7.81).

Pertanto La funzione olomorfa H è limitata nella striscia $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$ e limitata da 1 ai bordi della striscia. Pertanto è limitata da 1 in tutta la striscia, per il Teorema di Phragmén–Lindelöf 2.15.2. In particolare, è limitata per $z = 1/p$, e questa asserzione è l'enunciato del presente teorema. \square

7.11 Appendice: interpolazione di norme e di operatori, teorema di Riesz–Thorin

Capitolo 8

La trasformata di Fourier

8.1 La trasformazione da spettro discreto a spettro continuo: introduzione intuitiva alla trasformata di Fourier

Studiamo un segnale acustico emesso in una stanza. Per semplicità supponiamo che la stanza sia cubica di lato L . Il suono è composto di onde acustiche: onde di pressione nel mezzo che lo conduce, in questo caso onde di compressione e rarefazione dell'aria. Però non tutte queste onde si possono mantenere in maniera stazionaria in una stanza con muri rigidi i quali quindi non possono essere spostati dalla pressione acustica. Le onde hanno andamento sinusoidale: si preservano solo quelle con punti nodali (cioè fissi, senza variazione al variare del tempo) esattamente in corrispondenza dei muri. Indichiamo con x la posizione nella stanza, dal muro di sinistra a quello di destra. Supponiamo che l'ampiezza massima al punto x della pressione acustica sia $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è una costante che rappresenta la lunghezza d'onda. Per ora λ è un numero reale qualsiasi. Ora imponremo che l'onda abbia punti nodali (cioè stazionari) sulle due pareti: su quella di sinistra questa richiesta è automaticamente verificata perchè $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ si annulla per $x = 0$. Invece, imporre che si abbia un punto nodale per un $x \neq 0$ (ad esempio, x uguale alla distanza L fra le due pareti) significa imporre una restrizione a λ : vediamo quale. Al variare del tempo la pressione acustica al punto x varia in modo oscillatorio entro i valori $\pm \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$: l'andamento nel tempo è $\sin(\alpha t) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$, illustrato nella figura 8.1 che mostra un periodo



Figura 8.1:

completo di $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$.

Il primo punto nodale della sinusoide si trova non dopo un periodo, ma dopo un semiperiodo. Quindi il valore di λ più elevato che corrisponde a onde acustiche che la stanza non smorza o elimina è dato dalla condizione nodale $\frac{2\pi}{\lambda}L = \pi$ (π è il semiperiodo della funzione \sin) cioè $\lambda = 2L$. Se c è la velocità del suono, questa lunghezza d'onda massima si associa alla frequenza minima $\omega_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2L}$ (poiché $c \approx 330$ m/sec, se $L = 3.3$ m si ha $\omega_0 = 50$ Hz, se invece $L = 6.6$ m allora $\omega_0 = 25$ Hz e così via).

Perciò i segnali acustici che si mantengono nella stanza e non vengono da essa filtrati (cioè smorzati ed eliminati) sono quelli con componenti di frequenza multiple di $\omega_0 = \frac{c}{2L}$: uno spettro discreto che porta allo sviluppo di Fourier del segnale:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x}.$$

Se il segnale acustico fosse stato ascoltato all'aperto non avremmo avuto questa discretizzazione. Per avvicinarci gradualmente all'analisi in frequenza in un ambiente aperto possiamo immaginare di considerare sale di ascolto via via più grandi, cioè di far crescere L in maniera illimitata. In tal modo le frequenze ammissibili si addensano sulla retta reale. Quando $L \rightarrow \infty$, a cosa tende lo sviluppo discreto di Fourier visto prima?

Mostriamo in maniera intuitiva, ma non rigorosa (per ora) che esso converge ad un integrale (l'integrale di Fourier). Per un approfondimento rigoroso sul legame fra coefficienti di Fourier della periodizzazione di una funzione ed integrale di Fourier si veda Sezione 10.2 in seguito. I risultati di questa sezione saranno tutti ridimostrati in maniera rigorosa in questo capitolo e nel successivo.

Teorema 8.1.1. (Teorema dell'integrale di Fourier). *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$,*

poniamo

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds$$

Se anche $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$ si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Dimostrazione intuitiva. Consideriamo dapprima lo sviluppo di funzioni f periodiche di periodo $2T$; poi faremo tendere T all'infinito, come preannunciato sopra. Si ha:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t/T} \quad (8.1)$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(s) e^{-in\pi s/T} ds$$

(si vedano le Sezioni 5.2 e 5.4). La serie converge almeno nel senso di L^2 .

Proviamo, in maniera intuitiva, a passare al limite per $T \rightarrow \infty$. Più precisamente consideriamo una funzione non periodica f in $L^1(\mathbb{R})$, tale cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste T tale che

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-T, T]} |f(t)| dt < \varepsilon.$$

In altre parole, il valore dell'integrale di f è tutto ottenuto, a meno di una tolleranza ε arbitrariamente piccola, limitando l'attenzione all'intervallo $[-T, T]$. Approssimiamo f con una funzione periodica che coincide con f in $[-T, T]$ e poi si ripete in maniera periodica. Abusando della notazione indichiamo ancora con f questa funzione periodicizzata. Quando $T \rightarrow \infty$ otteniamo in questo modo ogni funzione in $L^1(\mathbb{R})$ con supporto in un intervallo limitato. Scriviamo lo sviluppo di Fourier (8.1) di f in $[-T, T]$ e passiamo al limite.

Ponendo $\tau = \frac{\pi}{T}$ si ha da (8.1)

$$f(t) = \frac{\tau}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} f(s) e^{-in\tau s} ds e^{in\tau t}. \quad (8.2)$$

Se poniamo $\omega_n = n\tau$ (e quindi $\frac{\pi}{\tau} = \frac{n\pi}{\omega_n}$) la sommatoria in (8.2) diventa una somma di valori della funzione

$$F(\omega) = \int_{-n\pi/\omega}^{n\pi/\omega} f(s)e^{-i\omega s} ds e^{i\omega t}$$

al variare di ω sulla successione $\{\omega_n = n\tau\}$, una successione equispaziata di passo τ . Poiché questa sommatoria è moltiplicata per τ , si ottiene così una somma di Riemann di F : stiamo sommando le aree di rettangoli di base τ ed altezza $F(n\tau)$. Quando $T \rightarrow +\infty$ si ottiene $\tau = \frac{\pi}{T} \rightarrow 0^+$: la successione si infittisce ed il secondo membro di 8.2 dovrebbe convergere a

$$\frac{\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s} ds e^{i\omega t} d\omega.$$

□

Nel seguito di questo capitolo daremo una dimostrazione rigorosa del teorema precedente (Teorema 8.4.2).

Notazione 8.1.2. Per $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\omega \in \mathbb{R}$, scriviamo

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt.$$

Cambiando variabile da ω a $2\pi\omega$ nel Teorema 8.1.1 si ottiene in modo intuitivo la seguente formula di inversione di Fourier.

Corollario 8.1.3. (Teorema dell'integrale di Fourier, ovvero Formula di inversione per la trasformata di Fourier.)

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ allora, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega t} d\omega.$$

Nota 8.1.4. In molti libri e articoli scientifici la trasformata di Fourier introdotta nella Notazione 8.1.2 viene definita senza il fattore 2π all'esponente. Talvolta essa viene definita come la funzione \widetilde{f} del Teorema 8.1.1. In tal caso il Teorema 8.1.1 porta alla formula di inversione

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

con una normalizzazione dell'integrale di un fattore 2π . Se si preferisce rendere simmetriche le formule per la trasformata di Fourier e per la sua inversa, senza però inserire il fattore 2π all'esponente, allora si deve porre

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R} :$$

in tal caso, segue dal Teorema 8.1.1 che

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Questa è forse la definizione più diffusa di trasformata di Fourier. Noi invece utilizzeremo la notazione 8.1.2. \square

8.2 Proprietà della trasformata di Fourier

Definizione 8.2.1. (Trasformata di Fourier.) Come anticipato nella Notazione 8.1.2, per $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\omega \in \mathbb{R}$ poniamo

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt.$$

L'applicazione $f \mapsto \widehat{f}$ si chiama *trasformata di Fourier* e si indica con \mathfrak{F} .

Definizione 8.2.2. $C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} : f \text{ continua e } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0\}$.

Proposizione 8.2.3. $\mathfrak{F} : L^1(\mathbb{R}) \mapsto C_0(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Mostriamo che, per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$, \widehat{f} è continua. Questo fatto segue dal Teorema di Convergenza Dominata di Lebesgue (Teorema 1.9.54). Infatti

$$\left| \widehat{f}(\omega) - \widehat{f}(\omega_0) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |e^{-2\pi i\omega t} - e^{-2\pi i\omega_0 t}| dt$$

e per ogni $\omega, \omega_0 \in \mathbb{R}$ l'integrando a secondo membro è maggiorato dalla funzione $2|f| \in L^1(\mathbb{R})$. Perciò

$$\begin{aligned} & \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |e^{-2\pi i\omega t} - e^{-2\pi i\omega_0 t}| dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} |f(t)| |e^{-2\pi i\omega t} - e^{-2\pi i\omega_0 t}| dt = 0 \end{aligned}$$

quindi

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(\omega_0) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo infine che la proprietà

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(\omega) = 0.$$

è nient'altro che il Lemma di Riemann–Lebesgue 5.9.6. \square

Le proprietà seguenti sono analoghe a quelle che valgono per i coefficienti di Fourier, alcune delle quali sono state dimostrate in quell'ambito (si vedano l'Esercizio 5.18.4, il Lemma 5.16.1 e la Proposizione 6.1.6).

Teorema 8.2.4. (Proprietà della trasformata di Fourier.) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(i) $|\widehat{f}(\omega)| \leq \|f\|_1$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

(ii) Se

$$g(t) = f(-t) := f^\dagger(t), \quad (8.3)$$

allora $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(-\omega) = (\widehat{f})^\dagger(\omega)$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$

(iii) Se anche $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{\widehat{f}}(s) = f(-s)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$

(iv) Se $h(t) = f(at)$, con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ allora $\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$

(v) Se $h(t) = f(t - t_0)$, con $t_0 \in \mathbb{R}$, allora $\widehat{h}(\omega) = e^{-2\pi i \omega t_0} \widehat{f}(\omega)$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$

(vi) Se $g(t) = e^{2\pi i \omega_0 t} f(t)$, con $\omega_0 \in \mathbb{R}$, allora $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega - \omega_0)$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$

(vii) Se f , oltre ad appartenere a $L^1(\mathbb{R})$, è anche derivabile con continuità e $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, allora, denotando con D l'operatore di derivazione, si ha che \widehat{Df} è definita e $\widehat{Df}(\omega) = 2\pi i \omega \widehat{f}(\omega)$ (generalizzeremo questa proprietà nel Corollario 8.2.8)

(viii) Se $g(t) = tf(t)$ e $g \in L^1$ allora

$$\widehat{g}(\omega) = -\frac{1}{2\pi i} D\widehat{f}(\omega)$$

per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ (ovvero, $D\widehat{f}(\omega) = -2\pi i \widehat{g}(\omega)$).

(ix) $\widehat{\widehat{f}}(\omega) = \widehat{f}(-\omega)$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione.

(i) Si ha

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |e^{-2\pi i \omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \|f\|_1.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-2\pi i \omega s} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-s) e^{-2\pi i \omega s} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{2\pi i \omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i (-\omega) t} dt \\ &= \widehat{f}(-\omega) \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{f}}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{-2\pi i \omega s} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega (-s)} d\omega \\ &= f(-s) \end{aligned}$$

grazie alla formula di inversione di Fourier (Corollario 8.1.3)

(iv)

$$\widehat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-2\pi i \omega t} dt$$

Poniamo $s = at$. Se $a > 0$ si ha $dt = \frac{ds}{a}$. L'integrale si scrive quindi come:

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-2\pi i \frac{\omega}{a}s} \frac{ds}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-2\pi i \frac{\omega}{a}s} ds \\ &= \frac{1}{a} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

Per ottenere la stessa formula per $a < 0$ basta ormai provare la formula per $a = -1$. In tal caso

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= - \int_{\infty}^{-\infty} f(s)e^{2\pi i \omega s} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{2\pi i \omega s} ds \\ &= \widehat{f}(-\omega).\end{aligned}$$

(v)

$$\widehat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-2\pi i \omega t} dt$$

Poniamo $s = t - t_0$: allora $ds = dt$ e l'integrale diventa

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-2\pi i \omega (s+t_0)} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-2\pi i \omega s} e^{-2\pi i \omega t_0} ds \\ &= e^{-2\pi i \omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-2\pi i \omega s} ds \\ &= e^{-2\pi i \omega t_0} \widehat{f}(\omega).\end{aligned}$$

Si confronti questo risultato con l'Esercizio 5.2.10.

(vi)

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega_0 t} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i (\omega - \omega_0) t} dt \\
&= \widehat{f}(\omega - \omega_0).
\end{aligned}$$

(vii) Scriviamo

$$\widehat{Df}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$$

e mostriamo che l'integrale converge (la cosa non è automatica perché non si è fatta l'ipotesi che $f' \in L^1(\mathbb{R})$). Integrando per parti:

$$\begin{aligned}
\widehat{Df}(\omega) &= [f(t) e^{-2\pi i \omega t}]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (2\pi i \omega) e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) (\cos 2\pi \omega t - i \sin 2\pi \omega t) \\
&\quad - \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) (\cos 2\pi \omega t - i \sin 2\pi \omega t) \\
&\quad + 2\pi i \omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt.
\end{aligned}$$

Per ipotesi,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0.$$

Inoltre le funzioni sin e cos sono limitate. Quindi

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} = 0$$

e perciò

$$\begin{aligned}
\widehat{Df}(\omega) &= 2\pi i \omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \\
&= 2\pi i \omega \widehat{f}(\omega).
\end{aligned}$$

Si confronti questo risultato con il Lemma 5.16.1.

(viii) Supponiamo che $g(t) = tf(t)$ sia in $L^1(\mathbb{R})$ e mostriamo che \widehat{f} è derivabile e

$$D\widehat{f}(\omega) = -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi i\omega t} dt.$$

In virtù della formula

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt,$$

(che ha senso perché $f \in L^1(\mathbb{R})$, questa proprietà segue dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale, che nel caso dell'integrale di Riemann vale per funzioni a supporto in un intervallo di lunghezza finita (Teorema 1.23.1), ma in generale per l'integrale di Lebesgue vale anche su tutto \mathbb{R} (grazie al Corollario 1.23.7) purché l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt \quad (8.4)$$

sia uniformemente convergente rispetto al parametro ω (Definizione 1.23.4), e lo sia anche l'integrale della derivata, cioè

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_{\omega}f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt = -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-2\pi i\omega t} dt. \quad (8.5)$$

Nel nostro caso l'integrale (8.4) è uniformemente convergente grazie al fatto che $f \in L^1(\mathbb{R})$, perché il parametro ω scompare quando si stima il modulo dell'integrale e si passa il modulo sotto il segno di integrale: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n = n_{\varepsilon}$, indipendente da ω , tale che

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt - \int_{-n}^n f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt \right| \leq \int_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]} |f(t)| dt < \varepsilon$$

perché $f \in L^1(\mathbb{R})$. Poiché anche $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$ lo stesso argomento si applica all'integrale in (8.5).

(ix)

$$\begin{aligned} \widehat{\bar{f}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t)e^{-2\pi i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)e^{2\pi i\omega t}} dt \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{2\pi i\omega t} dt} = \overline{\widehat{f}(-\omega)}. \end{aligned}$$

□

Riscriviamo le formule delle proprietà (vii) e (viii) del precedente Teorema 8.2.4 come segue:

Corollario 8.2.5. (Regole di commutazione fra trasformata di Fourier e derivata.) *Se indichiamo con \mathfrak{F} la trasformata di Fourier, con D l'operatore di derivata e con P la moltiplicazione per il polinomio $-2\pi ix$, otteniamo le seguenti regole di commutazione:*

$$\begin{aligned} D\mathfrak{F} &= \mathfrak{F}P, \\ \mathfrak{F}D &= -P\mathfrak{F}, \end{aligned}$$

ed iterando,

$$P^k D^l \mathfrak{F} = P^k \mathfrak{F} P^l \mathfrak{F} D^k P^l. \quad (8.6)$$

Corollario 8.2.6. (Trasformata di Fourier di funzioni pari o dispari.) *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$.*

(i) *Se f è pari, allora \widehat{f} è pari e*

$$\widehat{f}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos 2\pi\omega t \, dt.$$

(ii) *Se f è dispari, allora \widehat{f} è dispari e*

$$\widehat{f}(\omega) = -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin 2\pi\omega t \, dt.$$

(iii) *Se f è a valori reali, allora $\operatorname{Re} \widehat{f}$ è pari e $\operatorname{Im} \widehat{f}$ è dispari.*

(iv) *Se f è a valori reali e pari, allora \widehat{f} è reale e pari; se f è reale e dispari, allora \widehat{f} è immaginaria e dispari.*

Dimostrazione. Il fatto che se f è pari, rispettivamente dispari, allora \widehat{f} è pari, rispettivamente dispari, segue immediatamente dalla parte (i) del Teorema 8.2.4. Inoltre

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos 2\pi\omega t \, dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin 2\pi\omega t \, dt$$

Perciò se f è pari il secondo integrale si annulla in quanto l'integrando è dispari, perché lo è la funzione seno ed il dominio di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. D'altra parte, il primo integrando è pari, e quindi si ottiene

$$\widehat{f}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos 2\pi\omega t \, dt.$$

Questo prova (i). La dimostrazione di (ii) è analoga: se f è dispari allora $f(t) \cos 2\pi\omega t$ è una funzione dispari, quindi il primo integrale si annulla, mentre per la parità dell'integrando il secondo integrale diventa :

$$-2i \int_0^{\infty} f(t) \sin 2\pi\omega t \, dt.$$

La parte (iii) segue dal Teorema 8.2.4 (ix), che, per f a valori reali e per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, dà luogo all'identità

$$\overline{\widehat{f}(\omega)} = \widehat{f}(-\omega) = \widehat{f}(-\omega),$$

dalla quale segue $\operatorname{Re} \widehat{f}(\omega) = \operatorname{Re} \widehat{f}(-\omega)$ e $\operatorname{Im} \widehat{f}(\omega) = -\operatorname{Im} \widehat{f}(-\omega)$.

La parte (iv) segue immediatamente dalla (iii). \square

Corollario 8.2.7. (*Velocità di decadimento di $f \implies$ regolarità di \widehat{f} .*)

(i) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ è a supporto compatto (cioè $f \equiv 0$ al di fuori di un intervallo limitato), allora $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ e

$$D^n \widehat{f}(\omega) = (-2\pi i)^n \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) e^{-2\pi i \omega t} \, dt.$$

(ii) Se per ogni $n = 0, 1, \dots, m$ la funzione $t \rightarrow t^n f(t)$ è in $L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \in C^m(\mathbb{R})$ e

$$D^n \widehat{f}(\omega) = (-2\pi i)^n \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) e^{-2\pi i \omega t} \, dt.$$

Dimostrazione.

- (i) Poiché f è a supporto compatto, esiste $a > 0$ tale che $f(t) = 0$ per ogni t tale che $|t| > a$. Perciò la funzione $g(t) = tf(t)$ verifica $|g(t)| \leq a|f(t)|$ per ogni t , e quindi $g \in L^1(\mathbb{R})$. Segue dalla proprietà di derivazione della trasformata di Fourier (Teorema 8.2.4 (viii)) che \widehat{f} è derivabile e che $D\widehat{f} = -2\pi i\widehat{g}$. Ma anche g è a supporto compatto, e quindi anche \widehat{g} è derivabile (grazie al Teorema 1.23.1 di derivazione sotto il segno di integrale su un compatto). Perciò \widehat{f} è derivabile due volte e si ha

$$D^2\widehat{f}(\omega) = (-2\pi i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt.$$

Con lo stesso ragionamento si vede che $D^n\widehat{f}$ è anch'essa derivabile, ed in generale

$$D^n\widehat{f}(\omega) = (-2\pi i)^n \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt.$$

- (ii) La dimostrazione è analoga: anche se ora f non è a supporto compatto, l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$ è convergente per l'ipotesi che $t^n f(t)$ sia in L^1 (la convergenza è uniforme rispetto a ω : si riveda la dimostrazione della parte (viii) del Teorema 8.2.4). Il resto dell'argomento è identico.

□

La prima parte del seguente enunciato generalizza le condizioni della proprietà della trasformata di Fourier della derivata (Teorema 8.2.4).

Corollario 8.2.8. (*Regolarità di $f \implies$ velocità di decadimento di \widehat{f} .*)

- (i) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ ha derivata ovunque e f' è in $L^1(\mathbb{R})$, allora si ha che $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ e $D\widehat{f}(\omega) = 2\pi i \omega \widehat{f}(\omega)$.
- (ii) Se f e tutte le sue derivate fino all'ordine m esistono ovunque ed appartengono a $L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f}(\omega)$ tende a zero per $\omega \rightarrow \pm\infty$ più rapidamente di ω^{-m} .
- (iii) Se inoltre f è a supporto compatto, derivabile dappertutto m volte tranne che per un numero finito di punti dove $f^{(m-1)}$ è continua e derivabile a sinistra e a destra ma $f^{(m)}$ ha un salto, e $f^{(m)}$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ ed è monotona a tratti, allora $\widehat{f}(\omega) = O(\omega^{-(m+1)})$.

- (iv) Il primo enunciato precedente continua a valere più in generale se $f \in L^1(\mathbb{R})$ è continua e C^1 a tratti con punti di singolarità isolati e con derivata anch'essa in $L^1(\mathbb{R})$; il secondo continua a valere per le funzioni tali che la derivata m -sima sia continua a tratti con punti di singolarità isolati e in $L^1(\mathbb{R})$) e le prime $m - 1$ derivate appartengono a $L^1(\mathbb{R})$.
- *(v) La generalizzazione dei primi due enunciati precedenti fatta nella parte (iv) vale più in generale nel caso in cui, rispettivamente:
- (generalizzazione della parte (i)): f sia assolutamente continua (Definizione 1.28.1) (e quindi derivabile quasi ovunque, per il Corollario 1.28.7), con derivata in $L^1(\mathbb{R})$;
 - (generalizzazione della parte (ii)): f sia derivabile ovunque $m - 1$ volte e $D^{(m-1)}f$ sia assolutamente continua con derivata in $L^1(\mathbb{R})$.
- (vi) Infine, l'enunciato al punto (iii) vale più in generale per f derivabile ovunque $m - 1$ volte con ogni derivata in $L^1(\mathbb{R})$ e con $f^{(m-1)} \in L^1(\mathbb{R})$ continua a tratti (o, ancora più in generale, con $f^{(m-1)} \in L^1(\mathbb{R})$ assolutamente continua, quindi con derivata $f^{(m)}$ definita quasi ovunque) e $f^{(m)}$ monotona a tratti ed in $L^1(\mathbb{R})$.

Dimostrazione.

- (i) Segue dal Teorema Fondamentale del Calcolo per funzioni derivabili con derivata in L^1 , Teorema 1.28.12, che

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt. \quad (8.7)$$

Poiché $f' \in L^1$, l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) dt$ è convergente. Questo prova che esiste finito il limite $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)$. Dal momento che f è integrabile questi limiti debbono valere 0. Pertanto l'ultima identità di (i) segue dalla parte (vii) del Teorema 8.2.4. Il lettore non interessato alla profondità concettuale inerente alle versioni più sofisticate del Teorema Fondamentale del Calcolo può limitare l'attenzione a funzioni f derivabili ovunque con derivata in L^1 e continua ed applicare ad esse il Teorema Fondamentale nella versione elementare (Teorema 1.27.1).

- (ii) Iterando il ragionamento precedente si ottiene $\widehat{D^m f}(\omega) = (2\pi i \omega)^m \widehat{f}(\omega)$. La dimostrazione della parte (ii) segue ora dalla Proposizione 8.2.3.

- (iii) La dimostrazione di questa parte ricalca riga per riga quella del risultato analogo per le serie di Fourier, Teorema 5.18.5, grazie al fatto che $f^{(m)}$ è a supporto compatto, e quindi l'integrale nella sua antitrasformata di Fourier si limita a questo compatto (in quel Teorema, l'integrale dei coefficienti di Fourier è preso sul compatto $[-\pi, \pi]$, ma per invarianza per dilatazione l'argomento rimane identico per qualunque altro intervallo).
- (iv) Gli argomenti in questo caso coincidono con quelli dei punti (i) e (ii) una volta notato che, se f è continua, C^1 a tratti ed in $L^1(\mathbb{R})$, per il Teorema 1.28.9 vale l'identità (8.7). Si osservi che, detti x_i i punti di salto di $D^{(m)}f$, la validità dell'identità $\widehat{D^{(m)}f}(\omega) = 2\pi i\omega \widehat{D^{(m-1)}f}(\omega)$ della parte (vii) del Teorema 8.2.4 ora si ottiene integrando per parti come segue,

$$\int_{-\infty}^{\infty} D^{(m-1)}f(t) e^{-2\pi i\omega t} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} D^{(m)}f(t) \frac{i}{\omega} e^{-2\pi i\omega t} dt - \sum_i \frac{i}{\omega} e^{-2\pi i t} D^{(m-1)}f(t) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}},$$

ed i termini della somma telescopica al secondo membro si elidono consecutivamente perché $D^{(m-1)}f$ è continua e tende a zero all'infinito.

- (v) La dimostrazione è identica a quella della parte (iv), perché, se f è assolutamente continua, allora come già osservato essa ha derivata quasi ovunque, ed inoltre, per il Teorema 1.28.9, vale l'identità (8.7).
- (vi) Dimostriamo questa parte direttamente nel caso di assoluta continuità di $f^{(m-1)}$: infatti nel caso particolare in cui $f^{(m-1)}$ sia continua a tratti la dimostrazione è identica, grazie al fatto che il Teorema Fondamentale del Calcolo 8.7 vale in entrambi i casi.

Supponiamo dapprima che f sia a supporto compatto. Allora l'argomento si riduce a quello di (iii), sempre grazie al fatto che l'identità (8.7) vale per le funzioni assolutamente continue. Si noti che l'ipotesi che le singolarità siano isolate, unita a quella di supporto compatto, assicura che le singolarità siano in numero finito, come richiesto nella dimostrazione del Teorema 5.18.5, che appunto tratta il caso dei coefficienti di Fourier, ottenuti integrando su intervalli finiti, quindi

compatti. Inoltre, la compattezza del supporto di f , e quindi di tutte le sue derivate, assicura che le derivate appartengano a L^1 , condizione necessaria per calcolare la loro trasformata di Fourier, come si fa nella dimostrazione del Teorema 5.18.5.

Consideriamo ora il caso generale in cui f non sia a supporto compatto. In tal caso fra le ipotesi è necessario aggiungere che le derivate appartengano a $L^1(\mathbb{R})$. La dimostrazione si riduce a quella della parte (iv) nel modo seguente. Per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ vogliamo stimare $\widehat{f}(\omega)$ come nel Teorema 5.18.5, provando che

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq C \frac{1}{|\omega|^{m+1}}$$

per qualche costante $C > 0$. Per iterazioni successive basate sull'identità (5.30) (è qui che si usa la condizione che tutte le derivate, e non solo l'ultima, appartengano a $L^1(\mathbb{R})$) questo equivale a provare che

$$|\widehat{f^{(m)}}(\omega)| \leq C \frac{1}{|\omega|}.$$

Se f fosse a supporto compatto, questa disuguaglianza seguirebbe dalla prima parte della dimostrazione (che essenzialmente ricalca il Corollario 5.18.9). Poiché invece f non si assume a supporto compatto ma solo in $L^1(\mathbb{R})$, scegliamo un compatto (cioè un intervallo limitato) I così grande che si abbia

$$\int_{\mathbb{R} \setminus I} |f^{(m)}(x)| dx < \frac{1}{\omega^2}.$$

Allora

$$\begin{aligned} |\widehat{f^{(m)}}(\omega)| &\leq \left| \int_I f^{(m)}(x) e^{-2\pi i x \omega} dx \right| & (8.8) \\ &+ \left| \int_{\mathbb{R} \setminus I} f^{(m)}(x) e^{-2\pi i x \omega} dx \right| \\ &\leq |(\widehat{f \chi_I})(\omega)| + \int_{\mathbb{R} \setminus I} |f^{(m)}(x)| dx \\ &\leq |(\widehat{f^{(m)} \chi_I})(\omega)| + \frac{1}{\omega^2}, \end{aligned}$$

dove come sempre χ_I è la funzione caratteristica dell'intervallo I .

D'altra parte, la funzione $f^{(m)}\chi_I$ ha supporto nel compatto I , ed è continua a tratti e monotona a tratti (la moltiplicazione per la funzione caratteristica aggiunge solo al più due punti di salto per la funzione $f^{(m)}$). Quindi ad essa si applica la dimostrazione valida per funzioni a supporto compatto. Combinando questo fatto con la disuguaglianza (8.8) troviamo che esiste una costante $C' > 0$ tale che, per ogni $\omega \neq 0$,

$$\left| \widehat{f^{(m)}}(\omega) \right| \leq C' \frac{1}{|\omega|} + \frac{1}{\omega^2} \leq C \frac{1}{|\omega|}$$

per qualche costante $C > C'$. Questo completa la dimostrazione. \square

Esercizio 8.2.9. Sia χ_1 la funzione caratteristica dell'intervallo $[-1, 1]$, e più in generale, per $\eta > 0$, sia χ_η la funzione caratteristica dell'intervallo $[-\eta, \eta]$. Si osservi che $\chi_1(x) = \chi_{\frac{1}{2}}(x/2)$, e si deduca dalla proprietà di dilatazione della trasformata di Fourier (parte (iv) del Teorema 8.2.4) e dall'Esercizio 10.1.5 che

$$\widehat{\chi_1}(\omega) = 2\widehat{\chi_{\frac{1}{2}}}(2\omega) = 2 \operatorname{sinc}(2\omega) = \frac{\sin(2\pi\omega)}{\pi\omega} \quad (8.9)$$

e più in generale

$$\widehat{\chi_\eta}(\omega) = 2\eta\widehat{\chi_{\frac{1}{2}}}(2\eta\omega) = 2\eta \operatorname{sinc}(2\eta\omega) = \frac{\sin(2\pi\eta\omega)}{\pi\omega}. \quad (8.10)$$

Ora sia h_η la funzione continua con supporto in $[-1 - \eta, 1 + \eta]$ che vale 1 in $[-1, 1]$ ed è lineare (ossia con grafico rettilineo) negli intervalli $[-1 - \eta, -1]$ e $[1, 1 + \eta]$, e denotiamo con h_η questa funzione lineare nell'intervallo $[1, 1 + \eta]$: ovviamente, $h_\eta(x) = 1 - \frac{1}{\eta}(x - 1)$ in tale intervallo. Prolunghiamo h_η a tutto \mathbb{R} ponendola uguale a zero al di fuori di $[1, 1 + \eta]$. Allora

$$f_\eta = h_\eta^\dagger + \chi_1 + h_\eta. \quad (8.11)$$

Osserviamo che $\lim_{\eta \rightarrow 0} f_\eta(x) = \chi_1(x)$ per ogni x , ed anche in maniera monotona e nella norma di L^1 .

- (i) Si deduca da (8.9) e dalla parte (i) del Teorema 8.2.4 che $\lim_{\eta \rightarrow 0} \widehat{f_\eta}(\omega) = \widehat{\chi_1}(\omega) = 2 \operatorname{sinc}(2\omega)$ uniformemente su \mathbb{R} .

(ii) Si mostri che $f_\eta \in L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R})$, e più precisamente che $f_\eta = \frac{1}{2\eta} \chi_\eta * \chi_1$.

(iii) Se ne deduca che $\widehat{f}_\eta \in L^1(\mathbb{R})$.

(iv) Si ricavi da (8.10) e dalla parte (ii) che $\widehat{f}_\eta = \frac{\sin(2\pi\eta\omega) \sin(2\pi\omega)}{2\eta\pi^2\omega^2}$.

(v) Sappiamo dalla parte (iii) del Corollario 8.2.8 che $\widehat{f}_\eta = O(1/\omega^2)$ per $\omega \rightarrow \pm\infty$. Si ricavi questo risultato da (iv).

(vi) Ora si verifichi esplicitamente che

$$\widehat{h}_\eta = \frac{1}{2\pi\omega\eta} - \frac{1}{4\pi^2\omega^2\eta} (1 - e^{-2\pi i\omega\eta})$$

e si usi questa identità per ricavare da (8.11) il risultato di (v) (ed anche quello di (i)).

□

8.3 Esempio: trasformata di Fourier della Gaussiana

La Gaussiana è la funzione $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$. Essa decresce all'infinito a velocità più che polinomiale, e quindi è in $L^1(\mathbb{R})$. In seguito la useremo spesso per moltiplicare altre funzioni in modo da renderle piccole all'infinito.

Lemma 8.3.1.

$$\|\varphi\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1.$$

Dimostrazione. Per parità

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-\pi t^2} dt.$$

Se scriviamo

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\pi t^2} dt$$

dobbiamo mostrare che $I = \frac{1}{2}$. Si ha

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-\pi t^2} dt \right) \left(\int_0^\infty e^{-\pi s^2} ds \right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\pi t^2} e^{-\pi s^2} dt ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\pi(t^2+s^2)} dt ds. \end{aligned}$$

Grazie alla formula di integrazione in coordinate polari (Esercizio 1.22.23) questo integrale doppio diventa

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\pi(t^2+s^2)} dt ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r dr d\theta$$

(abbiamo posto $t = r \cos \theta$, $s = r \sin \theta$: il quadrante $t \geq 0$, $s \geq 0$ corrisponde a $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$). Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r dr &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty D e^{-\pi u^2} du \\ &= \left[-\frac{1}{2\pi} e^{-u^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Perciò

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r dr d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{4}.$$

Quindi $I = \frac{1}{2}$. □

Proposizione 8.3.2. $\widehat{\varphi} = \varphi$.

Dimostrazione. Chiaramente,

$$\varphi'(t) = -2\pi t \varphi(t). \quad (8.12)$$

Dalla proprietà di derivazione della trasformata di Fourier (Teorema 8.2.4 (viii)) si ha

$$(\widehat{\varphi})'(\omega) = -2\pi i \int_{-\infty}^\infty t \varphi(t) e^{-2\pi i \omega t} dt.$$

Applicando (8.12) al secondo membro otteniamo

$$(\widehat{\varphi})'(\omega) = i\widehat{D\varphi}(\omega) = -2\pi\omega\widehat{\varphi}(\omega).$$

Ma dal Teorema 8.2.4 (vii) si ha

$$\widehat{D\varphi}(\omega) = 2\pi i\omega\widehat{\varphi}(\omega),$$

e quindi

$$(\widehat{\varphi})'(\omega) = -2\pi\omega\widehat{\varphi}(\omega).$$

Pertanto $\widehat{\varphi}$ verifica l'equazione differenziale

$$f'(u) + 2\pi uf(u) = 0.$$

Ma in base a (8.12) φ verifica la stessa equazione differenziale. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine: per queste equazioni si sa che la soluzione, se esiste, è unica a meno di una moltiplicazione per costanti. Quindi esiste una costante C tale che $\widehat{\varphi}(u) = C\varphi(u)$ per ogni $u \in \mathbb{R}$. Se non si vuole ricorrere alla teoria delle equazioni differenziali del primo ordine, si può raggiungere la stessa conclusione osservando che, per ogni y ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\widehat{\varphi}}{\varphi}\right)'(u) &= \frac{(\widehat{\varphi})'(u)\varphi(u) - \widehat{\varphi}(u)\varphi'(u)}{\varphi^2(u)} \\ &= \frac{-2\pi i u \widehat{\varphi}(u)\varphi(u) + 2\pi i u \widehat{\varphi}(u)\varphi(u)}{\varphi^2(u)} = 0. \end{aligned}$$

Quindi anche così si trova che $\frac{\widehat{\varphi}}{\varphi}$ è costante. Per trovare la costante basta calcolare il valore $\frac{\widehat{\varphi}(0)}{\varphi(0)}$. Ma $\varphi(0) = 1$ e per il Lemma 8.3.1

$$\widehat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1.$$

Quindi la costante vale 1, cioè $\widehat{\varphi} = \varphi$. □

Nota 8.3.3. La Proposizione 8.3.2 fornisce un esempio di funzione $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ non a supporto compatto ma tale che $\widehat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R})$; si veda a questo proposito il Corollario 8.2.7 (ii). □

8.4 Il teorema di inversione di Fourier

In questa Sezione ricaviamo la formula di inversione di Fourier in maniera rigorosa.

Questa deduzione si basa su quattro proprietà. Le prime tre le abbiamo già provate.

- (i) Se $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$, allora $\widehat{\varphi}(\omega) = \varphi(\omega)$ per ogni ω , e $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$ (Proposizione 8.3.2 e Lemma 8.3.1).
- (ii) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\rho > 0$ e $f_\rho(x) = f(x/\rho)$, allora $\widehat{f}_\rho(\omega) = \rho \widehat{f}(\rho\omega)$ per ogni ω (proprietà di dilatazione: Teorema 8.2.4 (iv)).
- (iii) Se $(\lambda_t f)(s) = f(s - t)$, allora $\widehat{\lambda_t f}(\omega) = e^{-2\pi i \omega t} \widehat{f}(\omega)$ per ogni $f \in L^1$ (proprietà di traslazione: Teorema 8.2.4 (v)).
- (iv) Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ e $fg \in L^1(\mathbb{R})$ (in particolare, se $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$) allora $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)g(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\widehat{g}(s)ds$.

Nota 8.4.1. La quarta proprietà verrà dimostrata in seguito per altra via nel caso particolare di funzioni C^∞ a decrescenza rapida (Formula di Plancherel 9.7.9) e questo caso particolare sarebbe sufficiente anche qui, ma è facile dimostrarla direttamente nel caso più generale, e lo facciamo subito (di fatto anticipando la dimostrazione del Teorema 9.7.9). La proprietà è vera semplicemente perché l'ipotesi di appartenenza a L^1 di f e g assicura che \widehat{f} e \widehat{g} siano in L^∞ e quindi $\widehat{f}g$ e $f\widehat{g}$ siano in L^1 , ed inoltre $f(s)g(t)$ sia in L^1 rispetto alla misura prodotto $ds dt$. Quindi possiamo applicare il Teorema di Fubini 1.20.4) e scambiare l'ordine degli integrali:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)g(s) ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i s t} dt g(s) ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-2\pi i s t} ds f(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\widehat{g}(s) ds
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

□

Ora possiamo dimostrare la formula di inversione.

Teorema 8.4.2. (Formula di inversione di Fourier.) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, poniamo

$$g(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega.$$

Allora $g(t)$ esiste per quasi ogni t , e $f = g$ quasi ovunque.

Se $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, allora g , e quindi f , appartengono a $C_0(\mathbb{R})$ (ossia la classe di equivalenza di Lebesgue contiene un rappresentante continuo che tende a zero all'infinito), e (se si sceglie per f tale rappresentante continuo) per ogni t si ha

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega.$$

Dimostrazione. Per le proprietà (ii) e (iv), se $f \in L^1$ e $\varphi(t) = e^{-\pi t^2}$ è la Gaussiana della proprietà (i), per ogni $\rho > 0$ si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \rho \widehat{\varphi}(\rho t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{s}{\rho}\right) \widehat{f}(s) ds.$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, riscriviamo questa identità per la funzione traslata $\lambda_{-x} f(t) = f(t+x)$, e dalla proprietà (iii) otteniamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) \rho \widehat{\varphi}(\rho t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{s}{\rho}\right) \widehat{f}(s) e^{2\pi i s x} ds. \quad (8.14)$$

D'altra parte, per le proprietà (i) e (iii) e per il Lemma 8.3.1 e la Proposizione 8.3.2, per $\rho \rightarrow +\infty$ la famiglia $\psi_\rho(t) := \rho \widehat{\varphi}(\rho t) = \rho e^{-\pi \rho^2 t^2}$ soddisfa la Definizione 6.1.15 di identità approssimata in $L^1(\mathbb{R})$. Inoltre, grazie alla parità di φ , il primo membro dell'identità (8.14) è esattamente $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \rho \widehat{\varphi}(\rho t) dt = f * \psi_\rho(x)$. Per il Teorema 6.1.16 di convergenza delle identità approssimate, sappiamo che $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} f * \psi_\rho = f$ nella norma di L^1 , e quindi esiste una sottosuccessione $f * \psi_{\rho_n}$ converge a f anche quasi ovunque (Corollario 1.16.29).

Dall'altro lato, $\varphi\left(\frac{s}{\rho}\right) = e^{-\pi s^2/\rho^2} \leq 1$, e $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{-\pi s^2/\rho^2} = 1$. Se avessimo fatto l'ipotesi che anche $\widehat{f} \in L^1$, il Teorema di Convergenza Dominata 1.9.54 implicherebbe che, per ogni t , il secondo membro di (8.14) converga a $g(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega$. Pertanto $f = g$ quasi ovunque. Invece, senza l'ipotesi $\widehat{f} \in L^1$, possiamo spezzare l'integrando come somma di quattro funzioni reali non negative (spezzando prima l'integrando come combinazione

lineare a coefficienti 1 e i di parte reale ed immaginaria, e poi spezzando queste ultime come differenza delle loro parti positive e negative). Poiché $e^{-\pi s^2/\rho^2}$ converge a 1 in maniera monotona, si applica il Teorema di Convergenza Monotona 1.9.53 ed anche in questa generalità segue come prima che $f = g$ quasi ovunque.

Il fatto che, se $\widehat{f} \in L^1$, g sia continua e tenda a zero all'infinito è stato provato nella Proposizione 8.2.3. \square

8.5 Convoluzione e teorema di Plancherel

Rammentiamo la definizione di convoluzione (Definizione 6.1.11): se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$,

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

Adesso, parallelamente alla Proposizione 6.1.6, calcoliamo la trasformata di Fourier di $f * g$. Si ha

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s) ds \right) e^{-2\pi i \omega t} dt. \end{aligned}$$

Poiché $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, per quasi ogni $s \in \mathbb{R}$ si ha che $t \rightarrow f(t-s)g(s)$ è integrabile con integrale finito. Pertanto la funzione $F(s, t) := f(t-s)g(s)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^2)$, perché

$$\iint F(s, t) ds dt = \int \left(\int f(t-s)g(s) dt \right) ds = \int f(t) dt \int g(s) ds < \infty.$$

Ma allora possiamo applicare il Teorema di Fubini (parte (ii) del Teorema 1.20.4) e scambiare l'ordine di integrazione:

$$\widehat{f * g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) e^{-2\pi i \omega t} dt \right) g(s) ds.$$

Poniamo $u = t - s$. Allora $du = dt$ e

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i \omega (u+s)} du \right) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-2\pi i \omega s} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i \omega u} du \\ &= \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega).\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato il

Teorema 8.5.1. *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Allora*

$$\widehat{f * g}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega).$$

Corollario 8.5.2. (Teorema di Plancherel.) *Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ allora $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\|\widehat{f}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{f}(\omega)} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \widehat{f}(-\omega) d\omega\end{aligned}$$

per il Teorema 8.2.4 (ix). Poniamo $g(t) = \overline{f(-t)}$. Allora $\widehat{f}(-\omega) = \widehat{g}(\omega)$

(Teorema 8.2.4 (ii)) e quindi

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \widehat{f}(-\omega) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega) d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f * g}(\omega) d\omega && \text{(Teorema 8.5.1)} \\
 &= f * g(0) && \text{(Teorema 8.4.2)} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)g(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(-t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \\
 &= \|f\|_2^2.
 \end{aligned}$$

□

Nota 8.5.3. (Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$.) Il Teorema di Plancherel (Corollario 8.5.2) ci permette di definire la trasformata di Fourier direttamente nello spazio $L^2(\mathbb{R})$ anziché in $L^1(\mathbb{R})$. Infatti, osserviamo per prima cosa che $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ è un sottospazio denso di $L^2(\mathbb{R})$. Questo fatto è vero perché le funzioni a continue a supporto compatto appartengono sia a L^1 sia a L^2 : se il supporto di $f \in L^1$ è il compatto K (con misura $m(K)$ ovviamente finita), allora per ogni $p \geq 1$ si ha $\|f\|_2^p \leq m(K) \|f\|_\infty^p$, e quindi $\|f\|_p$ è finita. D'altra parte, le funzioni continue a supporto compatto sono dense in $L^2(\mathbb{R})$, come abbiamo dimostrato nella Proposizione 1.18.6 (ed ancor prima, nel Lemma 1.18.3), e ne segue che $L^1 \cap L^2$ è denso in L^2 .

Ma, per il lettore troppo pigro per rivedere questi risultati di densità, ridimostriamo qui il fatto che $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ è un sottospazio denso di $L^2(\mathbb{R})$ in maniera diretta. Se indichiamo con K_n una famiglia di compatti che invadono \mathbb{R} e con $\chi_n = \chi_{K_n}$ le loro funzioni caratteristiche (definite nella Sezione 1.1), otteniamo che le funzioni $f\chi_n$ appartengono tutte a L^1 perché hanno supporto compatto, e convergono a f nella norma L^2 per il Teorema di Convergenza Dominata di Lebesgue (Teorema 1.9.54): $\lim_n \int |f - f\chi_n|^2 = 0$ perché l'integrando tende a zero puntualmente ed è dominato dalla funzione L^1 $|f|^2$. Questo dimostra che $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$.

Ora, presa una qualunque successione $f_n \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ che converge a $f \in L^2(\mathbb{R})$ nella norma di L^2 , possiamo definire la trasformata di Fourier di f come limite nella norma di L^2 : $\widehat{f} = \lim_n \widehat{f}_n$. Osserviamo infatti che il limite di \widehat{f}_n nella norma L^2 esiste perché la successione f_n è di Cauchy in tale norma, in quanto convergente, e quindi la stessa proprietà vale per la successione \widehat{f}_n grazie all'isometria del teorema di Plancherel (Corollario 8.5.2); inoltre il limite non dipende dalla scelta degli approssimanti, dal momento che, se f_n e g_n sono due successioni di funzioni in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ che convergono alla stessa funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ (nel senso di L^2), allora la successione $f_n - g_n$ converge alla funzione 0, e quindi, sempre per l'isometria, $\widehat{f}_n - \widehat{g}_n = \widehat{f_n - g_n}$ converge a zero in L^2 .

In particolare, dal Teorema di Plancherel ora segue che la trasformata di Fourier è una isometria surgettiva (ed ovviamente anche iniettiva!) di $L^2(\mathbb{R})$ in sé. \square

Estendiamo ora il teorema di Plancherel, nella forma data nella Nota 8.4.1, direttamente alla trasformata di Fourier su $L^2(\mathbb{R})$, introdotta nella precedente Nota 8.5.3, e non solo su $L^1 \cap L^2$; in effetti il suo procedimento di estensione ricalca quello svolto per la trasformata di Fourier in quella Nota, ed illustra anche la via alternativa alla dimostrazione del Teorema 8.5.1, basata su approssimazione di funzioni in L^1 con funzioni nei sottospazi densi $L^1 \cap L^p$ e $L^1 \cap L^q$, che è accennata in quella dimostrazione.

Corollario 8.5.4. (Forma polarizzata del teorema di Plancherel.)

Per ogni $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ si ha $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)g(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\widehat{g}(s)ds$.

Dimostrazione. L'enunciato è vero per f e g in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ per la proprietà (iv). Abbiamo già osservato nella Nota 8.5.3 che $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$: scegliamo quindi due successioni $\{f_n\}, \{g_n\}$ in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ che convergono rispettivamente a f e a g nella norma L^2 .

Poiché $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n(s)g_n(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(s)\widehat{g}_n(s)ds$ per ogni n , basta dimostrare che, per $n \rightarrow \infty$, l'integrale a primo membro converge a $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)g(s)ds$ e quello a secondo membro a $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\widehat{g}(s)ds$. Queste due dimostrazioni sono identiche fra loro: svolgiamo la prima. Si tratta di provare che $\|\widehat{f}_n g_n - \widehat{f} g\|_1 \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Ed infatti, poiché

$$\widehat{f}_n g_n - \widehat{f} g = \widehat{f}_n (g_n - g) + (\widehat{f}_n - \widehat{f}) g,$$

segue dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz 4.5.1 (od anche dalla disuguaglianza di Hölder, Teorema 1.16.6: si veda la Nota 4.5.2) che

$$\|\widehat{f}_n g_n - \widehat{f} g\|_1 \leq \|\widehat{f}_n\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_2 \|g\|_2.$$

Applicando al secondo membro il teorema di Plancherel (Corollario 8.5.2) otteniamo

$$\|\widehat{f}_n\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_2 \|g\|_2 = \|f_n\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \|g\|_2,$$

ed il secondo membro ora tende a zero con n perché $\|f_n\|_2 \rightarrow \|f\|_2$, $g_n \rightarrow g$ e $f_n \rightarrow f$ nella norma L^2 . \square

Nota 8.5.5. Se nell’enunciato del Corollario 8.5.4 si sceglie $g = \widehat{\widehat{f}}$, dalla proprietà di coniugazione della trasformata di Fourier, Teorema 8.2.4 (ix), si vede che l’enunciato si riduce al teorema di Plancherel (Corollario 8.5.2), ma ora in generale per funzioni L^2 , non solo per $L^1 \cap L^2$, già anticipato per cenni nella Nota 8.5.3. \square

La dimostrazione del prossimo corollario utilizza la tecnica di approssimazione di L^2 con $L^1 \cap L^2$ illustrata nella Nota 8.5.3, seguita, come in quella Nota, da un passaggio al limite nella norma L^2 giustificato dal Teorema di Convergenza Dominata di Lebesgue (Teorema 1.9.54). Dato questo suggerimento, lasciamo al lettore i dettagli della dimostrazione come esercizio.

Corollario 8.5.6. *La formula di inversione di Fourier vale anche per $f \in L^2(\mathbb{R})$ se si intende \widehat{f} definita nel senso di L^2 come nella Nota 8.5.3.*

8.6 Non esistono funzioni a supporto limitato nel tempo e nella frequenza

Includiamo questa breve sezione per chiarire al lettore che non è possibile che una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ sia a supporto compatto ed al tempo stesso lo sia la sua trasformata di Fourier. Per approfondimenti e relativi riferimenti bibliografici, si veda [11, Cap.2, Sez.9].

Teorema 8.6.1. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, non identicamente nulla. Se f è a supporto compatto, allora \widehat{f} non è identicamente nulla in nessun intervallo aperto.*

Dimostrazione. Sia $a > 0$ tale che f abbia supporto nell'intervallo $[-a, a]$. Supponiamo, per assurdo, che \widehat{f} si annulli su (c, d) , e sia $c < u < d$. Poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$ è a supporto compatto, anche $t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $n > 0$, e quindi possiamo applicare n volte al punto u la proprietà di derivazione di \widehat{f} del Teorema 8.2.4 (viii), ossia derivare n volte sotto il segno di integrale l'identità

$$\widehat{f}(s) = \int_{-a}^a f(t) e^{-2\pi i t s} dt.$$

In tal modo otteniamo, per ogni $u \in [c, d]$,

$$0 = D^n \widehat{f}(u) = (-2\pi i)^n \int_{-a}^a f(t) e^{-2\pi i t u} t^n dt.$$

Ovvero, $\int_{-a}^a f(t) e^{-2\pi i t u} t^n dt = 0$ per ogni $n \geq 0$ e per ogni $u \in [c, d]$. Fissiamo una volta per tutte un tale valore di u (senza perdita di generalità, se questo semplifica la lettura, traslando opportunamente f e grazie alla proprietà di traslazione della trasformata di Fourier (proprietà (v) del Teorema 8.2.4), possiamo fissare $u = 0$). Allora, utilizzando lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale, uniformemente convergente sui compatti (Esempi 1.6.2 e 1.6.5), per ogni $s \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{f}(s) &= \int_{-a}^a f(t) e^{-2\pi i t(s-u)} e^{-2\pi i t u} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-2\pi i(s-u))^n \int_{-a}^a f(t) e^{-2\pi i t u} t^n dt = 0, \end{aligned}$$

perché, per il Teorema 1.3.17, la serie uniformemente convergente commuta con l'integrale sul compatto $[-a, a]$. Pertanto $\widehat{f} \equiv 0$. Per il Teorema di inversione di Fourier 8.4.2, da questo segue $f \equiv 0$, una contraddizione. Quindi si deve escludere che \widehat{f} si annulli su un intervallo.

Lo stesso argomento prova che f non può annullarsi su un intervallo se \widehat{f} ha supporto in un compatto $[-b, b]$: basta derivare n volte sotto il segno di integrale l'identità

$$f(t) = \int_{-b}^b \widehat{f}(s) e^{-2\pi i t s} ds,$$

che vale grazie al Teorema di inversione di Fourier 8.4.2. □

8.7 **Appendice: la disuguaglianza di Heisenberg

La disuguaglianza di Heisenberg emerse nel fondare la meccanica quantistica, per le ragioni che spiegheremo dopo averla dimostrata. La dimostrazione che presentiamo, puramente matematica, è quella di Weyl [35]; si veda anche [11].

Teorema 8.7.1. (Disuguaglianza di Heisenberg). *Per ogni $f \in L^1$ derivabile e che tende a zero all'infinito con velocità $o(|x|^{-1/2})$ (quindi in particolare se f appartiene alla classe di Schwartz \mathcal{S} che verrà introdotta nella Definizione 9.3.1), vale la disuguaglianza*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{1}{16\pi^2} \|f\|_2^4.$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se f è un multiplo di $e^{-\alpha x^2}$ per qualche $\alpha > 0$.

Dimostrazione. Rammentiamo (Teorema 8.2.4 (vii)) che, se $f \in L^1$ è derivabile e tende a zero all'infinito, allora \widehat{f}' è definita e

$$\widehat{f}'(\omega) = 2\pi i \omega \widehat{f}(\omega), \quad (8.15)$$

ossia $f' = (2\pi i \omega \widehat{f})^\vee$. In base a (8.15) ed al Teorema di Plancherel,

$$4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f'(\omega)|^2 d\omega \quad (8.16)$$

(gli integrali possono essere divergenti: ovviamente questo non accade se $f \in \mathcal{S}$).

Il secondo membro è il prodotto $\|xf\|_2^2 \|f'\|_2^2$. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (Proposizione 4.5.1) in $L^2(\mathbb{R})$, questo numero è non inferiore a

$$|(xf, f')|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \overline{f'(x)} dx \right|^2,$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \\
 &\geq (\operatorname{Re} \langle x f, f' \rangle)^2 = \left(\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} x \bar{f}(x) f'(x) dx \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x (\bar{f}(x) f'(x) + f(x) \bar{f}'(x)) dx \right)^2. \quad (8.17)
 \end{aligned}$$

Poiché $|f(x)|^2 = \bar{f}(x) f(x)$ vediamo che $D(|f(x)|^2) = \bar{f}(x) f'(x) + f(x) \bar{f}'(x)$, e quindi

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{\infty} x (\bar{f}(x) f'(x) + f(x) \bar{f}'(x)) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x (|f(x)|^2)' dx = [x|f(x)|^2]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = -\|f\|_2^2,
 \end{aligned}$$

perché il termine $[x|f(x)|^2]_{-\infty}^{\infty}$ si annulla, dal momento che $f = o(|x|^{-1/2})$. Da questa uguaglianza e dalle precedenti disuguaglianze (8.16) e (8.17) segue la disuguaglianza di Heisenberg dell'enunciato. Abbiamo ottenuto una disuguaglianza invece di una identità perché abbiamo fatto uso della disuguaglianza di Cauchy–Schwarz per passare da (8.16) a (8.17). D'altra parte, sappiamo che questa disuguaglianza diventa una uguaglianza se e solo se gli integrandi dei due integrali al secondo membro di (8.16), ossia le due funzioni le cui norme L^2 appaiono nel prodotto $\|xf\|_2^2 \|f'\|_2^2$, sono multipli uno dell'altro: ossia se esiste $c \in \mathbb{C}$ tale che $f' = cxf$. Ma questa equazione differenziale lineare, essendo del secondo ordine, ha uno spazio unidimensionale di soluzioni. Si verifica direttamente che una soluzione è $f(x) = e^{-|c|x^2/2}$. Questa soluzione appartiene, come richiesto, a $L^1(\mathbb{R})$ pur di restringere l'attenzione a $c \neq 0$. Quindi tutte le soluzioni in $L^1(\mathbb{R})$ sono i multipli complessi di f con $c \neq 0$. Questo equivale all'enunciato. \square

Nota 8.7.2. La disuguaglianza che abbiamo appena provato fu introdotta da W. Heisenberg nella sua modellizzazione della meccanica quantistica, sulla base di motivazioni fisiche ed in una forma diversa.

Nella modellizzazione di Heisenberg della meccanica quantistica, il comportamento delle particelle è descritto da distribuzioni di probabilità, ossia funzioni $\phi = |\psi|^2$ non negative con norma 1 in L^1 : la funzione ψ di questa

espressione, che si chiama uno *stato* della particella, è di norma 1 in L^2 . Qui scriviamo ψ invece che f come invece abbiamo fatto nel Teorema più sopra perché questa è la notazione consueta della meccanica quantistica. Le quantità sperimentalmente osservabili, o più brevemente le osservabili, sono operatori autoaggiunti T su un opportuno sottospazio $D(T)$ dello spazio L^2 degli stati (detto *dominio* dell'operatore), ed il loro valore medio $\mathcal{E}(T)$ è definito come

$$\mathcal{E}(T) := \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x) (T\psi)(x) dx = (T\psi, \psi)_{L^2}.$$

In realtà, come già detto, i vettori $\psi \in L^2$ che corrispondono alla realtà fisica sono quelli di norma 1: pertanto consideriamo equivalenti due vettori in $D(T)$ se sono multipli non nulli l'uno dell'altro, e scegliamo sempre nella classe di equivalenza un rappresentante di norma 1. Il valore medio di T sullo stato ψ non è propriamente il valore stazionario osservato, perché la misura non è sempre possibile, in quanto l'operazione di misura perturba lo stato. Infatti, nel modello matematico che stiamo sviluppando, quando cerchiamo di effettuare la misura, ovvero applichiamo l'operatore allo stato ψ , questo stato viene modificato (viene mandato in un nuovo stato $T\psi$), tranne che nel caso in cui ψ sia un autovettore di T , del quale quindi viene modificata la norma ma non la classe di equivalenza. In tal caso si ha $T\psi = \lambda\psi$, e $\mathcal{E}(T) = \lambda(\psi, \psi) = \lambda$: quindi se ψ corrisponde ad un autovettore dell'osservabile, la misura dell'osservabile coincide con il corrispondente autovalore.

Ad esempio, nel caso di una particella che si muove su una retta (ossia in una sola dimensione), l'osservabile che misura la posizione è l'operatore P di moltiplicazione per x , ossia

$$P\psi = x\psi,$$

definito sulle funzioni ψ in $L^2(\mathbb{R})$ tali che $x\psi$ sia ancora in L^2 . Il valore medio della posizione della particella è quindi $\int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$. Si noti che questo valore medio è esattamente l'attesa rispetto alla corrispondente distribuzione di probabilità, ossia

$$\mathcal{E}(P) := \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx.$$

Osserviamo che il valore atteso è determinato da una distribuzione di probabilità nello spazio, non nel tempo: si tratta di valori attesi in stati stazionari. Chiaramente, l'operatore che misura l'impulso (ossia, a meno di multipli, la

velocità) della particella dovrebbe essere dato dall'operatore di derivata rispetto al tempo, ma in queste espressioni la variabile che compare è lo spazio e non il tempo: allora come operatore di impulso si sceglie

$$Q\psi = \frac{1}{2\pi i} D\psi,$$

dove D è l'operatore di derivata (in più variabili spaziali, si usa il gradiente), definito sul dominio $D(Q)$ delle funzioni in L^2 derivabili con derivata in L^2 (che è esso stesso uno spazio di Hilbert: lo spazio di Sobolev $W^{1,2}(\mathbb{R})$ con norma $\|\psi\|_2 + \|\psi'\|_2$). Il valor medio dell'impulso è quindi

$$\mathcal{E}(Q) := \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x) \psi'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\psi(\omega)|^2 d\omega$$

(l'ultima uguaglianza è nient'altro che l'identità (8.15)).

È evidente che gli operatori di posizione ed impulso non commutano fra loro, e quindi non hanno una base di autovettori comuni: nel modello che stiamo presentando, questo significa che posizione e impulso non sono misurabili simultaneamente, ossia che, quando si cerca di misurare una delle due osservabili con precisione sempre più fine, l'altra è determinabile con precisione sempre peggiore (*principio di incertezza*). La relazione di commutazione fra le due osservabili è facilmente verificata:

$$[P, Q] := PQ - QP = \frac{1}{2\pi i} (xD - Dx) = \frac{i}{2\pi} \mathbb{I}$$

(qui \mathbb{I} denota l'operatore identità).

La disuguaglianza di Heisenberg che abbiamo provato nel Teorema 8.7.1 dà una valutazione quantitativa del principio di incertezza, come si capisce se la riscriviamo nel modo seguente:

$$\mathcal{E}[P - \mathcal{E}(P)]^2 \mathcal{E}[Q - \mathcal{E}(Q)]^2 \geq \frac{1}{16\pi^2},$$

ossia

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathcal{E}(P))^2 |\psi(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \mathcal{E}(Q))^2 |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{1}{16\pi^2} \quad (8.18)$$

dove ψ è una funzione di norma 1 in $L^2(\mathbb{R})$. Per comprendere perché questa disuguaglianza è equivalente alla disuguaglianza del Teorema 8.7.1, poniamo

$g(x) = \psi(x + \mathcal{E}(P))$: allora g ha norma 1 in L^2 e traslando la variabile il primo integrale in (8.18) diventa $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx$. Allo stesso tempo, in base alla proprietà di traslazione della trasformata di Fourier (Teorema 8.2.4 (v)), abbiamo $\widehat{g}(\omega) = e^{-2\pi i \omega \mathcal{E}(P)} \widehat{\psi}$, e pertanto $|\widehat{g}| \equiv |\widehat{\psi}|$. Pertanto la disuguaglianza (8.18) diventa

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \mathcal{E}(Q))^2 |\widehat{g}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Ora definiamo f tramite l'espressione $\widehat{f}(\omega) := \widehat{g}(\omega + \mathcal{E}(Q))$. Lo stesso ragionamento mostra che il primo membro di (8.18) diventa

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega,$$

e quindi, visto che $\|f\|_2 = 1$, (8.18) è nient'altro che la disuguaglianza di Heisenberg che abbiamo provato nel teorema 8.7.1. \square

8.8 Esercizi sulla trasformata di Fourier

Esercizio 8.8.1. Sia f la funzione

$$f(t) = \chi_{[0,1]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } t \notin [0, 1] \end{cases}$$

Si calcoli $\widehat{f}(\omega)$ per ogni ω . Si verifichi che $\widehat{f}(\omega) = O(\frac{1}{\omega})$ per ω che tende ad infinito. Si confronti questo risultato con l'enunciato del Corollario 8.2.8. Si paragoni questa situazione a quella dei coefficienti di Fourier di funzioni periodiche g derivabili con continuità un certo numero di volte. In vista di tale analogia, sotto quali ipotesi su g si potrebbe cercare di dimostrare nel Corollario 8.2.8 che $\widehat{f}(\omega) = O(\omega^{-m-1})$? \square

Esercizio 8.8.2. Si guardi il risultato dell'Esercizio 10.1.5 nel seguito, ed in base ad esso si risolva il precedente Esercizio 8.8.1 utilizzando la proprietà di traslazione della trasformata di Fourier (proprietà (v) del Teorema 8.2.4). \square

Esercizio 8.8.3. Sia f la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1+t & \text{se } t \in [-1, 0] \\ 1-t & \text{se } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } t \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Si calcoli $\widehat{f}(\omega)$ per ogni ω . Si verifichi che $\widehat{f}(\omega) = O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$ per ω che tende ad infinito. Si confronti questo risultato con l'enunciato del Corollario 8.2.8 (iii). Si paragoni questa situazione a quella dei coefficienti di Fourier di funzioni periodiche derivabili con continuità un certo numero di volte (Corollario 5.18.9).

□

Esercizio 8.8.4. Sia f la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \cos t & \text{se } t \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{se } t \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Si calcoli $\widehat{f}(\omega)$ per ogni ω . È vero che $\widehat{f}(\omega) = O\left(\frac{1}{\omega^3}\right)$ per ω che tende ad infinito? Si confronti il risultato con l'enunciato del Corollario 8.2.8. Si paragoni questa situazione a quella dei coefficienti di Fourier di funzioni periodiche derivabili un certo numero di volte (Corollario 5.18.9). □

Esercizio 8.8.5. Sia $f(t) = e^t \chi_{[-1,1]}(t)$. Quanto vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f}(\omega) \right|^2 d\omega?$$

1. □ $2\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$
2. □ $\frac{e^2+1}{2}$
3. □ $\frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$
4. □ $\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$
5. □ nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 8.8.6. Si mostri che, se $f(t) = e^{-|t|}$, allora $\widehat{f}(\omega) = \frac{2}{1+4\pi^2\omega^2}$. Si verifichi che la trasformata così ottenuta verifichi le proprietà della parte (iv) del Corollario 8.2.6. \square

Esercizio 8.8.7. Si mostri che, se $f(t) = 1/(1+t^2)$, allora $\widehat{f}(\omega) = \pi e^{-2\pi\omega}$. Si verifichi che la trasformata così ottenuta verifichi le proprietà della parte (iv) del Corollario 8.2.6, e che sia compatibile con il precedente Esercizio 8.8.6. \square

Esercizio 8.8.8. Si mostri che, se $f(t) = t/(1+t^2)$, allora $\widehat{f}(\omega) = -2\pi^2 i\omega e^{-2\pi\omega}$. Si verifichi che la trasformata così ottenuta verifichi le proprietà della parte (iv) del Corollario 8.2.6. \square

Esercizio 8.8.9. Come visto nel precedente Esercizio 8.8.6, se $f(t) = e^{-|t|}$ allora $\widehat{f}(\omega) = \frac{2}{1+4\pi^2\omega^2}$. Sia $g(t) = e^{-\frac{|t|}{2}}$. Quale tra le seguenti funzioni è $\widehat{g}(\omega)$?

1. $\square \quad \frac{4}{1+16\pi^2\omega^2}$
2. $\square \quad \sqrt{\frac{2}{1+4\pi^2\omega^2}}$
3. $\square \quad \frac{1}{1+2\pi^2\omega^2}$
4. $\square \quad \frac{1}{1+4\pi^2\omega^2}$
5. $\square \quad$ nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. \square

Esercizio 8.8.10. Sia f una funzione la cui trasformata di Fourier è

$$\widehat{f}(\omega) = \chi_{[0,1]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } \omega \notin [0, 1] \end{cases}$$

(Nota: non esiste una tale funzione f in $L^1(\mathbb{R})$, a causa della Proposizione 8.2.3, però esiste una tale f in $L^2(\mathbb{R})$, a causa della surgettività della trasformata di Fourier da L^2 a L^2 (Nota 8.5.3)).

Per quali valori di α si ha che $(f * e^{2\pi i\alpha t} f)^\wedge = 0$

1. $\square \quad \alpha = 0$

2. $|\alpha| \leq 1$
3. $|\alpha| > 2$
4. $|\alpha| > 1$
5. $|\alpha| \leq 2$
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

Esercizio 8.8.11. Sia $g(t) = f(3t + 2)$. Esprimere \widehat{g} in termini di \widehat{f} .

Esercizio 8.8.12. Assumendo che la trasformata di Fourier di $f(t) = \chi_{[-1/2, 1/2]}(t)$ sia $\widehat{f}(\omega) = \frac{\sin \pi \omega}{\pi \omega}$ e quella di $g(t) = e^{-2|t|}$ sia $\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{1 + \pi^2 \omega^2}$ la trasformata di Fourier di $\widehat{f * g}(\omega)$ è quale delle seguenti funzioni?

1. $\frac{1}{\pi \omega} \frac{\sin \pi \omega}{(1 + \pi^2 \omega^2)}$
2. $\frac{\sin \pi \omega}{\pi \omega} + \frac{1}{1 + \pi^2 \omega^2}$
3. $\frac{\sin \pi \omega}{\pi \omega} (1 + \pi^2 \omega^2)$
4. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \pi \omega}{\pi \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{1 + \pi^2 \omega^2}$
5. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \pi(\omega - 1/2)}{\pi(\omega - 1/2)(1 + \pi^2 \omega^2)}$

Motivare la risposta.

Esercizio 8.8.13. Assumendo che la trasformata di Fourier di $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + t^2}$ sia $\widehat{f}(\omega) = e^{-2\pi|\omega|}$, quale delle seguenti funzioni è la trasformata di Fourier di $g(t) = f^{(n)}(t)$?

1. $(2\pi i \omega)^n e^{-2\pi|\omega|}$
2. $(-2\pi)^n e^{-2\pi|\omega|}$
3. $\frac{e^{-2\pi|\omega|}}{(2\pi i \omega)^n}$
4. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 8.8.14. Sia f una funzione non necessariamente reale. Quale delle seguenti proprietà è vera?

1. $\widehat{\overline{f}}(\omega) = \widehat{f}(-\omega)$
2. $\widehat{\overline{f}}(\omega) = \widehat{f}(\omega)$
3. $\widehat{\overline{f}}(\omega) = -\widehat{f}(\omega)$
4. $\widehat{\overline{f}}(\omega) = \widehat{f}(-\omega)$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 8.8.15. Sia $f(t) = \chi_{[-1,1]}(t)$. Quanto vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega?$$

1. $\frac{1}{2}$
2. 0
3. 1
4. 2
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 8.8.16. Se la trasformata di Fourier di $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ è $\widehat{f}(\omega) = e^{-2\pi|\omega|}$ allora la funzione $\widehat{g}(\omega) = e^{-2\pi|\omega-2|}$ è la trasformata di Fourier della funzione

1. $g(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(t-2)^2}$
2. $g(t) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+t^2/4}$

3. $g(t) = \frac{e^{4\pi it}}{\pi(1+t^2)}$
4. $g(t) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(1+t^2)^2}$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.8.17. Sia $g(t) = (\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]})(t)$. Calcolare $g(t)$, mostrando che il suo grafico è non nullo solo nell'intervallo $[0, 2]$, ed è a forma di triangolo isoscele, nullo in 0 e 2 e con terzo vertice nel punto $(1, 1)$. Mostrare anche che $\widehat{\chi}_{[0,1]}(\omega) = \frac{1-e^{-2\pi i\omega}}{2\pi i\omega}$, ed usando questo fatto calcolare la trasformata di Fourier di $g(t) = (\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]})(t)$ □

Esercizio 8.8.18. Se $f(x) = g(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, allora

1. $\widehat{f}(\omega) = -\widehat{g}(\omega)$
2. $\widehat{f}(\omega) = (\widehat{g}(\omega))^{-1}$
3. $\widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(\omega - 1)$
4. $\widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(-\omega)$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.8.19. Sia $f(t) = e^t \chi_{[-1,1]}(t)$. Quanto vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega?$$

1. $2(e^2 - \frac{1}{e^2})$
2. $\frac{e^2+1}{2}$
3. $\frac{1}{2}(e^2 - \frac{1}{e^2})$
4. $\frac{1}{2}(e - \frac{1}{e})$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.8.20. Sia $f(x) = e^{-|x|}$.

- (i) La funzione f appartiene a $L^1(\mathbb{R})$? Se sì calcolarne la norma, se no dimostrarlo.
- (ii) Senza calcolare \widehat{f} , stimare l'ordine di infinitesimo di $\widehat{f}(\omega)$ per $\omega \rightarrow \pm\infty$; spiegare i dettagli.
- (ii) Calcolare \widehat{f} e verificare la risposta precedente.

□

Esercizio 8.8.21. Sia $f(t) = \chi_{[0,1]}(t)$. L'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

ha uno dei seguenti valori. Quale?

- 1. $\frac{1}{2}$
- 2. 1
- 3. 2
- 4. 0
- 5. nessuno dei precedenti.

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.8.22. (i) Sia χ la funzione caratteristica dell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Calcolare esplicitamente $\chi * \chi$.

(ii) Sia, per ogni $c > 0$,

$$f_c(x) = \frac{\sin^2(c\pi x)}{c^2\pi^2 x^2}.$$

Sulla base di quanto fatto nel punto precedente ed usando la forma esplicita di $\widehat{\chi}$, per quali valori di c risulta $\widehat{f}_c(s) = 0$ se $|s| > \frac{1}{2}$?

Anticipiamo la nozione di *Classe di Schwartz* \mathcal{S} che verrà presentata nella Definizione 9.3.1: una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ appartiene a \mathcal{S} se è in $C^\infty(\mathbb{R})$ e se f e tutte le sue derivate tendono a zero all'infinito anche quando moltiplicate per un qualsiasi polinomio. Con questa definizione, per quali valori di c f_c appartiene alla classe di Schwartz?

iii) Enunciare il teorema di Plancherel (isometria della trasformata di Fourier) e, sulla base di quanto fatto nei punti precedenti, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx.$$

Svolgimento.

i) Sia $h = \chi * \chi$, ovvero sia

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x-t)\chi(t) dt.$$

χ è pari, quindi h è pari. Infatti

$$\begin{aligned} h(-x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(-x-t)\chi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x+t)\chi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x-t)\chi(-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x-t)\chi(t) dt = h(x). \end{aligned}$$

Studiamo allora solo ci che succede per $x \geq 0$. Poiché $\chi(t)$ è nulla se $|t| > \frac{1}{2}$ e vale 1 altrimenti, abbiamo

$$h(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \chi(x-t) dt.$$

$\chi(x-t)$ (vista come funzione di t) ha supporto $[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]$, ed ivi vale 1. Vediamo quindi che, per calcolare $h(x)$, dobbiamo distinguere due casi: se $x - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$, ovvero se $x > 1$, il supporto di $\chi(x-t)$ non ha punti in comune con l'insieme di integrazione. Pertanto $h(x)$ è zero se $x > 1$.

Sia allora $0 \leq x \leq 1$. Abbiamo

$$h(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \chi(x-t) dt = \int_{x-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} = 1 - x.$$

Usando il fatto che h è pari otteniamo, infine

$$h(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Si noti che h è continua in ogni punto.

ii) Ricordiamo che la trasformata di Fourier di χ è

$$\widehat{\chi}(\omega) = \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}.$$

Notiamo quindi che

$$f_c(x) = \frac{\sin^2(c\pi x)}{c^2\pi^2\omega^2} = (\widehat{\chi}(cx))^2 = \widehat{\chi}(cx)\widehat{\chi}(cx) = \widehat{\chi * \chi}(cx).$$

Notiamo che $f_c \in L^1$. Quindi $\widehat{\chi * \chi} \in L^1$. Possiamo allora combinare le proprietà

$$\widehat{g(\cdot)}(\omega) = \frac{1}{c}\widehat{g}\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

e

$$\widehat{g}(x) = g(-x),$$

valide se $g, \widehat{g} \in L^1$ e se $c > 0$, per ottenere

$$\begin{aligned} \widehat{f}_c(s) &= \frac{1}{c}\widehat{\chi} * \widehat{\chi}\left(-\frac{s}{c}\right) = \begin{cases} \frac{1}{c}\left(1 - \frac{s}{c}\right), & -1 < -\frac{s}{c} \leq 0 \\ \frac{1}{c}\left(1 + \frac{s}{c}\right), & 0 < -\frac{s}{c} < 1, \\ 0, & \left|-\frac{s}{c}\right| \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{c}\left(1 + \frac{s}{c}\right), & -c < s < 0 \\ \frac{1}{c}\left(1 - \frac{s}{c}\right), & 0 \leq s < c \\ 0, & |s| \geq c \end{cases} \end{aligned}$$

Notiamo che \widehat{f}_c è pari.

Abbiamo quindi $\widehat{f}_c(s) = 0$ se $|s| \geq c$. Affinché risulti $\widehat{f}_c(s) = 0$ se $|s| > \frac{1}{2}$ deve essere $c \leq \frac{1}{2}$.

La funzione f_c non è nella classe di Schwartz per nessun $c > 0$. Infatti, sebbene risulti $f_c \in C^\infty$ per ogni $c > 0$, f_c non va a zero pi velocemente di ogni polinomio. Infatti, ad esempio,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 f_c(x)$$

non esiste.

iii) Il teorema di Plancherel asserisce che, se $f \in L^1 \cap L^2$, allora $\widehat{f} \in L^2$ e

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

L'idea per calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$$

è quindi riconoscere la funzione integranda come il quadrato di una funzione di cui conosciamo la trasformata di Fourier e di cui sappiamo calcolare la norma L^2 .

Sulla base dell'esercizio precedente, abbiamo

$$\frac{\sin^4 x}{x^4} = \left| \frac{\sin^2 x}{x^2} \right|^2 = |f_{1/\pi}(x)|^2.$$

Notiamo che $f_c \in L^1 \cap L^2$ per ogni $c > 0$. In particolare $f_{1/\pi} \in L^1 \cap L^2$. Valgono quindi le ipotesi del teorema di Plancherel, e pertanto otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f_{1/\pi}(x)|^2 dx = \|f_{1/\pi}\|_2^2 = \|\widehat{f}_c\|_2^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_c(s)|^2 ds = 2 \int_0^{-\infty} |f_c(s)|^2 ds = 2 \int_0^{\frac{1}{\pi}} \pi^2 (1 - \pi s)^2 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^1 (1-t)^2 dt = 2\pi \int_0^1 (1+t^2-2t) dt \\
&= 2\pi \left[t + \frac{t^3}{3} - t^2 \right]_0^1 = 2\pi \left(1 + \frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

□

Esercizio 8.8.23. Sia $f_n(x) = e^{-\pi(x-n)^2 - 2\pi i x \omega}$. Per ogni $\alpha > 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$, quanto vale $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx$? □

Svolgimento. Come sempre, sia $\phi(x) = e^{-\pi x^2}$ la Gaussiana, e $\lambda_n \phi(x) = e^{-\pi(x-n)^2}$ il suo traslato di passo n . Notiamo che $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x-n)^2 - 2\pi i x \omega} dx = \widehat{\lambda_n \phi}(\omega)$, ed il risultato, in base alla proprietà di traslazione della trasformata di Fourier (Teorema 8.2.4 (v)) ed alla Proposizione 8.3.2, vale $e^{-2\pi i n \omega} \widehat{\phi}(\omega) = e^{-2\pi i n \omega} \phi(\omega)$. Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = e^{-\pi \omega^2} \lim_n n^{-\alpha} e^{-2\pi i n \omega} = 0$$

perché $\alpha > 0$. Il lettore può verificare, tramite lo stesso argomento, che per $\alpha = 0$ il limite vale 1 se $\omega \in \mathbb{Z}$ ed altrimenti non esiste, e per $\alpha < 0$ il limite diverge per $\omega \in \mathbb{Z}$ ed oscilla, ma diverge in modulo, se $\omega \notin \mathbb{Z}$.

Esercizio 8.8.24. Sia $\phi(x) = e^{-\pi x^2}$ per $x \in \mathbb{R}$, e $\psi_n = \phi * \phi * \dots * \phi$ (n volte).

1. Mostrare che $\|\psi_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$.
2. Mostrare che $\|\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0$.
3. Stabilire se ψ_{2n} converge uniformemente.

Suggerimento: usare le proprietà della trasformata di Fourier di ψ_n . Per la terza domanda, si osservi che $f * f^*(0) = \|f\|_2^2$, e si dimostri che, se $f \geq 0$, allora $\max_{x \in \mathbb{R}} |f * f(x)| = \max_{x \in \mathbb{R}} \langle f, \lambda_x f \rangle = \langle f, f \rangle = f * f(0)$. □

Esercizio 8.8.25. Si calcoli esplicitamente la funzione $\psi_n = \phi * \phi * \dots * \phi$ (n volte) del precedente Esercizio 8.8.24. □

Svolgimento. Si osservi che $\widehat{\psi}_n = \widehat{\phi}^n$ per la moltiplicatività della convoluzione sotto trasformata di Fourier (Teorema 8.5.1). Ma sappiamo che $\widehat{\phi} = \phi$ (Proposizione 8.3.2). Quindi, come nella parte (ii) del successivo Esercizio 9.9.23, $\widehat{\psi}_n(x) = \phi^n(x) = e^{-\pi n x^2} = \phi(\sqrt{n}x)$. Allora, in base alla proprietà di dilatazione della trasformata di Fourier (Teorema 8.2.4 (iv)), si ha

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\pi x^2/n}.$$

8.9 Varianti dei precedenti esercizi

Esercizio 8.9.1. Se la trasformata di Fourier di $f(t) = \frac{1}{\pi(1+4t^2)}$ è $\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2}e^{-\pi|\omega|}$ e se $g(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ quale tra le seguenti funzioni è $\widehat{g}(\omega)$?

1. $\frac{1}{2}e^{-\pi|\omega|}$
2. $4e^{-\frac{\pi}{2}|\omega|}$
3. $e^{-2\pi|\omega|}$
4. $\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{2}|\omega|}$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.2. Sia f una funzione la cui trasformata di Fourier è

$$\widehat{f}(\omega) = \chi_{[0,2]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [0, 2] \\ 0 & \text{se } \omega \notin [0, 2] \end{cases}$$

Per quali valori di α si ha che

$$(f * e^{2\pi i \alpha t} f)\widehat{} = 0?$$

1. $\alpha = 0$
2. $\alpha < \frac{1}{2}$
3. $|\alpha| > 2$

4. $|\alpha| < 1$
5. $|\alpha| > \frac{1}{2}$
6. nessuna delle precedenti.

Motivare la risposta.

□

Esercizio 8.9.3. Assumendo che la trasformata di Fourier di $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ sia $\widehat{f}(\omega) = e^{-2\pi|\omega|}$, la funzione $\widehat{g}(\omega) = -4\pi^2\omega^2 e^{-2\pi|\omega|}$ è la trasformata di Fourier della funzione:

1. $g(t) = 2f(t)$
2. $g(t) = [f(t)]^2$
3. $g(t) = f''(t)$
4. $g(t) = \sqrt{f(t)}$
5. nessuna delle precedenti.

Motivare la risposta.

□

Esercizio 8.9.4. Assumendo che la trasformata di Fourier di $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ sia $\widehat{f}(\omega) = e^{-2\pi|\omega|}$, data $g(t) = \frac{1}{1+\frac{t^2}{9}}$, quale tra le seguenti funzioni è $\widehat{g}(\omega)$?

1. $3e^{-\frac{2}{3}\pi|\omega|}$
2. $3e^{-6\pi|\omega|}$
3. $\frac{1}{3}e^{3-\pi|\omega|}$
4. $9e^{-\frac{2}{9}\pi|\omega|}$
5. nessuna delle precedenti.

Motivare la risposta.

□

Esercizio 8.9.5. Assumendo che la trasformata di Fourier di $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ sia $\widehat{f}(\omega) = e^{-2\pi|\omega|}$, la funzione $\widehat{g}(\omega) = e^{-2\pi|\omega-2|}$ è la trasformata di Fourier della funzione:

1. $g(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(t-2)^2}$
2. $g(t) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+\frac{t^2}{4}}$
3. $g(t) = \frac{e^{4\pi it}}{\pi(1+t^2)}$
4. $g(t) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(1+t^2)^2}$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.6. Sia $g(t) = f(4t + 1)$. Esprimere \widehat{g} in termini di \widehat{f} . □

Esercizio 8.9.7. Assumendo che la trasformata di Fourier di $f(t) = \chi_{[-1,1]}(t)$ sia $\widehat{f}(\omega) = \frac{2 \sin 2\pi\omega}{\pi\omega}$, e che la trasformata di Fourier di $g(t) = e^{-2|t|}$ sia $\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+\pi^2\omega^2}$, la trasformata di Fourier di $\widehat{f * g}(\omega)$ è quale delle seguenti funzioni?

1. $2 \left(\frac{\sin 2\pi\omega}{\pi\omega} + \frac{1}{1+\pi^2\omega^2} \right)$
2. $2\sqrt{2\pi} \frac{\sin 2\pi\omega}{\pi\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{1+\pi^2\omega^2}$
3. $2\sqrt{2\pi} \frac{\sin 2\pi(\omega-1)}{\pi(\omega-1)(1+\pi^2\omega^2)}$
4. $\sqrt{2\pi} \frac{\omega}{\sin 2\pi\omega} \frac{1}{1+\pi^2\omega^2}$
5. $2\sqrt{2\pi} \frac{1}{2\pi^2\omega} \frac{\sin 2\pi\omega}{1+\pi^2\omega^2}$
6. nessuna delle precedenti.

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.8. Sia f una funzione la cui trasformata di Fourier è

$$\widehat{f}(\omega) = \chi_{[-1/2, 1/2]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [-1/2, 1/2] \\ 0 & \text{se } \omega \notin [-1/2, 1/2] \end{cases}$$

Per quali valori di α si ha che

$$(f * e^{2\pi i \alpha t} f)^\wedge = 0?$$

1. $\alpha < \frac{1}{2}$
2. $|\alpha| > 1$
3. $\alpha = 0$
4. $|\alpha| > \frac{1}{2}$
5. $|\alpha| < 1$
6. nessuna delle precedenti.

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.9. Assumendo che la trasformata di Fourier di $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ sia $\widehat{f}(\omega) = e^{-2\pi|\omega|}$, quale tra le seguenti funzioni è la trasformata di Fourier di $g(t) = \frac{1}{\pi} \frac{2t}{(1+t^2)^2}$?

1. $-2\pi e^{-2\pi|\omega|}$
2. $-2\pi i \omega e^{-2\pi|\omega|}$
3. $\frac{e^{-2\pi|\omega|}}{2\pi i \omega}$
4. nessuna delle precedenti.

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.10. Sia f una funzione la cui trasformata di Fourier è

$$\widehat{f}(\omega) = \chi_{[0,1]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } \omega \notin [0, 1] \end{cases}$$

Per quali valori di α si ha che

$$(f * e^{2\pi i \alpha t} f)\widehat{=} 0?$$

1. $|\alpha| < \frac{1}{2}$
2. $|\alpha| > 1$
3. $|\alpha| < 1$
4. $|\alpha| > 2$

5. $\alpha = 0$
6. nessuna delle precedenti.

Motivare la risposta.

Esercizio 8.9.11. Assumendo che la trasformata di Fourier di $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ è $\widehat{f}(\omega) = e^{-2\pi|\omega|}$ la funzione $\widehat{g}(\omega) = e^{-2\pi|\omega+1|}$ è la trasformata di Fourier della funzione

1. $g(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(t+1)^2}$
2. $g(t) = \frac{e^{-2\pi it}}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$
3. $g(t) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(1+t^2)^2}$
4. $g(t) = \frac{e^{2\pi it}}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

Esercizio 8.9.12. Sia $g(t) = f(3t + 1)$. Esprimere \widehat{g} in termini di \widehat{f} .

Esercizio 8.9.13. Assumendo che la trasformata di Fourier di $f(t) = \chi_{[-1/2, 1/2]}$ sia $\widehat{f}(\omega) = \frac{\sin \pi \omega}{\pi \omega}$ e che la trasformata di Fourier di $g(t) = e^{-|t|}$ sia $\widehat{g}(\omega) = \frac{2}{1+4\pi^2\omega^2}$, la trasformata di Fourier di $\widehat{f * g}(\omega)$ è quale delle seguenti funzioni?

1. $2 \frac{\sin \pi \omega}{\pi \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{1+4\pi^2\omega^2}$
2. $\frac{2\pi \sin \pi \omega}{\pi(1+4\pi^2\omega^2)}$
3. $2 \frac{\omega}{\sin \pi \omega} \frac{1}{(1+4\pi^2\omega^2)}$
4. $\sqrt{2\pi} \left(\frac{\sin \pi \omega}{\pi \omega} + \frac{2}{1+4\pi^2\omega^2} \right)$
5. $\frac{1}{2\pi} \frac{\sin \pi(\omega-1/2)}{\pi(\omega-1/2)(1+4\pi^2\omega^2)}$
6. nessuna delle precedenti.

Motivare la risposta.

Esercizio 8.9.14. Assumendo che la trasformata di Fourier di $f(t) = \chi_{[-1,1]}$ sia $\widehat{f}(\omega) = \frac{\sin 2\pi\omega}{\pi\omega}$ e che la trasformata di Fourier di $g(t) = e^{-|t|}$ sia $\widehat{g}(\omega) = \frac{2}{1+4\pi^2\omega^2}$, la trasformata di Fourier di $\widehat{f * g}(\omega)$ è quale delle seguenti funzioni?

1. $2\sqrt{2\pi} \left(\frac{\sin 2\pi\omega}{\pi\omega} + \frac{1}{1+4\pi^2\omega^2} \right)$
2. $2\sqrt{2\pi} \frac{\sin 2\pi\omega}{\pi\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{1+4\pi^2\omega^2}$
3. $2\sqrt{2\pi} \frac{\sin 2\pi\omega}{\pi\omega(1+4\pi^2\omega^2)}$
4. $\frac{2 \sin 2\pi(\omega-1)}{\pi(\omega-1)(1+4\pi^2\omega^2)}$
5. $2\sqrt{2\pi} \frac{\sin 2\pi\omega}{\pi\omega} (1 + 4\pi^2\omega^2)$
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.15. Assumendo che la trasformata di Fourier di $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ sia $\widehat{f}(\omega) = e^{-2\pi|\omega|}$, quale tra le seguenti funzioni è la trasformata di Fourier di $g(t) = \frac{1}{1+4t^2}$?

1. $\frac{1}{2}e^{-\pi|\omega|}$
2. $\frac{1}{4}e^{-2\pi|\omega|}$
3. $4e^{-\frac{\pi}{2}|\omega|}$
4. $2e^{-4\pi|\omega|}$

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.16. Sia $g(t) = f(2t + 1)$. Esprimere \widehat{g} in termini di \widehat{f} . □

Esercizio 8.9.17. Sia f una funzione la cui trasformata di Fourier è

$$\widehat{f}(\omega) = \chi_{[-1,1]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [-1, 1] \\ 0 & \text{se } \omega \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Per quali valori di α si ha che

$$(f * e^{2\pi i \alpha t} f)\widehat{=} 0?$$

1. $|\alpha| > 2$
2. $\alpha < \frac{1}{2}$
3. $\alpha = 0$
4. $|\alpha| > 1$
5. $|\alpha| > \frac{1}{2}$
6. nessuno dei precedenti.

Motivare la risposta. \square

Esercizio 8.9.18. Assumendo che la trasformata di Fourier di $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ sia $\widehat{f}(\omega) = e^{-2\pi|\omega|}$, la funzione $\widehat{g}(\omega) = -8\pi^3 i \omega^3 e^{-2\pi|\omega|}$ è la trasformata di Fourier della funzione:

1. $g(t) = [f(t)]^3$
2. $g(t) = f'''(t)$
3. $g(t) = \sqrt[3]{f(t)}$
4. $g(t) = 3f(t)$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. \square

Esercizio 8.9.19. Sia $f(t) = \chi_{[-1,2]}(t)$. Quanto vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega?$$

1. 1
2. 0
3. 3
4. 2
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.20. Sia f una funzione la cui trasformata di Fourier è

$$\widehat{f}(\omega) = \chi_{[0,1]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } \omega \notin [0, 1] \end{cases}$$

Per quali valori di α si ha che $(f * e^{2\pi i \alpha t} f)^\wedge = 0$?

1. $|\alpha| > 1$
2. $|\alpha| > \frac{1}{2}$
3. $|\alpha| < \frac{1}{2}$
4. $|\alpha| < 1$
5. nessuno dei precedenti.

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.21. Sia $f(t) = \chi_{[-1/2,1]}(t)$. Quanto vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega?$$

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{3}{2}$
3. 1
4. 0
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.22. Se la trasformata di Fourier di $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ è $\widehat{f}(\omega) = e^{-2\pi|\omega|}$ e la trasformata di Fourier di $g(t) = \chi_{[-1/2,1/2]}(t)$ è $\widehat{g}(\omega) = \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}$, allora quale tra le seguenti funzioni è $\widehat{f * g}(\omega)$?

1. $e^{-2\pi|\omega|} \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}$

2. $e^{2\pi|\omega|} \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}$
3. $e^{-2\pi|\omega|} \frac{\sin \pi(\omega - \frac{1}{2})}{\pi(\omega - \frac{1}{2})}$
4. $e^{-2\pi|\omega|} + \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.23. Sia f una funzione la cui trasformata di Fourier è

$$\widehat{f}(\omega) = \chi_{[-1,1]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [-1, 1] \\ 0 & \text{se } \omega \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Per quali valori di α si ha che $(f * e^{2\pi i \alpha t} f)^\wedge = 0$

1. $|\alpha| \leq 1$
2. $|\alpha| > 2$
3. $|\alpha| > 1$
4. $|\alpha| \leq 2$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.24. Se la trasformata di Fourier di $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ è $\widehat{f}(\omega) = e^{-2\pi|\omega|}$ allora la funzione $\widehat{g}(\omega) = \pi^2 \omega^2 e^{-2\pi|\omega|}$ è la trasformata di Fourier di quale delle seguenti funzioni?

1. $-\frac{1}{4} D^2 f$
2. $D^2 f$
3. $[f(t)]^2$
4. $\sqrt[2]{f(t)}$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.25. Sia $f(t) = 2\chi_{[-1,2]}(t)$. Quanto vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

1. 4
2. 1
3. 12
4. 0
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.26. Sia f una funzione la cui trasformata di Fourier è

$$\widehat{f}(\omega) = \chi_{[-1,2]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [-1, 2] \\ 0 & \text{se } \omega \notin [-1, 2] \end{cases}$$

Per quali valori di α si ha che $(f * e^{2\pi i \alpha t} f)^\wedge = 0$

1. $\alpha = 0$
2. $|\alpha| < 1$
3. $|\alpha| < 3$
4. $|\alpha| > 3$
5. $|\alpha| > 2$
6. nessuno dei precedenti.

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.27. Se \widehat{f} è nulla al di fuori dell'intervallo $[-2, 2]$, per quali valori di α si ha che $(f * e^{2\pi i \alpha t} f)^\wedge = 0$?

1. $\alpha = 0$

2. $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$
3. $|\alpha| \leq 1$
4. $|\alpha| > 2$
5. $|\alpha| > 1$
6. $|\alpha| \geq 2$
7. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.28. Se la trasformata di Fourier di $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ è $\widehat{f}(\omega) = e^{-2\pi|\omega|}$, allora la funzione $\widehat{g}(\omega) = \pi^4 \omega^4 e^{-2\pi|\omega|}$ è la trasformata di Fourier di quale delle seguenti funzioni?

1. $\frac{1}{16} f^{(iv)}(t)$
2. $f^{(iv)}(t)$
3. $[f(t)]^4$
4. $\sqrt[4]{f(t)}$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 8.9.29. Sia f una funzione la cui trasformata di Fourier è

$$\widehat{f}(\omega) = \chi_{[0,1]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } \omega \notin [0, 1] \end{cases}$$

Per quali valori di α si ha che $(f * e^{2\pi i \alpha t} f)^\wedge = 0$

1. $\alpha = 0$
2. $|\alpha| \leq 1$
3. $|\alpha| > 2$
4. $|\alpha| > 1$

5. $|\alpha| \geq 2$

6. nessuno dei precedenti.

Motivare la risposta.

□

Esercizio 8.9.30. Sia $f(t) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(t)$. L'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

ha uno dei seguenti valori. Quale?

1. $\frac{1}{2}$

2. 1

3. 2

4. 0

5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 8.9.31. Sia $f(t) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$. L'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

ha uno dei seguenti valori. Quale?

1. $\frac{1}{2}$

2. 1

3. 2

4. 0

5. nessuno dei precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 8.9.32. Sia $f(t) = \chi_{[-1,1]}(t)$. L'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

ha uno dei seguenti valori. Quale?

1. $\frac{1}{2}$
2. 1
3. 2
4. 0
5. nessuno dei precedenti

Motivare la risposta.

□

Capitolo 9

Classe di Schwartz e trasformata di Fourier

In questo capitolo introduciamo e studiamo uno spazio assai ristretto di funzioni molto regolari su \mathbb{R} , con proprietà di convergenza estremamente forti. Questo spazio, divenuto di impiego comune dopo che Laurent Schwartz nel 1951 lo utilizzò per sviluppare la teoria delle distribuzioni (che vedremo in seguito nella Parte III), si chiama la *classe di Schwartz*, ovvero anche la classe di funzioni a decrescenza rapida.

9.1 Convergenza indotta da famiglie di seminorme

La seguente nozione è stata già introdotta in un contesto più generale (Definizione 3.5.1):

Definizione 9.1.1. Dato uno spazio vettoriale V si dice che una funzione $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ è una seminorma se

- (i) $p(v) \geq 0 \quad \forall v \in V$
- (ii) $p(v_1 + v_2) \leq p(v_1) + p(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
- (iii) $p(\alpha v) = |\alpha|p(v) \quad \forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Una seminorma non è in generale una norma, perché non richiediamo che si abbia $p(v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

Nonostante il fatto che una seminorma non sia una norma, se V è munito di una famiglia di seminorme possiamo introdurre su V una nozione di convergenza simile a quella usata per gli spazi normati (veramente, piuttosto più simile a quella degli spazi metrici: si veda fra poche righe la Nota 9.1.3). In effetti, abbiamo già introdotto una nozione di convergenza nel caso di famiglie di seminorme nella Nota 3.19.2, che riassumiamo qui di seguito:

Definizione 9.1.2. Sia $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia al più numerabile di seminorme sullo spazio vettoriale V e $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di vettori in V . Su V viene indotta dalle seminorme p_n la seguente nozione di convergenza:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} v_j = v$$

se per ogni seminorma p_n si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} p_n(v_j - v) = 0$$

cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $j_0 \in \mathbb{N}$, $j_0 = j_0(\varepsilon, n)$, tale che, se $j > j_0$, si ha $p_n(v_j - v) < \varepsilon$.

Nota 9.1.3. Questa topologia indotta sullo spazio vettoriale V dalla famiglia numerabile di seminorme p_n della precedente Definizione 9.1.2 rende V uno spazio metrico invariante per traslazione, ossia uno spazio vettoriale topologico (Definizione 3.1.1) la cui topologia è indotta da una metrica invariante per traslazione. Infatti, si ottiene una distanza d su V nel modo seguente:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p(x - y)}{1 + p(x - y)}.$$

Ovviamente questa serie è convergente perché la funzione $h(t) = t/(1+t)$ ha valori fra 0 e 1 per $t \geq 0$, e quindi i termini della serie, $2^{-n}h(p(x-y))$, sono maggiorati da 2^{-n} . L'unica proprietà di d che non è ovvia è la disuguaglianza triangolare, per dimostrare la quale occorre osservare che la funzione h è concava nella semiretta $\{t \geq 0\}$, e quindi sublineare: $h(u+v) \leq h(u) + h(v)$ (la disuguaglianza è stretta se $u, v > 0$, ma non ci serve). Da questo segue che $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in V$. \square

Definizione 9.1.4. Assumeremo sempre che la famiglia di seminorme sia *separante*, ossia che, per ogni $x \neq y \in V$, esista una seminorma p_n tale che

$p_n(x - y) \neq 0$, ossia che per ogni $v \neq 0 \in V$ si abbia $p_n(v) \neq 0$ per qualche n . Se così non è, la topologia indotta dalla famiglia di seminorme non separa v da 0, ossia $d(v, 0) = 0$. In tal caso la topologia non soddisfa la proprietà T_0 (Nota 1.10.11), ossia i punti non sono chiusi. Questo può avvenire anche in uno spazio normato: ad esempio, lo spazio di tutte le funzioni la cui norma L^p è finita contiene funzioni non nulli la cui norma è zero: tutte le funzioni nella classe di equivalenza di Lebesgue della funzione identicamente nulla. Per questo motivo abbiamo ridefinito L^p come spazio di classi di equivalenza di Lebesgue di funzioni e non come spazio di funzioni (Nota 1.16.12).

Nota 9.1.5. Nonostante la definizione di convergenza rispetto ad una famiglia di seminorme sia simile a quella che vale per uno spazio normato, si tenga presente che molti spazi la cui topologia è indotta da una famiglia numerabile di seminorme, o persino di norme, non sono spazi normati, ovvero la loro topologia non è equivalente a quella indotta da un'unica norma: si vedano esempi nella Sezione 3.22.

Rammentiamo inoltre quanto già visto in alcune osservazioni illustrate nella Nota 3.19.2, che qui richiamiamo: chiamiamo *aperti di base locale*, come si dice in Topologia, una famiglia di aperti elementari che insieme ai loro traslati descrivono la topologia (o meglio, da cui si generano tramite l'operazione di unione tutti gli altri aperti: si veda la Definizione 1.10.1). Nel caso di uno spazio la cui topologia è ottenuta da una famiglia numerabile di seminorme, essi sono generati in questo modo: non basta considerare le palle $O_n(\varepsilon) \equiv \{v : p_n(v) < \varepsilon\}$, bisogna invece prendere le intersezioni finite

$$\begin{aligned} O_{n_1, \dots, n_k}(\varepsilon) &:= O_{n_1}(\varepsilon) \cap \dots \cap O_{n_k}(\varepsilon) \\ &= \{p_{n_1}(v_j - v) < \varepsilon, p_{n_2}(v_j - v) < \varepsilon, \dots, p_{n_k}(v_j - v) < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Infatti, si consideri il caso dello spazio bidimensionale \mathbb{R}^2 (o \mathbb{C}^2) munito delle due seminorme $p_i(x_1, x_2) = |x_i|$ (qui $i = 1, 2$). Le *palle* rispetto a ciascuna seminorma sono illimitate (sono strisce aperte centrate su uno dei due assi coordinati). Invece l'intersezione delle palle indotte da ciascuna delle seminorme consiste di rettangoli aperti centrati nell'origine: questi rettangoli sono inclusi in sfere euclidee e viceversa, quindi ogni aperto usuale è una opportuna unione di essi.

Si noti che occorre limitare l'attenzione ad intersezioni *finite* di palle: in generale le intersezioni infinite non danno luogo ad aperti. Infatti, ad esempio, l'intersezione infinita $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n(\varepsilon)$ non è un aperto in V , perché contiene v ma esiste una successione $v_j \in V$ tale che $v_j \rightarrow v$ e v_j non appartiene

definitivamente a K . Infatti, segue dal fatto che la famiglia di seminorme è separante il fatto che per ogni n esiste $v_n \in \cap_{j \leq n} O_j(\varepsilon)$ ma $v_n \notin O_{n+1}(\varepsilon)$, quindi nessun v_n appartiene a K . \square

*Esempio 9.1.6. **Gli spazi** $C^\infty(K)$ e $C^\infty(\mathbb{R})$.* Sia $K \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Lo spazio $C^\infty(K)$ consiste delle funzioni derivabili infinite volte su K . Ovviamente ogni derivata, essendo a sua volta derivabile, è continua su K e quindi è limitata per il Teorema di Weierstrass sulla esistenza dei massimi e dei minimi delle funzioni continue sui compatti (si veda [19, Cap. 16 (Appendice)]). Introduciamo su $C^\infty(K)$ le seguenti seminorme: per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n(f) = \|D^n f\|_\infty.$$

Allora, se $f_j, f \in C^\infty(K)$, poniamo

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$$

se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni n_1, n_2, \dots, n_k esiste $j_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $j > j_0$, si ha $f_j - f \in O_{n_1, \dots, n_k}(\varepsilon)$, ossia

$$r_{n_1}(f_j - f) < \varepsilon, r_{n_2}(f_j - f) < \varepsilon, \dots, r_{n_k}(f_j - f) < \varepsilon.$$

La stessa nozione di convergenza può essere espressa mediante la famiglia numerabile delle seguenti *norme*:

$$p_n(f) = \max_{0 \leq j \leq n} \|D^j f\|_\infty.$$

Queste p_n sono norme perché, se $p_n(f) = 0$, allora in particolare $\|f\|_\infty = 0$ e quindi $f = 0$.

Osserviamo che $p_m(f) \leq p_n(f)$ se $m < n$. Allora, se $f_j, f \in C^\infty(K)$, si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$$

se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, esiste $j_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $j > j_0$,

$$p_{n_1}(f_j - f), p_{n_2}(f_j - f), \dots, p_{n_k}(f_j - f) < \varepsilon.$$

Ma in questo caso l'ultima norma, p_{n_k} , è maggiore delle altre, e quindi basta richiedere $p_{n_k}(f_j - f) < \varepsilon$.

Osserviamo che si può scegliere in $C^\infty(K)$ una seconda famiglia di norme che produce la stessa nozione di convergenza, come segue:

$$q_n(f) = \sum_{i=0}^n \|D^i f\|_\infty.$$

Le norme q_n sono quasi equivalenti alle p_n , nel senso che, per $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n \leq q_n \leq np_n$$

(la verifica è ovvia).

La convergenza in $C^\infty(K)$, espressa in termini delle norme q_n , diventa:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$$

se per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \|D^i(f_j - f)\|_\infty = 0.$$

Infine, la nozione di convergenza nello spazio $C^\infty(\mathbb{R})$ è data dalla famiglia numerabile di seminorme

$$p_N(f) := \max\{|D^m(f)|(x) : |x| \leq N, 0 \leq m \leq N\}$$

con $N \in \mathbb{N}$. Con la topologia indotta da questa famiglia di seminorme, $C^\infty(\mathbb{R})$ è uno spazio metrico completo localmente convesso (ogni suo elemento ha un intorno aperto convesso), ovvero, come si suol dire, uno *spazio di Fréchet* (Definizione 3.1.1). Questo spazio contiene come sottospazi chiusi (muniti delle loro rispettive topologie) tutti gli spazi delle funzioni C^∞ con supporto in un dato compatto K , per ogni tale K .

Gli spazi $C^\infty(K)$ e $C^\infty(\mathbb{R})$ sono esempi di spazi vettoriali topologici la cui topologia è indotta da una famiglia numerabile di norme, ma non può essere indotta da un'unica norma (si veda la dimostrazione nel Corollario 3.22.2).

□

9.2 Continuità di operatori e funzionali lineari su spazi con famiglie numerabili di seminorme

Qui estendiamo la Proposizione 4.6.3 all'ambito degli spazi vettoriali nei quali la convergenza è data da una famiglia numerabile di seminorme.

Proposizione 9.2.1. *Sia V uno spazio vettoriale in cui la nozione di convergenza è indotta da una famiglia di seminorme p_n nel senso della Definizione 9.1.2. Un operatore lineare $T : V \mapsto V$ è continuo se e solo se vale la condizione seguente:*

per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono una famiglia finita $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ e una costante C_n tali che, per ogni $v \in V$,

$$p_n(Tv) < C_n \sum_{i=1}^k p_{n_i}(v)$$

(o equivalentemente, con una nuova costante $C'_n = \sqrt{k}C_n$, si ha $p_n(Tv) < C'_n \max_{i=1}^k p_{n_i}(v)$). *Ancor più in generale, se W è un altro spazio munito di seminorme q_n , l'operatore lineare $T : V \mapsto W$ è continuo se e solo se vale la condizione seguente:*

per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono una famiglia finita $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ e una costante C_n tali che, per ogni $v \in V$,

$$q_n(Tv) < C_n \sum_{i=1}^k p_{n_i}(v).$$

In particolare, se per qualche n, m si ha $q_n(Tv) < Cp_n(v)$, allora $T : V \mapsto W$ è continuo.

Dimostrazione. È ovvio che la condizione è sufficiente: proviamolo considerando direttamente il caso generale $T : V \mapsto W$.

Se $v \rightarrow v_0$ allora $p_m(v - v_0) \rightarrow 0$ per ogni m , quindi

$$q_n(Tv - Tv_0) < C_n \sum_{i=1}^k p_{n_i}(v - v_0) \rightarrow 0 \quad \text{per ogni } n.$$

Perciò $Tv \rightarrow Tv_0$. Questo argomento (per la sola condizione sufficiente) vale anche se si assume la disuguaglianza rispetto ad una sola seminorma.

Per vedere che la condizione è necessaria, osserviamo che, dal momento che l'operatore è lineare, a meno di traslazione basta dimostrare che è continuo all'origine (si veda l'Esercizio ??). A questo scopo occorre far vedere che essa mostra che la controimmagine di un aperto della base locale all'origine in W deve contenere un intorno aperto di base all'origine in V . Per questo, basta reinterpretare la disuguaglianza $p_n(Tv) < C'_n \max_{i=1}^k p_{n_i}(v)$. Essa significa

che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno di base dell'origine $O_{n_1, \dots, n_k}(\varepsilon) \subset V$ tale che, per ogni v in questo intorno, $p_n(Tv) < C'_n \varepsilon$, ossia $p_n(Tv)$ appartiene ad una preassegnata palla aperta in W di centro l'origine e raggio $C'_n \varepsilon$, e quindi proprio che la controimmagine sotto T di una palla aperta in W contiene un aperto di base in V . Per una spiegazione lievemente più dettagliata si veda la Nota 3.19.2. \square

In particolare questo risultato si applica a funzionali lineari continui:

Corollario 9.2.2. *Se la nozione di convergenza nello spazio V è determinata da una famiglia numerabile di seminorme p_n , un funzionale lineare F su V è continuo se e solo se esistono $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ e una costante C tali che, per ogni $v \in V$,*

$$|F(v)| < C \sum_{i=1}^k p_{n_i}(v).$$

In particolare, se il funzionale verifica $|F(v)| < Cp_n(v)$ per una seminorma p_n e per qualche costante $C > 0$, allora è continuo.

9.3 La classe di Schwartz

Definizione 9.3.1. La classe di Schwartz è lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ derivabili infinite volte e a decrescenza rapida, cioè che tendono a zero all'infinito con tutte le loro derivate a velocità superiore a $\frac{1}{p(x)}$, dove p è un qualsiasi polinomio:

$$\mathcal{S} = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ e, per ogni } k, l \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^k D^l f(x) = 0 \right\}$$

Nota 9.3.2. \mathcal{S} è contenuto in $L^1(\mathbb{R})$. Questa è una conseguenza ovvia della decrescenza rapida. Infatti, ricordando che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

è convergente, notiamo che se $f \in \mathcal{S}$, allora la funzione derivabile $(1+x^2)|f(x)|$ tende a zero all'infinito e quindi ha massimo finito. Perciò

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)| = C < \infty$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2) \frac{|f(x)|}{1+x^2} dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx < \infty.$$

□

Nota 9.3.3. Per ogni coppia $k, l \in \mathbb{N}$ la funzione

$$p_{kl} : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

definita da

$$p_{kl}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^k) |D^l f(x)|$$

è una seminorma, nel senso della Definizione 9.1.1. Inoltre p_{00} è una norma (la norma uniforme) e così anche p_{k0} per ogni $k \in \mathbb{N}$.

(Vedremo nella successiva Nota 9.3.5 che, in \mathcal{S} , tutte queste seminorme in realtà sono norme). □

Proposizione 9.3.4.

$$\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} : f \in C^\infty(\mathbb{R}), \text{ e } p_{kl}(f) < \infty \text{ per ogni } k, l \in \mathbb{N}\}.$$

Dimostrazione. Sia $p_{kl}(f) < \infty$ e poniamo $C = p_{kl}(f)$. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $|D^l f(x)| < C / (1 + |x|^k)$; quindi $D^l f$ tende a zero all'infinito almeno altrettanto rapidamente di $\frac{1}{Q_k(x)}$ dove Q_k è un qualsiasi polinomio di grado k e quindi più rapidamente di $\frac{1}{Q_{k-1}(x)}$. Ne segue che, se $p_{kl} < \infty$ per ogni k, l , allora $f \in \mathcal{S}$. Il viceversa è evidente, perché se una funzione infinitamente derivabile f è tale che $x^k D^l f(x)$ tende a zero all'infinito con tutte le derivate, come succede a ogni $f \in \mathcal{S}$, allora $|x^k D^l f(x)|$ deve avere un punto di massimo e quindi un valore massimo finito. □

Nota 9.3.5. Quando ristrette a \mathcal{S} tutte le seminorme p_{kl} sono norme. Infatti, siccome $1 + |x|^k \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, se $p_{kl}(f) = 0$ si deve avere $D^l f(x) \equiv 0$. Per $l = 0$ questo significa che $f \equiv 0$ e quindi p_{k0} è una norma come già osservato. Se $p_{k1}(f) = 0$ allora $Df \equiv 0$ e quindi f ha per grafico una retta. Allora, poiché f tende a zero all'infinito, deve essere $f \equiv 0$. Quindi, su \mathcal{S} , p_{k1} è una norma. Nello stesso modo si vede che $p_{kl}(f) := \|(1 + |x|^k) D^l f\|_\infty = 0$ implica che $D^l f \equiv 0$, perché $1 + |x|^k \neq 0$, pertanto f è un polinomio: allora f tende a zero all'infinito se e solo se $f \equiv 0$, e quindi $p_{kl}|_{\mathcal{S}}$ è una norma.

Qui abbiamo usato il fatto che $1 + |x|^k$ non si annulla mai: è proprio per questo scopo che abbiamo definito le seminorme p_{kl} con il fattore $1 + |x|^k$ anziché $|x|^k$. (In realtà la scelta di inserire l'addendo 1 è molto conveniente anche per un altro motivo: ci permette di dividere dentro la seminorma per il fattore mai nullo $1 + |x|^k$, ad esempio quando ci servono disuguaglianze del tipo $|D^l f(x)| \leq p_{kl}(f)/(1 + |x|^k)$. Avremo spesso bisogno di queste divisioni: si veda ad esempio la dimostrazione del prossimo Teorema di completezza 9.4.3, e poi del Lemma 9.6.2 e del Corollario 9.7.5).

Se invece avessimo scelto le seminorme

$$q_{kl}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |D^l f(x)|,$$

che si annullano per ogni f solo per $x = 0$, lo stesso ragionamento avrebbe provato che $D^l f(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$, e quindi, grazie alla continuità di $D^l f$, avremmo raggiunto la stessa conclusione, $D^l f \equiv 0$. In effetti, avremmo ottenuto la stessa classe di Schwartz partendo dalle seminorme q_{kl} invece che dalle p_{kl} . Per provarlo, basta osservare che $q_{kl} < p_{kl} \leq q_{0l} + q_{kl}$, e quindi il fatto che una di queste due famiglie di seminorme di f sia finita implica che sia finita l'altra. \square

Esempio 9.3.6. La Gaussiana $\phi(x) = e^{-\pi x^2}$ introdotta in Sezione 8.3 appartiene a \mathcal{S} . Più semplicemente, la funzione $\psi(x) = e^{-x^2}$ è in \mathcal{S} . Infatti $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = 0$ e per ogni polinomio P si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x)e^{-x^2} = 0$$

perché l'esponenziale tende a zero più velocemente di $\frac{1}{P(x)}$ per qualunque polinomio P (Sezione 1.1). Perciò si ha

$$\psi'(x) = -2xe^{-x^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow \pm\infty$$

$$\psi''(x) = -2xe^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2 - 2x)e^{-x^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow \pm\infty$$

e più in generale per ogni l esiste un polinomio Q tale che

$$D^l \psi(x) = Q(x)\psi(x),$$

per induzione su l . Perciò

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} D^l \psi(x) = 0$$

e, più in generale,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} R(x)D^l\psi(x) = 0$$

per ogni polinomio R . □

9.4 Completezza della classe di Schwartz

Abbiamo munito la classe di Schwartz non di una norma, ma di una famiglia numerabile di seminorme. Sappiamo che, se uno spazio vettoriale V è normato, la norma induce una distanza (o *metrica*) invariante d nel modo seguente: per ogni $x, y \in V$, $d(x, y) \equiv \|x - y\|$ ((1.4) e (1.5)). Per comodità del lettore, ripetiamo la definizione di metrica invariante su uno spazio vettoriale.

Definizione 9.4.1. Sia V uno spazio vettoriale. Una funzione $d : V \times V \mapsto \mathbb{R}^+ \cup 0$ si chiama una *metrica invariante* se verifica le proprietà di una metrica, cioè

- $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, x)$ per ogni x, y, z (disuguaglianza triangolare)

e se inoltre è invariante per traslazione: $d(x - z, y - z) = d(x, y)$ per ogni x, y, z .

Nonostante il fatto che lo spazio \mathcal{S} non sia normato, esso è munito di una metrica invariante, come abbiamo visto nella Nota 9.1.3, che riprendiamo più in generale nella prossima osservazione.

Nota 9.4.2. In uno spazio vettoriale munito di una famiglia numerabile di seminorme p_i , $i \in \mathbb{N}$, per ogni successione in ℓ^1 di numeri positivi c_i tali che $C := \sum_{i=0}^{\infty} c_i < \infty$ la funzione

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i p_i(x - y)}{1 + p_i(x - y)}$$

è una metrica invariante. Più in generale, per ogni successione $c_i \rightarrow 0^+$, la funzione

$$d(x, y) = \max_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i p_i(x - y)}{1 + p_i(x - y)}$$

è una metrica invariante. L'invarianza per traslazione è ovvia perché il secondo membro dipende solo da $x - y$; la disuguaglianza triangolare segue dal fatto che il secondo membro coinvolge la quantità $f(p_i(x - y))$, dove f è la funzione sublineare

$$f(t) = \frac{t}{1+t}$$

introdotta nella Nota 9.1.3.

È facile vedere che le palle con centro l'origine di questa metrica formano una base locale per la topologia indotta dalle seminorme, e viceversa, una base locale di quella topologia forma una base locale della topologia indotta dalla metrica [25, Chapter 1, Section 38]. Quindi la nozione di convergenza data dalla famiglia di seminorme è equivalente alla convergenza indotta da questa metrica.

Si noti anche che, se $\{p_i(x_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy per ogni i , ossia $p_i(x_j - x_k) < \varepsilon$ per j, k abbastanza grandi, allora anche $d(x_j - x_k) < \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon = C\varepsilon$ per questi j, k , e viceversa se $\{d(x_j)\}$ è di Cauchy, allora $\{p_i(x_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, perché $p_i(x_j - x_k) < \frac{d(x_j - x_k)}{c_i - d(x_j - x_k)}$. Quindi una successione è di Cauchy rispetto alla metrica se e solo se lo è rispetto a tutte le seminorme. \square

Ora dimostriamo una importante proprietà della convergenza in \mathcal{S} .

Teorema 9.4.3. (Completezza di \mathcal{S} .) *La classe di Schwartz è uno spazio completo: se una successione $\{f_i\} \in \mathcal{S}$ è di Cauchy, cioè se per ogni seminorma p_{kl} , $k, l \in \mathbb{N}$, la successione numerica $\{p_{kl}(f_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, allora f_i converge nel senso di \mathcal{S} ad una funzione f in \mathcal{S} .*

Dimostrazione. L'ipotesi dice che, per ogni k, l , la successione di funzioni limitate $\{u_{k,l,i}\} \equiv (1 + |x|^k) D^l f_i(x)$ è uniformemente convergente: chiamiamo h_{kl} il suo limite uniforme, che ovviamente è una funzione limitata, perché la convergenza uniforme preserva la limitatezza (Teorema 1.3.13). Scriviamo

$$h_{kl} = (1 + |x|^k) g_{0l}(x).$$

Allora tutte le h_{kl} , ed a maggior ragione g_{0l} , sono limitate, e, poiché $(1 + |x|^k) > 1$, per ogni l le derivate $D^l f_i$ convergono uniformemente a g_{0l} : infatti,

$$\|D^l f_i - g_{0l}\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{1 + |x|^k} |u_{k,l,i}(x) - h_{kl}| \leq \|u_{k,l,i} - h_{kl}\|_{\infty} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Abbiamo visto che la funzione $g_{00} = h_{00}$ è il limite uniforme delle f_i , e g_{0l} è il limite uniforme delle corrispondenti derivate $D^l f_i$: allora, per il Teorema di Derivazione delle successioni di funzioni uniformemente convergenti con le derivate (Teorema 1.3.19) si ha $g_{0l} = D^l g_{00}$ per ogni l . Ora, moltiplicando per $(1 + |x|^k)$ ed osservando che $g_{00} = h_{00}$ otteniamo

$$h_{kl} = (1 + |x|^k) g_{0l}(x) = (1 + |x|^k) D^l g_{00}(x) = (1 + |x|^k) D^l h_{00}(x).$$

Poiché h_{kl} è limitata, l'ultima identità prova che h_{00} appartiene a \mathcal{S} . Inoltre le funzioni $(1 + |x|^k) D^l f_i(x)$ convergono uniformemente a $(1 + |x|^k) D^l h_{00}(x)$ per ogni k, l , perché

$$(1 + |x|^k) D^l f_i(x) \Rightarrow h_{kl} = (1 + |x|^k) g_{0l} = (1 + |x|^k) D^l g_{00} = (1 + |x|^k) D^l h_{00}.$$

Questo equivale a dire che $f_i \rightarrow h_{00}$ nel senso di \mathcal{S} . □

9.5 Esempi di operatori lineari continui sulla classe di Schwartz

Anzitutto, notiamo che c'è un esempio facile di operatore continuo sulla classe di Schwartz:

Esercizio 9.5.1. L'operatore di traslazione sulla classe di Schwartz \mathcal{S} definito da

$$(\lambda_x f)(t) = f(t - x), \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{S}$$

è continuo da \mathcal{S} in \mathcal{S} .

Svolgimento: premettiamo che, in base al Teorema del Binomio di Newton (Sezione 1.1), per ogni $t, x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$|t + x|^k \leq \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} |x|^{k-m} |t|^m.$$

Da questo e dal fatto che derivate e traslazioni commutano si ottiene

$$\begin{aligned}
 p_{kl}(\lambda_x f) &= \sup_{t \in \mathbb{R}} (1 + |t|^k) |D_t^l(\lambda_x f)(t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} (1 + |t|^k) \lambda_x |D^l f(t)| \\
 &= \sup_{t \in \mathbb{R}} (1 + |t|^k) |(D^l f)(t - x)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} (1 + |t + x|^k) |D^l f(t)| \\
 &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(1 + \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} |x|^{k-m} |t|^m \right) |D^l f(t)| \\
 &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} |x|^{k-m} (1 + |t|^m) |D^l f(t)|.
 \end{aligned}$$

Quindi

$$p_{kl}(\lambda_x f) = \sup_t \{(1 + |t|^k) |D_t^l(\lambda_x f)(t)|\} \leq \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} |x|^{k-m} p_{ml}(f).$$

□

Consideriamo ora i seguenti altri tre esempi meno banali: la derivata l -esima; la moltiplicazione per una funzione data; la trasformata di Fourier.

Per il secondo esempio, però, occorre che la funzione usata per moltiplicare non cresca troppo rapidamente: ad esempio $\psi(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}$, ma $1 \notin \mathcal{S}$ (non tende a zero all'infinito) e quindi se $h(x) = \frac{1}{\psi(x)}$ si ha $h(x)\psi(x) = 1 \notin \mathcal{S}$.

Definizione 9.5.2. Una funzione h su \mathbb{R} è a crescita polinomiale con tutte le sue derivate se $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ e per ogni l esistono un intero $k = k(l)$ e una costante $C = C_l$ tali che

$$|D^l h(x)| \leq C (1 + |x|^{k(l)}) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Questo evidentemente equivale al fatto che ciascuna derivata sia maggiorata asintoticamente da un polinomio sia per $x \rightarrow \infty$ sia per $x \rightarrow -\infty$.

Una funzione h su \mathbb{R} è localmente integrabile ed a crescita polinomiale se h è misurabile, l'integrale di h su ogni compatto è finito, e per ogni l esistono un intero $k = k(l)$, un compatto K ed una costante $C = C_l$ tali che

$$|D^l h(x)| \leq C (1 + |x|^{k(l)}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus K.$$

Si noti che una funzione localmente integrabile a crescita polinomiale può avere singolarità al finito, ossia asintoti verticali.

Ora possiamo presentare gli esempi.

Esempio 9.5.3. Per ogni intero l l'operatore di derivata l -esima D^l manda \mathcal{S} in \mathcal{S} ed è iniettivo e continuo. \square

Esempio 9.5.4. Sia h a crescita polinomiale con tutte le sue derivate. Allora l'operatore M definito da $M_h f(x) = h(x)f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ manda \mathcal{S} in \mathcal{S} ed è continuo. Viceversa, se h cresce a velocità esponenziale, allora esiste $f \in \mathcal{S}$ tale che $hf \notin \mathcal{S}$. \square

Esempio 9.5.5. Sia \mathfrak{F} l'operatore di trasformazione di Fourier, definito su $L^1(\mathbb{R})$ da

$$\mathfrak{F}f(s) = \widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i s t} dt.$$

Allora \mathfrak{F} manda \mathcal{S} in \mathcal{S} in maniera iniettiva e surgettiva ed è continuo su \mathcal{S} . \square

Di questi tre esempi il primo è il più facile da dimostrare e lo facciamo qui. Agli altri due dedichiamo le prossime due sezioni.

Svolgimento dell'Esempio 9.5.3. Per tutti gli interi j, k, l si ha

$$p_{kl}(D^j f) = \sup_x (1 + |x|^k) |D^l D^j f(x)| = p_{k,l+j}(f).$$

Perciò D^j è continuo su \mathcal{S} in base alla Proposizione 9.2.1. Per dimostrare che D^j è iniettivo e surgettivo su \mathcal{S} , basta dimostrarlo nel caso $j = 1$ e poi procedere con un ovvio argomento induttivo (che tralasciamo). L'operatore D è iniettivo perché se due funzioni f, g in \mathcal{S} verificano $f' \equiv g'$, allora $f - g$ è costante: ma poiché tendono entrambe a zero all'infinito, la costante deve essere zero e $f = g$. \square

9.6 Moltiplicazione per funzioni a crescita polinomiale con tutte le derivate

In questa Sezione sviluppiamo e dimostriamo l'Esempio 9.5.4. A questo scopo abbiamo bisogno di due premesse.

Lemma 9.6.1. *Se f, h sono due funzioni derivabili l volte, allora*

$$D^l(hf) = \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} D^j h D^{l-j} f$$

dove $\binom{l}{j}$ è il simbolo combinatorio $\binom{l}{j} = \frac{l!}{j!(l-j)!}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è la stessa del Teorema del binomio di Newton,

$$(a + b)^l = \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} a^j b^{l-j}$$

e si fa per induzione su l (si veda [19, Cap. 1 (Appendice)]). □

Lemma 9.6.2. *Per tutti gli interi m, n esiste $C = C(m, n)$ tale che*

$$(1 + |x|^m)(1 + |x|^n) \leq C(1 + |x|^{m+n}).$$

Ad esempio, la disuguaglianza vale per $C = 4$.

Dimostrazione. L'argomento della dimostrazione è una versione quantitativa dell'idea esposta alla fine della Nota 3.20.5, ma ora la rivediamo in dettaglio. Dimostriamo prima la disuguaglianza per $|x| \geq 1$. Supponiamo che il più grande dei due interi sia n . Allora se $|x| \geq 1$ si ha $|x|^m \leq |x|^n \leq |x|^{m+n}$ e quindi

$$(1 + |x|^m)(1 + |x|^n) = 1 + |x|^m + |x|^n + |x|^{m+n} \leq 1 + 3|x|^{m+n} < 3(1 + |x|^{m+n}).$$

Quindi la disuguaglianza da dimostrare vale per $C \geq 3$. Ora consideriamo il dominio $-1 \leq x \leq 1$. L'immagine della funzione $1 + |x|^m$ in $[-1, 1]$ è l'intervallo $[1, 2]$ perché $0 \leq |x|^m \leq 1$ se $|x| \leq 1$ (la funzione $x \rightarrow x^m$ è crescente per $x \geq 0$). Analogamente i valori di $1 + |x|^n$ sono nell'intervallo $[1, 2]$. Quindi i valori di $(1 + |x|^m)(1 + |x|^n)$ sono nell'intervallo $[1, 4]$. D'altra parte $1 + |x|^{m+n} \geq 1$. Quindi se $|x| < 1$ si ha

$$(1 + |x|^m)(1 + |x|^n) \leq 4 \leq 4(1 + |x|^{m+n}).$$

Perciò in questo caso la disuguaglianza vale per $C = 4$. □

Dimostrazione dell'Esempio 9.5.4. Poiché h è a crescita polinomiale con tutte le derivate, con la notazione della Definizione 9.5.2 per ogni intero j abbiamo un intero $k = k(j)$ e una costante $C_j > 0$ (che dipendono dalla scelta di h) tali che

$$|D^j h(x)| \leq C_j (1 + |x|^{k(j)}) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}. \quad (9.1)$$

In base alla Proposizione 9.2.1, per dimostrare l'Esempio 9.5.4 basta provare che, per tutti gli interi k, l , esiste $A > 0$ tale che, per ogni $f \in \mathcal{S}$,

$$p_{kl}(hf) \leq A \sum_{j=0}^l p_{k+k(j), l-j}(f) \quad (9.2)$$

(qui la costante A , naturalmente, dipende da k e l ma non da f). Proviamo la disuguaglianza (9.2). Sia $B = \max \left\{ \binom{l}{j} : 0 \leq j \leq l \right\}$. Allora, per il Lemma 9.6.1 e per (9.1),

$$\begin{aligned} |D^l(hf)(x)| &\leq B \sum_{j=0}^l |D^j h(x)| |D^{l-j} f(x)| \\ &= B \sum_{j=0}^l \frac{|D^j h(x)|}{1 + |x|^{k(j)}} (1 + |x|^{k(j)}) |D^{l-j} f(x)| \\ &\leq B \sum_{j=0}^l C_j (1 + |x|^{k(j)}) |D^{l-j} f(x)|. \end{aligned}$$

Scriviamo $K = \max \{C_j : 0 \leq j \leq l\}$. Dalla disuguaglianza precedente e dal Lemma 9.6.2 si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (1 + |x|^k) |D^l(hf)(x)| &\leq BK \sum_{j=0}^l (1 + |x|^k) (1 + |x|^{k(j)}) |D^{l-j}(f)| \\ &\leq 4BK \sum_{j=0}^l (1 + |x|^{k+k(j)}) |D^{l-j}(f)| \end{aligned}$$

e quindi

$$p_{kl}(hf) \leq C \sum_{j=0}^l p_{k+k(j), l-j}(f)$$

con $C = 4BK$. Questo dimostra la disuguaglianza (9.2).

Viceversa, la moltiplicazione per una funzione a crescita esponenziale non preserva la classe di Schwartz. Infatti, consideriamo il generico esponenziale $g(x) = e^{-\alpha|x|}$ con $\alpha > 0$. Esso tende a zero all'infinito a velocità esponenziale, e la stessa cosa accade a tutte le derivate, perché, per $x \neq 0$, $g'(x) = -\alpha \operatorname{sgn}(x)e^{-\alpha|x|}$ e quindi $|g'| = \alpha|g|$. Però g non è una funzione di Schwartz perché non è derivabile in 0. D'altra parte, grazie alla Proposizione 6.1.5 (ii), se prendiamo una identità approssimata in $L^1(\mathbb{R})$ data da una funzione ϕ di classe C^∞ a supporto compatto, allora, ponendo come al solito $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$, abbiamo che $f = \phi_\varepsilon * g$ è di classe C^∞ e tende ancora a zero a velocità esponenziale. Quest'ultimo fatto segue dal fatto che ϕ è non negativa con integrale 1, e quindi $\phi * h(x)$ è una media integrale dei valori di h nell'intervallo dato dal supporto di ϕ ma traslato in modo che sia centrato in x (pertanto il fatto che la decrescenza rimanga di velocità esponenziale è vero per ogni ε , quindi non ci sarebbe stato bisogno di introdurre la dilatazione di passo ε , ma l'abbiamo introdotta perché il risultato è più evidente quando ε è piccolo).

Questo dimostra che, per ogni $\alpha > 0$, nella classe di Schwartz ci sono funzioni f_α che tendono a zero all'infinito (con tutte le derivate) come $e^{-\alpha|x|}$. Se ora h cresce a velocità esponenziale per $x \rightarrow \infty$, diciamo come $e^{\beta x}$, allora hf_β non tende a zero all'infinito, e quindi non appartiene a \mathcal{S} . Lo stesso ragionamento vale per $x \rightarrow -\infty$. \square

9.7 La trasformata di Fourier sulla classe di Schwartz

Cominciamo questa Sezione con la dimostrazione dell'Esempio 9.5.5.

Certi di rendere più agevole seguire i prossimi calcoli, richiamiamo anzitutto le proprietà di commutazione fra derivazione e trasformata di Fourier viste nel Teorema 8.2.4 (viii) e 8.2.4 (vii):

$$\begin{aligned} D\widehat{f} &= -2\pi i x \widehat{f} \\ \widehat{Df} &= 2\pi i \omega \widehat{f}. \end{aligned}$$

In particolare, richiamiamo il Corollario 8.2.5:

Corollario 9.7.1. (Regole di commutazione.) Per ogni intero $l \geq 0$ e per $f \in \mathcal{S}$ poniamo

$$P^l f(x) = (-2\pi i x)^l f(x).$$

Allora $P^l : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$, P^l è continua su \mathcal{S} e fra la trasformata di Fourier \mathfrak{F} , l'operatore P di moltiplicazione per $-2\pi i x$, gli operatori $P^l = (-1)^{l+1} P$ di moltiplicazione per $(2\pi i x)^l$ e l'operatore di derivata D intercorrono le seguenti relazioni di commutazione:

$$\begin{aligned} D\mathfrak{F} &= \mathfrak{F}P, \\ \mathfrak{F}D &= -P\mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Dalla prima regola di commutazione segue

$$D^l \mathfrak{F} = \mathfrak{F}P^l;$$

dalla seconda,

$$\mathfrak{F}D^l = (-P)^l \mathfrak{F} = (-1)^l P^l \mathfrak{F}.$$

Pertanto,

$$P^k D^l \mathfrak{F} = (-1)^k \mathfrak{F} D^k P^l.$$

In particolare, se $f \in \mathcal{S}$, allora, per ogni $k, l \in \mathbb{N}$,

$$D^l(\widehat{f})(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P^l f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt.$$

e

$$(2\pi i \omega)^k D^l \widehat{f}(\omega) = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} D^k(P^l f)(t) e^{-2\pi i \omega t} dt. \quad (9.3)$$

Dimostrazione. Il fatto che $P^l f \in \mathcal{S}$ per ogni $f \in \mathcal{S}$ e che P^l sia continuo su \mathcal{S} sono stati mostrati nell'Esempio 9.5.4. Tutto il resto è il Corollario 8.2.5. \square

Nota 9.7.2. Le regole di commutazione del precedente Corollario 9.7.1 sono molto familiari agli studiosi di meccanica quantistica, perché in quel contesto l'operatore di moltiplicazione per la posizione x rappresenta la misura della posizione, mentre l'operatore di derivata rappresenta (a meno di normalizzazione) la misura dell'impulso. Le suddette regole di commutazione permettono allora di dimostrare che posizione ed impulso in meccanica quantistica non sono simultaneamente misurabili con accuratezza illimitata. Diamo un accenno a questa applicazione della trasformata di Fourier nell'Appendice 8.7. \square

Lemma 9.7.3. Per ogni $f \in \mathcal{S}$ e per ogni $k, l \in \mathbb{N}$

$$p_{kl}(\widehat{f}) \leq \pi (p_{2,k}(P^l f) + p_{2,0}(P^l f)).$$

In particolare, $\widehat{f} \in \mathcal{S}$ e l'operatore lineare che manda $P^l f$ in \widehat{f} è continuo su \mathcal{S} per ogni l .

Dimostrazione. Per provare la disuguaglianza dobbiamo stimare $|\omega|^k D^l \widehat{f}(\omega)$. In base a (9.3),

$$|\omega|^k \left| D^l \widehat{f}(\omega) \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{-\infty}^{\infty} |D^k(P^l f)(t)| dt. \quad (9.4)$$

Osserviamo che la funzione $\frac{1}{1+t^2}$ è in $L^1(\mathbb{R})$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Perciò da (9.4) segue che

$$\begin{aligned} |\omega|^k \left| D^l \widehat{f}(\omega) \right| &\leq \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|D^k(P^l f)(t)|}{1+t^2} (1+t^2) dt \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \left((1+t^2) |D^k(P^l f)(t)| \right) \left(\frac{1}{(2\pi)^k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \right) \\ &\leq \frac{\pi}{(2\pi)^k} p_{2,k}(P^l f) \leq \pi p_{2,k}(P^l f). \end{aligned}$$

Ponendo $k = 0$ si trova

$$|D^l \widehat{f}(\omega)| \leq \pi p_{2,0}(P^l f).$$

Quindi

$$\begin{aligned} p_{kl}(\widehat{f}) &\leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} (1 + |\omega|^k) |D^l(\widehat{f})(\omega)| \\ &\leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |D^l(\widehat{f})(\omega)| + \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\omega|^k |D^l(\widehat{f})(\omega)| \\ &\leq \pi (p_{2,0}(P^l f) + p_{2,k}(P^l f)). \end{aligned}$$

La continuità dell'operatore lineare $P^l f \mapsto \widehat{f}$ da \mathcal{S} a \mathcal{S} ora segue dalla Proposizione 2.5. \square

Corollario 9.7.4. Per ogni $f \in \mathcal{S}$,

$$p_{kl}(\widehat{f}) \leq 2^l \pi^{l+1} (p_{2,k+l}(f) + p_{2,l}(f)),$$

e quindi l'operatore di trasformata di Fourier è continuo su \mathcal{S} .

Dimostrazione. Basta osservare che, nella disuguaglianza dell'enunciato del lemma 9.7.3, si ha $p_{k0}(P^l f) = p_{k0}((-2\pi i)^l x^l f) = (2\pi)^l p_{kl}(f)$. \square

Per inciso, la dimostrazione della disuguaglianza (9.4) prova anche questa conseguenza interessante:

Corollario 9.7.5. L'immersione di \mathcal{S} in $L^1(\mathbb{R})$ è continua.

Dimostrazione. Come nella dimostrazione della disuguaglianza (9.4), per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} (1+t^2) dt \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \left((1+t^2)|f(t)| \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \right) \leq \pi p_{2,0}(f). \end{aligned}$$

\square

Ora completiamo il nostro obiettivo: la continuità della trasformata di Fourier su \mathcal{S} .

Teorema 9.7.6. La trasformata di Fourier sullo spazio \mathcal{S} è un operatore lineare \mathfrak{F} da \mathcal{S} a \mathcal{S} iniettivo, surgettivo e continuo.

Dimostrazione. Abbiamo visto nel Lemma 9.7.3 che \widehat{f} appartiene a \mathcal{S} se $f \in \mathcal{S}$, che l'operatore lineare $P^l f \mapsto \widehat{f}$ è continuo su \mathcal{S} , ed infine che l'operatore lineare $f \mapsto P^l f$ è continuo su \mathcal{S} per il Corollario 9.7.1, quindi l'operatore composto

$$\mathfrak{F} : f \mapsto P^l f \mapsto \widehat{f} = \mathfrak{F}(f)$$

è continuo su \mathcal{S} per la continuità della funzione composta (Sezione 1.1).

Dalla formula di inversione di Fourier (Teorema 8.4.2) sappiamo che $\mathfrak{F}^2(\omega) = \widehat{\widehat{f}}(\omega) = f(-\omega)$, e quindi $\mathfrak{F}^4 f(\omega) = f(\omega)$ per ogni f . Perciò ogni $f \in \mathcal{S}$ verifica $f = \mathfrak{F}^4 f = \mathfrak{F}(\mathfrak{F}^3 f)$, e quindi $f = \mathfrak{F}g$ con $g = \mathfrak{F}^3 f \in \mathcal{S}$. Pertanto \mathfrak{F} è surgettiva su \mathcal{S} . Infine, se $\mathfrak{F}f = \widehat{f} = 0$, allora $f = \mathfrak{F}^4 f = \mathfrak{F}^3(\mathfrak{F}f) = \mathfrak{F}^3(0) = 0$, quindi \mathfrak{F} è iniettiva. \square

Nota 9.7.7. Nella dimostrazione del Teorema 9.7.6 abbiamo mostrato che \mathfrak{F}^4 è l'identità. Quindi $\mathfrak{F}^{-1} = \mathfrak{F}^3$ e perciò anche la trasformata inversa \mathfrak{F}^{-1} è continua su \mathcal{S} . \square

Ora studiamo alcune proprietà della trasformata di Fourier nella classe di Schwartz. Prima stabiliamo la notazione seguente.

Notazione 9.7.8. Se $f, g \in L^2$, o anche se $f \in L^1$ e $g \in L^\infty$, scriviamo

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt$$

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt$$

Il prossimo teorema è stato già dimostrato: è la proprietà (iv) della Sottosezione 8.4 (rammentiamo che l'enunciato segue immediatamente dal Teorema di Fubini (Teorema 1.20.4) sullo scambio dell'ordine di integrazione negli integrali doppi di Lebesgue).

Teorema 9.7.9. (Teorema di Plancherel in \mathcal{S} , ovvero formula di dualità per la trasformata di Fourier). Per ogni $f, g \in \mathcal{S}$,

$$\langle \widehat{f}, g \rangle = \langle f, \widehat{g} \rangle.$$

Analogamente, conosciamo già (Corollario 8.5.2) la conseguenza qui di seguito rinunciata:

Corollario 9.7.10. (Isometria della trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$). Per ogni f in \mathcal{S} (e più in generale per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$),

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$$

Proposizione 9.7.11. Per ogni f, g in \mathcal{S} , $\langle f', g \rangle = -\langle f, g' \rangle$ e $(f', g) = -(f, g')$.

Dimostrazione. Dal teorema di integrazione per parti (Sezione 1.1)

$$\begin{aligned} (f', g) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx \\ &= [fg]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = 0$$

perché $f, g \in \mathcal{S}$. Quindi

$$(f', g) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx = -(f, g')$$

L'asserzione analoga per (f', g) si dimostra allo stesso modo, o più semplicemente segue da questa se si osserva che $(f', g) = \langle f', \bar{g} \rangle$. \square

9.8 Operatori di convoluzione su \mathcal{S}

Presentiamo infine una proprietà che ci sarà utile in seguito. Richiamiamo la definizione di convoluzione (Definizione 6.1.11): per ogni $k \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{S}$,

$$k * f(x) = \int k(x-t)f(t) dt .$$

Proposizione 9.8.1. Per ogni $k, f \in \mathcal{S}$,

$$kf \in \mathcal{S}, \quad k * f \in \mathcal{S} \quad \text{e} \quad \widehat{k * f} = \widehat{k} \widehat{f}$$

Dimostrazione. La prima asserzione equivale alla inclusione $\mathcal{S} \cdot \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$, che segue immediatamente dall'Esempio 9.5.4.

L'uguaglianza $\widehat{k * f} = \widehat{k} \widehat{f}$ è già stata dimostrata, più in generale, per ogni $k, f \in L^1(\mathbb{R})$ (Teorema 8.5.1). Ora, se $k, f \in \mathcal{S}$, anche $\widehat{k}, \widehat{f} \in \mathcal{S}$ (Teorema di surgettività 9.7.6), e così pure $\widehat{k} \widehat{f}$ in base all'Esempio 9.5.5. Perciò $\widehat{k * f} \in \mathcal{S}$ e quindi $k * f \in \mathcal{S}$ in base al Teorema di surgettività. \square

Dedichiamo il resto di questa sezione a ricavare qualche stima delle norme degli operatori di convoluzione su \mathcal{S} e su altri spazi normati.

Esempio 9.8.2. Se $h \in \mathcal{S}$, l'operatore da \mathcal{S} in \mathcal{S} definito da $T(f) = h * f$ è continuo, ossia per ogni seminorma p_{kl} esistono una costante $C > 0$ ed un numero finito di seminorme $p_{k_1 l_1}, \dots, p_{k_n l_n}$ tali che

$$p_{kl}(h * f) \leq C \sum_{i=1}^n p_{k_i l_i}(f) .$$

Infatti, in base ai Teoremi 8.5.1 e 9.7.6, l'applicazione $f \mapsto h * f$ è continua su \mathcal{S} se e solo se $f \mapsto hf$ lo è. La continuità di quest'ultimo operatore può essere dimostrata a partire dall'Esempio 9.5.4 e dall'Esercizio 9.5.1, perché $h * f(x) = \int M_{\lambda_x} h f$. Ma è più semplice osservare che, grazie al Teorema 9.7.6, l'operatore T manda \mathcal{S} in \mathcal{S} se e solo se lo stesso accade per l'operatore $\widehat{T} : \widehat{h} \mapsto \widehat{h}\widehat{f}$, ossia $\widehat{T} : u \mapsto uv$, dove u e v sono generici elementi in \mathcal{S} . Ma poiché le funzioni di Schwartz sono limitate e tutte le loro derivate, essendo ancora in \mathcal{S} , sono ancora limitate, questo fatto è un caso particolare dell'Esempio 9.5.4. \square

Esempio 9.8.3. Consideriamo ora un caso analogo. Sia $h \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $\widehat{h} \in C^\infty(\mathbb{R})$ a crescita polinomiale con tutte le derivate, e sia T l'operatore definito da $T(f) = h * f$. Mostrare che T manda \mathcal{S} in \mathcal{S} ed è continuo.

Come nel precedente Esempio 9.8.2, grazie al Teorema 9.7.6, l'operatore T manda \mathcal{S} in \mathcal{S} se e solo se lo stesso accade per l'operatore $\widehat{T} : f \mapsto gf$, dove $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $g = \widehat{h}$ per qualche h in $L^1(\mathbb{R})$, ed è continuo su \mathcal{S} se e solo se lo è \widehat{T} . D'altra parte, poiché $h \in L^1$, la sua trasformata di Fourier g è automaticamente limitata (Proposizione 8.2.3); dal momento che stiamo anche assumendo che g sia C^∞ e a crescita polinomiale con tutte le derivate, entrambe le asserzioni seguono dall'Esempio 9.5.4. \square

Esempio 9.8.4. Sia $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ e T l'operatore definito da $T(f) = h * f$. Mostriamo che

- (i) T manda \mathcal{S} in $L^\infty(\mathbb{R})$ ed è continuo;
- (ii) più in generale, T manda $L^1(\mathbb{R})$ in $L^\infty(\mathbb{R})$ ed è continuo.

Dimostriamo prima la parte (ii). Questa volta gli spazi di partenza e di arrivo sono spazi normati. Dobbiamo quindi trovare una maggiorazione per $\|T(f)\|_\infty$, ossia dimostrare che, per ogni $h \in L^\infty$ e $f \in \mathcal{S}$, esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|h * f\|_\infty \leq C \|f\|_1.$$

In effetti,

$$|h * f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(x-t)| |f(t)| dt \leq \|h\|_\infty \|f\|_1 \quad (9.5)$$

(osserviamo che questo fatto ci era già noto: è una applicazione immediata di un caso particolare della disuguaglianza di Hölder (Teorema 1.16.6)). Questo

prova (ii). Per dimostrare la parte (i), ora basta maggiorare la norma L^1 di una funzione di Schwartz come faremo anche in seguito in (11.7):

$$\|f\|_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+t^2)f(t)}{1+t^2} dt \leq p_{2,0}(f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \quad (9.6)$$

$$= p_{2,0}(f) \arctan t \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi p_{2,0}(f). \quad (9.7)$$

Infatti, da questo segue la parte (i), perché

$$\|h * f\|_{\infty} \leq \|h\|_{\infty} \|f\|_1 \leq \pi \|h\|_{\infty} p_{2,0}(f).$$

□

Esempio 9.8.5. Sia $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$ e T l'operatore definito da $T(f) = h * f$. Mostriamo che

(i) T manda \mathcal{S} in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$ ed è continuo;

(ii) più in generale, T manda $L^1(\mathbb{R})$ in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$ ed è continuo.

Questa volta la norma nello spazio di arrivo è $\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_{\infty}$. Anche in questo caso mostriamo prima la parte (ii). Se $h \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, grazie a (9.5), si ha

$$|h * f(x)| \leq \|h\|_{\infty} \|f\|_1$$

Quindi $\|h * f\|_{\infty} \leq \|h\|_{\infty} \|f\|_1$. Inoltre, per segue dal Teorema di Fubini 1.20.4 che

$$\begin{aligned} \|h * h\|_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x-t)| |f(t)| dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(u) du \right) |f(t)| dt = \|h\|_1 \|f\|_1. \end{aligned}$$

Sommando le due disuguaglianze appena provate otteniamo

$$\|T(f)\| \leq \|h\| \|f\|_1. \quad (9.8)$$

Questo prova la parte (ii).

Anche qui, per provare (i), basta applicare di nuovo la disuguaglianza (9.6): in tal modo, se $h \in \mathcal{S}$, otteniamo $\|h\| = \|h\|_1 + \|h\|_{\infty} \leq p_{00}(h) + \pi p_{20}(h)$. Questa disuguaglianza, combinata con (9.8), prova (i). □

9.9 Esercizi sulla classe di Schwartz

Esercizio 9.9.1. Quali delle seguenti funzioni appartengono alla classe di Schwartz \mathcal{S} ?

1. $\cos x - \sin x$
2. $\frac{\sin x}{1+x^2}$
3. $2x^3 + 2x - 3$
4. $2e^{-x^2}$
5. e^{-x}
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 9.9.2. Quali delle seguenti funzioni appartengono alla classe di Schwartz \mathcal{S} ?

1. $x^2 - x - 1$
2. e^{-x^2}
3. $e^x + e^{-x}$
4. $\frac{|x|}{x^2+1}$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 9.9.3. Quali delle seguenti funzioni appartengono alla classe di Schwartz \mathcal{S} ?

1. e^{-x^2}
2. $e^x + e^{-x}$
3. $e^{-x^2} \cos e^{x^2}$
4. $\frac{\cos x}{1+x^4}$

5. $x^3 - x^2 - x$
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. \square

Esercizio 9.9.4. Quali delle seguenti funzioni appartengono alla classe di Schwartz \mathcal{S} ?

1. $e^{-x^4} \cos e^{x^4}$
2. $e^x + e^{-x}$
3. $x^3 e^{-x^2}$
4. $3x^2 + 1$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. \square

Esercizio 9.9.5. Quali delle seguenti funzioni appartengono alla classe di Schwartz \mathcal{S} ?

1. $\frac{\cos x}{1+x^4}$
2. $e^{-x^4} \sin e^{x^4}$
3. x
4. e^{-x^3}
5. $e^x + e^{-x}$
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. \square

Esercizio 9.9.6. Quali delle seguenti funzioni appartengono alla classe di Schwartz \mathcal{S} ?

1. $\cos x - \sin x$
2. $\frac{\sin x}{1+x^2}$

3. $2x^3 + 2x - 3$
4. $2e^{-x^2}$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 9.9.7. Quali delle seguenti funzioni appartengono alla classe di Schwartz \mathcal{S} ?

1. e^{-x^2}
2. $e^x + e^{-x}$
3. $e^{-x^2} \cos e^{x^2}$
4. $\frac{\cos x}{1+x^4}$
5. $x^3 - x^2 - x$
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 9.9.8. Sia \mathcal{S} la classe di Schwartz. Quali delle seguenti affermazioni sono vere (eventualmente più di una oppure nessuna)?

1. $f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow fg \in \mathcal{S}$
2. $f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow f + g \in \mathcal{S}$
3. $f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S}$
4. i polinomi appartengono a \mathcal{S}
5. $f(x) = e^{-\pi x^2} \in \mathcal{S}$
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 9.9.9. Sia \mathcal{S} la classe di Schwartz. Quali delle seguenti affermazioni sono vere (eventualmente più di una oppure nessuna)?

1. $f(x) = e^x + e^{-x} \Rightarrow f \in \mathcal{S}$
2. $f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow f + g \in \mathcal{S}$
3. $f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S}$
4. $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$
5. $f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow p_{l,k}(f) = 1$
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 9.9.10. Quali delle seguenti funzioni appartiene alla classe di Schwartz \mathcal{S}

1. $f(x) = e^{-x^2} \cos e^{x^2}$
2. $f(x) = e^{-x^6}$
3. $f(x) = x^3 e^{-x^6}$
4. $f(x) = x^3 - x^2 + 3$
5. $f(x) = e^{-x^5}$
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 9.9.11. Quali delle seguenti funzioni appartiene alla classe di Schwartz \mathcal{S} ?

1. $f(x) = e^{-x^2}$
2. $f(x) = e^{-x^2} \sin e^{x^2}$
3. $f(x) = x^2 - x + 1$
4. $f(x) = e^{-x}$
5. $f(x) = x^2 e^{-x^4}$

6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

Esercizio 9.9.12. Quali delle seguenti funzioni appartengono alla classe di Schwartz?

1. $e^{-x^4} \cos e^{x^4}$
2. $e^x + e^{-x}$
3. $x^3 e^{-x^2}$
4. $3x^2 + 1$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

Esercizio 9.9.13. Quali delle seguenti funzioni appartengono alla classe di Schwartz \mathcal{S} ?

1. $\frac{\cos x}{1+x^4}$
2. $e^{-x^4} \sin e^{x^4}$
3. x
4. e^{-x^3}
5. $e^x + e^{-x}$
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

Esercizio 9.9.14. Sia \mathcal{S} la classe di Schwartz. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

1. $f(x) = e^x + e^{-x} \Rightarrow f \in \mathcal{S}$
2. $f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow f + g \in \mathcal{S}$

3. $f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S}$
4. $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$
5. $f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow p_{l,k}(f) = 1$
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 9.9.15. Quali delle seguenti funzioni appartengono alla classe di Schwartz \mathcal{S} ?

1. $\cos x - \sin x$
2. $\frac{\sin x}{1+x^2}$
3. $2x^3 + 2x - 3$
4. $2e^{-x^2}$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 9.9.16. Scrivere la definizione di spazio di Schwartz \mathcal{S} . Quali delle seguenti funzioni appartengono alla classe di Schwartz \mathcal{S} ?

1. e^{-x^2}
2. $e^x + e^{-x}$
3. $e^{-x^2} \cos e^{x^2}$
4. $\frac{\cos x}{1+x^4}$
5. $x^3 - x^2 - x$
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 9.9.17. Quali delle seguenti funzioni appartengono alla classe di Schwartz \mathcal{S} ?

1. $\cos x - \sin x$
2. $\frac{\sin x}{1+x^2}$
3. $2x^3 + 2x - 3$
4. $2e^{-x^2}$
5. e^{-x}
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 9.9.18. Quali delle seguenti funzioni appartengono alla classe di Schwartz?

1. $x^2 - x - 1$
2. e^{-x^2}
3. $e^x + e^{-x}$
4. $\frac{|x|}{x^2+1}$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 9.9.19. Quali delle seguenti funzioni appartengono alla classe di Schwartz \mathcal{S} ?

1. e^{-x^2}
2. $e^x + e^{-x}$
3. $e^{-x^2} \cos e^{x^2}$
4. $\frac{\cos x}{1+x^4}$
5. $x^3 - x^2 - x$
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 9.9.20. Sia \mathcal{S} la classe di Schwartz. Quali delle seguenti affermazioni sono vere (eventualmente più di una oppure nessuna)?

1. $f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow fg \in \mathcal{S}$
2. $f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow f + g \in \mathcal{S}$
3. $f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S}$
4. i polinomi appartengono a \mathcal{S}
5. $f(x) = e^{-\pi x^2} \in \mathcal{S}$
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 9.9.21. Quali delle seguenti funzioni appartiene alla classe di Schwartz \mathcal{S} ?

1. $f(x) = x^2 + 3x - 4$
2. $f(x) = e^{-x}$
3. $f(x) = e^{-x^2}$
4. $f(x) = xe^{-x^6}$
5. $f(x) = e^{-x^6} \sin e^{x^6}$
6. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 9.9.22. Quali delle seguenti funzioni appartiene alla classe di Schwartz \mathcal{S} ?

1. $f(x) = xe^{-x^2}$
2. $f(x) = e^{-x^4}$
3. $f(x) = e^{-x^4} \cos e^{x^4}$

4. \square $f(x) = x^3 + x - 1$
 5. \square $f(x) = e^{-x^3}$
 6. \square nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. \square

Esercizio 9.9.23. (i) Mostrare che, se $f \in \mathcal{S}$ e α è una costante positiva, anche $g(x) = f(\alpha x)$ appartiene a \mathcal{S} , e l'operazione di dilatazione $f(x) \mapsto f(\alpha x)$ è continua in \mathcal{S} .

Suggerimento: mostrare che $D^l g(x) = \alpha^l (D^l f)(\alpha x)$; pertanto, per ogni $k, l \in \mathbb{N}$,

$$p_{kl}(g) = \alpha^l \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^k) |D^l f|(\alpha x).$$

Inoltre $1 + |x|^k < 1 + |\alpha x|^k$ se $\alpha > 1$, e $1 + |x|^k = \alpha^{-k} (\alpha^k + |\alpha x|^k) \leq \alpha^{-k} (1 + |\alpha x|^k)$ se $\alpha \leq 1$. Quindi

$$p_{kl}(g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |\alpha x|^k) |D^l f(\alpha x)| \leq C p_{kl}(f),$$

dove $C = \max\{\alpha^l, \alpha^{l-k}\}$.

(ii) Consideriamo la Gaussiana $\phi(x) = e^{-\pi x^2}$. Utilizzando la parte precedente, determinare se il quadrato $\phi^2(x)$ appartiene a \mathcal{S} . Spiegare i passaggi.

Suggerimento: osservare che $\phi^2(x) = \phi(\sqrt{2}x)$.

(iii) Senza calcolare la convoluzione $\psi(x) \equiv \phi * \phi$, bensì utilizzando la parte precedente, determinare se $\psi \in \mathcal{S}$; spiegare tutti i dettagli.

Suggerimento: per il Teorema di surgettività 9.7.6, basta dimostrare che $\widehat{\psi}$ appartiene a \mathcal{S} . In base al Teorema 8.5.1, la trasformata di Fourier di $\psi = \phi * \phi$ è $\widehat{\phi}^2$. Poiché $\widehat{\phi}^2 = \phi^2$ per la Proposizione 8.3.2, basta applicare la parte (ii). \square

Esercizio 9.9.24. (i) Se $f \in \mathcal{S}$, $f^2 \in \mathcal{S}$? Spiegare.

(ii) Se $\phi(x) = \int_{-\infty}^x t^3 e^{-t^4} dt$, è vero che $\phi \in \mathcal{S}$? Spiegare. \square

Parte III

Distribuzioni temperate, campionamento e ricostruzione di segnali

Capitolo 10

Teoria del campionamento e ricostruzione dei segnali

10.1 Campionamento di segnali

Per immagazzinare ed elaborare i valori di un segnale dobbiamo discretizzarli, cioè ridurli ad una successione numerabile.

Più precisamente, consideriamo un segnale che varia nel tempo, diciamo $t \rightarrow f(t)$. Fissato un *passo di campionamento* $\tau > 0$ siamo interessati alla successione dei *valori campionati*

$$\{f(n\tau), n \in \mathbb{Z}\} .$$

Quando si digitalizza un segnale che varia nel tempo, lo si discretizza in questo modo, e si salvano i valori campionati in un file. Ad esempio, questo è ciò che succede quando si incide un brano musicale su un CD. Poi, però, per riascoltare il brano, si deve ricostruire il segnale originario. È chiaro che, se il passo di campionamento è piccolo, cioè se i campioni sono fitti, la successione dei dati campionati dà un'idea abbastanza precisa del grafico del segnale originale, come in Figura 10.1.

Esempio 10.1.1. Questa idea precisa si ha solo se i campioni sono presi su una griglia sufficientemente fitta. Supponiamo ad esempio di aver fissato τ e di campionare il segnale $f(t) = \sin \frac{\pi t}{\tau}$ a passi di τ , a partire da $t = 0$. I valori campionati sono

$$f(n\tau) = \sin n\pi = 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z} .$$

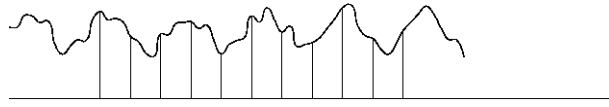


Figura 10.1: Valori campionati di un segnale

Il software che deve ricostruire il segnale originale non è in grado di sapere se questo segnale è $\sin \frac{\pi t}{\tau}$ oppure identicamente zero. Quindi, se il segnale consiste di una sinusoidale pura a frequenza elevata (rispetto al passo di campionamento), non è possibile ricostruirlo. \square

Nota 10.1.2. Nell'esempio 10.1.1, il segnale sinusoidale è

$$f(t) = \sin 2\pi\omega t$$

con $\omega = \frac{1}{2\tau}$. Quindi, se il passo di campionamento τ è $\frac{1}{2\omega}$, il segnale sinusoidale puro di frequenza ω , campionato sulla griglia $\{f(n\tau), n \in \mathbb{Z}\}$, non viene ricostruito. \square

Vedremo che, se i segnali considerati hanno spettro di Fourier compreso nell'intervallo $[-\omega_0, \omega_0]$, essi possono essere ricostruiti *senza perdite* a partire dai loro valori campionati con qualsiasi campionamento sufficientemente fitto: più precisamente per ogni passo di campionamento $\tau_0 < \frac{1}{2\omega_0}$. Osserviamo che il segnale sinusoidale $f(t) = \sin 2\pi\omega_0 t$ considerato nella Nota 10.1.2 corrisponde ad una armonica a frequenza ω_0 . Per questo segnale, che non è una funzione in $L^1(\mathbb{R})$, non abbiamo ancora introdotto la trasformata di Fourier, ma idealmente possiamo immaginare che, quando saremo in grado di farlo, lo spettro di Fourier risulti concentrato al punto ω_0 , quindi dentro l'intervallo $[-\omega_0, \omega_0]$: la Nota 10.1.2 mostra che un passo di campionamento uguale a $\frac{1}{2\omega_0}$ non è adeguato per ricostruire tale segnale. Vedremo in seguito, almeno in un caso particolare (Esercizio 13.5.1) il fatto seguente: neppure un passo di campionamento maggiore di $\frac{1}{2\omega_0}$ è adeguato per la ricostruzione. Il lettore è invitato a studiare il succitato Esercizio (affrontabile fin da adesso) e dimostrare questo fatto sulla sua falsariga.

Nota 10.1.3. Prima di procedere dobbiamo chiarire un dubbio. Un segnale di una variabile reale t porta certamente più informazioni di una successione numerabile $\{f(n\tau)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ dei suoi valori. Come possiamo sperare di ricostruirlo *esattamente*, per ogni t , a partire da questa successione numerabile di valori?

In questa domanda c'è un malinteso. Per chiarirlo esaminiamo una situazione analoga: quella delle serie di Fourier.

Ogni funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ coincide (nel senso di L^2) con la sua serie di Fourier $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$. Se poi f è C^1 a tratti (inclusi i punti $-\pi$ e π , perché la si immagina estesa per periodicità a tutto \mathbb{R}), allora essa coincide punto per punto con la sua serie di Fourier per ogni $t \in [-\pi, \pi]$. Quindi f è univocamente determinata dalla successione numerabile dei suoi coefficienti di Fourier.

Però... non è esattamente così. Tutti i valori $f(t)$ sono ricostruiti dal calcolo della somma della serie $\sum a_n e^{int}$ che si può compiere con precisione arbitraria *purché conosciamo esattamente* i valori di e^{int} , cioè i valori $\sin(nt)$ e $\cos(nt)$ per ogni n . Poiché $\cos(nt)$ è un traslato di $\sin(nt)$, è sufficiente conoscere quest'ultimo valore per ogni n . Dalle formule di addizione del seno si vede che è sufficiente conoscere tutti i valori di $\sin t$. Ma questi valori sono un continuo, non una successione numerabile. In altre parole, quando ricostruiamo un segnale a partire dai suoi coefficienti di Fourier, nessuno ci regala informazioni: dobbiamo anche conoscere il continuo dei valori $t \mapsto \sin t$ (con precisione arbitraria). \square

Anche nella ricostruzione esatta di un segnale a partire dai suoi valori campionati, questi valori appaiono come coefficienti di una serie di funzioni. Ma, invece che dilatati delle funzioni seno e coseno (come accadeva per le serie di Fourier) qui le funzioni dello sviluppo sono traslati della seguente funzione:

Definizione 10.1.4. (La funzione sinc.) La funzione *seno cardinale* è definita da $\text{sinc}(0) = 1$, e, per $x \neq 0$,

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Si osservi la analogia del seguente esercizio con quello corrispondente per le serie di Fourier (Esercizio 5.3.4):

Esercizio 10.1.5. Sia

$$\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

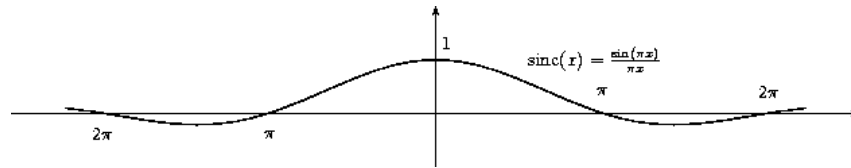


Figura 10.2: La funzione sinc

Allora la trasformata di Fourier

$$\widehat{\chi}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) e^{-2\pi i x \omega} dx$$

vale

$$\widehat{\chi}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\omega) = \text{sinc}(\omega).$$

□

10.2 Periodicizzazione, coefficienti e trasformata di Fourier

Approfondiamo in questa sezione il legame fra trasformata di Fourier di una funzione e serie di Fourier della funzione che si ottiene periodicizzando la precedente a partire dai suoi valori su un intervallo, esaminato in maniera intuitiva in Sezione 8.1.

Definizione 10.2.1. (Periodicizzazione.) Sia $f \in L^1$. Fissato come periodo l'intervallo $[0, 1]$, definiamo la periodicizzazione $\phi = \mathcal{P}f$ di passo 1 di f come

$$\phi(x) \equiv \mathcal{P}f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k). \quad (10.1)$$

In maniera analoga si definisce la periodicizzazione \mathcal{P}_T di passo $T > 0$. Il fatto che la serie converga è provato nel prossimo Lemma 10.2.2.

Lemma 10.2.2. *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, la serie in (10.1), converge nella norma L^1_* , o equivalentemente nella norma L^1 su ogni compatto (e quindi puntualmente quasi ovunque).*

Dimostrazione. Basta mostrare che la successione $S_{-m,n} := \sum_{k=-m}^n f(x+k)$ è di Cauchy nella norma di L^1_* , o nella norma L^1 su un qualsiasi compatto (qui prendiamo, come scelta naturale, il periodo $[0,1]$). Osserviamo che $S_{-m,n} = S_{-m,-1} + S_{0,n}$, e quindi basta dimostrare che la successione $S_{0,n}$ è di Cauchy nella norma di L^1_* (al variare di $n \in \mathbb{Z}$).

In effetti, per $j \leq n$,

$$\begin{aligned} \|S_{0,n} - S_{0,j}\|_{L^1[0,1]} &= \int_0^1 \left| \sum_{k=-j+1}^n f(x+k) \right| dx \leq \int_0^1 \sum_{k=j+1}^n |f(x+k)| dx \\ &= \int_{j+1}^{n+1} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$, l'integrale $\int_N^\infty |f(x)| dx$ tende a zero se N tende a infinito. Fissato $\varepsilon > 0$, sia N tale che $\int_N^\infty |f(x)| dx < \varepsilon$. Allora segue dalla precedente disuguaglianza che $\|S_{0,n} - S_{0,j}\|_{L^1[0,1]} < \varepsilon$ se $N \leq j \leq n$, e quindi la successione di funzioni $\sum_{k=-m}^n f(x+k)$ è di Cauchy nella norma di $L^1[0,1]$.

□

Proposizione 10.2.3. *Se $\phi = \mathcal{P}f$ denota il periodizzato di passo 1 di $f \in L^1$, allora $\|\mathcal{P}f\|_{L^1_*} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$, ed inoltre, fra i coefficienti di Fourier di ϕ e la trasformata di Fourier di f , intercorre la relazione seguente: per tutti gli $n \in \mathbb{N}$,*

$$\widehat{\phi}(n) = \widehat{f}(n).$$

Dimostrazione. Analogamente alla dimostrazione del Lemma 10.2.2, osserviamo che, per ogni n ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)e^{-2\pi inx} \right| dx &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |f(x+k)e^{-2\pi inx}| dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \end{aligned}$$

e quindi anche la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)e^{-2\pi inx}$ converge in L^1_* . D'altra parte, il funzionale $Tf = \int_0^1 f dx$ è continuo su L^1_* (Proposizione 1.19.1), perché $|Tf| \leq \int_0^1 |f| dx = \|f\|_{L^1_*}$. Quindi nella prossima identità la serie si scambia

con l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)e^{-2\pi inx} dx &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+k)e^{-2\pi inx} dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+k)e^{-2\pi in(x+k)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi inx} dx = \widehat{f}(n) \end{aligned}$$

poiché $e^{-2\pi ink} = 1$.

Allora da (10.1) segue

$$\widehat{\phi}(n) = \int_0^1 \phi(x)e^{-2\pi inx} dx = \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)e^{-2\pi inx} dx = \widehat{f}(n). \quad (10.2)$$

Per lo stesso argomento,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}f\|_{L^1_*} &= \int_0^1 \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k) \right| dx \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |f(x+k)| dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

□

Corollario 10.2.4. *Se nella Proposizione 10.2.3 si considera la periodizzazione $\mathcal{P}_T f$ di passo $T > 0$, si ottiene*

$$\widehat{\mathcal{P}_T f}(n) = \frac{1}{T} \widehat{f}(n/T).$$

Dimostrazione. Questo risultato segue subito dalla proprietà di dilatazione per la trasformata e per i coefficienti di Fourier, perché il periodizzato di passo T di f è il dilatato di fattore di scala T del periodizzato di passo 1 di f . Ne accenniamo invece il calcolo diretto.

Il ragionamento è identico a quello che dimostra la Proposizione 10.2.3:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{P}_T f}(n) &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}_T f(x) e^{-2\pi i n x / T} dx = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T f(x + kT) e^{-2\pi i n x / T} dx \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i n x / T} dx = \frac{1}{T} \widehat{f}(n/T).\end{aligned}$$

□

10.3 La formula di somma di Poisson

La relazione fra trasformata di Fourier di $f \in L^1$ e coefficienti di Fourier del periodicizzato di f vista nella precedente Sezione 10.2 porta ad un risultato fondamentale per il campionamento:

Proposizione 10.3.1. (Formula di somma di Poisson.) *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che la periodizzazione*

$$\phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \quad (10.3)$$

converga ad un valore ben definito e finito per $x = 0$ (questo è vero, ad esempio, se $f(x) = O(\frac{1}{1+|x|^{1+\delta}})$ quasi ovunque per qualche $\delta > 0$, e si sceglie un rappresentante di f nella sua classe di Lebesgue tale che se la serie converge puntualmente a $x = 0$, ad esempio se f è continua, nel qual caso i suoi valori puntuali sono ben definiti). Supponiamo inoltre che la serie di Fourier di ϕ converga al punto 0 al valore $\phi(0)$. Allora

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n). \quad (10.4)$$

Le ipotesi su ϕ sono verificate, ad esempio, se $f(x) = O(\frac{1}{1+|x|^{1+\delta}})$ ed anche $\widehat{f}(s) = O(\frac{1}{1+|s|^{1+\delta}})$, in particolare se $f \in \mathcal{S}$. Se in (10.4) la somma della serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)$ si intende nel senso di Féjèr (cioè del Teorema 6.2.5), allora per la validità di (10.4) basta assumere che ϕ sia continua in $x = 0$.

Dimostrazione. Consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier della funzione periodicizzata ϕ . In base alla Proposizione 10.2.3 si ha lo sviluppo

$$\phi(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}. \quad (10.5)$$

Dall'ipotesi che per $x = 0$ questo sviluppo converga a $\phi(0)$ si ha la formula dell'enunciato.

Se per qualche $C, \delta > 0$ si ha

$$|f(x)| < C \frac{1}{1 + |x|^{1+\delta}}$$

allora $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi f è continua in base alla formula di inversione di Fourier (Teorema 8.4.2) ed alla Proposizione 8.2.3, e la serie al primo membro di (10.4) ha senso ed è convergente per ogni x . Se inoltre, se per qualche $C, \delta > 0$ si ha

$$|\widehat{f}(s)| < C \frac{1}{1 + |s|^{1+\delta}}$$

allora la serie di Fourier al secondo membro di (10.5) converge uniformemente ovunque, in particolare converge a $x = 0$. Pertanto le ipotesi su ϕ sono soddisfatte, ad esempio, se $f \in \mathcal{S}$.

Per dimostrare l'ultima parte dell'enunciato, osserviamo che, se la convergenza della serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)$ si intende nel senso di Féjèr, cioè come limite delle somme parziali pesate con il nucleo di Féjèr, $\sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \widehat{f}(n)$, allora per il Teorema di Féjèr 6.2.5 la serie converge a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} (\phi(h) + \phi(-h))$, che coincide con $\phi(0)$ se assumiamo ϕ continua in 0. □

Applicando alla formula (10.4) il teorema di dilatazione per la trasformata di Fourier, Teorema 8.2.4 (iv), si ottiene la variante seguente:

Corollario 10.3.2. *Nelle stesse ipotesi della Proposizione 10.3.1, per ogni $\tau > 0$ si ha*

$$\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tau n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\frac{n}{\tau}\right).$$

In termini degli operatori di periodicizzazione introdotti nella Definizione 10.2.1, la precedente identità si scrive così:

$$\tau \mathcal{P}_\tau f(n) = \mathcal{P}_{\frac{1}{\tau}} \hat{f}(n).$$

Esercizio 10.3.3. Si ricavi dal Corollario 10.3.2 e dalla Proposizione 8.3.2 la seguente identità: per ogni $s > 0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 s} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 / s}.$$

□

Nota 10.3.4. È comodo avere ϕ periodica di periodo 1, onde ottenere (10.4) invece che l'identità del Corollario 10.3.2 per qualche $\tau \neq 1$. È anche per avere periodicità di periodo 1 che abbiamo usato la definizione di trasformata di Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt.$$

□

Nota 10.3.5. La formula di somma di Poisson,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k). \quad (10.6)$$

si può riscrivere nella seguente maniera equivalente, ottenuta applicando (10.6) al traslato $\lambda_x f$: per ogni $x \in \mathbb{R}$ al quale valgono le condizioni della formula di somma di Poisson (10.4) (ed in particolare entrambe le serie convergono),

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + k). \quad (10.7)$$

Infine, se $f \in \mathcal{S}$, poiché la trasformata di Fourier è un isomorfismo surgettivo di \mathcal{S} in sé (Teorema 9.7.6), applicando (10.7) con \hat{f} al posto di f ed usando la formula di inversione di Fourier (Teorema 8.4.2)

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{-2\pi i k t} dt = f(-k),$$

si ha, equivalentemente,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)e^{-2\pi ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x+k) \quad (10.8)$$

(abbiamo già osservato nella dimostrazione della Proposizione 10.3.1 che, se $f \in \mathcal{S}$, entrambe queste serie convergono per ogni x). Più in generale, consideriamo la formula di somma di Poisson di passo $\tau > 0$ invece che 1, introdotta nel Corollario 10.3.2. In termini degli operatori di periodizzazione della Definizione 10.2.1 la precedente identità (10.8) ed il Corollario 10.3.2 si scrivono così:

$$\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau)e^{2\pi in\tau x} = \mathcal{P}_{\frac{1}{\tau}} \widehat{f}(x), \quad (10.9)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. □

10.4 Funzioni a banda limitata e teorema del campionamento

Definizione 10.4.1. (*Classe a banda limitata.*) Dato $c > 0$ indichiamo con B_c lo spazio delle funzioni *limitate in banda* (o *classe di Paley-Wiener*) con frequenza di taglio c ,

$$B_c = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \widehat{f}(\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > c\}$$

cioè tali che \widehat{f} abbia supporto in $[-c, c]$.

Corollario 10.4.2. *Per ogni $f \in B_c$ si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$.*

Dimostrazione. Grazie alla formula di inversione di Fourier, Teorema 8.4.2, il fatto che f tenda a zero all'infinito segue direttamente dal fatto che $\widehat{f} \in L^1$, il che deriva dal fatto che ora \widehat{f} è continua a supporto compatto (Proposizione 8.2.3; si veda anche il Corollario 8.2.7 (i) e (ii)). Più precisamente, poiché \widehat{f} appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, la sua trasformata di Fourier tende a zero all'infinito, ma per la formula di inversione di Fourier, Teorema 8.4.2, questa trasformata di Fourier, a meno di una parità, coincide con la antitrasformata di Fourier di \widehat{f} , ossia con f .

Il fatto che f sia derivabile infinite volte segue anch'esso dalla formula di

inversione di Fourier e dal Corollario 8.2.7 (in altre parole, se $2\pi i x \widehat{f}$ è in L^1 allora f' esiste ed in effetti f' è l'antitrasformata di Fourier di $2\pi i x \widehat{f}$).

□

Proposizione 10.4.3. *Alle funzioni $f \in B_c$ si applica la formula di somma di Poisson (Proposizione 10.3.1).*

Dimostrazione. Le funzioni $f \in B_c$ sono in L^1 e quindi hanno trasformata di Fourier \widehat{f} continua (ed a supporto in $[-c, c]$). Osserviamo che, se si assume anche che \widehat{f} sia di classe C^∞ , allora \widehat{f} è C^∞ a supporto compatto e quindi appartiene alla classe di Schwartz (tutte le derivate sono a supporto compatto!). Allora, per il teorema di surgettività della trasformata di Fourier su \mathcal{S} , Teorema 9.7.6, anche f appartiene alla classe di Schwartz e quindi la formula di somma di Poisson si applica. Ora mostriamo come procedere senza l'ipotesi $\widehat{f} \in C^\infty$.

Ora sia f una generica funzione in B_c , $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$ la Gaussiana e $\psi_\rho(t) = \rho \varphi(\rho x) = \rho e^{-\pi \rho^2 t^2}$ l'identità approssimata (per $\rho \rightarrow +\infty$) di classe C^∞ già utilizzata nel Teorema 8.4.2. Sappiamo dalla Proposizione 6.1.5 che $f_\rho := f * \psi_\rho$ è in $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, e dalla proprietà di dilatazione della trasformata di Fourier (Teorema 8.2.4 (iv)) che $\widehat{f}_\rho(s) = \widehat{f}(s) \varphi(s/\rho)$: quindi $f_\rho \in B_c$ con trasformata di Fourier di classe C^∞ . Pertanto f_ρ soddisfa la formula di somma di Poisson: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_\rho(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_\rho(k)$. Ma $\widehat{f}_\rho(k) = \widehat{f}(k) \widehat{\psi}_\rho(k) = \widehat{f}(k) \varphi(k/\rho) = \widehat{f}(k) e^{-\pi k^2/\rho^2}$, e quindi la formula di somma di Poisson diventa

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{-\pi k^2/\rho^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f * \psi_\rho(k) = \mathcal{P}f * \psi_\rho(k),$$

dove lo scambio fra la convoluzione e la serie data dalla periodicizzazione è lecito perché la serie converge nella norma di $L^1(\mathbb{R})$ (Lemma 10.2.2) e l'operatore di convoluzione è continuo su $L^1(\mathbb{R})$ (Proposizione 6.1.5 (i)).

Come nella dimostrazione del Teorema 8.4.2, abbiamo che $f * \psi_\rho$ converge uniformemente a f in base al Teorema 6.1.8 di convergenza delle identità approssimate per funzioni continue e periodiche, e $\varphi(s/\rho)$ converge a 1 in maniera crescente per ogni s quando $\rho \rightarrow 0$; lo stesso argomento di quel Teorema, basato sul teorema di convergenza monotona, permette di

passare al limite per $\rho \rightarrow +\infty$ sotto il segno di serie, ed ottenere quindi $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)$. \square

Ora dimostriamo il teorema del campionamento: se un segnale in $L^1(\mathbb{R})$ è limitato in banda, esso è ricostruibile senza perdite dai suoi campioni su una griglia di campionamento sufficientemente fitta. Il teorema, che attribuiamo a E. T. Whittaker per il suo articolo [36] del 1915 (si vedano anche il libro [37] di suo figlio J. M. Whittaker del 1935 e l'articolo [16] di V.A. Kotelnikov del 1933), era forse già noto, in parte, a Cauchy.

Teorema 10.4.4. (Sviluppo in serie di Whittaker.) *Se $f \in B_{\frac{1}{2}}$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \operatorname{sinc}(x - k).$$

Dimostrazione. La dimostrazione intreccia intelligentemente trasformate e serie di Fourier, e loro troncamenti. Dalla Proposizione 8.2.3 sappiamo che $\widehat{f} \in C(\mathbb{R})$; inoltre $\widehat{f} = 0$ al di fuori dell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, quindi $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Sviluppiamo \widehat{f} in serie di Fourier nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (o equivalentemente sviluppiamo il periodicizzato a tutto \mathbb{R} di periodo 1 di $\widehat{f}|_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$, cioè $\phi(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega + k)$). Si noti che, dato che $f \in B_{\frac{1}{2}}$, nella serie $\phi(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega + k)$ per ogni ω c'è solo un termine non nullo, e quindi $\phi \equiv \widehat{f}$ in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (all'esterno di questo intervallo l'uguaglianza non vale: il primo membro è periodico ed il secondo è nullo). Con la notazione sviluppata in Sezione 5.2, scriviamo

$$\phi(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k \omega} \quad \text{per ogni } \omega \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (10.10)$$

$$\widehat{\phi}(k) = c_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widehat{f}(\theta) e^{-2\pi i k \theta} d\theta. \quad (10.11)$$

Poiché $\phi \in L^2_*$, i coefficienti di Fourier c_k sono una successione di quadrato sommabile, cioè appartengono allo spazio ℓ^2 definito nell'Esempio 4.4.2 (iii), in base all'identità di Parseval (Corollario 4.3.2 (iii)). La serie converge a ϕ nel senso di L^2 per il Corollario 4.3.4.

Più precisamente, la funzione \widehat{f} non è periodica, ma stiamo sviluppando \widehat{f} in serie di Fourier in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Per questo la somma della serie in (10.10), laddove converge, è la periodicizzazione ϕ di \widehat{f} . In questa serie compaiono i coefficienti di Fourier calcolati integrando su un periodo. Però possiamo invece scrivere, al loro posto, opportuni valori della trasformata di Fourier di \widehat{f} , come osservato nella Nota 10.4.3. Per chiarezza, nelle prossime righe preferiamo scrivere la trasformata di Fourier come in Sezione 8.2 ed in Sezione 9.7 $\widehat{f} = \mathfrak{F}f$. Con questa notazione, in quella Nota abbiamo visto che, per ogni k , si ha $c_k = \widehat{\phi}(k) = \mathfrak{F}\mathfrak{F}f(k) = f(-k)$: quindi la successione $\{f(k), k \in \mathbb{Z}\}$ appartiene allo spazio ℓ^2 e

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(-k)e^{2\pi i k \omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)e^{-2\pi i k \omega} \quad \forall \omega \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \quad (10.12)$$

L'identità in (10.12) vale in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ nel senso di L^2 , ma non vale mai fuori di $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (rammentiamo ancora che all'esterno di questo intervallo il primo membro è nullo mentre il secondo è periodico). Ora, invece, procediamo al contrario: estendiamo lo sviluppo (10.12) ad un altro sviluppo valido su tutto \mathbb{R} . A questo scopo, osservando ancora che \widehat{f} ha supporto in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, notiamo che \widehat{f} coincide la funzione ottenuta dalla propria periodicizzazione ϕ (da $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a tutto \mathbb{R}) quando si tronca nuovamente il risultato a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Il modo di procedere è un *filtraggio*: la moltiplicazione per il filtro passa basso

$$\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } |\omega| > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (10.13)$$

Si noti che questo filtro si dovrebbe naturalmente chiamare *passa banda*, perché lascia passare un intervallo di frequenze, ma questo intervallo di frequenze è centrato in zero; poiché molti segnali sono a valori reali, la loro trasformata di Fourier è identificata univocamente dai valori a frequenze positive (la parte reale è pari e quella immaginaria dispari, Corollario 8.2.6 (iii)): pertanto è tradizione chiamare questo tipo di filtri *passa basso*.

In altre parole, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ si ha

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\omega).$$

Quindi ecco come l'identità (10.12) si estende a tutto \mathbb{R} : nel senso della convergenza in $L^2(\mathbb{R})$ vale l'identità

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)e^{-2\pi ik\omega}\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (10.14)$$

(ora entrambi i membri si annullano per $|\omega| > \frac{1}{2}$, mentre per $|\omega| \leq \frac{1}{2}$ l'uguaglianza (10.14) coincide con (10.12)).

Ora ci liberiamo del fattore $\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$, cioè del filtro.

Indichiamo come sempre con \mathfrak{F}^{-1} l'operatore di trasformata di Fourier inversa e con λ_k l'operatore di traslazione di passo k , cioè

$$\lambda_k h(x) = h(x - k). \quad (10.15)$$

Rammentiamo che, per ogni $h \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\mathfrak{F}\lambda_k h(\omega) = e^{-2\pi ik\omega}\mathfrak{F}h(\omega)$$

(Teorema 8.2.4 (v)). Quindi, poiché l'operatore di trasformata di Fourier inversa coincide con quello di trasformata di Fourier a meno del segno della variabile (Teorema 8.4.2, o anche Teorema 8.2.4 (iii)), si ha

$$\mathfrak{F}^{-1}\lambda_k h(\omega) = e^{2\pi ik\omega}\mathfrak{F}^{-1}h(\omega).$$

Inoltre abbiamo visto nell'Esercizio 10.1.5 che $\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} = \mathfrak{F}^{-1}(\text{sinc})$. Grazie al fatto che la funzione caratteristica $h = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ è pari, abbiamo $\mathfrak{F}^{-1}h = \mathfrak{F}h = \text{sinc}$ (parte (ii) del Teorema 8.2.4) e

$$\mathfrak{F}^{-1}(\lambda_k \text{sinc})(\omega) = e^{2\pi ik\omega}\mathfrak{F}^{-1}\text{sinc} = e^{2\pi ik\omega}h(\omega)$$

(parte (ii) dello stesso Teorema applicata a \widehat{f} invece che a f). In altre parole,

$$e^{-2\pi ik\omega}\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\omega) = \mathfrak{F}^{-1}(\lambda_k \text{sinc})(-\omega).$$

Pertanto (10.14) diventa

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\mathfrak{F}^{-1}(\lambda_k \text{sinc})(-\omega) \quad \text{per ogni } \omega \in \mathbb{R}.$$

La serie converge nel senso di L^2 perché l'uguaglianza (10.14) vale nel senso della convergenza in L^2 .

Ora applichiamo la trasformata di Fourier ad entrambi i membri. Poiché la trasformata di Fourier è un isomorfismo isometrico (quindi continuo) nella norma di $L^2(\mathbb{R})$ (Teorema di Plancherel: Corollario 8.5.2), e la serie a secondo membro converge in L^2 , l'operatore di trasformata di Fourier commuta con la serie e pertanto, grazie alla proprietà di parità (Teorema 8.2.4 (ii)), si ottiene la seguente uguaglianza che vale nel senso di L^2 :

$$f(-x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)(\lambda_k \operatorname{sinc})(-x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \operatorname{sinc}(-x - k),$$

cioè, scrivendo $-x$ al posto di x ,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \operatorname{sinc}(x - k). \quad (10.16)$$

Questa identità vale in L^2 , quindi, in particolare, quasi ovunque, per la definizione delle funzioni in L^p come classi di equivalenza quasi ovunque (Definizione 1.16.16). Dobbiamo dimostrare che vale puntualmente ovunque. Purtroppo, sebbene la successione $\{f(k) = \widehat{\phi}(-k)\}$ appartenga a ℓ^2 , non è detto che sia anche in ℓ^1 , se no potremmo applicare il test di Weierstrass (Teorema 1.3.29) e dimostrare addirittura che (10.16) vale uniformemente. Invece, occorre svolgere un calcolo più faticoso.

Il primo membro di (10.16) è una funzione continua, perché in $B_{\frac{1}{2}}$. Quindi basta dimostrare che lo è anche il secondo membro. Se la serie a secondo membro converge uniformemente allora abbiamo la continuità, perché i suoi termini sono funzioni continue. Dimostriamo allora che la serie converge uniformemente. Essa è il prodotto scalare in ℓ^2 delle due successioni $\{f(k)\}$ e $\{\operatorname{sinc}(x - k)\}$. Abbiamo già osservato che la prima appartiene a ℓ^2 ; la seconda vi appartiene perché la funzione $\operatorname{sinc}(x - k)$ decresce all'infinito come $\frac{1}{k}$, per ogni fissato x (Definizione 10.1.4).

Per provare che la serie al secondo membro di (10.16) converge uniformemente basta dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n = n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (indipendente da x) tale che

$$\sum_{|k|>n} |f(k)| |\operatorname{sinc}(x - k)| < \varepsilon.$$

Per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz in ℓ^2 (Proposizione 4.5.1),

$$\sum_{|k|>n} |f(k)| |\operatorname{sinc}(x-k)| < \sqrt{\sum_{|k|>n} |f(k)|^2} \sqrt{\sum_{|k|>n} |\operatorname{sinc}(x-k)|^2}. \quad (10.17)$$

Osserviamo che $|\operatorname{sinc}(x-k)| \leq 1$ per ogni x e k e $|\operatorname{sinc}(x-k)| \leq 1/|x-k|$ per ogni x, k tali che $|x-k| \geq 1$, nella seconda serie al membro di destra separiamo dagli altri i termini con $|x-k| < 1$ (che sono al più due e si possono ciascuno maggiorare con il valore massimo della funzione sinc, ossia 1), ed otteniamo

$$\sum_{|k|>n}^{\infty} |f(k)| |\operatorname{sinc}(x-k)| < \sqrt{\sum_{|k|>n} |f(k)|^2} \sqrt{2 + \sum_{|k|>n, |x-k| \geq 1} \frac{1}{|x-k|^2}}.$$

Delle due serie al secondo membro, la prima tende a zero con n , per l'appartenenza a ℓ^2 della successione degli addendi $\{f(k)\}$, e la seconda converge uniformemente per il test di Weierstrass (Sezione 1.1); anzi, tende uniformemente a zero quando $n \rightarrow \infty$, perché è dominata dalle code della serie convergente $\sum_k 1/k^2$ (la maggiorazione è uniforme su x perché in realtà la serie $\sum_k 1/|x-k|^2$ è una funzione periodica di periodo 1, visto che sommiamo su tutti i $k \in \mathbb{Z}$, e quindi basta dimostrare che la maggiorazione vale per ogni x nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$: tralasciati gli interi k più vicini a x , per tutti gli altri k si ha $|x-k| > 1$ e $\operatorname{sinc}^2(x-k) < 1/(x-k)^2$. Poiché la distanza fra x e k cresce linearmente in k , quando $0 \leq x < 1$ questi termini sono definitivamente maggiorati da $(1+k)^{-2}$ (si veda l'esercizio seguente). Questo completa la dimostrazione. \square

Esercizio 10.4.5. Si ricavi la maggiorazione uniforme rispetto a x del secondo membro dell'identità 10.17 nelle seguenti due maniere alternative:

- (i) maggiorando uniformemente la serie $\sum_k (\operatorname{sinc}(x-k))^2$.

Suggerimento: anche questa serie è una funzione periodica (di periodo 1), ed i suoi termini, per $0 \leq x < 1$, sono maggiorati uniformemente da $1/k^2$;

- (ii) osservando che sinc^2 è la trasformata di Fourier della funzione $t = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} * \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$, la quale è una funzione (con grafico triangolare) a supporto compatto in $[-1, 1]$, ed applicando la formula di somma di Poisson (Proposizione 10.3.1).

□

Ora cambiamo la scala, per passare dal campionamento a passo 1 al campionamento a passo arbitrario. L'enunciato che si ottiene è stato associato al nome dell'ingegnere Claude Shannon, per il suo articolo [27] sulla teoria della comunicazione dell'informazione, pubblicato nel 1948 (si veda anche l'articolo [28] dell'anno successivo).

Corollario 10.4.6. (Teorema del Campionamento di Shannon.) Per ogni $\omega_0 > 0$, $f \in B_{\omega_0}$ e $x \in \mathbb{R}$, vale la seguente formula di ricostruzione del segnale f a partire dai valori campionati $\left\{ f\left(\frac{k}{2\omega_0}\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2\omega_0}\right) \operatorname{sinc}(2\omega_0 x - k)$$

Dimostrazione. Questo enunciato segue in maniera ovvia dal Teorema 10.4.4, se applichiamo il teorema di dilatazione per la trasformata di Fourier (Teorema 8.2.4 (iv)). Infatti, ponendo $g(x) = f\left(\frac{x}{2\omega_0}\right)$, si ha per il succitato teorema

$$\widehat{g}(\omega) = 2\omega_0 \widehat{f}(2\omega_0 \omega)$$

e quindi $g \in B_{\frac{1}{2}}$ perché si assume $f \in B_{\omega_0}$. Pertanto il Teorema 10.4.4 implica, per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) \operatorname{sinc}(t - k).$$

Ma $g(t) = f\left(\frac{t}{2\omega_0}\right)$, e quindi

$$f\left(\frac{t}{2\omega_0}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2\omega_0}\right) \operatorname{sinc}(t - k) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ora scrivendo $x = \frac{t}{2\omega_0}$ otteniamo la formula dell'enunciato.

□

Nota 10.4.7. Lo sviluppo in serie di Whittaker ricostruisce una funzione $f \in B_{\frac{1}{2}}$ come serie di traslati della funzione sinc. La funzione sinc ha valore massimo 1. Nella serie, il termine k -esimo è $f(k) \operatorname{sinc}(x - k)$: esso consiste

della funzione sinc traslata di passo k (così da avere massimo per $x = k$), e dilatata verticalmente in modo che, per $x = k$, il suo valore sia $f(k)$ invece di 1. Quindi f viene ottenuta sovrapponendo e sommando queste funzioni oscillanti ed appropriatamente dilatate.

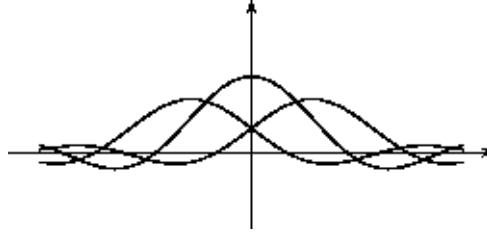


Figura 10.3: Le funzioni che costituiscono i termini dello sviluppo in serie di Whittaker

□

Nota 10.4.8. Si osservi dal disegno che i traslati delle sinc si annullano su tutti gli interi eccetto quello in cui raggiungono il valore massimo. Dimosteremo tra poco che questo fatto è vero, ma prima osserviamo che al punto $x = m$ si ha

$$f(m) \operatorname{sinc}(x - m)|_{x=m} = f(m) \operatorname{sinc}(0) = f(m).$$

Però il teorema di Whittaker dice che

$$f(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \operatorname{sinc}(m - k) = f(m) + \sum_{k \neq m} f(k) \operatorname{sinc}(m - k)$$

Pertanto per ogni m deve valere

$$\sum_{k \neq m} f(k) \operatorname{sinc}(m - k) = 0.$$

Fissato m , possiamo pensare questa serie come un prodotto scalare in ℓ^2 , fra il vettore dato dalla successione $\{f(k), k \in \mathbb{Z}, k \neq m\}$ e quello dato da $\{\operatorname{sinc}(m - k), k \in \mathbb{Z}, k \neq m\}$

Esercizio 10.4.9. Mostrare che quest'ultima successione è in ℓ^2 .

□

Al variare di $f \in B_{\frac{1}{2}}$ la successione $\{f(k)\}$ descrive una successione di dati: si tratta di una generica successione in ℓ^2 . Dire che il prodotto scalare sia *sempre* zero, per ogni tale successione, equivale a dire che il funzionale lineare su ℓ^2 individuato (nel senso del Teorema di rappresentazione di Riesz 4.6.4) dalla successione $k \mapsto \text{sinc}(m-k)$ sia nullo: ossia che si abbia $\text{sinc}(m-k) = 0$ se $k \neq m$.

Ed infatti:

$$\text{sinc}(j) = \frac{\sin(\pi j)}{\pi j} = 0$$

se j è intero e diverso da zero.

In altre parole, il traslato di passo k della funzione sinc vale uno per $x = k$, ma vale zero per ogni x intero diverso da zero. Quindi

$$\text{sinc}(m-k) = \delta_{mk} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = k \\ 0 & \text{se } m \neq k \end{cases}$$

e

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \text{sinc}(m-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \delta_{mk} = f(m).$$

Analogamente, il teorema di Shannon (Corollario 10.4.6) dice che

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2\omega_0}\right) \text{sinc}(2\omega_0 x - k)$$

Se x è un punto della griglia di campionamento (cioè $x = \frac{m}{2\omega_0}$ con m intero) si ottiene una identità, perché $\text{sinc}(2\omega_0 x - k) = \text{sinc}(m - k) = \delta_{mk}$. \square

Nota 10.4.10. La nota precedente si può ripensare in termini di algebra lineare. Abbiamo un vettore di dati $F_f = \{f(k)\}$ (con infinite componenti) ed una "matrice" a dimensione infinita $M = \{\text{sinc}(m-k)\}_{m,k=-\infty}^{\infty}$. Lo sviluppo di Whittaker, letto per $x = m \in \mathbb{Z}$, dice che $F_f = MF_f$ per ogni $f \in B_{\frac{1}{2}}$.

Al variare di f in $B_{\frac{1}{2}}$, la successione F_f descrive il vettore generico di ℓ^2 (questo fatto intuitivo non lo dimostriamo). Perciò per ogni vettore v si ha $Mv = v$. Ma allora M è l'identità, cioè

$$M_{mk} = \text{sinc}(m-k) = \delta_{mk}$$

\square

Nota 10.4.11. Il teorema del campionamento di Shannon (Corollario 10.4.6) dice che un segnale con frequenza limitata da ω_0 , quindi con ampiezza di banda pari a $2\omega_0$, può essere ricostruito esattamente (senza perdite) a partire dai suoi valori su una griglia di campionamento di passo $\tau = \frac{1}{2\omega_0}$. Se il segnale ha ampiezza di banda superiore allora non è ricostruibile esattamente da questo campionamento. Ma cosa succede se al di fuori della banda di frequenza $[-\omega_0, \omega_0]$ la trasformata di Fourier \widehat{f} del segnale f non è nulla ma ha valori piccoli (rispetto ad una soglia opportunamente prefissata) e tendenti a zero rapidamente per $\omega \rightarrow \pm\infty$? Il teorema di Shannon non è applicabile, però ci aspettiamo che a partire dallo stesso campionamento il segnale sia ricostruibile con perdite, ma perdite piccole, trascurabili. Questo è vero, ma per provarlo dobbiamo riformulare la dimostrazione del teorema di Shannon in termini dell'approssimazione dei segnali a banda limitata con segnali a decrescenza rapida (questa riformulazione è presentata nel capitolo 13: si vedano in particolare Sezione 13.1 e Sezione 13.5). Per questo introdurremo, nel prossimo capitolo, le distribuzioni temperate. \square

Capitolo 11

Modellazione matematica del processo di campionamento: le distribuzioni temperate e le distribuzioni

11.1 Il campionamento di segnali visto come funzionale lineare

Consideriamo uno spazio vettoriale di funzioni di una variabile reale, che rappresentano segnali (elettrici, acustici, e così via). Useremo a questo scopo la classe di Schwartz \mathcal{S} .

Il campione del segnale f al tempo t è il valore $f(t)$. Quindi prendere il campione al tempo t significa effettuare la *lettura*

$$\delta_t : f \rightarrow f(t).$$

δ_t è una applicazione da \mathcal{S} a \mathbb{C} , che si chiama *delta di Dirac* al tempo t ; è una applicazione lineare, perché, date due funzioni test f_1 e f_2 e due costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, il campione della combinazione lineare $c_1 f_1 + c_2 f_2$ è la combinazione lineari dei campioni:

$$\begin{aligned}
\delta_t(c_1 f_1 + c_2 f_2) &= (c_1 f_1 + c_2 f_2)(t) \\
&= c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \\
&= \delta_t(c_1 f_1) + \delta_t(c_2 f_2).
\end{aligned}$$

Inoltre $\delta_t : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{C}$ è continuo in base al Corollario 9.2.2, perché

$$|\delta_t f| = |f(t)| \leq \|f\|_\infty = p_{00}(f).$$

Quindi la lettura del campione al tempo t è un funzionale lineare continuo sullo spazio \mathcal{S} .

Dal punto di vista fisico, però, questa modellazione è una estrapolazione. Se vogliamo misurare il valore di un segnale al tempo t dobbiamo tener conto dell'inerzia degli strumenti di misura. Il valore che leggiamo è una media dei valori istantanei in un piccolo intervallo temporale. Un modello possibile è il seguente:

$$\text{valore campionato di } f \text{ a } t_0 = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(s) ds. \quad (11.1)$$

Naturalmente l'espressione (11.1) è appropriata se lo strumento di misura effettua la lettura nell'intervallo $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ trattando tutti i valori istantanei in questo intervallo con lo stesso peso. In tal caso diciamo che la risposta dello strumento all'impulso all'istante t_0 è

$$\frac{1}{2\varepsilon} \chi_{[-\varepsilon, \varepsilon]},$$

dove χ , come al solito, denota la funzione caratteristica dell'intervallo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, come in Figura 11.1

L'espressione (11.1) dice che il valore campionato al tempo t_0 è la convoluzione

$$\left(\frac{1}{2\varepsilon} \chi_{[-\varepsilon, \varepsilon]} * f \right)(t).$$

(Definizione 6.1.11). Naturalmente, la risposta all'impulso, ossia la funzione usata per convolvere, potrebbe cambiare con il tempo, per esempio con l'invecchiamento dello strumento di misura.

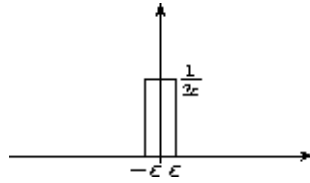


Figura 11.1: Il peso per la media integrale

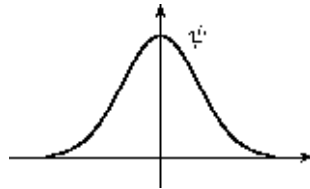


Figura 11.2: Un peso per una media pesata

Altri strumenti potrebbero avere una risposta diversa, più graduale. La loro curva di risposta sarà una più generale funzione positiva di integrale 1, come, ad esempio, la funzione ψ dal grafico illustrato nella Figura 11.2.

Assumeremo d'ora in avanti che la curva di risposta dello strumento di misura non si modifichi con il tempo, cioè non vari con l'età dello strumento. Sotto questa ipotesi di invarianza per traslazione temporale, la risposta dello strumento centrata al tempo t è il traslato della sua risposta ψ centrata al tempo 0, cioè è la funzione traslata $\lambda_t \psi$ data da $s \rightarrow \psi(s - t)$. Scrivendo $\psi^\dagger(s) = \psi(-s)$ abbiamo quindi che il valore campionato è dato da

$$\text{valore campionato a } t = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \phi^t(s) ds,$$

dove $\phi^t(s) = \psi(s - t) = \psi^\dagger(t - s) = \lambda_{-t} \psi(s) = \lambda_s \psi^\dagger(t)$, e quindi dalla convoluzione (Definizione 6.1.11)

$$\psi^\dagger * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^\dagger(t - s) f(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s - t) f(s) ds.$$

Per comodità di notazione, in seguito chiameremo ψ^\dagger invece che ψ la curva

di risposta, e quindi scriveremo il valore campionato al tempo t come

$$\psi * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^\dagger(s-t)f(s)ds.$$

In altre parole, il valore campionato per i diversi valori di t si ottiene facendo una media integrale del segnale rispetto ad un peso ϕ , sempre della stessa forma, ma traslato in maniera da centrarlo in t , come illustrato nelle Figure 11.3 e 11.4.

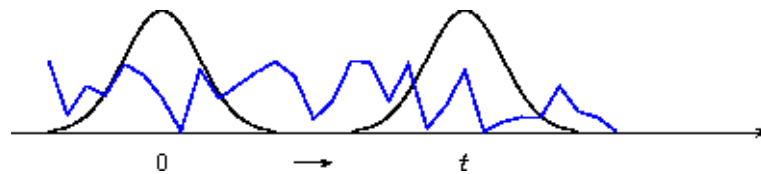


Figura 11.3: Collocazione del peso per il campionamento approssimato al tempo t , nell'ipotesi di invarianza temporale dello strumento di misura

Il peso ϕ dipende dalla risposta dello strumento di misura. Ma naturalmente noi ci aspettiamo che il valore *esatto* del segnale sia indipendente dallo strumento di misura. Questa è una ipotesi che ha senso solo per misure di fenomeni macroscopici, nei quali il procedimento di misura non altera il valore da misurare: se ad esempio volessimo trovare la posizione di una particella elementare, diciamo "illuminandola con un flash", i fotoni del raggio di luce che bombardano la particella potrebbero spostarla e quindi cambiarne la posizione (o altrimenti ne cambierebbero la velocità). Ma per i segnali di

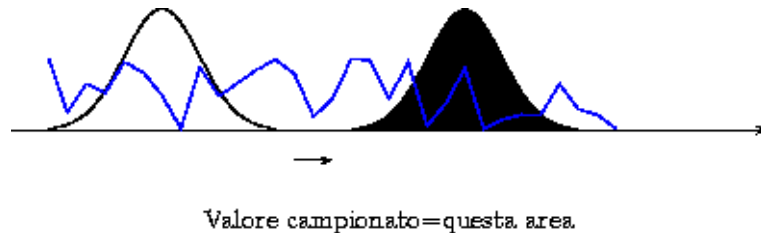


Figura 11.4: Campionamento approssimato tramite medie pesate nell'ipotesi di invarianza temporale dello strumento di misura

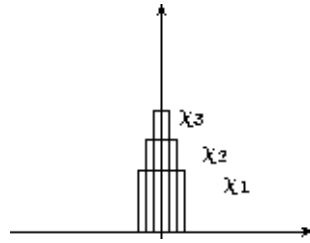


Figura 11.5: Identità approssimate con funzioni semplici

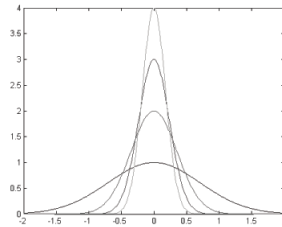


Figura 11.6: Identità approssimate con funzioni a campana

interesse in multimedialità questa ipotesi generalmente ha senso. Perciò possiamo immaginare di poter cambiare strumento di misura, raffinandolo via via di più, fino a precisione illimitata. Nei due esempi di curva di risposta di uno strumento che abbiamo disegnato più sopra, questo vuol dire prendere curve sempre più *strette ed alte*, ma tutte con integrale uno (altrimenti il valore restituito dalla misura non sarebbe una media). Avremmo quindi una successione di funzioni di risposta ϕ_α , $\alpha > 0$, dove

$$\phi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha} \phi\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

è una versione di ϕ compressa orizzontalmente e dilatata verticalmente in modo da lasciare inalterato l'integrale, come nelle Figure 11.5 e 11.6.

Quindi il valore *esatto* è

$$f(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \phi_\alpha * f(t).$$

Riformuliamo tutto ciò in termini di convoluzioni. Richiedere che il valore vero non dipenda dallo strumento di misura significa asserire che, se per ogni

ϕ non negativa e di integrale 1 si pone

$$\phi_{\alpha}^{\dagger}(s) = \phi_{\alpha}^{\dagger}(s) = \frac{1}{\alpha} \phi^{\dagger}\left(\frac{s}{\alpha}\right),$$

allora per ogni $f \in \mathcal{S}$ esista e non dipenda dalla scelta di ϕ il limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \langle \lambda_t \phi_{\alpha}^{\dagger}, f \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_t \phi_{\alpha}^{\dagger}(s) f(s) ds$$

(dove la notazione è quella della Notazione 9.7.8, $\lambda_t \phi_{\alpha}^{\dagger}$ è il traslato di ϕ_{α}^{\dagger} di passo t come in (10.15), e quindi $\lambda_t \phi_{\alpha}^{\dagger}(s) = \phi_{\alpha}^{\dagger}(s - t) = \phi_{\alpha}(t - s)$).

Abbiamo così concluso che il valore esatto $f(t)$ deve coincidere con il limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \langle \lambda_t \phi_{\alpha}^{\dagger}, f \rangle$$

per ogni scelta di $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, non negativa e di integrale uno.

In sintesi, il valore istantaneo è $f(t) = \delta_t(f)$; invece il valore letto dallo strumento di misura è la seguente convoluzione (Definizione 6.1.11):

$$T_{\lambda_t \phi_{\alpha}^{\dagger}} f \equiv \langle \lambda_t \phi_{\alpha}^{\dagger}, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\alpha}^{\dagger}(s - t) f(s) ds = \phi_{\alpha} * f(t). \quad (11.2)$$

Nota 11.1.1. Osserviamo che, se il segnale f coincide con δ_{t_0} , ovvero se si tratta di un segnale puramente impulsivo (un singolo picco) al tempo t_0 , allora, in base a (11.2), il valore letto dallo strumento di misura al tempo t dovrebbe essere esattamente il traslato temporale $\phi_{\alpha}^{\dagger}(t_0 - t) = \phi_{\alpha}(t - t_0)$ di passo t_0 della curva di risposta ϕ_{α} dello strumento di misura. Per questo motivo la curva di risposta si chiama di solito la *risposta impulsiva*, o anche *risposta all'impulso* dello strumento.

Un esempio di strumento di misura un po' insolito, eppure frequentissimo, è un auditorium con riverbero (come tutti gli auditorium). In questo caso l'auditorium, insieme al microfono di registrazione, è lo strumento di misura, e quindi il valore del segnale acustico registrato al tempo t in risposta ad un impulso ivi generato al tempo t_0 è la *risposta dell'auditorium all'impulso* $\phi_{\alpha}(t - t_0)$. Questo è vero se la curva di risposta è invariante per traslazioni temporali, ossia se il segnale udito in risposta ad un impulso generato al tempo t_0 è il traslato temporale di passo t_0 del segnale udito in risposta ad un impulso al tempo 0. In effetti, questo smette di essere vero se la forma dell'auditorium si modifica durante l'ascolto, ad esempio perché gli spettatori si spostano. \square

Proposizione 11.1.2. Per ogni $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ con $\|\phi\|_1 = 1$, l'applicazione $T_\phi : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{C}$ definita da

$$T_\phi f = \langle \phi, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s) f(s) ds$$

è lineare e continua su \mathcal{S} .

Dimostrazione. La linearità è ovvia. Mostriamo la continuità:

$$\begin{aligned} |T_\phi f| &\leq \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(s)| ds \\ &= \|f\|_\infty \|\phi\|_1 = \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

In altre parole

$$|T_\phi f| \leq p_{00}(f)$$

e quindi T_ϕ è continuo su \mathcal{S} per la Proposizione 9.2.1. \square

Lemma 11.1.3. Sia $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, $\phi \geq 0$, con

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(s) ds = 1.$$

Allora la famiglia $\{\phi_\alpha, \alpha > 0\}$ (dove $\phi_\alpha(s) = \frac{1}{\alpha} \phi\left(\frac{s}{\alpha}\right)$) forma un'identità approssimata in $L^1(\mathbb{R})$ (nel senso della Definizione 6.1.15).

Dimostrazione. È ovvio che $\phi_\alpha \geq 0$ per ogni $\alpha > 0$. Inoltre, per ogni $\alpha > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\alpha(s) ds = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{s}{\alpha}\right) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) du = 1.$$

Basta quindi mostrare che vale la proprietà della Definizione 6.1.15: per ogni $\varepsilon, \delta > 0$ esiste $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon, \delta)$ tale che, se $0 < \alpha < \alpha_0$,

$$\int_{-\delta}^{\delta} \phi_\alpha(s) ds > 1 - \varepsilon.$$

In effetti, ponendo $u = \frac{s}{\alpha}$ si ha

$$\int_{-\delta}^{\delta} \phi_\alpha(s) ds = \frac{1}{\alpha} \int_{-\delta}^{\delta} \phi\left(\frac{s}{\alpha}\right) ds = \int_{-\frac{\delta}{\alpha}}^{\frac{\delta}{\alpha}} \phi(u) du$$

ed analogamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\alpha}(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) du = 1.$$

Poiché per ogni $\delta > 0$ si ha $\delta/\alpha \rightarrow +\infty$ se $\alpha \rightarrow 0^+$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) du$ è finito, concludiamo che, fissato $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, esiste $\alpha_0 > 0$ tale che, per $0 < \alpha < \alpha_0$,

$$\int_{|s|>\delta} \frac{1}{\alpha} \phi\left(\frac{s}{\alpha}\right) ds = \int_{|u|>\frac{\delta}{\alpha}} \phi(u) du < \varepsilon,$$

e quindi

$$\int_{-\delta}^{\delta} \phi_{\alpha}(s) ds = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\alpha} \phi\left(\frac{s}{\alpha}\right) ds = 1 - \int_{|s|>\delta} \frac{1}{\alpha} \phi\left(\frac{s}{\alpha}\right) ds > 1 - \varepsilon.$$

□

Il teorema alla base della modellazione matematica del campionamento non è altro che un corollario del Lemma 11.1.3.

Teorema 11.1.4. *Per ogni $f \in \mathcal{S}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, per ogni $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ con $\phi \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1$ si ha*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} T_{\lambda_t \phi_{\alpha}} f = f(t) = \delta_t(f).$$

Se si assume soltanto che f sia in L^1 questa uguaglianza vale in L^1 , e quindi puntualmente quasi ovunque.

Dimostrazione. Per il Lemma 11.1.3 $\{\phi_{\alpha}, \alpha > 0\}$ forma un'identità approssimata. Quindi l'enunciato non è altro che il Teorema 6.1.16 o in alternativa il Teorema 6.1.18. □

Riassumendo, il funzionale lineare continuo T_{ϕ} su \mathcal{S} serve ad approssimare $\delta_0(f)$, e $T_{\lambda_t \phi}$ serve ad approssimare $\delta_t(f)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Vogliamo riformulare questi concetti introducendo una nozione di convergenza per i funzionali lineari continui su \mathcal{S} in maniera tale da avere

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} T_{\phi_{\alpha}} \rightarrow \delta_0$$

e

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} T_{\lambda_t \phi_{\alpha}} \rightarrow \delta_t.$$

11.2 Richiami su funzionali lineari continui e prodotti scalari

Rammentiamo il seguente risultato (Teorema 4.6.4):

Teorema 11.2.1. (Rappresentazione di Riesz.) *Se V è uno spazio normato la cui norma è indotta da un prodotto scalare (ad esempio uno spazio di Hilbert), per ogni funzionale lineare continuo T su V esiste un vettore $v_T \in V$ tale che*

$$Tw = (w, v_T) \quad \forall w \in V$$

e viceversa.

Ad esempio, se $V = L^2(\mathbb{R})$, il Teorema 11.2.1 di rappresentazione di Riesz asserisce che ogni funzionale continuo T è del tipo

$$Tf = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = (f, g)_{L^2(\mathbb{R})}$$

per qualche $g \in L^2$. Nel seguito scriveremo $T_g(f) = \langle f, g \rangle = (f, \bar{g})_{L^2}$ e quindi $T = T_{\bar{g}}$.

Invece, la classe \mathcal{S} di Schwartz non è uno spazio normato. La nozione di convergenza in \mathcal{S} non proviene da una norma, bensì da una famiglia numerabile di seminorme $\{p_{kl}\}$. In tal caso la nozione di continuità di un funzionale T è stata data nel Corollario 9.2.2 ed è la seguente:

Un funzionale lineare T su \mathcal{S} è continuo se e solo se esiste una famiglia finita di coppie di indici $(k_1, l_1), \dots, (k_n, l_n)$ e una costante C tali che

$$|Tf| \leq C \sum_{i=1}^n p_{k_i l_i}(f).$$

Esempio 11.2.2. Consideriamo il caso del funzionale lineare del campionamento introdotto più sopra su \mathcal{S} , dato da T_ϕ ($\phi \in \mathcal{S}$):

$$T_\phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\phi(x)} dx$$

(più sopra ϕ era a valori reali e la coniugazione complessa non era necessaria). Sappiamo già che questo funzionale è continuo su $L^2(\mathbb{R})$ (Teorema 11.2.1 di rappresentazione di Riesz). Esso è anche continuo su \mathcal{S} , per la Proposizione 11.1.2. \square

11.3 Cenni sulla dualità per spazi normati o muniti di una famiglia numerabile di seminorme

Abbiamo visto in Sezione 11.1 che, dato un segnale f nella classe di Schwartz, la lettura del suo valore campionato ad un istante t_0 è approssimata dal valore di un funzionale lineare continuo T_ϕ sulla classe di Schwartz, dove ϕ è una funzione non negativa e di integrale 1. Per una approssimazione via via migliore si deve usare una famiglia di funzioni $\{\phi_\alpha\}$ sempre più concentrata attorno a t_0 (cioè una identità approssimata nel senso della Definizione 6.1.15). Invece il valore esatto, non approssimato, del segnale all'istante t_0 è dato da un altro funzionale lineare su \mathcal{S} , il funzionale definito da $\delta_{t_0}(f) = f(t_0)$. Il funzionale che fornisce il valore approssimato è quindi rappresentato da una funzione ϕ , nel senso che il valore approssimato è dato da

$$T_\phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)f(t) dt. \quad (11.3)$$

Non è invece possibile rappresentare nello stesso modo δ_{t_0} con una funzione, perché $\delta_{t_0}(f)$ non dipende dai valori di f in un intorno (sia pure piccolo) del punto t_0 , ma solo nel punto t_0 stesso (vedremo questo fatto in maggior dettaglio in Sezione 11.8).

Modelliamo le operazioni di campionamento di segnali in \mathcal{S} con funzionali lineari continui su \mathcal{S} . Prima di studiare lo spazio vettoriale dei funzionali lineari continui su \mathcal{S} , premettiamo qualche cenno sull'impostazione alla base di questa modellazione. Nell'Esempio 11.2.2 abbiamo considerato il valore medio del segnale f in un intorno del punto t_0 , dato dal funzionale T_ϕ di (11.3), dove ϕ è una opportuna funzione a valori non negativi e di integrale 1. Idealmente, vorremmo generalizzare la nozione di funzione in modo così ampio che si possano rappresentare in questa maniera tutti i funzionali continui che intervengono nel campionamento, incluso il funzionale δ_{t_0} del campionamento istantaneo al punto t_0 , che, come si è accennato, non è rappresentabile a questo modo con una funzione usuale. Quindi abbiamo bisogno di una ampia generalizzazione del concetto di funzione.

Gli elementi di questo spazio di funzioni generalizzate sono in corrispondenza biunivoca con i funzionali continui su \mathcal{S} .

Notazione 11.3.1. Per ogni $f \in \mathcal{S}$ e $T \in \mathcal{S}'$ scriviamo $\langle T, f \rangle$ invece che $T(f)$, in analogia alla notazione introdotta nell'Esempio 11.2.2, in base alla

quale si ha

$$T_\phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)f(t) dt = \langle \phi, f \rangle = \langle f, \phi \rangle.$$

□

Lo spazio dei funzionali continui su \mathcal{S} si indica con \mathcal{S}' e l'applicazione bilineare

$$(T, f) \in \mathcal{S}' \times \mathcal{S} \mapsto \langle T, f \rangle \in \mathbb{C}$$

si chiama *dualità*. Lo spazio \mathcal{S}' talvolta viene chiamato il duale di \mathcal{S} .

Qui ci limitiamo ad accennare che, prendendo il duale di \mathcal{S} , si ottiene uno spazio vettoriale amplissimo, proprio come vogliamo. Per capire questo concetto, occorre ripensare agli esempi già visti di dualità. Ci sono due diverse situazioni in cui questo concetto è già emerso.

La prima è la dualità per spazi vettoriali a dimensione finita, o più in generale per spazi di Hilbert, illustrata nel Teorema 11.2.1 di rappresentazione di Riesz. Grazie a questo teorema sappiamo che ogni elemento T del duale $(\mathbb{C}^n)'$ di \mathbb{C}^n è rappresentato da un unico vettore $u \in \mathbb{C}^n$ mediante l'espressione

$$T(v) = (v, u) = \langle v, \bar{u} \rangle$$

(dove \bar{u} è il complesso coniugato di u , cioè il vettore le cui componenti sono le coniugate di quelle di u) e viceversa, ogni tale vettore dà luogo ad un elemento di $(\mathbb{C}^n)'$. Quindi $(\mathbb{C}^n)'$ è isomorfo a \mathbb{C}^n come spazio vettoriale (e l'isomorfismo è isometrico, sempre per lo stesso teorema). In particolare, il duale di \mathbb{C}^{n+1} è “più grande” del duale di \mathbb{C}^n , nel senso che $(\mathbb{C}^n)'$ si immerge come sottospazio in $(\mathbb{C}^{n+1})'$. Infatti, ogni $t \in (\mathbb{C}^n)'$ si estende ad un funzionale $\tilde{T} \in (\mathbb{C}^{n+1})'$ in infiniti modi possibili (una famiglia ad un parametro, come vedremo), ad esempio nel modo seguente: se u è il vettore in \mathbb{C}^n che rappresenta T , possiamo scegliere il seguente vettore $\tilde{u} \in \mathbb{C}^{n+1}$ per rappresentare \tilde{T} : $\tilde{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n, 0)$. Questa scelta è analoga alla consueta immersione di \mathbb{C}^n in \mathbb{C}^{n+1} come l'insieme delle $(n+1)$ -ple di numeri complessi in cui l'ultimo numero è zero: cioè il “piano orizzontale” della Figura 11.7, che illustra il caso di $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (o di $\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}^3$).

Da questo esempio ci si aspetta quindi che, se ingrandiamo lo spazio vettoriale di partenza, si ingrandisca in maniera isometrica anche il duale. Però per spazi normati a dimensione infinita c'è un secondo modo di “ingrandire”, che abbiamo già considerato in un'altra situazione.

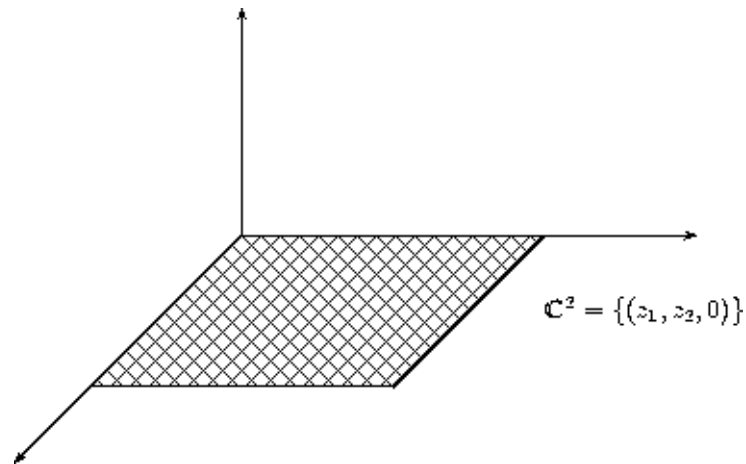


Figura 11.7: Immersione canonica di \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^3

Questa seconda eventualità non fa riferimento al passaggio da uno spazio vettoriale ad un altro più grande in cui il primo si immerge come sottospazio chiuso, bensì al passaggio da uno spazio normato ad un altro più grande in cui il primo è denso. Per una analogia a dimensione finita si potrebbe provare a pensare alla densità dei razionali \mathbb{Q} nei reali \mathbb{R} (ma attenzione, questa analogia in realtà non calza; infatti, perché essa abbia senso i due spazi vettoriali devono essere definiti sullo stesso campo scalare, e quindi in questo caso su \mathbb{Q} ; ora, \mathbb{Q} ha dimensione 1 come spazio vettoriale su \mathbb{Q} , ma, come spazio vettoriale su \mathbb{Q} , \mathbb{R} ha dimensione infinita, a causa del fatto che \mathbb{Q} è numerabile (Sezione 1.1), e quindi lo è anche l'insieme delle combinazioni lineari a coefficienti in \mathbb{Q} di un numero finito di elementi di \mathbb{R} ; invece \mathbb{R} è più che numerabile).

Per comprendere questa eventualità, si consideri un sottospazio vettoriale W di uno spazio vettoriale normato V . Se W è denso in V , allora le successioni di elementi di W che sono di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_V$ convergono a elementi di V , ma non necessariamente ad elementi di W . Supponiamo ora che W abbia una sua norma $\|\cdot\|_W$ rispetto alla quale sia completo. Le successioni di Cauchy in W rispetto a questa norma (Definizione 1.2.16) convergono a elementi di W (Nota 1.2.17) e quindi di V . Perciò ci sono più successioni di Cauchy convergenti rispetto alla norma di V che non alla norma di W : questo suggerisce che la norma di W sia *più grande* di quella di

V , nel senso che esiste $C > 0$ tale che, per ogni $w \in W$, si ha

$$\|w\|_V \leq C\|w\|_W.$$

In effetti questa disuguaglianza è vera (essa però richiede, per una dimostrazione rigorosa, un risultato importante dell'Analisi Funzionale, il Teorema del Grafico Chiuso (Teorema 3.16.4).

Ma allora, se F è un funzionale lineare continuo su V e w_n è una successione in W convergente a $w_0 \in W$, w_n converge a w_0 anche nella norma di V , e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(w_n) = F(w).$$

Perciò F è continuo anche rispetto alla norma di W : quindi, se $F \in V'$, allora $F \in W'$. Ne segue che il fatto che $W \subset V$ sia denso implica che $V' \subset W'$.

Questo fatto si può riscrivere in termini di norme di funzionali lineari continui, nella notazione introdotta nella Definizione 3.3.14: se $F \in V'$, allora per ogni $w \in W \subset V$ si ha

$$|F(w)| \leq \|F\| \|w\|_V \leq C\|F\| \|w\|_W,$$

quindi $F \in W'$ e la norma del funzionale F come elemento di W' è maggiorata da $C\|F\|$ dove $\|F\|$ è la norma di F come elemento di V' .

Riassumamo gli esempi di dualità ed inclusioni fra spazi di Banach della Sezione 3.12, alla quale rinviamo il lettore per maggiori dettagli sulle dimostrazioni qui omesse.

Cominciamo con gli spazi normati $L^2[0, 1]$ e $L^1[0, 1]$ (già studiati nella Sezione 1.16). Abbiamo visto che $L^2[0, 1] \subset L^1[0, 1]$: più precisamente, per ogni $f \in L^2[0, 1]$ si ha $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$. D'altra parte, $L^2[0, 1]$ è denso in $L^1[0, 1]$.

Esempio 11.3.2. ($(L^1)' = L^\infty$.) Il duale di $L^1[0, 1]$ è (isometricamente) isomorfo a $L^\infty[0, 1]$. Abbiamo a suo tempo dimostrato (nella dimostrazione del Teorema 1.19.6) che ogni funzionale continuo su L^1 è rappresentabile come integrale pesato con una funzione, nel senso dell'Esempio 11.2.2. Quindi $(L^1[0, 1])'$ è isometricamente isomorfo a $L^\infty[0, 1]$. Questo fatto è un caso particolare del Teorema 1.19.6.

Lo stesso argomento, svolto per funzioni su \mathbb{R} invece che su un intervallo compatto come $[0, 1]$, grazie al teorema di convergenza di identità approssimate su \mathbb{R} (Teorema 6.1.16), prova che il duale di $L^1(\mathbb{R})$ è isometricamente isomorfo a $L^\infty(\mathbb{R})$. Anche questo è un caso particolare del Teorema 1.19.6. \square

D'altra parte, per il Teorema 11.2.1 di rappresentazione di Riesz si ha che $L^2[0, 1]'$ è (isometricamente) isomorfo a $L^2[0, 1]$. Ma abbiamo appena visto che $L^2[0, 1] \subset L^1[0, 1]$ ed è ovvio che $L^\infty[0, 1] \subset L^2[0, 1]$ (esercizio). Quindi abbiamo la catena di inclusioni

$$L^\infty[0, 1] \subset L^2[0, 1] \subset L^1[0, 1]$$

e

$$L^1[0, 1] \cong L^\infty[0, 1] \subset L^2[0, 1] \cong L^2[0, 1]'$$

Ecco quindi che, in questo caso nel quale i sottospazi non sono chiusi (anzi sono densi, in base al Teorema di convergenza di identità approssimate, Teorema 6.1.10), la dualità rovescia la relazione di inclusione.

Esempio 11.3.3. ($(L^p)' = L^q$ se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.) Più in generale, prendiamo *indici coniugati* $1 \leq p < \infty$, $1 < q \leq \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Definizione 1.16.4; conveniamo come sempre che, se $p = 1$ e $q = \infty$, valga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, però qui consideriamo solo il caso $p = 1$, $q = \infty$, non il viceversa). Dalla disuguaglianza di Hölder per funzioni su \mathbb{R} (Teorema 1.16.6) segue

$$|T_\phi(f)| = |\langle \phi, f \rangle| \leq \|\phi\|_q \|f\|_p. \quad (11.4)$$

Di nuovo grazie al teorema di convergenza di identità approssimate, questa volta nella norma di L^p , si ha come prima che la mappa $\phi \mapsto T_\phi$ descrive un isomorfismo isometrico di L^q sul duale di L^p :

$$\sup \{ |\langle \phi, f \rangle| : \|f\|_{L^p} = 1 \} = \|\phi\|_q. \quad (11.5)$$

Abbiamo accennato nell'Esempio 3.12.3 che il duale di L^∞ non si ottiene in questo modo: esso è più grande di L^1 . \square

Esempio 11.3.4. (Dualità ed inclusioni per spazi $L^p[0, 1]$.) Abbiamo appena visto che, se p e q sono indici coniugati (nel senso del precedente Esempio 11.3.3), allora

$$L^p[0, 1] \cong L^q[0, 1]$$

(isomorfismo isometrico). Si noti che, se $1 < p < r < \infty$, la relazione degli indici coniugati $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ rovescia la disuguaglianza quando si passa agli indici coniugati, e pertanto per $1 < p < r < \infty$ si ha

$$L^\infty[0, 1] \subsetneq L^r[0, 1] \subsetneq L^p[0, 1] \subsetneq L^1[0, 1]$$

ma

$$L^1[0, 1]' \subsetneq L^p[0, 1]' \subsetneq L^r[0, 1]' \subsetneq L^\infty[0, 1]'. \quad \square$$

Esempio 11.3.5. (Dualità ed inclusioni per spazi ℓ^p .) Simmetricamente, per gli spazi ℓ^p si ha (Proposizione 1.7.7):

$$\ell^1 \subsetneq \ell^p \subsetneq \ell^r \subsetneq \ell^\infty$$

se $1 < p < r < \infty$, e

$$\ell^\infty = (\ell^1)' \supseteq \ell^q = (\ell^p)' \supseteq \ell^s = (\ell^r)'$$

dove $s \leq q$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \frac{1}{s} + \frac{1}{r}$ (indici coniugati, nel senso della Definizione 1.16.4). Ciascuno spazio ℓ^p è denso in ogni spazio ℓ^r se $1 \leq p < q < \infty$, e le inclusioni si rovesciano passando agli spazi duali.

Anche questi risultati sugli spazi ℓ^p seguono, come prima, dalla disuguaglianza di Hölder, ma questa volta formulata per successioni numeriche invece che per funzioni. Per cenni sulla dimostrazione rinviamo il lettore all'Esempio 3.12.4. \square

Si noti invece che $C[0, 1]$ è contenuto in $L^\infty[0, 1]$ come sottospazio chiuso, non denso: infatti la norma in questi due spazi è la stessa (la norma uniforme). In questo caso abbiamo già accennato che la dualità preserva l'inclusione, ed infatti si ha che $C[0, 1]'$ è lo spazio delle misure numerabilmente additive su $[0, 1]$, mentre, come già osservato nell'Esempio 3.12.3, $L^\infty[0, 1]'$ è lo spazio delle misure che sono solo finitamente additive: il primo è un sottospazio chiuso del secondo.

Tutti gli esempi precedenti riguardano la dualità per spazi normati. Però il nostro vero interesse è studiare il duale di \mathcal{S} , che non è uno spazio normato, bensì è munito di una famiglia numerabile di seminorme. La convergenza in \mathcal{S} è molto più forte di quella data dalle norme viste negli esempi precedenti. Ad esempio, se $f_n \rightarrow f$ in \mathcal{S} , allora, in particolare, $\|f_n - f\|_\infty = p_{00}(f_n - f) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, quindi la convergenza è anche uniforme. Allo stesso modo si vede che, se $f_n \rightarrow f$ in \mathcal{S} , allora per ogni $k \geq 0$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \|D^j(f_n - f)\|_\infty = 0,$$

dove abbiamo indicato con C^k lo spazio delle funzioni continue su un compatto ed ivi derivabili k volte con continuità (oppure lo spazio delle funzioni continue e limitate su \mathbb{R} derivabili k volte con tutte le derivate continue e limitate), munito della seguente norma:

Definizione 11.3.6. (Norma in C^k .)

$$\|f\|_{C^k} \equiv \sum_{j=0}^k \|D^j f\|_{\infty}.$$

(In alcuni testi, viene considerata una variante di questo spazio, nella quale le derivate e le loro norme sono in L^1 o L^p , che si indica con W^k). Questo significa che $\|f\|_{C^k} = \sum_{j=0}^k p_{00}(D^j f) = \sum_{j=0}^k p_{0j}(f)$: in altre parole, l'immersione di \mathcal{S} in C^k è continua.

Rispetto a questa norma, C^k è uno spazio completo: infatti le successioni di Cauchy in questa norma convergono ad elementi di C^k , grazie al Teorema 1.3.19 di convergenza uniforme con le derivate (si confronti questa definizione con quella data per lo spazio C^∞ nell'Esempio 9.1.6). Si vede facilmente che \mathcal{S} è denso in $C_0(\mathbb{R})$ (lo spazio delle funzioni continue che tendono a zero all'infinito) ed anche nel sottospazio chiuso $C_0^k(\mathbb{R})$ di $C^k(\mathbb{R})$ delle funzioni che tendono a zero all'infinito con tutte le derivate fino all'ordine k , per ogni $k \geq 0$, nelle rispettive norme (un cenno di dimostrazione è dato nella prossima Proposizione 11.4.1). A questo proposito, si noti anche che $C_0^k(\mathbb{R})$ è denso in $C_0(\mathbb{R})$: l'argomento è simile a quello esposto nella dimostrazione del Lemma 5.13.4 per mostrare che $C^1(\mathbb{R})$ è denso in $C(\mathbb{R})$. D'altra parte, $C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ è un sottospazio denso in $L^1(\mathbb{R})$, e di $L^p(\mathbb{R})$ se $1 \leq p < \infty$, come conseguenza del teorema di convergenza delle identità approssimate, Teorema 6.1.16: per questo basta prendere una identità approssimata $\{h_n\}$ consistente di funzioni in $C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ e ricordare che, per ogni $h_n \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, si ha $h_n * g \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ (Esercizio 6.1.13).

Questi fatti rivelano che il duale \mathcal{S}' di \mathcal{S} è estremamente "grande": include tutti gli spazi di funzioni visti fino ad ora.

11.4 Densità di \mathcal{S} e convergenza in \mathcal{S}'

Proposizione 11.4.1. (i) *Sia C_0^k lo spazio delle funzioni derivabili k volte con derivate continue e che tendono a zero all'infinito con tutte le*

derivate fino all'ordine k . Allora C_0^k è un sottospazio denso di $C_0(\mathbb{R})$ (nella norma di C_0 , ovviamente).

- (ii) \mathcal{S} è denso in $C_0(\mathbb{R})$ nella norma uniforme ed in C_0^k nella norma di C^k .
- (iii) \mathcal{S} è denso in ciascuno spazio $L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$, nella norma di L^p .
- (iv) Sia $h \in L^1(\mathbb{R})$ una funzione la cui trasformata di Fourier è C^∞ a crescita polinomiale con tutte le derivate. Sia $\{f_\alpha\}$ una identità approssimata consistente di funzioni in \mathcal{S} . Allora f_α convolve h in una funzione in \mathcal{S} . Se assumiamo anche che per qualche $k \in \mathbb{N}$ si abbia $h \in C^k(\mathbb{R})$ e che tutte le derivate siano limitate ed uniformemente continue su \mathbb{R} , allora $f_\alpha * h \rightarrow h$ nella norma di C^k . (Queste ipotesi sono soddisfatte, ad esempio, se h è C^k a supporto compatto: in tal caso, infatti, segue dalla parte (i) del Corollario 8.2.7 che $\hat{h} \in C^\infty$ e che le derivate di \hat{h} sono tutte trasformate di Fourier di funzioni $L^1(\mathbb{R})$ (a supporto compatto) e quindi tendono tutte a zero all'infinito, in base alla Proposizione 8.2.3, e quindi sono tutte limitate. Analogamente, tutte le k derivate di h devono necessariamente essere a supporto compatto, quindi limitate ed uniformemente continue).

Dimostrazione. Nella parte (i), è chiaro che basta limitarsi al caso di funzioni a supporto compatto, perché evidentemente ogni funzione continua che tende a zero all'infinito si approssima uniformemente con funzioni continue a supporto compatto. Allora otteniamo la parte (i) iterando l'argomento che dimostra il Corollario 5.13.5. Una dimostrazione alternativa ma equivalente è la seguente. Si consideri una identità approssimata $\varphi_\alpha \in C^k(\mathbb{R})$, ad esempio la famiglia di funzioni C^∞ del Lemma 11.1.3 ottenuta normalizzando i dilatati della Gaussiana. Dal Teorema 6.1.16 sulla convergenza delle identità approssimate sappiamo che $\varphi_\alpha * f$ converge uniformemente a f per ogni funzione f continua a supporto compatto (l'ipotesi di uniforme continuità di f , richiesta in quel teorema, è automaticamente soddisfatta se f è continua a supporto compatto grazie al Teorema di Heine sulla uniforme continuità (Sezione 1.1). D'altra parte, $\varphi_\alpha * f$ è una funzione derivabile k volte con continuità perché lo è φ_α (Esercizio 6.1.13): quindi f si approssima uniformemente con funzioni $\varphi_\alpha * f \in C^k(\mathbb{R})$.

Per quanto riguarda la parte (ii), dato un compatto $K \subset \mathbb{R}$, sappiamo che i polinomi sono uniformemente densi in $C(K)$ (Teorema 6.3.1). Senza

perdita di generalità, supponiamo che K sia un intervallo $[-a, a]$ (perché un compatto in \mathbb{R} , essendo limitato per il Teorema di Bolzano–Weierstrass 1.9.6, è contenuto in un intervallo). Si consideri la Gaussiana $\phi(x) = e^{-x^2}$. Il suo minimo in $[-a, a]$ è $e^{-a^2} > 0$, quindi $\frac{1}{\phi}$ è una funzione continua. Poiché le funzioni continue rimangono tali se le si moltiplica per una funzione continua, moltiplicando per $\frac{1}{\phi}$ vediamo che lo spazio $J \equiv \{f\phi : f \in C[-a, a]\}$ coincide con $C[-a, a]$. Ma J contiene le funzioni $p(x)e^{-\pi x^2}$, per ogni polinomio p , che sono dense in J per il Teorema 6.3.1. Queste funzioni appartengono tutte a \mathcal{S} , e quindi \mathcal{S} è denso in $J = C[-a, a]$, cioè, essendo a arbitrario, nelle funzioni continue a supporto compatto (nel senso che ogni funzione continua a supporto compatto, pensata come funzione su tutto \mathbb{R} , può essere approssimata uniformemente a meno di precisione arbitraria con funzioni di Schwartz). D'altra parte, è banale che le funzioni continue a supporto compatto siano dense in $C_0(\mathbb{R})$: pertanto lo è anche \mathcal{S} .

Poiché C_0 è denso in tutti gli spazi L^p nella norma di L^p (Proposizione 1.18.6), la parte (iii) segue immediatamente dalla (ii).

□

Proposizione 11.4.2. *Per $c > 0$, consideriamo la classe delle funzioni a banda limitata B_c .*

- (i) *Per ogni $c > 0$, $B_c \not\subseteq \mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \not\subseteq B_c$*
- (ii) *$B_c \cap \mathcal{S}$ non è denso in \mathcal{S} .*
- (iii) *Sia $h \in B_c$ e $\{f_\alpha\}$ una identità approssimata consistente di funzioni in \mathcal{S} . Allora $f_\alpha * h \rightarrow h$ uniformemente e $f_\alpha * \widehat{h} \rightarrow \widehat{h}$ uniformemente.*

Dimostrazione. È ovvio che $\mathcal{S} \not\subseteq B_c$ (si pensi alla Gaussiana, che è in \mathcal{S} ma non è a supporto compatto e la cui trasformata di Fourier è ancora la Gaussiana (Proposizione 8.3.2), quindi a supporto non compatto).

Per provare che $B_c \not\subseteq \mathcal{S}$ basta costruire un esempio di $f \in B_1$, $f \notin \mathcal{S}$: il caso generale di B_c si ottiene applicando a questo esempio un opportuno operatore di dilatazione. Consideriamo $h(t) = \text{sinc}^2 t$. È chiaro che $h \notin \mathcal{S}$, perché

$$h(t) = \text{sinc}^2 t = \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2 t^2}$$

non è a decrescenza rapida, e quindi il suo dilatato k non appartiene a \mathcal{S} . Mostriamo che $h \in B_1$. È chiaro che h è C^∞ ed al di fuori di un compatto

è limitata da $1/(\pi^2 x^2)$, quindi $h \in L^1(\mathbb{R})$ (ossia $g := \text{sinc} \in L^2(\mathbb{R})$). Inoltre, dall'Esercizio 10.1.5 sappiamo che $\text{sinc} = \widehat{\chi}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$. Ma allora, calcolando la trasformata di Fourier nel senso di L^2 (Nota 8.5.3), abbiamo

$$\widehat{\text{sinc}} = \widehat{\widehat{\chi}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}} = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}^\dagger = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$$

per la proprietà di parità per la trasformata di Fourier (Teorema 8.2.4 (ii) e Proposizione 11.13.14 rispettivamente) e per il fatto che $\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ è una funzione pari. Ma allora segue dal Corollario 11.14.3, e dalle stesse proprietà della trasformata di Fourier e della sua inversa, che

$$\widehat{h} = \widehat{\text{sinc}^2} = \widehat{g * g} = \widehat{\chi}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} * \widehat{\chi}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} = u$$

dove u è a supporto compatto (in effetti il supporto di u è l'intervallo $[-1, 1]$, come mostra l'esercizio seguente). Questo prova (i).

Per provare (ii), supponiamo per assurdo che $B_c \cap \mathcal{S}$ sia denso in \mathcal{S} . Allora per ogni $f \in \mathcal{S}$ esisterebbe una successione $f_n \in B_c \cap \mathcal{S}$ tale che $f_n \rightarrow f$ in \mathcal{S} . Ma allora, per la continuità della trasformata di Fourier (Teorema 9.7.6), si avrebbe $\widehat{f}_n \rightarrow \widehat{f}$ in \mathcal{S} . Ma, poiché $f_n \in B_c$, \widehat{f}_n ha supporto in $[-c, c]$. Prendiamo $f \in \mathcal{S}$ tale che \widehat{f} non abbia supporto contenuto in $[-c, c]$ (ad esempio la Gaussiana $f(t) = e^{-\pi t^2}$, per la quale il supporto di $\widehat{f} = f$ (Proposizione 8.3.2) è tutto \mathbb{R}). Allora \widehat{f}_n non converge a \widehat{f} puntualmente (perché il limite puntuale è zero fuori di $[-c, c]$), quindi non vi converge uniformemente, quindi non vi converge in \mathcal{S} (perché $\|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_\infty = p_{00}(\widehat{f}_n - \widehat{f})$). Quindi si ha una contraddizione, e l'ipotesi di assurdo deve perciò essere falsa. Questo prova (ii).

Infine, nella parte (iii) $f_\alpha * h \rightarrow h$ uniformemente grazie al teorema di convergenza delle identità approssimate per funzioni continue (Teorema 6.1.16), applicabile perché, in base al Corollario 10.4.2, $h \in B_c \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$, e quindi in particolare h e tutte le sue derivate sono uniformemente continue su \mathbb{R} come facile conseguenza del Teorema di Heine (Sezione 1.1). Analogamente, $f_\alpha * \widehat{h} \rightarrow \widehat{h}$ uniformemente in base allo stesso teorema od alla parte (iv) della precedente Proposizione 11.4.1: questi risultati si applicano perché \widehat{h} è continua a supporto compatto, essendo la trasformata di Fourier di una funzione in B_c , e lo stesso vale per tutte le sue derivate $D^j \widehat{h}$, che sono le trasformate di Fourier di $(-2\pi i x^j) \widehat{h}$, anche esse continue a supporto compatto, come già osservato appunto nell'enunciato della parte (iv) della Proposizione 11.4.1. \square

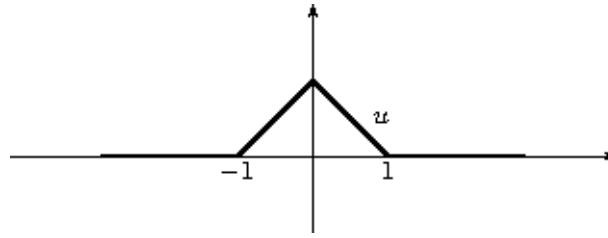


Figura 11.8: Il quadrato per convoluzione di una funzione caratteristica è una funzione triangolare

Esercizio 11.4.3. (i) $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp } f + \text{supp } g$.

(ii) Rammentiamo che abbiamo scritto χ per la funzione caratteristica dell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, cioè $\chi = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$. Allora $u = \chi * \chi$ è la funzione lineare a tratti che vale 0 in $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, 1 in 0 ed è lineare in $[-1, 0]$ ed in $[0, 1]$ (figura 11.8).

□

La dualità consente di introdurre senza sforzo un'altra proprietà cruciale: il trasporto della nozione di convergenza allo spazio duale. Ce lo consente la prossima definizione, che era stata anticipata come Definizione 3.10.3 (e studiata in molta maggiore profondità nella Sezione 3.10).

Definizione 11.4.4. (Topologia debole stella.) Sia $\{F_n\}$ una successione di elementi del duale V' di uno spazio vettoriale normato, oppure munito di una famiglia numerabile di seminorme. Diciamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F \in V'$$

se, per ogni $v \in V$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle F_n, v \rangle = \langle F, v \rangle.$$

In tal caso si dice che F_n tende a F nella topologia debole* indotta da V .

Nota 11.4.5. Questa nozione di convergenza in generale è più debole della convergenza rispetto alla norma dei funzionali. Ad esempio, se $V = L^1(\mathbb{R})$, sappiamo che V' è isometricamente isomorfo a $L^\infty(\mathbb{R})$ (Esempio 11.3.2). Quindi,

data una successione di funzionali $F_n \in V'$ (rappresentati come prima da funzioni in L^∞ , che - abusando della notazione - indichiamo ancora con F_n) la convergenza nella norma di V' è la convergenza uniforme delle funzioni $F_n \in L^\infty(\mathbb{R})$. Invece $F_n \rightarrow F$ in senso debole * se per ogni $h \in L^1(\mathbb{R})$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(t)h(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)h(t) dt.$$

Queste due nozioni di convergenza non sono equivalenti. Si vede facilmente che la prima implica ovviamente la seconda, perché, grazie al fatto che $h \in L^1$ e F_n è limitata, si possono approssimare gli integrali limitando il dominio di integrazione ad un compatto, ed i limiti uniformi di successioni di funzioni passano sotto il segno di integrale sui compatti (Teorema 1.3.17). Però il viceversa non è vero. Ad esempio, lasciamo al lettore i passaggi di questo *importante esercizio*: se

$$F_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq n \\ 0 & \text{se } t < n \end{cases}$$

si ha $F_n \rightarrow 0$ debole * se $n \rightarrow \infty$, però $\|F_n\|_\infty = 1$ per ogni n e quindi $\|F_n\|_\infty$ non tende a zero; perciò, per la continuità della norma (Nota 4.1.2) F_n non tende a zero nella norma uniforme. \square

Poiché è più debole della convergenza in norma, la convergenza debole * dei funzionali ha luogo più facilmente, e quindi è molto più facile da ottenere, agevole ed elastica. Ci accingiamo a studiarla per il duale \mathcal{S}' della classe di Schwartz \mathcal{S} .

Nota 11.4.6. La convergenza in \mathcal{S} non è data da una norma, ma da una famiglia di seminorme, e quindi la definizione di norma di un funzionale $F \in \mathcal{S}'$ non vale (la Definizione 3.3.14 si applica solo ai funzionali su spazi normati). Invece la nozione di convergenza debole * si applica, ed è quella che useremo su \mathcal{S}' . Ne abbiamo bisogno per modellare il processo di approssimazione con cui si passa da campioni espressi da valori medi a valori istantanei. \square

11.5 Distribuzioni temperate e loro proprietà di convergenza

Definizione 11.5.1. Lo spazio \mathcal{S}' dei funzionali continui sulla classe di Schwartz \mathcal{S} si chiama *spazio delle distribuzioni temperate*.

Poiché non avremo bisogno di introdurre una nozione più generale di distribuzione, spesso nel seguito ci riferiremo a \mathcal{S}' come lo spazio delle distribuzioni: questa terminologia non è però usuale, perché nella letteratura matematica le distribuzioni (non temperate) denotano una classe più ampia. Per una trattazione più completa accenniamo alla definizione e proprietà dello spazio delle distribuzioni nella successiva Sezione 11.18; per maggiori dettagli, si veda [25, Cap. 6 e 7].

Definizione 11.5.2. (Convergenza nel senso delle distribuzioni.) Muoviamo \mathcal{S}' della nozione di convergenza analoga a quella descritta nella Definizione 11.4.4: se $F_n, F \in \mathcal{S}'$ diciamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n \underset{\mathcal{S}'}{=} F$$

se per ogni $f \in \mathcal{S}$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle F_n, f \rangle = \langle F, f \rangle$$

Il prossimo enunciato non è ovvio: esso si basa su un risultato profondo in Analisi Funzionale, che citiamo nella dimostrazione, ma non dimostriamo in questo Capitolo: si tratta del teorema di uniforme limitatezza (Banach–Steinhaus), che abbiamo dimostrato come Teorema 3.14.3. In effetti, la prossima Proposizione 11.5.3 è un caso particolare del Corollario 3.14.5 del teorema di uniforme limitatezza. In ogni caso, il lettore non interessato a quella dimostrazione non ha bisogno di consultarne l'enunciato nel Capitolo 3, perché lo riassumeremo in questa Sezione.

Proposizione 11.5.3. (Limiti di successioni di distribuzioni temperate.) Sia F_n una successione in \mathcal{S}' tale che, per ogni $f \in \mathcal{S}$, esiste il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle F_n, f \rangle$. Chiamiamo questo limite $F(f)$. Allora $F \in \mathcal{S}'$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n \underset{\mathcal{S}'}{=} F$.

Idea della dimostrazione. Spieghiamo anzitutto perché il risultato è plausibile ma non ovvio. Se gli F_n convergono ad un funzionale lineare continuo F , allora, per definizione di convergenza in \mathcal{S}' (Definizione 11.5.2), il limite $\lim_n \langle F_n, f \rangle = F(f)$ esiste per ogni $f \in \mathcal{S}$. Ma qui stiamo cercando di dimostrare il viceversa, e poniamo $F(f) = \lim_n \langle F_n, f \rangle$. È chiaro che questo F è un funzionale lineare su \mathcal{S} . Quindi occorre solo mostrare che questo funzionale è continuo rispetto alla convergenza in \mathcal{S} . I suoi approssimanti $F_n \in \mathcal{S}'$ sono

continui. Perciò, in base al Corollario 9.2.2, per ogni n esistono una costante C_n ed una collezione finita di j_n seminorme $p_{k_1(n)l_1(n)} \dots, p_{k_{j_n}(n)l_{j_n}(n)}$ tali che

$$|\langle F_n, f \rangle| < C_n \sum_{i=1}^{j_n} p_{k_i(n)l_i(n)}(f). \quad (11.6)$$

Dobbiamo dimostrare che vale una disuguaglianza analoga per F . Purtroppo, però, non possiamo semplicemente passare al limite per $n \rightarrow \infty$ dentro il secondo membro di (11.6), perché le costanti C_n e le seminorme non sono sempre le stesse: cambiano con n . Quindi, al crescere di n , potremmo trovarci ad aggiungere sempre più seminorme, in numero illimitato, ed a considerare costanti C sempre più grandi, in maniera illimitata. In altre parole, il problema è che ciascuna F_n è sì continua, ma limitata da costanti e seminorme diverse al variare di n : invece a noi serve una continuità rispetto alle stesse costanti e seminorme, o come si suol dire la equicontinuità, cioè una limitatezza uniforme rispetto a n .

Questa proprietà è conseguenza di un risultato basilare dell'Analisi Funzionale, noto come il Teorema di Banach-Steinhaus 3.14.3 (detto anche *principio di uniforme limitatezza*), il cui enunciato, applicato allo spazio delle distribuzioni (che è uno spazio di Fréchet, nel senso della Definizione 3.1.1) diventa quello del Corollario 3.14.4, che richiamiamo qui di seguito. Esso asserisce che, se uno spazio vettoriale V è uno spazio metrico completo (ovviamente con una metrica invariante per traslazione), ed una successione di funzionali lineari continui F_n su V converge puntualmente ad un funzionale lineare F , nel senso che, per ogni vettore $v \in V$, si ha $F_n(v) \rightarrow F(v)$, come nel nostro enunciato, allora gli F_n sono equicontinui, o, più semplicemente, anche F è un funzionale continuo (Corollario 3.14.5). Da questo risultato profondo segue la Proposizione, perchè \mathcal{S} è uno spazio metrico completo (Teorema 9.4.3). \square

Esempio 11.5.4. (i) (**Funzioni localmente integrabili a crescita polinomiale**). Consideriamo le le funzioni h localmente integrabili e a crescita polinomiale (Definizione 9.5.2: queste funzioni h , al di fuori di un compatto, verificano $|h(x)| < B(1 + |x|^k)$ per ogni x e per qualche $B > 0$ e $k \in \mathbb{N}$). Tutte queste funzioni appartengono a \mathcal{S}' , nel senso che per ogni tale h il funzionale lineare

$$T_h(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x) dx$$

è definito per ogni $f \in \mathcal{S}$ e continuo su \mathcal{S} . Se $h \in \mathcal{S}$, la continuità di T_h è stata dimostrata nell'Esempio 11.2.2. In generale, sia h è a crescita polinomiale: quindi esiste un intero positivo k tale che $B = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|h(x)|}{1+|x|^k} < \infty$. Pertanto, in base al Lemma 9.6.2, esiste una costante $A > 0$ tale che

$$\frac{|h(x)|}{1+|x|^{k+2}} \leq A \frac{|h(x)|}{(1+|x|^k)(1+x^2)} \leq \frac{AB}{1+x^2}.$$

Siano quindi $f_n, f \in \mathcal{S}$ e supponiamo che $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$. Dal fatto che l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ è convergente (vale $\arctan \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$) ora segue

$$\begin{aligned} |T_h(f_n - f)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} h(x) |f_n(x) - f(x)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|h(x)|}{1+|x|^{k+2}} (1+|x|^{k+2}) |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \pi AB p_{k+2,0}(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (11.7)$$

per la definizione di convergenza in \mathcal{S} (Definizione 9.1.2). Questo stabilisce che T_h è continuo, e quindi $T_h \in \mathcal{S}'$.

(ii) (**Funzioni L^1**). Ritorniamo ad un ambito già incontrato nella Proposizione 11.1.2: a differenza che nella parte (i) di questo Esempio, ora assumiamo che la funzione h sia in L^1 non solo localmente, ma anche su tutto \mathbb{R} . Allora h dà origine ad una distribuzione T_h anche senza che si debba assumere che sia a crescita polinomiale. (Nota: una funzione in L^1 non tende necessariamente a zero all'infinito! Essa può assumere valori arbitrariamente grandi purché questo accada in intervalli le cui lunghezze diventino appropriatamente piccole. Il lettore costruisca un esempio per esercizio).

Infatti, per ogni $f \in \mathcal{S}$, il funzionale lineare

$$T_h(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x) dx$$

verifica

$$|T_h(f)| \leq \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \|h\|_{1p_{00}}(f),$$

e quindi è continuo su \mathcal{S} (Definizione 9.1.2).

(iii) (**La delta di Dirac**). Per ogni x in \mathbb{R} , il funzionale lineare δ_x su \mathcal{S} già definito nella Sezione 10.1 come

$$\delta_x(f) = f(x)$$

(che d'ora in avanti chiameremo *delta di Dirac al punto x*) è continuo su \mathcal{S} . Infatti, se $f_n, f \in \mathcal{S}$ e $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$, allora in particolare (sempre per la Definizione 9.1.2) si ha

$$\|f_n - f\|_\infty = p_{00}(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Quindi f_n converge a f uniformemente su \mathbb{R} , ed in particolare puntualmente per ogni x (Definizione 1.2.11), e perciò $\delta_x(f_n) = f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = \delta_x(f)$.

□

Esempio 11.5.5. La funzione $\frac{1}{x}$, definita per $x \neq 0$, non è integrabile secondo Lebesgue, e non è integrabile in senso improprio secondo Riemann, perché $\int_0^{\pm\infty} \frac{dx}{x} = \infty$. Inoltre, questa funzione ha integrale divergente in ogni intervallo $(0, a)$ o $(-a, 0)$, con $a > 0$. Pertanto, se $f \in \mathcal{S}$, non esiste finito l'integrale $\langle \frac{1}{x}, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$. Si noti che la divergenza non è conseguenza del fatto che la funzione $\frac{1}{x}$ decresca troppo lentamente all'infinito (ossia del fatto che $\int_a^\infty \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{-\infty} \frac{dx}{x} = \infty$), perché questo è compensato dal fatto che la funzione test f tende a zero all'infinito a velocità più che polinomiale. La divergenza è invece dovuta all'ordine della singolarità di $\frac{1}{x}$ nell'origine, almeno se $f(0) \neq 0$ (in tal caso f non può compensare la singolarità di $\frac{1}{x}$).

Esiste un modo di dare un senso all'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ nel senso delle distribuzioni. Definiamo la *distribuzione valore principale di Cauchy*, v. p. $\frac{1}{x}$, come

$$\langle \text{v. p. } \frac{1}{x}, f \rangle \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{f(x)}{x} dx.$$

Mostriamo che v. p. $\frac{1}{x}$ è una distribuzione.

$$\text{v. p. } \frac{1}{x}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx$$

(l'ultimo integrale è convergente perché $f(x) - f(-x) = O(x)$ per il Teorema di Taylor, o equivalentemente per il Teorema del valor medio di Lagrange (Sezione 1.1)). Osserviamo che $f(x) - f(-x) = \int_{-x}^x f'(t) dt$, per il Teorema Fondamentale del Calcolo (Sezione 1.1). Allora la continuità del funzionale lineare v. p. $\frac{1}{x}$ su \mathcal{S} , espressa dalle disuguaglianze del Corollario 9.2.2, si ottiene dalle stime seguenti:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx \right| &= \left| \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{1}{x} \int_{-x}^x f'(t) dt dx \right| + \left| \int_1^\infty \frac{x(f(x) - f(-x))}{x^2} dx \right| \\ &\leq \int_0^1 \frac{2x \max_{-x \leq t \leq x} |f'(t)|}{x} dx \\ &\quad + \int_1^\infty \frac{2 \max_{y \in \mathbb{R}} |y f(y)|}{x^2} dx \\ &\leq 2p_{01}(f) + 2p_{10}(f) \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \leq 2(p_{01}(f) + p_{10}(f)), \end{aligned}$$

perché $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1$. □

11.6 Convergenza puntuale e convergenza in \mathcal{S}'

Questa breve Sezione presenta un facile ma utile risultato di convergenza nel senso delle distribuzioni di successioni di funzioni equilimitate. Questo risultato riecheggia i teoremi di convergenza monotona e di convergenza limitata dell'integrale di Lebesgue.

Proposizione 11.6.1. (i) *Siano $\{f_n\}$ e f funzioni a valori reali non negativi, localmente integrabili e a crescita polinomiale, tali che $f_n(x)$ converge a $f(x)$ in maniera monotona per quasi ogni x . Allora f_n converge a f anche nel senso delle distribuzioni.*

(ii) *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni localmente integrabili tali che $|f_n|$ siano tutte simultaneamente limitate dalla stessa costante (o più*

in generale tutte limitate in modulo da una stessa funzione h localmente integrabile a crescita polinomiale). Allora, se f_n converge a f uniformemente sui compatti, f_n converge a f anche nel senso delle distribuzioni.

Dimostrazione. In base alla Proposizione 11.5.3, per dimostrare la convergenza di f_n a f nel senso delle distribuzioni occorre mostrare che, per ogni $g \in \mathcal{S}$,

$$\langle f_n, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f_n g \, dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f g \, dx := \langle f, g \rangle. \quad (11.8)$$

La prima parte dell'enunciato è ovvia. Infatti, a causa della monotonia, abbiamo $f_n(x) \leq f_1(x)$ per ogni x . La funzione f_1 è localmente integrabile, ma non necessariamente integrabile su tutto \mathbb{R} . Però è a crescita polinomiale, e quindi, quando la si moltiplica per la funzione $g \in \mathcal{S}$, si ottiene un prodotto $f_1 g \in L^1(\mathbb{R})$. Allora il passaggio al limite in (11.8) segue dal Teorema di Convergenza Dominata 1.9.54.

Anche la seconda parte segue nello stesso modo dal Teorema 1.9.54, perché per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $g \in \mathcal{S}$ abbiamo $|f_n g| \leq |h g| \in L^1(\mathbb{R})$, come prima, e quindi possiamo passare al limite sotto il segno di integrale in (11.8). \square

Corollario 11.6.2. *Sia f una funzione considerata come distribuzione, ossia localmente integrabile ed a crescita polinomiale. Supponiamo inoltre che f sia periodica: quindi ora f è una generica funzione in L^1_* . Allora la serie di Fourier di f converge a f nel senso delle distribuzioni. Se inoltre f appartiene a L^p_* per qualche $p > 1$, allora la serie di Fourier converge a f nel senso delle distribuzioni.*

Dimostrazione. Osserviamo che, per ogni $g \in \mathcal{S}$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha $\langle e^{2\pi i n \cdot}, g \rangle = \widehat{g}(n)$. Quindi

$$\langle \sum_{n=-m}^m \widehat{f}(n) e^{2\pi i n \cdot}, g \rangle = \sum_{n=-m}^m \widehat{f}(n) \langle e^{2\pi i n \cdot}, g \rangle = \sum_{n=-m}^m \widehat{f}(n) \widehat{g}(n).$$

Per prima cosa, dimostriamo che la serie a secondo membro converge quando $m \rightarrow +\infty$.

Poiché $g \in \mathcal{S}$, anche $\widehat{g} \in \mathcal{S}$ e la successione $\widehat{g}(n)$ è a decrescenza rapida. D'altra parte, il valore $\widehat{f}(n)$ della trasformata di Fourier di f coincide con l' n -simo coefficiente di Fourier di f pensata come funzione periodica con periodo 1 (Proposizione 10.2.3), e quindi $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_{L^1[0,1]}$. Pertanto la serie $\sum_{n=-m}^m \widehat{f}(n) \widehat{g}(n)$ è convergente, e quindi le somme parziali

$\sum n = -m^m \widehat{f}(n) e^{2\pi i n \omega}$ formano una successione di funzioni convergente nel senso delle distribuzioni.

Allora sia T la distribuzione limite, ossia $T = \sum n = -m^m \widehat{f}(n) e^{2\pi i n \omega}$. Se $f \in L^p_*$, la serie converge nel senso di L^p alla funzione f (Corollario 7.6.38). Pertanto essa converge a f puntualmente quasi ovunque, e per ogni $C > 1$ deve valere, per grandi m , $\left| \sum n = -m^m \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} \right| < C|f(x)|$ per ogni x . Poiché f è una funzione limitata, la convergenza vale anche nel senso delle distribuzioni in base alla parte (ii) della Proposizione 11.6.1. \square

Vedremo nella Sezione 12.2 un esempio di serie trigonometrica che converge nel senso delle distribuzioni ma non converge puntualmente in alcun punto.

11.7 Convergenza di serie di distribuzioni temperate; esempi

Una ovvia conseguenza della Proposizione 11.5.3 è la seguente:

Corollario 11.7.1. (Convergenza di serie nel senso delle distribuzioni.) *Sia $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ una successione in \mathcal{S}' . La serie $\sum_{n=0}^{\infty} F_n$ converge in \mathcal{S}' se e solo se, per ogni $f \in \mathcal{S}$, esiste finito il limite $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \langle F_n, f \rangle$. In tal caso, scriviamo il valore limite $\sum_{n=0}^{\infty} \langle F_n, f \rangle$ come $\langle \sum_{n=0}^{\infty} F_n, f \rangle$: allora la somma della serie, $\sum_{n=0}^{\infty} F_n$, è anch'essa una distribuzione temperata. Analogo risultato vale per le successioni bilatere $\{F_n, n \in \mathbb{Z}\}$, che danno luogo a serie doppie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n$ convergenti in \mathcal{S}' se e solo se esistono finiti i due limiti $\lim_{M, N \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^N \langle F_n, f \rangle$.*

Per comodità di notazione, estendiamo alle distribuzioni la definizione di operatore di traslazione λ già introdotta per le funzioni (ad esempio in (10.15):

Definizione 11.7.2. (Operatore di traslazione su \mathcal{S}' .) Per ogni $g \in \mathcal{S}$,

$$\langle \lambda_x T, g \rangle = \langle T, \lambda_{-x} g \rangle$$

Nota 11.7.3. (Compatibilità della Definizione 11.7.2 con la definizione di traslazione per funzioni) Nell'Esempio 11.5.4 (i) abbiamo visto che le funzioni localmente integrabili h a crescita polinomiale danno

luogo a distribuzioni, che indichiamo con T_h . Quindi ora per queste funzioni abbiamo due diverse definizioni di traslazione: quella per le funzioni (10.15) e quella appena formulata per distribuzioni (Definizione 11.7.2). Per evitare ambiguità è necessario provare che le due definizioni coincidono, cioè che $\lambda_x T_h = T_{\lambda_x h}$. Ed infatti, per ogni $f \in \mathcal{S}$ si ha:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_x T_h, f \rangle &= \langle T_h, \lambda_{-x} f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) f(t+x) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s-x) f(s) ds = \langle T_{\lambda_x h}, f \rangle. \end{aligned}$$

□

Esempio 11.7.4. (Il treno di impulsi.) Sia $\delta_n = \lambda_n \delta_0$ la distribuzione delta di Dirac (introdotta in Sezione 10.1 e nell'Esempio 11.5.4 (iii)) centrata al punto $x = n$, cioè data da $\langle \delta_n, f \rangle = f(n)$. Allora la serie $K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$ converge in \mathcal{S}' . Chiameremo questa serie il *treno di impulsi*. In vari libri ingegneristici questa distribuzione si indica con *III*, un simbolo che rammenta l'istogramma di una successione equispaziate di delta, e viene chiamato *Shah*. La convergenza della serie segue dal Corollario 11.7.1, perché, per ogni f in \mathcal{S} , la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta_n, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ converge perché f è a decrescenza rapida e quindi $f(n)$ tende a zero all'infinito a velocità più che polinomiale.

□

Abbiamo elegantemente dedotto il fatto che il treno di impulsi sia continuo su \mathcal{S} dalla Proposizione 11.5.3, che fa uso del potente teorema di Banach-Steinhaus. In realtà questa potenza non è necessaria:

Esercizio 11.7.5. Dimostrare che il treno di impulsi è un funzionale continuo direttamente in base alla definizione data nel Corollario 9.2.2.

Svolgimento. Per ogni $f \in \mathcal{S}$, si tratta di maggiorare la serie $|\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)|$ con una combinazione lineare finita di seminorme di f . Per il Teorema della Media Integrale (Sezione 1.1) l'integrale $\int_n^{n+1} |f(x)| dx$ è un numero compreso fra il minimo ed il massimo di $|f|$ nell'intervallo $[n, n+1]$. D'altra parte, per il Teorema dei Valori Intermedi (Sezione 1.1), questo valore viene assunto da f in qualche punto $\xi_n \in [n, n+1]$. Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} |f(x)| dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(\xi_n)|. \quad (11.9)$$

D'altra parte, per il Teorema Fondamentale del Calcolo (Teorema 1.27.1)), si ha

$$f(n) = f(\xi_n) - \int_n^{\xi_n} f'(x) dx$$

e quindi

$$|f(n)| \leq |f(\xi_n)| + \int_n^{\xi_n} |f'(x)| dx \leq |f(\xi_n)| + \int_n^{n+1} |f'(x)| dx.$$

Da qui e dall'identità (11.9) segue

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(\xi_n)| + \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx \leq \|f\|_{L^1} + \|f'\|_{L^1}.$$

Pertanto, da questa disuguaglianza e da (11.9), è sufficiente maggiorare la norma L^1 di f e quella di f' con seminorme. Questo si fa in maniera analoga all'Esempio 11.5.4 (i). Infatti,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{1+|x|^2} (1+|x|^2) dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+|x|^2} dx \cdot p_{2,0}(f) = \pi p_{2,0}(f). \end{aligned}$$

Lo stesso argomento prova che $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx \leq \pi p_{2,0}(f') = \pi p_{2,1}(f)$.

□

Per convenienza, in vista del prossimo esempio, introduciamo una notazione ad hoc per il dilatato di una funzione:

Definizione 11.7.6. (Operatore di dilatazione su funzioni.) Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ indichiamo con Λ_α l'operatore di dilatazione definito sulle funzioni su \mathbb{R} da $(\Lambda_\alpha f)(x) = f(\alpha x)$ (per comodità supporremo sempre $\alpha \neq 0$: in particolare, ha senso il numero $\frac{1}{\alpha}$ e Λ_α è invertibile).

Esempio 11.7.7. (Il treno di onde quadre.) Con una notazione analoga a quella della Sezione 10.1, sia χ la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, 1]$, e per $\alpha > 1$ consideriamo la funzione onda quadra $\chi_\alpha = \Lambda_\alpha \chi$. Si tratta di una funzione positiva di area 1, con supporto nell'intervallo $[0, 1/\alpha]$, che assume solo i valori 0 e 1. Chiamiamo *treno di onde quadre* di durata α la

serie X_α dei traslati $\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n \chi_\alpha$. Poiché gli addendi hanno supporti disgiunti, la serie converge puntualmente (per ogni $x \in \mathbb{R}$ c'è al più un solo addendo non nullo!), e la somma è una funzione periodica localmente integrabile, ed ovviamente limitata. La serie converge nel senso delle distribuzioni in base al Corollario 11.7.1. Infatti, per ogni $f \in \mathcal{S}$, segue dal Teorema della media integrale (Sezione 1.1) che

$$\langle \lambda_n \chi_\alpha, f \rangle = \int_{n-\frac{1}{\alpha}}^{n+\frac{1}{\alpha}} f(x) dx = f(\xi_n)$$

per un opportuno $\xi_n \in [n - \frac{1}{\alpha}, n + \frac{1}{\alpha}]$, e quindi il primo membro tende a zero a velocità più che polinomiale grazie alla decrescenza rapida di f , e la serie $\langle \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n \chi_\alpha, f \rangle$ converge.

Si noti che le funzioni definite dalle somme parziali della serie sono maggiorate dalla funzione somma, perché gli addendi sono non negativi: quindi la convergenza della serie nel senso delle distribuzioni segue anche, indirettamente, dalla parte (ii) della Proposizione 11.6.1.

Nota: la somma della serie determina una distribuzione, come visto nell'Esempio 11.5.4 (i). Invitiamo il lettore, per esercizio, a dimostrarne direttamente la continuità su \mathcal{S} , con lo stesso argomento usato nell'Esercizio 11.7.5. Qui è molto più facile, perché

$$|\langle \sum_n \lambda_n \chi_\alpha, f \rangle| \leq |\langle 1, f \rangle| \leq \|f\|_1.$$

Si osservi anche che le somme parziali della serie sono somme finite di funzioni ciascuna con supporto in un intervallo finito, e quindi sono a supporto compatto: pertanto non possono convergere uniformemente alla funzione somma, che è una funzione periodica. Quindi la convergenza è nel senso delle distribuzioni, ma non nel senso uniforme. Un argomento analogo mostra che la convergenza non vale nella norma L^p per nessun p (infatti, il termine generico della serie è un traslato della stessa funzione onda quadra, e quindi la sua norma L^p è costante e non tende a zero, il che viola la proprietà di Cauchy per le serie convergenti (Sezione 1.1). \square

Definizione 11.7.8. (Il treno di onde quadre normalizzate.) Nel precedente Esempio 11.7.7, rimpiazziamo l'onda quadra $\chi_\alpha = \Lambda_\alpha \chi_{[0,1]}$ di ampiezza 1 e durata $1/\alpha$ con la sua dilatata di norma L^1 uguale a 1, $\alpha \chi_\alpha$ (cha ha

ampiezza α e durata $1/\alpha$). In questo modo si ottiene il treno di onde quadre normalizzate,

$$\Xi_\alpha = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \chi_\alpha,$$

le cui proprietà evidentemente sono identiche a quelle della serie dell'Esempio 11.7.7.

Esempio 11.7.9. (Il treno di Gaussiane.) La convergenza della serie nel precedente Esempio 11.7.7 si basa sul fatto che gli addendi sono a supporto disgiunto, perché traslati di funzioni a supporto compatto di diametro più piccolo del passo di traslazione. In realtà è sufficiente avere funzioni a decrescenza rapida. Ad esempio, consideriamo traslati della Gaussiana $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$, studiata in Sezione 8.3, o del suo dilatato $\varphi_\alpha(x) = \Lambda_\alpha \varphi(x)$. Allora, per ogni x , la serie di funzioni

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \varphi_\alpha(x)$$

converge, perché gli addendi tendono a zero a velocità più che polinomiale. Se scriviamo $F_n = \lambda_n \varphi_\alpha(x)$, la funzione integrabile F_n è una distribuzione (Esempio 11.5.4 (i)), e per ogni $f \in \mathcal{S}$ la decrescenza rapida di f implica che la serie numerica

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle F_n, f \rangle$$

è convergente (per questo occorre dimostrare che la media integrale di $f \in \mathcal{S}$ rispetto alla misura $\lambda_n \phi_\alpha(x) dx$ tende a zero con n a velocità elevata, più che polinomiale, cosa che mostriamo nel prossimo Esercizio 11.7.10). Perciò la serie $G_\alpha = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \varphi_\alpha(x)$ converge in \mathcal{S}' in base al Corollario 11.7.1 (e, come abbiamo visto, converge anche puntualmente). Chiameremo G_α *treno di Gaussiane* di larghezza α .

Si noti che, per lo stesso motivo, grazie al test di Weierstrass (Teorema 1.3.29), la serie $\sum_n F_n$ converge uniformemente su ogni compatto in \mathbb{R} , cioè su ogni intervallo limitato e chiuso, come dimostriamo in dettaglio nel successivo Esercizio 11.7.11. Poiché la somma G_α è una funzione periodica di periodo 1, la convergenza non è uniforme su tutto \mathbb{R} , ma lo è sui compatti. Pertanto la somma è una funzione continua su ogni compatto, quindi continua ovunque, quindi misurabile, ed è limitata sui compatti, ed anche su tutto \mathbb{R} , grazie

alla periodicità. Questo dimostra direttamente il fatto che essa definisca una distribuzione, in base all'Esempio 11.5.4 (i). Inoltre, le somme parziali della serie sono maggiorate dalla somma G_α , perché gli addendi sono positivi: quindi la convergenza della serie nel senso delle distribuzioni segue anche, indirettamente, dalla parte (ii) della Proposizione 11.6.1. \square

Esercizio 11.7.10. La media integrale di $f \in \mathcal{S}$ rispetto alla misura $\lambda_n \varphi_\alpha(x) dx$, ossia l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_\alpha(x - n) dx$, tende a zero per $n \rightarrow \pm\infty$ a velocità più che polinomiale.

Svolgimento. Riscriviamo l'integrale come

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x + n) \varphi_\alpha(x) dx.$$

Dobbiamo provare che, per ogni $k > 0$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + n)| \varphi_\alpha(x) dx = 0. \quad (11.10)$$

Poniamo $A_n := [-\frac{|n|}{2}, \frac{|n|}{2}]$ e $B_n := \mathbb{R} \setminus A_n$, e spezziamo l'ultimo integrale come somma degli integrali su A_n e B_n . Osserviamo che $\int_{B_n} \varphi_\alpha(x) dx < C_1/(1 + |n|^{k+1})$ per qualche $C_1 > 0$ perché φ_α tende a zero all'infinito a velocità più che polinomiale. Pertanto

$$|n|^k \int_{B_n} |f(x + n)| \varphi_\alpha(x) dx < C_1 \frac{|n|^k}{1 + |n|^{k+1}} \|f\|_\infty \rightarrow 0$$

se $|n| \rightarrow \infty$. D'altra parte, se $x \in A_n$ si ha $x + n \in n + A_n = [\frac{n}{2}, \frac{3n}{2}]$ se $n \geq 0$, e $x + n \in [\frac{3n}{2}, \frac{n}{2}]$ se $n \leq 0$: in entrambi i casi, $|x + n| \geq |n|/2$. Pertanto ora segue dalla decrescenza rapida di f che, per qualche $C_2 > 0$,

$$\begin{aligned} |n|^k \int_{A_n} |f(x + n)| \varphi_\alpha(x) dx &< |n|^k \int_{A_n} \frac{C_2}{1 + |x + n|^{k+1}} \varphi_\alpha(x) dx \\ &\leq C_2 |n|^k \frac{|n|}{1 + \left|\frac{n}{2}\right|^{k+2}} \|\varphi_\alpha\|_1 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per $|n| \rightarrow \infty$ (il termine $|n|$ al numeratore è la lunghezza dell'intervallo A_n). Sommando queste due stime dell'integrale su A_n e B_n si vede che l'integrale in (11.10) tende a zero. \square

Esercizio 11.7.11. (Convergenza uniforme sui compatti della serie dei traslati della Gaussiana.) La serie di funzioni G_α converge uniformemente sui compatti, ma non su tutto \mathbb{R} .

Svolgimento. Sia I un intervallo limitato di \mathbb{R} ; senza perdita di generalità scegliamo arbitrariamente un intero N e fissiamo $I = [-N, N]$. Dobbiamo mostrare che, su I , le somme parziali $\sigma_m = \sum_{n=-m}^m \alpha e^{-\pi\alpha^2(x-n)^2}$ convergono uniformemente. Per ottenere questo, basta dimostrare che il termine generale $\alpha e^{-\pi\alpha^2(x-n)^2}$ è limitato uniformemente rispetto a $x \in I$ da una costante numerica $a_n > 0$ tale che la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n < \infty$. Per questo scopo osserviamo che, se $|n| > N$, il punto di massimo del termine generale $\alpha e^{-\pi\alpha^2(x-n)^2}$, che si trova a $x = n$, viene raggiunto fuori dell'intervallo $I = [-N, N]$. In I questa funzione è decrescente (se $n < -N$) o crescente (se $n > N$): il suo valore massimo in I viene assunto ad un estremo dell'intervallo (a destra per $n > 0$, a sinistra per $n < 0$), ed in entrambi i casi vale $\alpha e^{-\pi\alpha^2(N-n)^2}$. Poiché questo numero tende a zero a velocità più che polinomiale, la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ è convergente.

Infine, il treno di Gaussiane G_α , essendo una serie convergente di traslati di passo 1, è una funzione periodica di passo 1, ma le sue somme parziali σ_m sono somme finite di traslati di Gaussiane e quindi tendono a zero all'infinito. Pertanto $\|g_\alpha - \sigma_m\|_\infty$ non tende a zero per $m \rightarrow \infty$. \square

Esercizio 11.7.12. Sia h un *cutoff*, ossia una funzione non negativa, limitata su \mathbb{R} e che tende a zero all'infinito (di solito la si assume anche continua, ma qui non importa). Allora la serie $hG_\alpha(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(x) \alpha e^{-\pi\alpha^2(x-n)^2}$ converge uniformemente.

Svolgimento. La serie converge uniformemente sui compatti per il precedente Esercizio 11.7.11. Quindi basta mostrare che la convergenza è uniforme nelle semirette $J_K := \{x : |x| \geq K\}$, per ogni $K > 0$. Questo significa dimostrare che le code di questa serie, ossia

$$\eta_m(x) = \sum_{|n|>m} h(x) \alpha e^{-\pi\alpha^2(x-n)^2}$$

tendono a zero uniformemente in J_K . D'altra parte, poiché $h \geq 0$ tende a zero all'infinito, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K > 0$ tale che, per ogni $|x| \geq K$, si ha $0 < h(x) < \varepsilon$.

Si osservi che gli addendi sono positivi, e quindi $\sum_{|n|>m} \alpha e^{-\pi\alpha^2(x-n)^2} <$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\pi\alpha^2(x-n)^2}$. La serie maggiorante a secondo membro converge puntualmente ed uniformemente sui compatti ad una funzione periodica G_α , per il precedente Esercizio 11.7.11. Quindi G_α è limitata su tutto \mathbb{R} da una costante $C > 0$, e per ogni $|x| > K$ si ha $\eta_m(x) \leq \|h\|_{L^\infty[K,\infty)} \|G_\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon$. Quindi η_m converge uniformemente a 0 in J_K . \square

Definizione 11.7.13. (Il treno di Gaussiane normalizzate.) Nel precedente Esempio 11.7.9, rimpiazziamo la Gaussiana $\varphi_\alpha = \Lambda_\alpha\varphi$ di ampiezza 1 con la sua dilatata di norma L^1 uguale a 1, $\alpha\varphi_\alpha$ (che ha ampiezza α). In questo modo si ottiene il treno di Gaussiane nonnormalizzate,

$$G_\alpha = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \varphi_\alpha,$$

le cui proprietà evidentemente sono identiche a quelle della serie dell'Esempio 11.7.9.

11.8 La delta di Dirac non è rappresentabile come funzione

Precisiamo ora un'idea già accennata all'inizio della Sezione 11.3, mostrando che non esiste una funzione h localmente integrabile secondo Riemann e a crescita polinomiale tale che si abbia $\delta_x = T_h$ (notazione a pagina 838, ed anche Esempio 11.2.2): esplicitamente, mostriamo che non si può avere $\delta_x(f) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx$ per ogni $f \in \mathcal{S}$.

In altre parole, il funzionale δ_x , quale che sia $x \in \mathbb{R}$, non è rappresentabile come una funzione localmente integrabile secondo Riemann. A meno di traslare h , possiamo, senza perdita di generalità, limitare l'attenzione al caso $x = 0$. A questo scopo enunciamo una proprietà delle funzioni integrabili secondo Riemann, per la cui dimostrazione rinviamo il lettore a [1]: se una funzione è integrabile secondo Riemann (su \mathbb{R} o su un intervallo), allora l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura di Lebesgue nulla. Quindi questa proprietà vale in particolare per le funzioni localmente integrabili secondo Riemann.

Proposizione 11.8.1. *Se $\delta_0 = T_h$, allora, per ogni punto $x_0 \neq 0$ in cui h è continua, o più in generale per ogni punto di Lebesgue x_0 di h (Definizione 1.9.34), si ha $h(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Anche se la nozione di punto di Lebesgue è più generale di quella di punto di continuità, presentiamo separatamente la dimostrazione nel caso di un punto di continuità, perché è più facile da seguire.

Supponiamo che $x_0 \neq 0$ sia un punto di continuità di h , e che, per assurdo, si abbia $h(x_0) \neq 0$. Poniamo $u = \operatorname{Re}(h)$, $v = \operatorname{Im}(h)$, e $\rho < |x_0|$. Allora l'intervallo $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ non contiene 0. Sia ora $f \in \mathcal{S}$ una funzione a valori reali non negativi, con supporto in $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ e tale che $f(x_0) > 0$. Poiché h è continua in x_0 , lo sono anche la sua parte reale u e la sua parte immaginaria v . Supponiamo che si abbia $u(x_0) > 0$. Allora per il Teorema di Permanenza del Segno (Sezione 1.1) esiste un intorno di x_0 nel quale u rimane positiva. Perciò, scegliendo se necessario un valore di ρ più piccolo, possiamo supporre che si abbia $u(t) \geq \eta > 0$ se $x_0 - \rho \leq t \leq x_0 + \rho$. Perciò

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(T_h(f)) = T_{\operatorname{Re}h}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)f(t) dt = \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} u(t)f(t) dt \\ &\geq \eta \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} f(t) dt > 0. \end{aligned}$$

Ma $\delta_0(f) = f(0) = 0$. Quindi, se fosse vero che $\delta_0 = T_h$, non si potrebbe avere $u(x_0) = \operatorname{Re}h(x_0) > 0$ in alcun punto x_0 di continuità di h . Un ragionamento identico prova che non si può neanche avere $u(x_0) < 0$: quindi $u(x_0) = 0$. Allo stesso modo, considerando la parte immaginaria v invece che la parte reale u di h si vede che deve essere $v(x_0) = 0$. Quindi $h(x_0) = u(x_0) + iv(x_0) = 0$.

Ora consideriamo il caso più generale in cui $x_0 \neq 0$ sia un punto di Lebesgue di h e mostriamo che deve valere $h(x_0) = 0$. Qui presentiamo una dimostrazione più compatta ed elegante di quella appena fornita per i punti di continuità, ma anche più complicata. In base alla Definizione 1.9.34, esiste $\rho > 0$ tale che

$$\frac{1}{2\rho} \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} |h(x) - h(x_0)| dx < |h(x_0)|. \quad (11.11)$$

Possiamo prendere $\rho < |x_0|$, e quindi $0 \notin [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ e $T_h(f) = \delta_0(f) = 0$. Ora, sia $f \in \mathcal{S}$ con supporto in $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ tale che $f \geq 0$ e $f(x_0) > 0$. Possiamo scegliere f con un minimo locale in x_0 , e questo implica che per ogni $\rho > 0$ sufficientemente piccolo il valore $f(x_0)$ sia maggiore della media $\frac{1}{2\rho} \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} f(x) dx$, in base al Teorema della media integrale (Sezione 1.1). Ma questo porta ad una contraddizione con il fatto già visto che $T_h(f) = 0$. Infatti, poiché $f \geq 0$ e $\int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} f(x) dx < 2\rho f(x_0)$, segue dalla disuguaglianza

triangolare che

$$\begin{aligned}
 |T_h(f)| &= \left| \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} h(x) f(x) dx \right| = \left| \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} (h(x_0) + h(x) - h(x_0)) f(x) dt \right| \\
 &\geq |h(x_0)| \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} f(x) dx - \left| \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} (h(x) - h(x_0)) f(x) dt \right| \\
 &\geq |h(x_0)| \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} f(x) dx - \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} |h(x) - h(x_0)| f(x) dt \\
 &\geq |h(x_0)| \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} f(x) dx - f(x_0) \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} |h(x) - h(x_0)| dt \\
 &\geq \left(|h(x_0)| - \frac{1}{2\rho} \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} |h(x) - h(x_0)| dt \right) \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} f(x) dx > 0,
 \end{aligned}$$

grazie a (11.11) ed al fatto che $f \geq 0$ non è identicamente nulla in $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ (essendo positiva in x_0 e continua), e quindi $\int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} f(x) dx > 0$. \square

Nota 11.8.2. Se $\delta_0 = T_h$ con h integrabile sui compatti secondo Riemann, allora, per il Teorema di Lebesgue 1.9.37, quasi ogni punto è un punto di continuità per h , e quindi, per la prima asserzione della precedente Proposizione 11.8.1, si ha $h(x) = 0$ per quasi ogni x , e

$$T_h(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx = 0 \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Ora, poiché esistono $f \in \mathcal{S}$ tali che $\delta_0(f) \neq 0$ (quelle per cui $f(0) \neq 0$), abbiamo che $\delta_0 \neq T_h$ per ogni h localmente integrabile secondo Riemann.

più in generale, $\delta_0 \neq T_h$ per ogni h localmente integrabile secondo Lebesgue, esattamente per lo stesso argomento basato ora sulla seconda asserzione della Proposizione 11.8.1 e sul fatto che, per ogni funzione h localmente integrabile secondo Lebesgue, quasi ogni punto è un punto di Lebesgue (di nuovo in base al Teorema 1.9.37). \square

Nota 11.8.3. (Visualizzazione grafica dell'approssimazione della delta.) La delta di Dirac ad un punto non è rappresentabile come una funzione, però viene approssimata da funzioni: se $\{h_n\}$ è un'identità approssimata in

$L^1(\mathbb{R})$ e $h_n^{(x_0)} = \lambda_{x_0} h_n$ è il traslato di passo x_0 di h_n , allora si è visto nel Teorema 11.1.4 che $T_{h_n^{(x_0)}} \rightarrow \delta_{x_0}$ in \mathcal{S}' . Questo dà un'idea intuitiva dell'argomento che abbiamo appena usato per mostrare che la delta non è una funzione: se la si approssima con una famiglia di funzioni al migliorare dell'approssimazione queste funzioni approssimanti devono tendere a zero ovunque eccetto che in x_0 , e quindi, se in \mathcal{S}' tendessero a una funzione limite h , questa dovrebbe essere nulla quasi ovunque. Si veda la Figura 11.1 a pagina 833. \square

Nota 11.8.4. (Richiami su approssimazione della delta ed identità approssimate.) Se $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (o più in generale $\{h_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^+}$, se si preferisce un parametro continuo) sono identità approssimate in $L^1(\mathbb{R})$, allora scrivendo $h_n^\dagger(x) = h_n(-x)$ (oppure $h_\alpha^\dagger(x) = h_\alpha(-x)$), anche $\{h_n^\dagger\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{h_\alpha^\dagger\}_{\alpha \in \mathbb{R}^+}$ sono identità approssimate in base alla Definizione 6.1.15. Allora sia il Teorema 6.1.16 sia il Teorema 6.1.18 implicano che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^\dagger * f(x) = f(x) \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{S}, x \in \mathbb{R}$$

(e analogamente

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} h_\alpha^\dagger * f(x) = f(x) \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{S}, x \in \mathbb{R}.$$

Perciò, così abbiamo dimostrato il Teorema 11.1.4:

$$\begin{aligned} T_{\lambda_t h_\alpha^\dagger}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_\alpha^\dagger(u-t) f(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_\alpha(t-u) f(u) du \\ &= h_\alpha * f(t) \rightarrow f(t) = \delta_t(f). \end{aligned}$$

\square

Corollario 11.8.5. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $\lambda_t \delta_0 = \delta_t$.

Dimostrazione. Per ogni $f \in \mathcal{S}$,

$$\langle \lambda_t \delta_0, f \rangle = \langle \delta_0, \lambda_{-t} f \rangle = f(0+t) = \langle \delta_t, f \rangle.$$

\square

Nota 11.8.6. (Convergenza di identità approssimate.) In base alla Nota 11.7.3 e al Corollario 11.8.5, il Teorema 11.1.4

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T_{\lambda_t h_\alpha^\dagger}(f) = \delta_t(f)$$

equivale a

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T_{h_\alpha^\dagger}(f) = \delta_0(f)$$

(basta traslare entrambi i membri con λ_{-t}).

In altre parole,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} h_\alpha^\dagger * f(t) = f(t)$$

se e solo se

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} h_\alpha^\dagger * f(0) = f(0)$$

per ogni $f \in \mathcal{S}$. Ma questo equivale a scrivere

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_\alpha(x) f(x) dx = f(0),$$

perché

$$h_\alpha^\dagger * f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h_\alpha^\dagger(-x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} h_\alpha(x) f(x) dx.$$

Quindi il Teorema 11.1.4 si può riscrivere così: per ogni identità approssimata $\{h_\alpha\}$ in $L^1(\mathbb{R})$, per ogni $f \in \mathcal{S}$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T_{h_\alpha}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_\alpha(x) f(x) dx = f(0).$$

Questo risultato quindi equivale ai Teoremi di convergenza di identità approssimate, Teoremi 6.1.16 e 6.1.18. Per chi non avesse dedicato sufficiente attenzione alle identità approssimate presentate in Sezione 6.1, nell'Appendice alla fine di questo Capitolo ridimostriamo con una dimostrazione diretta il fatto che, per ogni $f \in \mathcal{S}$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_\alpha(x) f(x) dx = f(0).$$

□

Concludiamo questa Sezione con una notazione che non useremo in questo libro, ma che viene spesso usata per sottolineare il fatto che, per quanto non rappresentabile come una funzione, la delta è approssimabile con funzionali T_h .

Notazione 11.8.7. Invece di $\langle \delta_x, f \rangle$ o $\delta_x(f)$, vari libri, con abuso di notazione, scrivono

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_x(t) dt$$

o anche

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\delta_x(t),$$

come se la delta fosse una funzione. □

11.9 Operatori lineari sullo spazio delle distribuzioni temperate

In questa Sezione studiamo alcuni operatori continui su \mathcal{S}' .

11.9.1 Moltiplicazione per una funzione

Definizione 11.9.1. (Moltiplicazione di distribuzioni per funzioni.)

Sia $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ a crescita polinomiale con tutte le sue derivate (Definizione 9.3.1). Definiamo su \mathcal{S}' l'operatore M_h di moltiplicazione per h come segue: per ogni $F \in \mathcal{S}'$, $f \in \mathcal{S}$,

$$\langle M_h F, f \rangle = \langle F, M_h f \rangle = \langle F, hf \rangle.$$

Per $f \in \mathcal{S}$, l'operatore M_h di moltiplicazione per h è stato definito nell'Esempio 9.5.4. Abbiamo dimostrato in quell'Esempio che M_h manda \mathcal{S} in \mathcal{S} ed è continuo su \mathcal{S} (la dimostrazione è in Sezione 9.6).

Corollario 11.9.2. $M_h : \mathcal{S}' \mapsto \mathcal{S}'$ è continuo.

Dimostrazione. M_h manda \mathcal{S}' in \mathcal{S}' perché, per ogni $F \in \mathcal{S}'$, $M_h F$ è un funzionale lineare continuo su \mathcal{S} . Infatti, per ogni $f \in \mathcal{S}$, la Definizione 11.9.1 asserisce che $M_h F(f) = F(M_h f)$ e quindi $M_h F$ è la composizione di

due applicazioni lineari e continue: $M_h : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ (Esempio 9.5.4) e $F : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{C}$. Inoltre M_h è continuo su \mathcal{S}' : infatti, se $F_n \rightarrow F$ in \mathcal{S}' , allora $M_h F_n \rightarrow M_h F$ in \mathcal{S}' , perché $F_n(g) \rightarrow F(g)$ per ogni $f \in \mathcal{S}$, e quindi $M_h(F_n(f)) = F_n(hf) \rightarrow F(hf) = M_h(F(f))$. \square

Notazione 11.9.3. D'ora in avanti, nei casi in cui non si crei ambiguità, scriveremo hF anziché $M_h F$, per $F \in \mathcal{S}'$.

Nota 11.9.4. (Compatibilità della notazione precedente 11.9.3 con la notazione usuale per la moltiplicazione di funzioni.) Se $F = T_g$ è la distribuzione associata alla moltiplicazione per una funzione g misurabile a crescita polinomiale (Esempio 11.5.4 (i)), allora $M_h T_g = T_{hg}$, perché, per ogni $f \in \mathcal{S}$,

$$M_h T_g f = \langle T_g, hf \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(x)f(x)dx = \langle T_{hg}, f \rangle.$$

In altre parole, il funzionale su \mathcal{S} di moltiplicazione per g , moltiplicato a sua volta per h , coincide con il funzionale su \mathcal{S} di moltiplicazione per hg .

\square

Esercizio 11.9.5. $M_h \delta_{x_0} = h \delta_{x_0} = h(x_0) \delta_{x_0}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Per ogni $f \in \mathcal{S}$,

$$h \delta_{x_0}(f) = \delta_{x_0}(hf) = h(x_0)f(x_0) = h(x_0)\delta_{x_0}(f).$$

\square

Nota 11.9.6. L'Esercizio 11.9.5 mostra che, per ogni x_0 , δ_{x_0} è autovettore di M_h con autovalore $h(x_0)$. \square

Corollario 11.9.7. *Se h diverge a velocità esponenziale, allora per qualche distribuzione temperata F si ha che hF non è una distribuzione temperata.*

Dimostrazione. Abbiamo costruito nello svolgimento dell'Esempio 9.5.4 una funzione di Schwartz f tale che $hf \notin \mathcal{S}$. Quindi $\langle hf, f \rangle = \langle F, hf \rangle$ non è definita. \square

Nota 11.9.8. Per evitare il fatto che lo spazio delle distribuzioni non sia preservato dalla moltiplicazione per funzioni a tasso di divergenza troppo elevato, si considera uno spazio di distribuzioni più grande delle distribuzioni temperate, dato dal duale dello spazio \mathcal{E} di tutte le funzioni C^∞ a supporto compatto, che si chiama lo *spazio delle distribuzioni*. Evidentemente \mathcal{E} è un sottoinsieme proprio di \mathcal{S} , e quindi il suo duale contiene propriamente \mathcal{S}' . In questo libro però non abbiamo bisogno dello spazio delle distribuzioni: per completezza, ci limiteremo ad accennarne le proprietà nella Sezione 11.18 \square

11.9.2 Derivata

In analogia a come abbiamo definito la moltiplicazione per una funzione (Definizione 11.9.1), definiamo ora la derivata di una distribuzione temperata. Con questa definizione, tutte le distribuzioni sono derivabili!

Definizione 11.9.9. (Derivata di una distribuzione.) Per ogni $F \in \mathcal{S}'$ definiamo $F' \in \mathcal{S}'$ come

$$\langle F', f \rangle = -\langle F, f' \rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Corollario 11.9.10. *L'operatore $D : F \mapsto F'$ manda \mathcal{S}' in \mathcal{S}' ed è continuo.*

Dimostrazione. Sappiamo che la D è un operatore continuo su \mathcal{S} (Esempio 9.5.3). D'altra parte gli elementi $F \in \mathcal{S}'$ sono funzionali continui su \mathcal{S} . Ma, per ogni $f \in \mathcal{S}$, $\langle F', f \rangle = -\langle F, Df \rangle$, e quindi $F' = -F \circ D$. Per la continuità dell'applicazione composta F' è continuo su \mathcal{S} , e quindi $F' \in \mathcal{S}'$. Inoltre $D : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ è continua: infatti, se $F_n \rightarrow F$ in \mathcal{S}' , allora, per ogni $f \in \mathcal{S}$,

$$\langle F'_n, f \rangle = -\langle F_n, f' \rangle \rightarrow -\langle F, f' \rangle = \langle F', f \rangle \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

quindi $F'_n \rightarrow F'$ in \mathcal{S}' (Definizione 11.9.9) \square

Dalla continuità della derivata segue immediatamente:

Corollario 11.9.11. *La derivata di una serie di distribuzioni $\sum F_n$ convergente nel senso di \mathcal{S}' e si ottiene derivando la serie termine a termine (ossia coincide con la serie delle derivate $\sum F'_n$).*

Corollario 11.9.12. (*Compatibilità della Definizione 11.9.9 con la nozione usuale di derivata.*) Se la distribuzione temperata F è rappresentata da una funzione (a crescita polinomiale) derivabile f , cioè se $F = T_f$ nel senso dell'Esempio 11.5.4 (i), e f' è ancora localmente integrabile e a crescita polinomiale, allora la derivata di F nel senso delle distribuzioni coincide con quella ordinaria nel senso delle funzioni: cioè

$$(T_f)' = T_{f'}.$$

Dimostrazione. Integrando per parti si ottiene, per ogni $g \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \langle (T_f)', g \rangle &= -\langle T_f, g' \rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx \\ &= -[f(x)g(x)]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

(L'ultimo integrale converge perché f' è localmente integrabile e a crescita polinomiale). Poiché f è a crescita polinomiale e $g \in \mathcal{S}$ è a decrescenza rapida,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = 0$$

e quindi

$$\langle (T_f)', g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x) dx = \langle T_{f'}, g \rangle.$$

□

Nota 11.9.13. (*Derivata di una funzione nel senso delle distribuzioni.*) Il Corollario 11.9.12 mostra che, se una funzione f a crescita polinomiale è derivabile, allora la distribuzione a essa associata è derivabile e $DT_f = T_{Df}$. Però tutte le distribuzioni sono derivabili (Corollario 11.9.10), non solo quelle associate a funzioni derivabili. In particolare, se f a crescita polinomiale non è derivabile, ciò nonostante T_f è una distribuzione derivabile, però in questo caso non ha più senso chiedersi se $DT_f = T_{Df}$: questa identità ora non è più vera perché il secondo membro non è definito. In questo caso si dice che f è derivabile nel senso delle distribuzioni e la sua derivata è la distribuzione DT_f .

A titolo di esempio si veda il caso della derivata nel senso delle distribuzioni della funzione caratteristica di $(0, \infty)$, nel successivo Esempio 11.10.1.

□

Corollario 11.9.14. Ogni $F \in \mathcal{S}'$ è C^∞ , e per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha, per ogni $f \in \mathcal{S}$,

$$\langle D^k F, f \rangle = (-1)^k \langle F, D^k f \rangle.$$

Dimostrazione. Basta iterare la formula della Definizione 11.9.9 □

11.10 Esempi di derivate e primitive ed approssimazioni nel senso delle distribuzioni

Esempio 11.10.1. (Derivata della delta.) In base alla Definizione 11.9.9 si ha, per ogni $f \in \mathcal{S}$,

$$\langle \delta'_0, f \rangle = -\langle \delta_0, f' \rangle = -f'(0)$$

e per ogni $k > 0$, indicando con l'apice $^{(k)}$ la derivata di ordine k ,

$$\langle D^k \delta_0, f \rangle = \langle (\delta_0)^{(k)}, f \rangle = (-1)^k \langle \delta_0, f^{(k)} \rangle = (-1)^k f^{(k)}(0).$$

□

Definizione 11.10.2. (Distribuzione di Heaviside.) Chiamiamo *funzione di Heaviside* la funzione $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$.

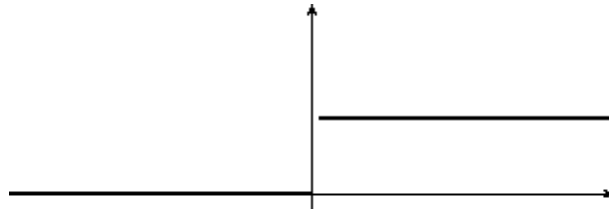
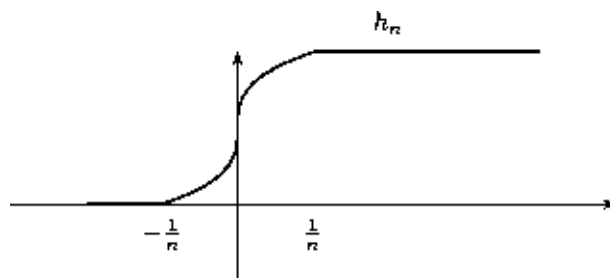


Figura 11.9: Funzione di Heaviside

È chiaro che la funzione h è localmente integrabile e a crescita polinomiale. Perciò essa definisce una distribuzione T_h (Esempio 11.5.4 (i)) che si chiama *distribuzione di Heaviside*. Per ogni $f \in \mathcal{S}$ si ha

$$\langle T_h, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Figura 11.10: Approssimazione C^∞ della funzione di Heaviside

Scriveremo talora la distribuzione di Heaviside come H invece di T_h .

Esempio 11.10.3. (Primitiva della delta.) Denotiamo con $H = T_h$ la distribuzione di Heaviside e calcoliamo H' (Definizione 11.10.2). Non possiamo scrivere $T'_h = T_{h'}$ come nella Nota 11.9.13, perché h non è derivabile ovunque (non lo è in zero). Qui dobbiamo calcolare Dh nel senso delle distribuzioni, come nella Nota 11.9.13. Si ha, per ogni $f \in \mathcal{S}$,

$$\langle T'_h, f \rangle = -\langle T_h, f' \rangle = -\int_0^\infty f'(x)dx = f(0) = \delta_0(f),$$

in base alla formula presentata nella Definizione 11.10.2, al Teorema Fondamentale del Calcolo (Teorema 1.27.1) ed al fatto che $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ perché $f \in \mathcal{S}$.

Quindi $DT_h = \delta_0$, cioè T_h è una primitiva di δ_0 . \square

Esercizio 11.10.4. Per ogni intero $k > 0$, trovare una $F \in \mathcal{S}'$ tale che $D^k F = \delta_0$. Trovare una tale F del tipo T_g per qualche g localmente integrabile a crescita polinomiale. \square

Esempio 11.10.5. (Approssimazione in \mathcal{S}' della distribuzione di Heaviside.) Approssimiamo la funzione h della Definizione 11.10.2 con le funzioni $h_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ (crescenti, con supporto in $[-1/n, 1/n]$ ed immagine $[0, 1]$) disegnate in Figura 11.10. Per costruire h_n basta scegliere una qualsiasi identità approssimata g_n consistente di funzioni C^∞ a supporto compatto contenuto in $[-1/n, 1/n]$, e porre $h_n(x) = \int_{-\infty}^x g_n(t) dt$ (si veda la Figura 11.12).

Osserviamo che, per ogni $x \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(invece $h_n(0) = \frac{1}{2}$ per ogni n). □

Ora, h_n e h non appartengono a \mathcal{S} , perché non tendono a zero all'infinito, però sono limitate, e quindi (Esempio 11.5.4) danno luogo a distribuzioni temperate T_{h_n} e $T_h = H$.

Proposizione 11.10.6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{h_n} = H \quad \text{in } \mathcal{S}'.$$

Dimostrazione. Poiché le funzioni h_n sono equilimitate e puntualmente convergenti, l'enunciato segue direttamente dalla parte (ii) della Proposizione 11.6.1, che si basa sul Teorema di Convergenza Dominata di Lebesgue (Teorema 1.9.54). Ma, a titolo di richiamo oppure di esercizio, dimostriamo direttamente come esso segue da tale teorema.

Per ogni $f \in \mathcal{S}$ si ha

$$T_{h_n}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) f(x) dx$$

e

$$|h_n(x)f(x)| \leq |f(x)| \quad \text{per ogni } x,$$

perché $0 \leq h_n \leq 1$.

Quindi, poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$ per la Nota 9.3.2, possiamo applicare il Teorema di Convergenza Dominata e dedurre che, per ogni $f \in \mathcal{S}$,

$$T_{h_n}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) f(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx = T_h(f) = H(f) \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Questo prova che $T_{h_n} \rightarrow H$ per $n \rightarrow \infty$ in \mathcal{S}' . □

Se si preferisce non far ricorso ad uno strumento potente come il Teorema di Convergenza Dominata, si può svolgere il seguente

Esercizio 11.10.7. Si dia una dimostrazione diretta del fatto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx, \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

□

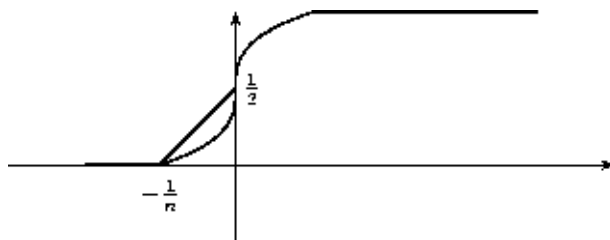


Figura 11.11: Maggiorazione degli approssimanti della funzione di Heaviside

Svolgimento. Le funzioni h_n convergono puntualmente alla funzione h , eccetto che in $x = 0$, dove esse valgono $\frac{1}{2}$ mentre $h(0) = 0$. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)f(x) dx &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\infty} h_n(x)f(x) dx & (11.12) \\ &= \int_{-\frac{1}{n}}^0 h_n(x)f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{n}} h_n(x)f(x) dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} f(x) dx \end{aligned}$$

(nell'ultimo integrale non c'è bisogno di scrivere h_n perché $h_n \equiv 1$ in $[\frac{1}{n}, \infty)$).

Ora, osserviamo che, in $[-\frac{1}{n}, 0]$, $h_n(x)$ si maggiora con la funzione lineare il cui grafico è la retta che passa per i punti $(-\frac{1}{n}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ (si veda la Figura 11.11).

Perciò

$$\int_{-\frac{1}{n}}^0 h_n(x) dx$$

è minore dell'area del triangolo rettangolo avente per base il segmento in ascisse da $-\frac{1}{n}$ a 0, e per altezza il segmento in ordinate da 0 a $\frac{1}{2}$. L'area di questo triangolo, ovviamente, tende a zero se $n \rightarrow \infty$. Perciò

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{n}}^0 h_n(x) dx = 0.$$

Ma allora

$$\left| \int_{-\frac{1}{n}}^0 h_n(x)f(x) dx \right| \leq \|f\|_{\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^0 h_n(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow \infty.$$

Avremmo potuto dimostrare che il limite è zero più semplicemente (ma forse meno elegantemente) maggiorando le h_n con la funzione 1 nell'intervallo $[-\frac{1}{n}, 0]$. Applichiamo questa idea ora all'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{n}} h_n(x) f(x) dx.$$

Osserviamo che, in $[0, \frac{1}{n}]$, $h_n(x) \leq 1$ e quindi

$$\int_0^{\frac{1}{n}} h_n(x) dx \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Perciò

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} h_n(x) f(x) dx \right| \leq \|f\|_\infty \int_0^{\frac{1}{n}} h_n(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow \infty.$$

Grazie a queste stime si ottiene da (11.12) che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

In altre parole,

$$\langle T_{h_n}, f \rangle \rightarrow \langle H, f \rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

□

Corollario 11.10.8. $T'_{h_n} = T_{h'_n} \rightarrow \delta_0$ in \mathcal{S}' .

Dimostrazione. L'uguaglianza segue dalla Nota 11.9.13 e il limite segue dalla continuità su \mathcal{S}' dell'operatore di derivata (Corollario 11.9.10). □

Nota 11.10.9. Le funzioni h'_n formano un'identità approssimata in $L^1(\mathbb{R})$, come sappiamo dalla loro costruzione e come è evidenziato dai loro grafici disegnati nelle Figure 11.12.

Pertanto il fatto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{h'_n} = \delta_0$$

segue anche dal Teorema 11.1.4. □

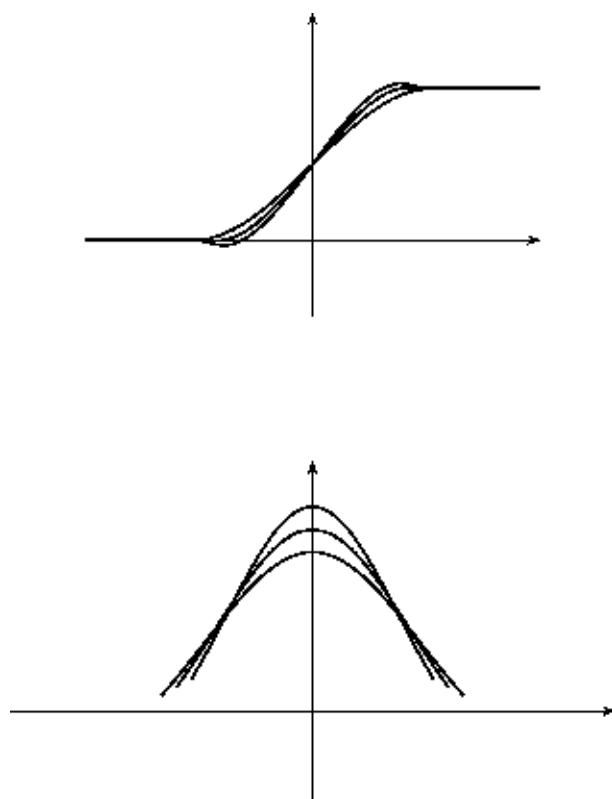


Figura 11.12: approssimanti della distribuzione di Heaviside e loro derivate (che formano una identità approssimata a supporto compatto)

11.11 Supporto di distribuzioni temperate e distribuzioni con supporto in un punto

Definizione 11.11.1. (Supporto di una distribuzione.) Se $F \in \mathcal{S}'$ indichiamo con $\text{supp } F$ il complementare del più grande aperto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ tale che $\langle F, g \rangle = 0$ per ogni $g \in \mathcal{S}$ con supporto contenuto in \mathcal{O} .

Esercizio 11.11.2. (i) $\text{supp } F$ è un chiuso in \mathbb{R} , cioè se $\{x_n\} \in \text{supp } F$ è una successione convergente a $x \in \mathbb{R}$, allora $x \in \text{supp } F$;

(ii) se $F = T_f$ è una funzione (localmente integrabile a crescita polinomiale, come nell'Esempio 11.5.4 (i)), allora il supporto di F come distribuzione coincide con il supporto di f come funzione;

(iii) $\text{supp } \delta_{x_0} = \{x_0\}$, e, per ogni intero $k > 0$, $\text{supp } D^k \delta_{x_0} = \{x_0\}$. □

Enunciamo la seguente Proposizione senza dimostrazione (per la dimostrazione si veda [25, Teorema 6.25]).

Proposizione 11.11.3. *Le distribuzioni con supporto in un unico punto x_0 sono le serie*

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j D^j \delta_{x_0} \quad (c_k \in \mathbb{C})$$

convergenti nel senso delle distribuzioni. Più precisamente, se F ha supporto in $\{x_0\}$ e

$$|\langle F, f \rangle| < C \sum_{j=0}^N p_{0,j}(f),$$

allora

$$F = \sum_{j=0}^N c_j D^j \delta_{x_0}$$

per opportuni $c_k \in \mathbb{C}$ (qui naturalmente p_{0l} è la consueta seminorma su \mathcal{S} definita nella Nota 9.3.3).

Esercizio 11.11.4. Se $\text{supp } F = K$ e h è C^∞ a crescita polinomiale con tutte le derivate, allora $\text{supp } hF \equiv \text{supp}(M_h F) \subset K$ (M_h è l'operatore di moltiplicazione per h introdotto nella Definizione 11.9.1).

□

Nota 11.11.5. In vista dell'Esercizio 11.11.4, verrebbe naturale presumere che, se $h \equiv 0$ sul supporto di F , allora $hF = M_h F = 0$ in \mathcal{S}' . Invece non è così. Sia $h \in C^\infty$ a crescita polinomiale e consideriamo le distribuzioni $h\delta_0$ e $h\delta'_0$. Dall'Esercizio 11.9.5 sappiamo che $h\delta_0 = 0$. Invece, data $f \in \mathcal{S}$, si ha

$$\begin{aligned} \langle h\delta'_0, f \rangle &= \langle \delta'_0, hf \rangle \\ &= -\langle \delta_0, D(hf) \rangle \\ &= -\langle \delta_0, h'f \rangle - \langle \delta_0, hf' \rangle \\ &= -h'(0)f(0) - h(0)f'(0) \\ &= -h'(0)\delta_0 \end{aligned}$$

(abbiamo usato le Definizioni 11.9.1 e 11.9.9 ed il fatto che $h(0) = 0$).

Quindi $h\delta'_0 = -h'(0)\delta_0 \neq 0$ se $h'(0) \neq 0$. \square

11.12 Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate

Come già fatto per gli operatori di traslazione (Definizione 11.7.2), di moltiplicazione per una funzione (Definizione 11.9.1) e di derivazione (Definizione 11.9.9), anche la trasformata di Fourier \mathcal{F} viene ora estesa a \mathcal{S}' per dualità a partire da \mathcal{S} . Data una distribuzione temperata F , adatteremo spesso una notazione più compatta, scrivendo \widehat{F} invece che $\mathcal{F}F$ e F^\vee invece che $\mathcal{F}^{-1}F$, e, se $g \in \mathcal{S}$, g^\vee invece che $\mathcal{F}^{-1}g$.

Definizione 11.12.1. (i) (*trasformata di Fourier su \mathcal{S}' .*) Per ogni $g \in \mathcal{S}$ e $F \in \mathcal{S}'$, definiamo $\mathcal{F}F = \widehat{F} \in \mathcal{S}'$ cos :

$$\langle \widehat{F}, g \rangle = \langle F, \widehat{g} \rangle.$$

(ii) (*antitrasformata di Fourier.*) Per ogni $g \in \mathcal{S}$ e $F \in \mathcal{S}'$, definiamo $\mathcal{F}^{-1}F = F^\vee$ cos :

$$\langle F^\vee, g \rangle = \langle F, g^\vee \rangle.$$

Corollario 11.12.2. Per ogni $F \in \mathcal{S}'$, \widehat{F} e F^\vee appartengono a \mathcal{S}' .

Dimostrazione. È ovvio che \widehat{F} e F^\vee sono funzionali lineari su \mathcal{S} ; dobbiamo dimostrare che sono continui su \mathcal{S} .

La Definizione 11.12.1 (i) dice che, per ogni $g \in \mathcal{S}$,

$$\widehat{F} : g \mapsto F(\mathcal{F}(g)).$$

Poiché la trasformata di Fourier \mathcal{F} è continua su \mathcal{S} per il Teorema 9.7.6, e F è un funzionale continuo su \mathcal{S} , anche \widehat{F} è continuo, per la continuità dell'applicazione composta (Sezione 1.1). Lo stesso ragionamento, grazie alla Nota 9.7.7, prova che F^\vee è continuo su \mathcal{S} . \square

La Definizione 11.12.1 (i) estende la trasformata di Fourier, originariamente definita per funzioni in $L^1(\mathbb{R})$, all'ambito molto più vasto delle distribuzioni temperate: ora di ogni $F \in \mathcal{S}'$ si può effettuare la trasformata di Fourier, che è ancora in \mathcal{S}' . Ma supponiamo che F sia una funzione L^1 , cioè $F = T_f$ con $f \in L^1(\mathbb{R})$, come nell'Esempio 11.5.4 (ii). In tal caso, la trasformata di Fourier di f nel senso delle distribuzioni coincide con quella usuale per funzioni L^1 ? Il prossimo enunciato dà risposta affermativa a questa domanda.

Corollario 11.12.3. *(Compatibilità della Definizione 11.12.1 (i) con la nozione di trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$.)* Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ si ha

$$\widehat{T}_f = T_{\widehat{f}}.$$

Dimostrazione. In base al Teorema di Plancherel per $L^1(\mathbb{R})$ (Teorema 9.7.9) ed alla Definizione 11.12.1 (i) si ha, per ogni $g \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \langle \widehat{T}_f, g \rangle &= \langle T_f, \widehat{g} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \widehat{g}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) g(x) dx = \langle T_{\widehat{f}}, g \rangle. \end{aligned}$$

\square

Proposizione 11.12.4. *(La trasformata di Fourier è un isomorfismo surgettivo di \mathcal{S}' .)* La trasformata di Fourier $\mathcal{F} : F \mapsto \widehat{F}$ è un operatore lineare di \mathcal{S}' in sé iniettivo, surgettivo e continuo. Inoltre $\langle \widehat{F}, g \rangle = \langle F, g^\dagger \rangle$ (ossia \mathcal{F}^2 è l'operatore di riflessione di parità), e quindi $\mathcal{F}^4 = 1$.

Dimostrazione. È ovvio che \mathcal{F} è lineare. Quindi, per provare che è iniettivo, basta mostrare che, per ogni $F \in \mathcal{S}'$, se $\widehat{F} = 0$ allora $F = 0$. Questo è vero perché, per ogni $g \in \mathcal{S}$, se $\widehat{F} = 0$ la Definizione 11.12.1 (i) dà

$$0 = \langle \widehat{F}, g \rangle = \langle F, \widehat{g} \rangle$$

(qui abbiamo scritto $\langle \widehat{F}, g \rangle$ invece che $\langle T_{\widehat{F}}, g \rangle$ per semplicità di notazione: lo faremo spesso in seguito). D'altra parte, per il Teorema 9.7.6, l'applicazione $g \mapsto \widehat{g}$ è surgettiva su \mathcal{S} . Quindi la precedente identità asserisce che

$$\langle F, h \rangle = 0 \quad \forall h \in \mathcal{S}.$$

Quindi F è il funzionale nullo su \mathcal{S} , cioè $F = 0$ in \mathcal{S}' .

Per provare la surgettività è sufficiente mostrare che ogni $F \in \mathcal{S}'$ è la trasformata di Fourier della sua antitrasformata (o trasformata inversa, Definizione 11.12.1 (ii)). In effetti, grazie alla formula di inversione di Fourier in \mathcal{S} (Teorema 8.4.2) e alla Definizione 11.12.1 si ha, per ogni $g \in \mathcal{S}$

$$\langle \widehat{F^\vee}, g \rangle = \langle F^\vee, \widehat{g} \rangle = \langle F, \widehat{g^\vee} \rangle = \langle F, g \rangle. \quad (11.13)$$

Dimostriamo infine che \mathcal{F} è continua su \mathcal{S}' . Per questo occorre provare che, se $F_n \rightarrow F$ in \mathcal{S}' allora $\widehat{F}_n \rightarrow \widehat{F}$ in \mathcal{S} . Richiedere che $F_n \rightarrow F$ in \mathcal{S}' significa assumere che, per ogni $g \in \mathcal{S}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle F_n, g \rangle = \langle F, g \rangle$$

(Definizione 11.5.2). D'altra parte, in base alla surgettività di \mathcal{F} su \mathcal{S} (di nuovo il Teorema 9.7.6) ogni $g \in \mathcal{S}$ è del tipo $g = \widehat{h}$ per qualche $h \in \mathcal{S}$, e viceversa per ogni $h \in \mathcal{S}$ la funzione $g = \widehat{h}$ è in \mathcal{S} . Quindi, per ogni $h \in \mathcal{S}$, dalla Definizione 11.12.1(i) si ha:

$$\langle \widehat{F}_n, h \rangle = \langle F_n, g \rangle \rightarrow \langle F, g \rangle = \langle \widehat{F}, h \rangle \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Perciò $\widehat{F}_n \rightarrow \widehat{F}$ in \mathcal{S} .

L'ultima asserzione segue immediatamente dalla proprietà di parità della trasformata di Fourier (Teorema 8.2.4 (iii)). \square

Nota 11.12.5. Nella dimostrazione della Proposizione 11.12.4 l'iniettività e la surgettività di \mathcal{F} su \mathcal{S}' sono state dimostrate utilizzando la surgettività di \mathcal{F} su \mathcal{S} . Lo stesso strumento si potrebbe utilizzare per dare una dimostrazione alternativa della surgettività di \mathcal{F} su \mathcal{S}' . Infatti, vogliamo dimostrare che per ogni $F \in \mathcal{S}'$ esiste $G \in \mathcal{S}'$ tale che $F = \widehat{G}$. Come possiamo costruire G ? Per ogni $f \in \mathcal{S}$, deve valere

$$\langle G, \widehat{f} \rangle = \langle \widehat{G}, f \rangle = \langle F, f \rangle.$$

Ma in questo modo definiamo G solo sull'immagine della trasformata di Fourier in \mathcal{S} . Però, poiché la trasformata di Fourier manda \mathcal{S} surgettivamente su \mathcal{S} , questa immagine è tutto \mathcal{S} , e così G è definita su ogni $f \in \mathcal{S}$, quindi è una distribuzione temperata. Osserviamo che questa idea in realtà è stata usata già in (11.13), dove abbiamo usato la formula di inversione $g = \widehat{g}^\vee$, che vale in \mathcal{S} perché la trasformata di Fourier è biunivoca. \square

11.13 Proprietà della trasformata di Fourier in \mathcal{S}'

Le proprietà della trasformata di Fourier su $L^1(\mathbb{R})$, discusse in Sezione 8.2, si estendono alla trasformata di Fourier su \mathcal{S}' . Effettuiamo questa estensione trasportando a \mathcal{S}' , mediante la dualità, le definizioni valide su \mathcal{S} .

Qui consideriamo le proprietà di derivazione, di dilatazione, di traslazione, di coniugazione e di parità. Infine, nelle prossime sezioni esamineremo la proprietà di convoluzione ed il legame che intercorre tra essa e la traslazione.

Esempio 11.13.1. (Proprietà di derivazione per la trasformata di Fourier su \mathcal{S}' .) Indichiamo con $2\pi ix F$ la distribuzione $M_{2\pi ix} F$ (notazione della Definizione 11.9.1). Allora:

(i) Per ogni $F \in \mathcal{S}'$ si ha $\widehat{DF} = 2\pi ix \widehat{F}$ (ed analogamente $(DF)^\vee = -2\pi ix F^\vee$).

(ii) Per ogni $F \in \mathcal{S}'$ si ha $D\widehat{F} = 2\pi i\omega \widehat{F}$.

Svolgimento. Dalle Definizioni 11.9.9 e 11.12.1 (i) e dal Teorema 8.2.4 (viii), per ogni $f \in \mathcal{S}$ si ha:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{DF}, f \rangle &= \langle DF, \widehat{f} \rangle = -\langle F, D(\widehat{f}) \rangle = -\langle F, (-2\pi ix f) \rangle \\ &= \langle \widehat{F}, 2\pi ix f \rangle = \langle M_{2\pi ix} \widehat{F}, f \rangle \end{aligned}$$

(anche qui abbiamo denotato con $2\pi ixf$ la funzione $x \rightarrow 2\pi ixf(x) \in \mathcal{S}$). Questo prova (i). La parte (ii) si dimostra in maniera analoga grazie alla formula di inversione di Fourier (Teorema 8.4.2): infatti, possiamo porre $F = \widehat{G}$ (per la surgettività della trasformata di Fourier su \mathcal{S}), e quindi, per la parte (i), $(D\widehat{G})^\vee = -2\pi ixF$, ossia $DF = D\widehat{G} = -2\pi i\widehat{xG} = -2\pi i\widehat{x}\widehat{F}^\vee$, da cui (ii). \square

Esercizio 11.13.2. (i) $\widehat{\delta}_0 = 1$ (cioè $\widehat{\delta}_0 = T_1$, la distribuzione che corrisponde alla funzione identicamente 1). Più in generale (ma equivalentemente), per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha $\widehat{\delta}_y = e^{-2\pi iyx}$ (cioè $\widehat{\delta}_y = T_{e^{-2\pi iy \cdot}}$).

(ii) $\widehat{\delta}'_0 = 2\pi ix$ (cioè $\widehat{\delta}'_0 = T_{2\pi ix}$). Più in generale (ma equivalentemente), per ogni $y \in \mathbb{R}$ $\widehat{\delta}'_y = 2\pi ixe^{-2\pi iyx}$ (cioè $\widehat{\delta}'_y = T_{2\pi i \cdot} \cdot e^{-2\pi iy \cdot} = M_{2\pi i} \cdot T_{e^{-2\pi iy \cdot}}$).

(iii) Sia H il sottospazio vettoriale di \mathcal{S} di tutte le combinazioni lineari finite

$$\left\{ \sum_{k=1}^n c_k D^k \delta_0, \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Allora la trasformata di Fourier è un isomorfismo lineare da H allo spazio P di tutti i polinomi su \mathbb{R} ; l'isomorfismo è dato da

$$\mathcal{F} : \sum_{k=1}^n c_k D^k \delta_0 \mapsto \sum_{k=1}^n (2\pi i)^k c_k x^k.$$

\square

Nota 11.13.3. Abbiamo visto nell' Esempio 11.13.1 (ii) che $D\widehat{G} = -2\pi i\widehat{xG}$, per ogni $G \in \mathcal{S}'$. Ecco una dimostrazione alternativa (ma in realtà equivalente), che fa uso del fatto che, per ogni $g \in \mathcal{S}$, si ha $\widehat{g}' = -2\pi i\widehat{xg}$ (Teorema 8.2.4):

$$\langle D\widehat{F}, g \rangle = -\langle \widehat{F}, Dg \rangle = -\langle F, \widehat{Dg} \rangle = \langle F, 2\pi i\widehat{xg} \rangle.$$

Abbiamo usato le Definizioni 11.9.1 e 11.9.9. \square

Ora introduciamo in \mathcal{S}' la dilatazione di passo $\alpha \neq 0$. Ricordiamo la notazione per l'operatore di dilatazione di funzioni, introdotta nella Definizione 11.7.6: $\Lambda_\alpha f(x) = f(\alpha x)$, ($\alpha \neq 0$). Con questa notazione il Teorema di dilatazione per la trasformata di Fourier, Teorema 8.2.4 (iv), si scrive nel modo seguente:

Corollario 11.13.4.

$$\widehat{\Lambda_\alpha f} = \frac{1}{|\alpha|} \Lambda_{\frac{1}{\alpha}} \left(\widehat{f} \right).$$

Dimostrazione.

$$\widehat{\Lambda_\alpha f}(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \widehat{f} \left(\frac{\omega}{|\alpha|} \right) = \frac{1}{|\alpha|} \left(\Lambda_{\frac{1}{\alpha}} \widehat{f} \right) (\omega)$$

□

Estendiamo il teorema a \mathcal{S}' . Cominciamo con il seguente fatto

Lemma 11.13.5. *Per ogni $f, g \in \mathcal{S}$ si ha*

$$\langle \Lambda_\alpha f, g \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle f, \Lambda_{\frac{1}{\alpha}} g \rangle.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_\alpha f, g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) g(x) dx \\ &= \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g\left(\frac{u}{\alpha}\right) du \quad (u = \alpha x) \\ &= \frac{1}{|\alpha|} \langle f, \Lambda_{\frac{1}{\alpha}} g \rangle. \end{aligned}$$

Il valore assoluto nell'ultimo integrale è necessario, quando $\alpha < 0$, per mantenere il senso di integrazione da $-\infty$ a ∞ . □

In analogia a questo enunciato, definiamo $\Lambda_\alpha T$ per $T \in \mathcal{S}'$ come

Definizione 11.13.6. (Operatore di dilatazione su \mathcal{S}').

$$\langle \Lambda_\alpha T, g \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle T, \Lambda_{\frac{1}{\alpha}} g \rangle.$$

Nota 11.13.7. (Compatibilità della definizione di dilatazione per distribuzioni con quella per funzioni.) Segue dalla Definizione 11.13.6 e dal Lemma 11.13.5 che, per ogni $f \in \mathcal{S}$, si ha $\Lambda_\alpha T_f = T_{\Lambda_\alpha f}$: quindi la definizione per le distribuzioni coincide con quella per le funzioni quando una distribuzione è una funzione. □

Esempio 11.13.8. Quale è il dilatato della delta? Il seguente: $\Lambda_\alpha \delta_x = \frac{1}{|\alpha|} \delta_{\frac{x}{\alpha}}$. Infatti

$$\langle \Lambda_\alpha \delta_x, g \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle \delta_x, \Lambda_{\frac{1}{\alpha}} g \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle \delta_x, g(\frac{\cdot}{\alpha}) \rangle = \frac{1}{|\alpha|} g(x/\alpha).$$

Analogamente, per il treno di impulsi K dell'Esempio 11.7.4, si ha $\Lambda_\alpha K = \frac{1}{|\alpha|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{\frac{n}{\alpha}}$. \square

Per la trasformata di Fourier, la proprietà di dilatazione diventa

Teorema 11.13.9. (*Proprietà di dilatazione per la trasformata di Fourier su S' .*) Per ogni $\alpha \neq 0$ e $T \in S'$,

$$\widehat{\Lambda_\alpha T} = \frac{1}{|\alpha|} \Lambda_{\frac{1}{\alpha}} \widehat{T}.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\Lambda_\alpha T}, g \rangle &= \langle \Lambda_\alpha T, \widehat{g} \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle T, \Lambda_{\frac{1}{\alpha}} \widehat{g} \rangle \\ &= \langle T, \widehat{\Lambda_\alpha g} \rangle && \text{(Corollario 11.13.4)} \\ &= \langle \widehat{T}, \Lambda_\alpha g \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle \Lambda_{\frac{1}{\alpha}} \widehat{T}, g \rangle && \text{(Definizione 11.13.6).} \end{aligned}$$

Esercizio 11.13.10. Si verifichi in maniera diretta (ossia senza usare il precedente Teorema 11.13.9) che $\widehat{\Lambda_{\frac{1}{\tau}} K} = \tau \Lambda_\tau \widehat{K}$. \square

Analogamente, consideriamo il caso delle traslazioni. Con la notazione della Definizione 11.7.2, il teorema di traslazione per la trasformata di Fourier, Teorema 8.2.4 (v), si estende a S' nel modo seguente:

Teorema 11.13.11. (*Proprietà di traslazione per la trasformata di Fourier su S' .*) Per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, $T \in S'$, si ha $\widehat{\lambda_{t_0} T} = e^{-2\pi i t_0 x} T$.

Dimostrazione. In base alla proprietà di modulazione per la trasformata di Fourier, Teorema 8.2.4 (vi), si ha:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\lambda_{t_0} T}, g \rangle &= \langle \lambda_{t_0} T, \widehat{g} \rangle = \langle T, \lambda_{-t_0} \widehat{g} \rangle = \langle T, (e^{2\pi i t_0 \cdot} g) \widehat{\cdot} \rangle \\ &= \langle \widehat{T}, e^{2\pi i t_0 \cdot} g \rangle = \langle e^{2\pi i t_0 \cdot} \widehat{T}, g \rangle. \end{aligned}$$

□

Ora veniamo alla parità.

Definizione 11.13.12. (Parità in \mathcal{S}'). Per $g \in \mathcal{S}$, scriviamo, come sempre, $g^\dagger(x) = g(-x)$. Per $F \in \mathcal{S}'$, definiamo F^\dagger per dualità: per ogni $g \in \mathcal{S}$

$$\langle F^\dagger, g \rangle = \langle F, g^\dagger \rangle.$$

Corollario 11.13.13. (Compatibilità della Definizione 11.13.12 con la nozione di parità di una funzione.) Se F è una funzione (localmente L^1 e a crescita polinomiale, ovvero L^1 , Esempi 11.5.4 (i) e (ii)), cioè $F = T_f$, allora

$$F^\dagger = T_{f^\dagger}$$

Dimostrazione. Per ogni $g \in \mathcal{S}$ dalla Definizione 11.13.12 segue

$$\begin{aligned} \langle F^\dagger, g \rangle &= \langle T_f, g^\dagger \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(-x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)g(x) dx \\ &= \langle T_{f^\dagger}, g \rangle \end{aligned}$$

□

Il prossimo enunciato estende alle distribuzioni i Teoremi 8.2.4 (i) e (ii).

Proposizione 11.13.14. (Trasformata di Fourier in \mathcal{S}' e parità.)

- (i) Per ogni $F \in \mathcal{S}'$, $\widehat{F^\dagger} = \widehat{F}^\dagger$;
- (ii) Per ogni $F \in \mathcal{S}'$, $\widehat{\widehat{F}} = F^\dagger$;
- (iii) se $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ è a crescita polinomiale con tutte le derivate, allora per ogni $F \in \mathcal{S}'$ si ha $(hF)^\dagger = h^\dagger F^\dagger$.

Dimostrazione. La proprietà (i) è l'estensione per dualità, a partire da \mathcal{S} , della proprietà del Teorema 8.2.4 (i), grazie alla quale, per ogni $g \in \mathcal{S}$, si ha $\widehat{g^\dagger} = \widehat{g}^\dagger$. Infatti:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{F^\dagger}, g \rangle &= \langle F^\dagger, \widehat{g} \rangle = \langle F, \widehat{g^\dagger} \rangle = \langle F, \widehat{g}^\dagger \rangle \\ &= \langle \widehat{F}, g^\dagger \rangle = \langle \widehat{F^\dagger}, g \rangle \end{aligned}$$

(abbiamo usato le Definizioni 11.12.1 e 11.13.12). Questo prova (i). Analogamente, (ii) segue dal Teorema 8.2.4 (ii), grazie al quale, per ogni $g \in \mathcal{S}$, si ha $\widehat{\hat{g}} = g^\dagger$. Infatti

$$\langle \widehat{\hat{F}}, g \rangle = \langle \widehat{F}, \widehat{\hat{g}} \rangle = \langle F, \widehat{\hat{g}} \rangle = \langle F, g^\dagger \rangle = \langle F^\dagger, g \rangle .$$

La proprietà (iii) è ovvia:

$$\begin{aligned} \langle (hF)^\dagger, g \rangle &= \langle hF, g^\dagger \rangle = \langle F, hg^\dagger \rangle = \langle F, (h^\dagger g)^\dagger \rangle \\ &= \langle F^\dagger, h^\dagger g \rangle = \langle h^\dagger F^\dagger, g \rangle . \end{aligned}$$

□

C'è un'ultima fra le proprietà della trasformata di Fourier su $L^1(\mathbb{R})$ (elencate nel Teorema 8.2.4) che resta da estendere a \mathcal{S}' : per $f \in L^1(\mathbb{R})$, si ha $\widehat{\widehat{f}} = \overline{\overline{f}}^\dagger$. Rinviamo questa estensione al prossimo esercizio.

Definizione 11.13.15. Per $F \in \mathcal{S}'$, definiamo il suo complesso coniugato $\overline{F} \in \mathcal{S}'$ come segue: per ogni $g \in \mathcal{S}$

$$\langle \overline{F}, g \rangle = \overline{\langle F, \overline{g} \rangle} .$$

Esercizio 11.13.16. (i) Mostrare che questa definizione è compatibile con la nozione di coniugazione di funzioni: cioè, se $F = T_f$ come nell'Esempio 11.2.2, allora $\overline{T_f} = T_{\overline{f}}$.

(ii) Provare che

$$\widehat{\overline{F}} = \overline{(\widehat{F})^\dagger} = \left((\widehat{\overline{F}})^\dagger \right) \quad \forall F \in \mathcal{S}' .$$

□

Definizione 11.13.17. $F \in \mathcal{S}'$ si dice *reale* (o a valori reali, se F è una funzione) se $F = \overline{F}$.

Esercizio 11.13.18. Si mostri che, se F è una funzione localmente integrabile a crescita polinomiale (Definizione 9.5.2), allora T_f è reale se e solo se f è a valori reali. □

Proposizione 11.13.19. Per $F \in \mathcal{S}'$ le seguenti proprietà sono equivalenti:

(i) $F = \overline{F}$ (cioè F è reale)

(ii) Per ogni $g \in \mathcal{S}$ a valori reali, $\langle F, g \rangle \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. (i) \Rightarrow (ii): se $F = \overline{F}$ e g è a valori reali, segue dalla Definizione 11.13.15 che

$$\begin{aligned}\langle F, g \rangle &= \langle \overline{F}, g \rangle \\ &= \overline{\langle F, \overline{g} \rangle} \\ &= \overline{\langle F, g \rangle}\end{aligned}$$

e quindi $\langle F, g \rangle \in \mathbb{R}$.

(ii) \Rightarrow (i): sia $h \in \mathcal{S}$ e scriviamo $g_1 = \operatorname{Re} h$, $g_2 = \operatorname{Im} h$. Allora per (ii), $\langle F, g_1 \rangle$ e $\langle F, g_2 \rangle$ sono reali. Quindi per la Definizione 11.13.15

$$\begin{aligned}\langle \overline{F}, h \rangle &= \langle \overline{F}, g_1 + ig_2 \rangle \\ &= \langle \overline{F}, g_1 \rangle + i \langle \overline{F}, g_2 \rangle \\ &= \overline{\langle F, g_1 \rangle} + i \overline{\langle F, g_2 \rangle} \\ &= \langle F, g_1 \rangle + i \langle F, g_2 \rangle \\ &= \langle F, g_1 + ig_2 \rangle \\ &= \langle F, h \rangle.\end{aligned}$$

Perciò $F = \overline{F}$. □

Infine, estendiamo il Corollario 8.2.6 alle distribuzioni.

Definizione 11.13.20. $F \in \mathcal{S}'$ si dice *pari* se $F = F^\dagger$, *dispari* se $F = -F^\dagger$ (notazione come in Definizione 11.13.12).

Definizione 11.13.21. Definiamo la parte reale e la parte immaginaria di una distribuzione. Per ogni $F \in \mathcal{S}'$ basta definire $\operatorname{Re} F$ e $\operatorname{Im} F$ per ogni $g \in \mathcal{S}$ a valori reali, grazie alla linearità. La definizione che ne diamo è questa:

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{Re} F, g \rangle &= \operatorname{Re} \langle F, g \rangle \\ \langle \operatorname{Im} F, g \rangle &= \operatorname{Im} \langle F, g \rangle.\end{aligned}$$

Esercizio 11.13.22. Si verifichi la compatibilità fra la definizione di parte reale ed immaginaria per funzioni localmente integrabili a crescita polinomiale f e per distribuzioni T_f , ossia $\operatorname{Re} T_f = T_{\operatorname{Re} f}$ e $\operatorname{Im} T_f = T_{\operatorname{Im} f}$. \square

Corollario 11.13.23. (*La trasformata di Fourier preserva la parità.*)

(i) Se $F \in \mathcal{S}'$ è pari, allora \widehat{F} e F^\vee sono pari; se F è dispari, allora \widehat{F} e F^\vee sono dispari.

(ii) Se $F \in \mathcal{S}'$ è reale, allora $\operatorname{Re} \widehat{F}$ è pari e $\operatorname{Im} \widehat{F}$ è dispari.

Dimostrazione. F è pari se e solo se \widehat{F} è pari a causa della Proposizione 11.13.14 (i). Analogamente, F è dispari se e solo se \widehat{F} è dispari, per la stessa ragione. Questo prova (i).

Per dimostrare (ii), supponiamo F reale, cioè $F = \overline{F}$. Vogliamo mostrare che, per ogni $g \in \mathcal{S}$, si ha

$$\langle (\operatorname{Re} \widehat{F})^\dagger, g \rangle = \langle \operatorname{Re} \widehat{F}, g \rangle.$$

Per la linearità basta assumere che g sia a valori reali. In tal caso si ha

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{Re}(\widehat{F})^\dagger, g \rangle &= \langle \operatorname{Re} \widehat{F}, g^\dagger \rangle && \text{Definizione 11.13.12} \\ &= \operatorname{Re} \langle \widehat{F}, g^\dagger \rangle && \text{Definizione 11.13.21} \\ &= \operatorname{Re} \overline{\langle \widehat{F}, g^\dagger \rangle} \\ &= \operatorname{Re} \langle \overline{\widehat{F}}, \overline{g^\dagger} \rangle \\ &= \operatorname{Re} \langle \widehat{F}^\dagger, \overline{g^\dagger} \rangle && \text{Esercizio 11.13.16 (ii) e } \overline{(g^\dagger)} = (\overline{g})^\dagger \\ &= \operatorname{Re} \langle \widehat{F}, g \rangle && \text{Definizione 11.13.12 e } F = \overline{F}, g = \overline{g} \\ &= \langle \operatorname{Re} \widehat{F}, g \rangle. && \text{Definizione 11.13.15} \end{aligned}$$

La stessa argomentazione prova che $(\text{Im } \widehat{F})^\dagger = -\text{Im } \widehat{F}$:

$$\begin{aligned}
\langle (\text{Im } \widehat{F})^\dagger, g \rangle &= \langle (\text{Im } \widehat{F}), g^\dagger \rangle && \text{Definizione 11.13.12} \\
&= \text{Im} \langle \widehat{F}, g^\dagger \rangle && \text{Definizione 11.13.21} \\
&= -\text{Im} \overline{\langle \widehat{F}, g^\dagger \rangle} \\
&= -\text{Im} \langle \widehat{F}, \overline{g^\dagger} \rangle \\
&= -\text{Im} \langle \widehat{F}^\dagger, \overline{g} \rangle && \text{Esercizio 11.13.16 (ii) e } \overline{(g^\dagger)} = (\overline{g})^\dagger \\
&= -\text{Im} \langle \widehat{F}, g \rangle && \text{Definizione 11.13.12 e } F = \overline{F}, g = \overline{g} \\
&= -\langle \text{Im } \widehat{F}, g \rangle. && \text{Definizione 11.13.15}
\end{aligned}$$

□

11.14 Convoluzione di funzioni con distribuzioni temperate

Abbiamo visto che la trasformata di Fourier manda la convoluzione di due funzioni $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ nel prodotto puntuale $\widehat{f}\widehat{g}$ (Teorema 8.5.1). Assumiamo che f e g siano in \mathcal{S} , dove la trasformata di Fourier è un isomorfismo surgettivo (Teorema 9.7.6) e quindi la antitrasformata di Fourier è anch'essa un isomorfismo surgettivo. Pertanto abbiamo:

$$f * g = (\widehat{f}\widehat{g})^\vee \quad \forall f, g \in \mathcal{S}. \quad (11.14)$$

D'altra parte \mathcal{F} e \mathcal{F}^{-1} sono isomorfismi surgettivi anche su \mathcal{S}' (Proposizione 11.12.4). Quindi potremmo usare (11.14) per definire la convoluzione di due distribuzioni temperate F e G se fossimo in grado di definire la moltiplicazione $\widehat{F}\widehat{G}$. Questo sappiamo farlo quando \widehat{F} è una funzione, o più precisamente se $\widehat{F} = T_h$, con $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ a crescita polinomiale con tutte le derivate (Definizione 11.9.1). Ad esempio, supponiamo $f \in \mathcal{S}$. Allora $\widehat{T}_f = T_{\widehat{f}}$ (Corollario 11.12.3), e possiamo dare un senso al prodotto $\widehat{T}_f \cdot \widehat{G}$ scrivendolo come $M_{\widehat{f}}(\widehat{G})$ (notazione della Definizione 11.9.1). Perciò la seguente definizione ha senso:

Definizione 11.14.1. La convoluzione di $f \in \mathcal{S}$ con $G \in \mathcal{S}'$ è data da:

$$f * G = T_f * G := (M_{\widehat{f}} \widehat{G})^\vee$$

Notazione 11.14.2. Come già accennato, quando non ci sono rischi di ambiguità, scriviamo f invece di T_f . Scriveremo sempre $f * G$ invece di $T_f * G$, e $\widehat{f} \widehat{G}$ invece di $M_{\widehat{f}} \widehat{G}$.

Corollario 11.14.3. Se $f \in \mathcal{S}$ e $G \in \mathcal{S}'$ si ha:

$$(i) \quad \widehat{f * G} = \widehat{f} \widehat{G}$$

$$(ii) \quad (fG)^\vee = f^\vee * G^\vee$$

$$(iii) \quad \widehat{fG} = \widehat{f} * \widehat{G}.$$

Dimostrazione. Poiché la trasformata di Fourier e la antitrasformata di Fourier sono surgettive su \mathcal{S}' (Proposizione 11.12.4), (i) equivale alla Definizione 11.14.1.

Sempre per la surgettività, nella Definizione 11.14.1 possiamo scrivere f^\vee al posto di f e G^\vee al posto di G : allora la suddetta definizione diventa $f^\vee * G^\vee = (fG)^\vee$, che è (ii).

In particolare, $(f^\dagger G^\dagger)^\vee = f^{\dagger\vee} G^{\dagger\vee}$. Pertanto, rammentando che $\widehat{\widehat{f}} = f^\dagger$ (Teorema 8.2.4 (ii)), che la stessa proprietà vale per \mathcal{S}' (Proposizione 11.13.14 (ii)) ed infine che $f^\dagger G^\dagger = (fG)^\dagger$ (Proposizione 11.13.14 (iii)), otteniamo

$$\widehat{f} * \widehat{G} = \left(\widehat{\widehat{f}}\right)^\vee * \left(\widehat{\widehat{G}}\right)^\vee = f^{\dagger\vee} * G^{\dagger\vee} = (f^\dagger G^\dagger)^\vee = \left(\widehat{\widehat{fG}}\right)^\vee = \widehat{fG},$$

che è (iii). □

Esempio 11.14.4. Se $f \in \mathcal{S}$ e $T \in \mathcal{S}'$, allora per ogni $g \in \mathcal{S}$ si ha $(f * T)(g) = T(f^\dagger * g)$, dove, come al solito, scriviamo $f^\dagger(x) = f(-x)$.

Infatti, si ha

$$\begin{aligned} \langle f * T, g \rangle &= \langle (\widehat{\widehat{fT}})^\vee, g \rangle = \langle \widehat{\widehat{fT}}, g^\vee \rangle \\ &= \langle \widehat{T}, \widehat{\widehat{f}} g^\vee \rangle = \langle T, \widehat{\widehat{f}} g^\vee \rangle \\ &= \langle T, \widehat{\widehat{f}} * g \rangle = \langle T, f^\dagger * g \rangle \end{aligned}$$

grazie al Teorema 8.2.4 (iv).

Lasciamo al lettore, come esercizio, la verifica del fatto che questa proprietà è compatibile con la analoga proprietà che si ha quando la distribuzione T è del tipo T_h , cioè data da una funzione h integrabile. Più precisamente, si verifichi direttamente che si ha

$$\langle f * h, g \rangle = \langle h, f^\dagger * g \rangle.$$

Questo calcolo si basa su uno scambio dell'ordine di integrazione negli integrali che definiscono la trasformata di Fourier e la convoluzioni. Poiché le funzioni sono di Schwartz, e quindi in L^1 , questo scambio è autorizzato dal Teorema di Fubini 1.20.4. \square

11.15 Convoluzione con la delta e traslazione

Per prima cosa calcoliamo la trasformata di Fourier della delta.

Esempio 11.15.1. (i) $\widehat{\delta}_0 = T_1$ (dove 1 indica la funzione costante di valore 1).

(ii) $\widehat{\delta}_x = T_{e^{-2\pi ix}}$ (dove $e^{-2\pi ix}$ indica la funzione $\omega \mapsto e^{-2\pi ix\omega}$).

Infatti, (i) vale perché, per ogni $f \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\delta}_0, f \rangle &= \langle \delta_0, \widehat{f} \rangle = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ix \cdot 0} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \langle T_1, f \rangle \end{aligned}$$

per la formula di inversione di Fourier, Teorema 8.4.2.

Esattamente nello stesso modo si prova (ii). \square

Notazione 11.15.2. Come già accennato nella Notazione 11.14.2, scriviamo $\widehat{\delta}_0 = 1$ e $\widehat{\delta}_x(\omega) = e^{-2\pi ix\omega}$.

Proposizione 11.15.3. *(La convoluzione con una delta è una traslazione.)* Per ogni $f \in \mathcal{S}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$T_f * \delta_x = T_{\lambda_x f}$$

ovvero, con la terminologia della Notazione 11.14.2, $f * \delta_x = \lambda_x f$ (cioè $f * \delta_x(x_0) = f(x_0 - x)$ per ogni x_0).

Dimostrazione. Dalla Definizione 11.14.1 e dall'Esempio 11.15.1 (ii) si ha

$$f * \delta_x = (\widehat{f\delta_x})^\vee = (\widehat{f}e^{-2\pi ix\cdot})^\vee$$

dove $e^{-2\pi ix\cdot}$ denota la funzione $\omega \mapsto e^{-2\pi ix\omega}$. Ma, per il Teorema 8.2.4 (iv) si ha $\widehat{f}(\omega)e^{-2\pi ix\omega} = \widehat{\lambda_x f}(\omega)$. Perciò

$$f * \delta_x = (\widehat{\lambda_x f})^\vee = \lambda_x f.$$

□

Nota 11.15.4. Rammentiamo la notazione a pagina 868,

$$\langle \delta_x, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_x(t) dt,$$

che confonde il modo di scrivere la delta con quello che si usa per le funzioni. Nel caso dell'enunciato della Proposizione 11.15.3, questa notazione è particolarmente suggestiva ed intuitiva, perché ispira in maniera naturale la formula

$$\lambda_x f = f * \delta_x.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \lambda_x f(y) &= f(y-x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_0(t - (y-x)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_0^\dagger(y-x-t) dt \end{aligned}$$

(per la Definizione 11.13.12).

Ma $\delta_0^\dagger = \delta_0$, perché, per ogni $g \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \langle \delta_0^\dagger, g \rangle &= \langle \delta_0, g^\dagger \rangle = g^\dagger(0) = g(-0) \\ &= g(0) = \langle \delta_0, g \rangle. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \lambda_x f(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_0(y-x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_x(y-t) dt, \end{aligned}$$

e l'ultimo integrale, se la delta fosse una funzione, sarebbe proprio $f * \delta_x(y)$. \square

Nota 11.15.5. Ponendo $x = 0$ nella Proposizione 11.15.3 otteniamo $f * \delta_0 = f$ per ogni $f \in \mathcal{S}$. In altre parole, la convoluzione con δ_0 è l'operatore identità. Questo da un lato spiega perché abbiamo chiamato identità approssimate gli approssimanti di δ_0 nella convergenza in \mathcal{S}' (Nota 11.8.3) e dall'altro, grazie alla parte (i) del Corollario 11.14.3, rende naturale il fatto che risulti $\widehat{\delta}_0 = 1$: infatti, per ogni $f \in \mathcal{S}$,

$$\widehat{f} = \widehat{f * \delta_0} = \widehat{f} \widehat{\delta_0}.$$

Si noti però che questa osservazione non serve a dimostrare che $\widehat{\delta}_0 = 1$, perché questa uguaglianza è già stata usata nel dimostrare che $f * \delta_0 = f$ (si usa nella dimostrazione della Proposizione 11.15.3). \square

11.16 Appendice: Il teorema di convergenza puntuale di identità approssimate: una dimostrazione diretta

La seguente definizione è equivalente a quella di identità approssimate in $L^1(\mathbb{R})$ (Definizione 6.1.15).

Definizione 11.16.1. Una famiglia $\{h_\rho, \rho > 0\}$ di funzioni in $L^1(\mathbb{R})$ si dice un'identità approssimate in $L^1(\mathbb{R})$ se:

- i) $h_\rho(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
- ii) $\int_{-\infty}^{\infty} h_\rho(x) dx = 1, \forall \rho$;
- iii) per ogni $\varepsilon > 0$ per ogni $\delta > 0 \exists \rho_0 = \rho_0(\varepsilon, \delta)$ tale che

$$\int_{-\delta}^{\delta} h_\rho(x) dx \geq 1 - \varepsilon \quad \forall \rho > \rho_0.$$

Abbiamo visto nel Teorema 10.4.4 (che fa uso dei risultati sulle identità approssimate dimostrati in Sezione 6.1) che, se identifichiamo la funzione h_ρ con la distribuzione T_{h_ρ} , si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \lambda_t h_\rho^\dagger = \delta_t$$

nel senso di \mathcal{S}' per ogni $t \in \mathbb{R}$. Grazie alla Nota 11.8.4 questo equivale a

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \lambda_t h_\rho = \delta_t$$

per ogni identità approssimata $\{h_\rho\}$. In base al Corollario 11.8.5 quanto appena asserito equivale al seguente enunciato:

Teorema 11.16.2. $\lim_{\rho \rightarrow \infty} h_\rho = \delta_0$ in \mathcal{S}' per ogni identità approssimata $\{h_\rho, \rho > 0\}$.

Ridimostriamo ora questo teorema di convergenza puntuale (che è un caso particolare dei Teoremi 6.1.16 e 6.1.18) in maniera diretta, cioè senza fare uso dei risultati della Sezione 6.1.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che, per ogni $f \in \mathcal{S}$,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} h_\rho(x) f(x) dx = f(0),$$

cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K = K(\varepsilon)$ tale che, per ogni $\rho > K$,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} h_\rho(x) f(x) dx - f(0) \right| < \varepsilon.$$

È chiaro che è sufficiente provare questa proprietà per ε sufficientemente piccolo (perché allora vale anche per gli ε più grandi).

Osserviamo che, per ogni $\delta > 0$, si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} h_\rho(s) f(s) ds = 0$$

per il Teorema di Convergenza Monotona di Lebesgue (Teorema 1.9.53), e quindi, per ogni $\delta > 0$,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} h_\rho(s) f(s) ds = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{-\delta}^{\delta} h_\rho(s) f(s) ds \quad (11.15)$$

D'ora in poi, per ogni $\varepsilon > 0$ sceglieremo $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ così piccolo che si abbia (grazie alle proprietà (i), (ii) e (iii) della Definizione 11.16.1,

$$\int_{-\delta}^{\delta} h_\rho(s) f(s) ds > \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_\rho(s) ds = \frac{1}{2}. \quad (11.16)$$

Supponiamo per il momento che f sia valori reali. Allora, poiché f è continua in 0, possiamo scegliere $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ ancora più piccolo in modo che in $[-\delta, \delta]$ f sia di segno costante (diciamo positiva, per ora), e per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni $s \in [-\delta, \delta]$ si abbia

$$(1 - \varepsilon)f(0) \leq f(s) \leq (1 + \varepsilon)f(0). \quad (11.17)$$

Perciò da (11.15) e da (11.16) per questi valori di δ otteniamo

$$\int_{-\delta}^{\delta} h_\rho(s)f(s) ds \geq (1 - \varepsilon)f(0) \int_{-\delta}^{\delta} h_\rho(s) ds > (1 - \varepsilon)^2 f(0).$$

Da qui e da (11.15) segue che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{-\delta}^{\delta} h_\rho(s)f(s) ds > (1 - \varepsilon)^2 f(0),$$

e quindi, poiché il primo membro non dipende da ε ,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{-\delta}^{\delta} h_\rho(s)f(s) ds > f(0). \quad (11.18)$$

D'altra parte, ancora da (11.17) e dalla Definizione 11.16.1 (i),

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} h_\rho(s)f(s) ds &\leq (1 + \varepsilon)f(0) \int_{-\delta}^{\delta} h_\rho(s) ds \\ &< (1 + \varepsilon)f(0) \int_{-\infty}^{\infty} h_\rho(s) ds \\ &= (1 + \varepsilon)f(0). \end{aligned}$$

Poiché il primo membro non dipende da ε si ottiene

$$\int_{-\delta}^{\delta} h_\rho(s)f(s) ds \leq f(0)$$

e quindi, da (11.15),

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{-\delta}^{\delta} h_\rho(s)f(s) ds \leq f(0). \quad (11.19)$$

Ora segue da (11.18) e da (11.19) che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{-\delta}^{\delta} h_{\rho}(s) f(s) ds = f(0)$$

per ogni f a valori reali, non negativa e continua in 0.

Se f è a valori reali non positivi lo stesso risultato si ottiene applicando il ragionamento precedente a $-f$. Quindi il teorema vale per ogni f a valori reali e continua in 0. Infine, se f è una funzione continua in 0, ma a valori complessi, il teorema vale separatamente per la parte reale e immaginaria di f , quindi vale per f . \square

Nota 11.16.3. L'argomento della dimostrazione rende rigorosa l'idea intuitiva presentata in Sezione 11.1: l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{\rho}(x) f(x) dx$$

è una media integrale dei valori di f , poiché $h_{\rho} \geq 0$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{\rho}(x) dx = 1.$$

Poiché le funzioni h_{ρ} , in base alla proprietà (iii) della Definizione 11.16.1), hanno integrale concentrato in intervalli arbitrariamente piccoli intorno a zero se ρ è sufficientemente grande, queste medie integrali sono prese solo sui valori di f su intervalli intorno a 0 che diventano piccoli quando ρ cresce. Perciò queste medie integrali devono convergere a $f(0)$. \square

11.17 Esercizi sulle distribuzioni temperate

Esercizio 11.17.1. Sia

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Calcolare la derivata di h nel senso delle distribuzioni. Includere i dettagli del calcolo. \square

Esercizio 11.17.2. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ a crescita polinomiale e sia

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Quanto vale $(fh)'$ nel senso delle distribuzioni?

1. $f\delta_1 + hf'$
2. $f'T_h$
3. $f\delta_1$
4. δ_1
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 11.17.3. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ a crescita polinomiale e sia

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quale delle seguenti è la derivata nel senso delle distribuzioni di fh ?

1. $f\delta_0 + f'h$
2. fh'
3. δ_0
4. $f'\delta_0$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 11.17.4. Calcolare la derivata nel senso delle distribuzioni di

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 2 \\ 1 & \text{se } |x| \leq 2 \end{cases}$$

utilizzando la definizione. □

Esercizio 11.17.5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e sia

$$\phi_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} & \text{se } x \in [-\alpha, \alpha] \\ 0 & \text{se } x \notin [-\alpha, \alpha] \end{cases}$$

Quali delle seguenti proprietà sono vere (eventualmente anche più di una, oppure nessuna)?

1. $\widehat{\phi}_\alpha(0) = 1$
2. ϕ_α è dispari
3. ϕ_α converge a δ_0 nel senso delle distribuzioni per $\alpha \rightarrow 0$
4. ϕ_α converge a δ_0 nel senso delle distribuzioni per $\alpha \rightarrow +\infty$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

Esercizio 11.17.6. Calcolare la derivata nel senso delle distribuzioni di

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

utilizzando la definizione.

Esercizio 11.17.7. Scrivere la definizione di derivata nel senso delle distribuzioni.

Se $f \in C^1(\mathbb{R})$ è a crescita polinomiale e

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

quanto vale $(fh)'$ nel senso delle distribuzioni?

1. $f'h$
2. $f'h'$
3. $f\delta_1 + f'h$
4. δ_1

5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

Esercizio 11.17.8. Calcolare la derivata nel senso delle distribuzioni di

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Esercizio 11.17.9. Calcolare la derivata nel senso delle distribuzioni di

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

Esercizio 11.17.10. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ a crescita polinomiale e sia

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Quanto vale $(fh)'$ nel senso delle distribuzioni?

1. $f'h$
2. $f'h'$
3. $f\delta_1$
4. $-f\delta_1 + f'h$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

Esercizio 11.17.11. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ a crescita polinomiale e sia

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Quanto vale $(fh)'$ nel senso delle distribuzioni?

1. $-f\delta_1 + hf'$
2. $f'T_h$
3. $f'\delta_1$
4. δ_1
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

Esercizio 11.17.12. Calcolare la derivata nel senso delle distribuzioni di

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

Esercizio 11.17.13. Calcolare la derivata nel senso delle distribuzioni di

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

Esercizio 11.17.14. Sia $\lambda(x) = \sin x + x^3$. Quanto vale la distribuzione $(\lambda\delta_0)'$?

1. 0
2. $\lambda'(x)$
3. $(\cos x + 3x^2)\delta_0$
4. $(\cos x + 3x^2)\delta_1$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

Esercizio 11.17.15. Calcolare la derivata nel senso delle distribuzioni di

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } |t| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

□

Esercizio 11.17.16. Sia $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ e sia

$$\theta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \chi_{[-\epsilon/2, \epsilon/2]}(x)$$

Quali delle seguenti asserzioni sono vere?

1. θ_ϵ converge a δ_0 nel senso delle distribuzioni per $\alpha \rightarrow 0$
2. θ_ϵ converge a δ_0 nel senso delle distribuzioni per $\alpha \rightarrow +\infty$
3. θ_ϵ è pari
4. θ_ϵ è dispari
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 11.17.17. Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e sia

$$\phi_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x \in [-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}] \\ 0 & \text{se } x \notin [-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}] \end{cases}$$

1. ϕ_α è pari
2. ϕ_α converge a δ_0 nel senso delle distribuzioni per $\alpha \rightarrow 0$
3. ϕ_α è dispari
4. ϕ_α converge a δ_0 nel senso delle distribuzioni per $\alpha \rightarrow +\infty$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 11.17.18. Calcolare la derivata nel senso delle distribuzioni di

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| > \frac{1}{4} \\ 0 & \text{se } |t| < \frac{1}{4} \end{cases}$$

□

Esercizio 11.17.19. Sia $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ e sia

$$\theta_\epsilon(x) = \frac{1}{2\epsilon} \chi_{[-\epsilon, \epsilon]}(x)$$

Quali delle seguenti asserzioni sono vere?

1. θ_ϵ converge a δ_0 nel senso delle distribuzioni per $\alpha \rightarrow +\infty$
2. θ_ϵ è pari
3. θ_ϵ converge a δ_0 nel senso delle distribuzioni per $\alpha \rightarrow 0$
4. θ_ϵ è dispari
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 11.17.20. Calcolare la derivata nel senso delle distribuzioni di

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| > 1 \\ 2 & \text{se } |t| < 1 \end{cases}$$

□

Esercizio 11.17.21. Calcolare la derivata nel senso delle distribuzioni di

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } |t| > 2 \\ 0 & \text{se } |t| < 2 \end{cases}$$

□

Esercizio 11.17.22. Sia $\beta \in \mathbb{R}^+$ e sia

$$\phi_\beta(x) = \begin{cases} \beta & \text{se } x \in \left[-\frac{1}{2\beta}, \frac{1}{2\beta}\right] \\ 0 & \text{se } x \notin \left[-\frac{1}{2\beta}, \frac{1}{2\beta}\right] \end{cases}$$

Quali delle seguenti asserzioni sono vere?

1. ϕ_β converge a δ_0 nel senso delle distribuzioni per $\beta \rightarrow 0$
2. ϕ_β è pari
3. ϕ_β è dispari
4. ϕ_β converge a δ_0 nel senso delle distribuzioni per $\beta \rightarrow +\infty$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 11.17.23. Sia $\lambda(x) = \sin^2 x$. Quanto vale la distribuzione $(\lambda \delta_\pi)''$?

1. $\sin^2 x \delta_\pi$
2. $\lambda'(x)$
3. 0
4. $\lambda(x - \pi)$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 11.17.24. Sia f una funzione infinitesima di ordine due per $x \rightarrow 0$ (ossia in $O(x^2)$). Quanto vale la distribuzione $(f \delta_0)''$?

1. 0
2. $f(x) \delta_0$
3. $f'(0) \delta_0$
4. $f''(0) \delta_0$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta. □

Esercizio 11.17.25. Sia $\lambda(x) = x^3 + x$. Quanto vale la distribuzione $\lambda \delta_0'$?

1. $\lambda'(x)$

2. $(3x^2 + 1)\delta_0$
3. 0
4. $-\delta_0$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 11.17.26. Sia $\lambda(x) = \cos x$. Quanto vale la distribuzione $(\lambda\delta_{\pi/2})'$?

1. 0
2. $\sin x\delta_{\pi/2}$
3. $\lambda(x - \frac{\pi}{2})\delta_{\pi/2}$
4. $\lambda'(x)$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 11.17.27. Sia $\lambda(x) = (x - \frac{\pi}{2}) + \cos x$. Quanto vale la distribuzione $(\lambda\delta_{\frac{\pi}{2}})'$?

1. $(1 - \sin x)\delta_{\frac{\pi}{2}}$
2. $\lambda'(x)$
3. 0
4. $\lambda(x - \frac{\pi}{2})$
5. nessuna delle precedenti

Motivare la risposta.

□

Esercizio 11.17.28. Consideriamo il funzionale sulla classe di Schwartz definito da

$$f \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{1+t^4} dt.$$

Questo funzionale è continuo su \mathcal{S} ? Rispondere utilizzando solo la definizione di continuità in termini di seminorme.

Svolgimento. Il funzionale è continuo, come sappiamo già dall'Esempio 11.5.4 (i). In termini di seminorme, ecco la dimostrazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{1+t^4} dt \leq \|f\|_{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^4} dt < Cp_{00}(f).$$

□

Esercizio 11.17.29. Siano f e g due dilatati della Gaussiana, diciamo $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ e $g(x) = e^{-\beta x^2}$ con $\alpha, \beta > 0$. Calcolare il valore di $\langle f * K, g \rangle$, dove K è il treno di impulsi dell'Esempio 11.7.4.

Svolgimento. Grazie all'Esempio 11.14.4 si ha

$$\langle f * K, g \rangle = \langle K, f^{\dagger} * g \rangle. \quad (11.20)$$

Ora calcoliamo $f^{\dagger} * g$. È chiaro che la convoluzione di due Gaussiane ha per trasformata di Fourier il prodotto delle trasformate, ossia il prodotto puntuale di due altre Gaussiane, perché la trasformata di Fourier di (un dilatato di) una Gaussiana è (un dilatato di) una Gaussiana (Proposizione 8.3.2). Ma il prodotto puntuale di queste due Gaussiane è ancora una Gaussiana, perché il prodotto di due esponenziali è l'esponenziale della somma degli esponenti. Antitrasformando secondo Fourier, si trova che la convoluzione di due Gaussiane è ancora una Gaussiana. Potremmo facilmente svolgere il calcolo in questo modo, ma per amore di varietà oddiamo questo calcolo alternativo:

$$\begin{aligned} f^{\dagger} * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t-x)^2} e^{-\beta t^2} dt \quad (11.21) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t-x)^2 - \beta t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q(t,x)} dt, \end{aligned}$$

dove $q(x, t) = (\alpha + \beta)t^2 - 2\alpha tx + \alpha x^2$ è un'espressione quadratica nella variabile t , e quindi del tipo $q(x, t) = A(t - \gamma)^2 + B$ dove A e B sono due costanti che dipendono da x . Sviluppando si trovano A e B :

$$q(x, t) = (\alpha + \beta)t^2 - 2\alpha tx + \alpha x^2 = A(t - \gamma)^2 + B = At^2 - 2A\gamma t + A\gamma^2 + B,$$

da cui $A = \alpha + \beta$, $2\alpha x = 2A\gamma$ e $\alpha x^2 = A\gamma^2 + B$, ossia $\gamma = \frac{\alpha x}{\alpha + \beta}$ e $B = \frac{\alpha\beta x^2}{\alpha + \beta}$.
Ora,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q(t,x)} dt &= e^{-B} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(t-\gamma)^2} dt = e^{-B} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-At^2} dt \\ &= e^{-B} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2} du = e^{-B} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \end{aligned}$$

grazie al Lemma 8.3.1. Pertanto da (11.21) si ottiene $f^\dagger * g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-B} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \beta}} e^{-\frac{\alpha\beta x^2}{\alpha + \beta}}$, e quindi segue da (11.20) che

$$\langle f * K, g \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \beta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha\beta n^2}{\alpha + \beta}}.$$

□

Esercizio 11.17.30. Sia $f \in \mathcal{S}$ e sia $K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$ il treno di impulsi. Calcolare la distribuzione $f * K$: come opera su una generica funzione $g \in \mathcal{S}$? È rappresentabile come una funzione localmente integrabile o no? Se sì, quale funzione? Se no perché?

Svolgimento. Osserviamo per prima cosa che, in base all'Esempio 11.14.4, si ha $\langle f * K, g \rangle = \langle K, f^\dagger * g \rangle$. Poiché $K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$, e la serie converge nel senso delle distribuzioni, ora abbiamo

$$\langle f * K, g \rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n, f^\dagger * g \right\rangle.$$

D'altra parte,

$$\langle \delta_n, f^\dagger * g \rangle = f^\dagger * g(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-n) g(t) dt.$$

Quindi

$$\langle f * K, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-n) \right) g(t) dt.$$

La serie di funzioni $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-n)$ converge puntualmente ad una funzione $h(t)$ per ogni t : infatti $f \in \mathcal{S}$ e quindi la successione $\{f(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tende

a zero a velocità più che polinomiale. Per la stessa ragione, in base al test di Weierstrass (Sezione 1.1), la serie converge uniformemente sui compatti. D'altra parte tutti i suoi termini sono traslati della stessa funzione di Schwartz f , quindi sono tutti equilimitati da $\|f\|_\infty$. Pertanto, in base alla seconda parte della Proposizione 11.6.1, la serie converge nel senso delle distribuzioni alla distribuzione data dalla funzione somma della serie.

Osserviamo che la somma h della serie è nient'altro che la periodizzazione di f , ovvero $h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n f$ (la serie dei traslati di f di passo intero): questa funzione periodica è ovviamente localmente integrabile ed a crescita polinomiale (in effetti, è limitata). Quindi la distribuzione $f * K$ coincide con la distribuzione T_h dell'Esempio 11.5.4 (i), ed in particolare è rappresentata da una funzione. \square

Esercizio 11.17.31. Sia

$$\langle T, f \rangle = f(0) + \int_1^\infty f(t) dt.$$

Esiste una distribuzione temperata g tale che la sua derivata verifichi $G' = T$? Se sì, trovarla, e se G è data da una funzione tracciarne il grafico. Se no, spiegare perché. Motivare tutti i passaggi.

Svolgimento. T è la somma di due distribuzioni ben note: $T = \delta_0 + \lambda_1 H$, dove H è la distribuzione di Heaviside (Definizione 11.10.2 e $\lambda_1 H$ il suo traslato destro di passo 1. Perciò la distribuzione G che verifica $G' = T$ deve essere la somma della primitiva della delta e della primitiva del traslato della funzione di Heaviside. Una primitiva della delta è la distribuzione di Heaviside stessa (Esempio 11.10.3): le altre ovviamente differiscono da questa per l'aggiunta di una costante. D'altra parte, la distribuzione di Heaviside è una funzione localmente integrabile, e quindi si vede facilmente che la sua primitiva è la primitiva di quella funzione (cioè è la funzione $u(x) = 0$ per $x < 0$, e $u(x) = x$ per $x \geq 0$, più una costante a piacere). Infatti, per ogni $g \in \mathcal{S}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \langle u', g \rangle &= -\langle u, g' \rangle = -\int_0^\infty x g'(x) dx \\ &= \int_0^\infty g(x) dx - x g(x)|_0^\infty = \langle H, g \rangle. \end{aligned}$$

Il traslato $\lambda_1 H$ ha per primitiva il traslato di u , cioè, a meno di costanti, la funzione $\lambda_1 v(x) = 0$ per $x < 1$, e $\lambda_1 v(x) = x$ per $x \geq 1$. Sommando i

risultati si ottiene la primitiva G di T : essa è data dalla funzione localmente integrabile

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{se } 1 \leq x \end{cases}$$

□

Esercizio 11.17.32. Sia χ_n la funzione che vale 1 nell'intervallo $[2n, 2n + 1]$ e 0 altrove. Sia $\alpha > 0$. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \chi_n.$$

1. (a) La serie converge puntualmente?
- (b) La serie converge uniformemente?
- (c) Per quali p la serie converge in $L^p(\mathbb{R})$?
- (d) La serie converge nel senso delle distribuzioni?

Suggerimento: si tracci il grafico delle somme parziali delle serie.

2. Come cambiano le risposte precedenti se $\alpha = 0$?
3. Come cambiano le risposte precedenti se $\alpha = < 0$?

Se la serie converge trovare la somma, altrimenti spiegare perché.

Svolgimento.

1. (a) La serie converge puntualmente alla funzione $S(x)$ che vale n^{α} negli intervalli di estremo iniziale pari $[2n, 2n + 1]$, e 0 nell'intervallo di estremo iniziale dispari $[2n + 1, 2n + 2]$. Infatti, per ogni x , $\chi_n(x) = 0$ per tutti gli interi n tranne che se $2n = [x]$ (cioè se $2n \leq x \leq 2n + 1$). Quindi, se la parte intera di x è dispari, tutti i termini della serie sono nulli e la serie converge a zero, mentre se la parte intera è pari, diciamo $[x] = 2m$, allora solo il termine per $n = m$ è non nullo, vale n^{α} , e quindi questo è il valore della somma della serie in quell'intervallo.

- (b) La serie non converge uniformemente. Se la convergenza fosse uniforme, le somme parziali convergerebbero uniformemente alla somma puntuale $S(x)$ calcolata nella parte precedente, quindi, se si indica con S_N la somma parziale $S_N = \sum_{n=0}^N n^\alpha \chi_n$, il resto N -simo $S - S_N$ verificherebbe

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S - S_N\|_\infty = 0.$$

Invece,

$$S(x) - S_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} n^\alpha \chi_n$$

vale n^α sugli intervalli $[2n, 2n+1]$ con $n = N+1, N+2, \dots$, e zero altrove. Poiché $\alpha > 0$, il resto N -simo assume valori n^α crescenti in maniera illimitata (su una successione di intervalli), e quindi è illimitato:

$$\|S - S_N\|_\infty = \sup |S(x) - S_N(x)| = +\infty.$$

- (c) Lo stesso ragionamento prova che la serie non converge per nessun p . Infatti $\|n^\alpha \chi_n\|_p = n^\alpha \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$, e quindi $S - S_N$ ha norma L^p divergente per ogni N .

Si può anche dimostrare che la serie non converge uniformemente e in L^p senza usare la conoscenza esplicita della sua somma puntuale (bensì facendo ricorso alla proprietà di Cauchy (come sempre quando si vuole stabilire una proprietà di un passaggio al limite senza fare esplicito riferimento al valore del limite).

Infatti, basta osservare che il termine n -simo $n^\alpha \chi_n$ non tende a zero uniformemente (la sua norma uniforme è n^α , quindi diverge al crescere di n , perché $\alpha > 0$). Rammentiamo che se il termine generale non tende a zero *puntualmente*, allora non si ha convergenza puntuale (Sezione 1.1) e quindi tanto meno uniforme. Qui invece il termine generale tende a zero *puntualmente* (per ogni x , $n^\alpha \chi_n(x)$ è definitivamente zero), ma non uniformemente. Siamo quindi in un caso particolare della situazione studiata più in generale nella Nota ??), che fornisce una condizione necessaria per la convergenza in norma di una serie in base alla proprietà di tendere a zero in norma del suo termine generico:

Nota 11.17.33. I termini di una serie uniformemente convergente (rispettivamente, convergente in norma L^p) tendono a 0 uniformemente (rispettivamente, in L^p). Se una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge in L^p (nel caso $p = \infty$, uniformemente), allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\infty} = 0$. \square

- (d) La serie converge nel senso delle distribuzioni, come accennato nell'Esempio 11.7.7. In realtà un ragionamento analogo era stato svolto nell'Esercizio 11.7.5, ed era basato sul Corollario 11.7.1. Lo ripetiamo qui in dettaglio per maggiore chiarezza.

In base al Corollario 11.7.1, basta mostrare che, per ogni h in \mathcal{S} , le somme parziali $\sum_{n=0}^N n^{\alpha} \langle \chi_n, h \rangle$ sono una successione numerica convergente. Questo è vero perché, quando N tende ad infinito, i termini non nulli della somma (cioè quelli per $0 \leq n \leq N$) sono del tipo

$$\langle \chi_n, h \rangle = \int_0^N \chi_n(t) h(t) dt = \int_{2n}^{2n+1} h(t) dt$$

e quindi tendono a zero a velocità più che polinomiale, per il Teorema della Media Integrale (Sezione 1.1) e perché h è a decrescenza rapida.

2. Se $\alpha = 0$, le risposte non cambiano. La dimostrazione della convergenza puntuale e della convergenza nel senso delle distribuzioni rimane la stessa; analogamente per la mancanza della convergenza uniforme od in L^p , dove ora l'unica differenza è che l'estremo superiore del resto N-simo, $\|S - S_N\|_{\infty}$, invece di tendere a $+\infty$ con N , rimane costantemente uguale a $N^0 = 1$, ma comunque non tende a zero.
3. Se $\alpha < 0$, la convergenza puntuale e la convergenza nel senso delle distribuzioni rimangono vere come prima. In questo caso però si ha anche convergenza uniforme, perché le funzioni χ_n sono a supporto disgiunto, e quindi il massimo della somma $\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{\alpha} \chi_n(x)$ è il massimo fra tutti gli addendi (per ogni x , infatti, c'è al più un solo addendo non nullo). Pertanto

$$\|S - S_N\|_{\infty} = \sup \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{\alpha} \chi_n(x) = (N+1)^{\alpha}$$

tende a zero per $N \rightarrow \infty$ poiché $\alpha < 0$. Analogamente, $\|n^\alpha \chi_n\|_p = n^\alpha \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, e da questo fatto otteniamo che l'addendo n -simo converge in L^p alla funzione zero: questa è una condizione necessaria, ma non sufficiente, per la convergenza della serie. D'altra parte, le funzioni χ_n sono a supporto disgiunto. Pertanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} |n^\alpha \chi_n|^p = \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |n^\alpha \chi_n|^p$$

e naturalmente $|n^\alpha \chi_n|^p = n^{\alpha p} \chi_n$, dal momento che $\chi_n^p = \chi_n$. Pertanto

$$\|S - S_N\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} n^\alpha \chi_n \right|^p = \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{\alpha p},$$

e la serie all'ultimo membro è la coda N -sima della serie numerica $\sum_n n^{\alpha p}$, che converge se e solo se $\alpha p < -1$, ossia $\alpha < -1/p$. Questi sono quindi i valori di α per cui la serie converge nella norma L^p .

□

Esercizio 11.17.34. Rispondere alle domande del precedente Esercizio 11.17.32 definendo $\chi_n := \chi_{[n, n+\frac{1}{n}]}$.

Suggerimento: La dimostrazione precedente si applica parola per parola per provare che si ha convergenza puntuale e nel senso delle distribuzioni: ma adesso

$$\|n^\alpha \chi_n\|_p = n^{\alpha - \frac{1}{p}}$$

e quindi si ha convergenza uniforme (della successione $n^\alpha \chi_n$ e della loro serie) se e solo se $\alpha < 0$, e convergenza in L^p della successione se e solo se $\alpha < 1/p$, e della serie se e solo se $\alpha - 1/p < 1$, ossia $\alpha < 1/p - 1$. □

Esercizio 11.17.35. Sia V uno spazio normato di funzioni su \mathbb{R} e, per $f \in V$, indichiamo la norma di f con $\|f\|$.

- (i) Enunciare il principio di Cauchy per la convergenza di una serie $\sum_n f_n$, con $f_n \in V$.
- (ii) Ricavare, dal punto precedente, la seguente proprietà: se $\sum_n f_n$ converge nella norma di V , allora $\|f_n\| \rightarrow 0$ (*Nota:* questo generalizza quanto mostrato nella precedente Nota 11.17.33).

- (iii) Sia $V = L^p(\mathbb{R})$ ($1 \leq p < \infty$), sia $\{J_n\}$ una famiglia di intervalli in \mathbb{R} , sia χ_n la funzione caratteristica di J_n e sia d_n la lunghezza di J_n . Ricavare, dal punto precedente, una condizione su d_n necessaria per la convergenza in norma di $\sum_n \chi_n$. Questa condizione è anche sufficiente?
- (iv) Che cosa si può dire sulla convergenza della stessa serie nel caso $p = \infty$?
- (v) Supponiamo che ora i supporti degli intervalli J_n siano tutti disgiunti. Sappiamo fornire una condizione *equivalente* alla convergenza della serie $\sum_n \chi_n$ per $1 \leq p < \infty$? Che cosa si può dire per $p = \infty$?
- (vi) Sia ora $c(n, \alpha) = 1/n^\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Come cambia la risposta alla domanda precedente per la serie $\sum_n c(n, \alpha)\chi_n$, ossia per quali α e d_n essa converge in norma nell'ipotesi che gli intervalli siano tutti disgiunti? Rispondere sia per $1 \leq p < \infty$ sia per $p = \infty$.
- (vii) Che condizione sufficiente per la convergenza si ottiene se non si assume che gli intervalli siano disgiunti? Rispondere sia per $1 \leq p < \infty$ che per $p = \infty$.
- (viii) Nell'ipotesi di intervalli disgiunti, per quali α e d_n la serie $\sum_n c(n, \alpha)\chi_n$ converge nel senso delle distribuzioni, se $J_n \subset [0, 1]$?
- (ix) Come si risponde alla domanda precedente se $J_n = [n, n + d_n]$?

Svolgimento.

- (i) La serie $\sum_n f_n$ a valori in V è convergente solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k - \sum_{k=1}^m f_k \right\| < \varepsilon, \quad \text{se } n, m > N.$$

Se V è uno spazio completo, allora questa condizione necessaria per la convergenza è anche sufficiente.

- (ii) La dimostrazione è identica a quella della Nota 11.17.33. Infatti, supponiamo che la serie $\sum_n f_n$ converga in norma. Nel punto precedente prendiamo $m = n - 1$. Allora abbiamo che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k - \sum_{k=1}^{n-1} f_k \right\| < \varepsilon, \quad \text{se } n > N,$$

ovvero

$$\|f_n\| < \varepsilon, \quad \text{se } n > N.$$

Dunque, se la serie $\sum_n f_n$ converge in norma, la successione $\|f_n\|$ converge a zero.

- (iii) Poiché $L^p(\mathbb{R})$ è uno spazio normato completo, una condizione necessaria alla convergenza in norma della serie $\sum_n \chi_n$ è che la norma $\|\chi_n\|_p$ del termine generale tenda a zero per $n \rightarrow +\infty$.

Questo accade se e solo se tende a zero la successione numerica

$$\|\chi_n\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} \chi_n^p = \int_{J_n} 1 = d_n.$$

La condizione *non* è sufficiente. Infatti, sia J_n una successione di intervalli disgiuntidi lunghezza $d_n \rightarrow 0$ tale che $\sum_n d_n = \infty$. Allora la successione delle somme parziali $\sum_{n=1}^N \chi_n$ diverge in L^p , per $N \rightarrow +\infty$, perché

$$\left\| \sum_{n=1}^N \chi_n \right\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^N \chi_n \right|^p = \sum_{n=1}^N \int_{J_n} 1 \, dx = \sum_{n=1}^N d_n$$

(come nell'ultima parte del precedente Esercizio 11.17.32, la somma commuta con l'elavazione alla potenza p perché gli intervalli sono disgiunti).

- (iv) Nel caso $p = \infty$ è necessario che sia infinitesima

$$\|\chi_n\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\chi_n(x)|.$$

D'altra parte, quest'ultima quantita' vale 1 per ogni n , e quindi non può convergere a zero se $n \rightarrow \infty$. Pertanto la serie $\sum_n \chi_n$ *non* converge nella norma uniforme per nessuna scelta di $d_n > 0$.

- (v) Una condizione equivalente alla convergenza in norma della serie $\sum_n \chi_n$ è data dal criterio di Cauchy, che riformuliamo come segue: la serie $\sum_n \chi_n$ converge nella norma di L^p se e solo se la successione numerica

$$\left\| \sum_{n=N}^{N+k} \chi_n \right\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=N}^{N+k} \chi_n \right)^p$$

converge a zero, per $N \rightarrow +\infty$, per ogni k intero positivo. Non abbiamo scritto in questa proprietà i valori assoluti perché le χ_n sono funzioni non negative.

Di nuovo, nell'ipotesi in cui i supporti delle χ_n siano disgiunti, l'operazione di sommatoria commuta con l'operazione di elevazione alla p . Deve quindi convergere a zero la successione

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=N}^{N+k} \chi_n^p = \sum_{n=N}^{N+k} d_n,$$

che converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n.$$

Nel caso $p = \infty$ il criterio di Cauchy equivale alla convergenza della successione

$$\left\| \sum_{n=N}^{N+k} \chi_n \right\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\sum_{n=N}^{N+k} \chi_n(x) \right) = \max_{N \leq n \leq N+k} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \chi_n(x) \right)$$

L'ultimo passaggio è dovuto ancora una volta al fatto che le χ_n hanno supporti disgiunti. Ma l'estremo superiore di χ_n è 1 per ogni n , e quindi è 1 anche il massimo tra gli estremi superiori. Dunque anche nel caso di supporti disgiunti, la serie $\sum_n \chi_n$ non converge uniformemente su \mathbb{R} per nessuna scelta di $d_n > 0$.

(vi) Applichiamo alla serie $c(n, \alpha)\chi_n$ a supporti disgiunti i ragionamenti del punto precedente. Per $\alpha = 0$ la serie si riduce alla serie precedentemente studiata $\sum_n \chi_n$. Supponiamo quindi $\alpha \neq 0$.

Per $1 \leq p < \infty$ abbiamo

$$\left\| \sum_{n=N}^{N+k} c(n, \alpha)\chi_n \right\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=N}^{N+k} c(n, \alpha)\chi_n \right)^p = \sum_{n=N}^{N+k} \int_{\mathbb{R}} c(n, \alpha)^p \chi_n^p = \sum_{n=N}^{N+k} \frac{d_n}{n^{\alpha p}}.$$

Si ha quindi convergenza se e solo se la serie numerica $\sum_n \frac{d_n}{n^{\alpha p}}$ converge.

Per $p = \infty$, invece, ancora per il fatto che i supporti delle funzioni χ_n sono disgiunti, abbiamo

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=N}^{N+k} c(n, \alpha) \chi_n \right\|_{\infty} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\sum_{n=N}^{N+k} \frac{1}{n^{\alpha}} \chi_n(x) \right) = \max_{N \leq n \leq N+k} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n^{\alpha}} \chi_n(x) \right) \\ &= \max_{N \leq n \leq N+k} \frac{1}{n^{\alpha}}. \end{aligned}$$

Se $\alpha < 0$, l'ultimo termine diventa $(N+k)^{|\alpha|}$, che diverge per $N \rightarrow +\infty$. Per $\alpha > 0$, invece, otteniamo $1/N^{\alpha}$, che converge a 0 quando $N \rightarrow +\infty$ per ogni k intero.

Riassumendo, per $1 \leq p < \infty$ si ha convergenza se e solo se $\sum_n \frac{d_n}{n^{\alpha p}} < \infty$, mentre per $p = \infty$ si ha convergenza se e solo se $\alpha > 0$, indipendentemente da d_n .

(vii) Se gli intervalli non sono disgiunti, nel caso $1 \leq p < \infty$ non possiamo commutare la sommatoria con l'elevazione alla potenza p . Analogamente, nel caso $p = \infty$, non possiamo pi affermare che l'estremo superiore della somma è il massimo tra gli estremi superiori.

Una condizione sufficiente alla convergenza della serie $\sum_n c(n, \alpha) \chi_n$ è data dal test di Weierstrass per gli spazi normati L^p e, rispettivamente, L^{∞} . La serie converge in norma purché converga la serie delle norme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|c(n, \alpha) \chi_n\|_p = \sum_{n=1}^{+\infty} c(n, \alpha) \|\chi_n\|_p.$$

Per $1 \leq p < \infty$ questa serie è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \left(\int_{J_n} 1 \right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^{\frac{1}{p}}}{n^{\alpha}}.$$

Per $p = \infty$ la serie di cui dobbiamo valutare la convergenza è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \chi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

In tal caso la condizione sufficiente per la convergenza è $\alpha > 1$, indipendentemente dalla scelta di $d_n > 0$.

Riassumendo, per $1 \leq p < \infty$ si ha convergenza se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^p}{n^\alpha} < \infty$, mentre per $p = \infty$ si ha convergenza se $\alpha > 1$.

(viii) La serie $\sum_n c(n, \alpha) \chi_n$ converge nel senso delle distribuzioni se, per ogni funzione f di Schwartz, converge la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \langle c(n, \alpha) \chi_n, f \rangle.$$

Valutiamo la convergenza assoluta della serie, ovvero stimiamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle c(n, \alpha) \chi_n, f \rangle| &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\langle \chi_n, f \rangle| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_n f \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \int_{J_n} |f|. \end{aligned}$$

Per stimare l'ultimo integrale usiamo il teorema della media integrale, applicabile per il fatto che f è di Schwartz, e che quindi $|f|$ è continua. Esistono pertanto $\xi_n \in J_n$ tali che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \int_{J_n} |f| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} d_n |f(\xi_n)| \leq \|f\|_\infty \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} d_n.$$

Quindi la serie converge nel senso delle distribuzioni solo se la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^\alpha}$ è convergente: ma questa condizione è anche sufficiente per la convergenza, come si vede applicando lo stesso ragionamento ad una funzione $f \in \mathcal{S}$ che valga identicamente 1 nell'intervallo $[0, 1]$. Dal momento che gli intervalli J_n sono disgiunti e $J_n \subset [0, 1]$, abbiamo $\cup_n J_n \subset [0, 1]$ e quindi $\sum_n d_n \leq 1$. Pertanto l'ultima serie è convergente per ogni $\alpha \geq 0$ qualunque siano le lunghezze d_n degli intervalli disgiunti.

(ix) Studiamo la convergenza assoluta della serie. Ovvero, per ogni f di Schwartz, valutiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\langle \chi_n, f \rangle| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left| \int_n^{n+d_n} f \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \int_n^{n+d_n} |f| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \int_n^{+\infty} |f|.$$

Sia $k > 1$ intero positivo. Nell'ultimo integrale moltiplichiamo e dividiamo per x^k . Utilizziamo poi il fatto che f sia di Schwartz per maggiorare $|x^k f(x)|$ con la seminorma $p_{k0}(f)$. Otteniamo dunque

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \int_n^{+\infty} \frac{|x^k f(x)|}{x^k} dx &\leq p_{k0}(f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx \\ &= \frac{p_{k0}(f)}{k-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{n^{k-1}}. \end{aligned}$$

Scegliamo ora $k > 2 - \alpha$. In questo modo risulta $k - 1 + \alpha > 1$ e quindi l'ultima serie a membro di destra converge.

In conclusione la serie $\sum_n c(n, \alpha) \chi_n$ converge nel senso delle distribuzioni per ogni α e per ogni d_n . Si noti che la lunghezza dell'intervallo J_n non gioca alcun ruolo: ad esempio, non importa che tali lunghezze tendano a zero, divergano polinomialmente o divergano esponenzialmente.

□

Esercizio 11.17.36. 1. Sia H la funzione di Heaviside (cioè la funzione localmente integrabile che determina la distribuzione di Heaviside). In altre parole, $H(x) = 1$ se $x \geq 0$ e $H(x) = 0$ altrimenti. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n H$$

converge puntualmente? Converge uniformemente? Converge in \mathcal{S}' (ossia nel senso delle distribuzioni)?

2. Rispondere alle medesime domande per la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \lambda_n H.$$

Svolgimento. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H(x - n)$$

converge puntualmente, perché per ogni x solo i termini con $n \leq x$ sono non nulli. Ciascuno di questi termini non nulli vale 1, e quindi la somma $s(x)$ della serie vale n nell'intervallo $[n-1, n)$. Ossia, in termini di funzioni caratteristiche (Definizione 1.1.3),

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} n \chi_{[n-1, n)}.$$

La funzione somma s è ilimitata, mentre le somme parziali sono funzioni a supporto compatto e limitate. Pertanto la convergenza non può essere uniforme, ma vale invece nel senso delle distribuzioni (si riveda il precedente Esercizio 11.17.32). Questo completa la parte (1). Nella parte (2), sempre in base all'Esercizio 11.17.32), si ha convergenza uniforme (e quindi in particolare anche puntuale ed in \mathcal{S}').

□

Esercizio 11.17.37. Abbiamo provato i seguenti risultati nell'Esercizio 1.3.32.

(i) Se χ_n è la funzione caratteristica dell'intervallo $[n, n+1)$ (quella definita nella Sezione 1.1 che vale 1 se $n \leq x < n+1$ e 0 altrove), la serie bilatera $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n$ converge puntualmente alla costante 1 ma non converge uniformemente. Si mostri che la convergenza vale anche nel senso delle distribuzioni. Se invece della serie bilatera si considera la serie monolatera $\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n$, si mostri che questa serie converge alla distribuzione di Heaviside e puntualmente alla funzione di Heaviside, ma non converge uniformemente.

(ii) Se ψ_n indica la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, n)$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n$ non converge puntualmente: più precisamente, essa diverge per ogni x . Si mostri che essa non converge neppure nel senso delle distribuzioni.

(*Suggerimento:* si consideri una Gaussiana ϕ (o una qualsiasi funzione di Schwartz strettamente positiva in $[0, 1]$), e si scriva $K \equiv \int_0^1 \phi(x) dx$. Allora $K > 0$ e $\langle \sum_{n=0}^m \psi_n, \phi \rangle > (m+1)K \rightarrow +\infty$ se $m \rightarrow +\infty$.)

(iii) Se θ_n indica la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, 1/n)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n$ diverge in $x = 0$ ma converge puntualmente per ogni $x \neq 0$, e converge uniformemente in ogni intervallo chiuso che non contiene 0. Si

mostri che la successione θ_n converge a zero nel senso delle distribuzioni, mentre la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$ diverge nel senso delle distribuzioni.

(*Suggerimento:* si consideri la stessa funzione ϕ del suggerimento della parte precedente di questo Esercizio. Grazie alla continuità ed alla positività di ϕ , il numero $K := \min\{\phi(x) : 0 \leq x \leq 1\}$ è positivo. Allora $\langle \theta_n, \phi \rangle \geq \frac{K}{n}$. A questo punto è ovvio che la serie $\langle \sum_n \theta_n, \phi \rangle$ diverge.)

Si mostri che θ_n non converge a zero in L^1 né in L^∞ , e quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n$ non può convergere in L^1 o L^∞ , in base al principio di Cauchy (come nella parte (c) dell'Esercizio 11.17.32). Però θ_n converge a zero in $L^p(\mathbb{R})$ per $1 < p < \infty$: infatti, è immediato verificare che $\|\theta_n\|_p = \sqrt[p]{1/n}$.

Si dimostri con un calcolo diretto che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$ diverge in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $1 \leq p \leq \infty$.

(*Suggerimento:* abbiamo già dimostrato i casi $p = 1$ e $p = \infty$. Per $1 < p < \infty$, la somma parziale $G_N := \sum_{n=1}^N \theta_n$ è la somma di termini non negativi, è positiva nell'intervallo $[0, 1]$ ed uguale a N in $[0, 1/N]$. Quindi $G_N \geq N\theta_N$. D'altra parte, $\|N\theta_N\|_p^p = N^p/N = N^{p-1}$, e dal momento che $p - 1 > 0$ vediamo che $\|G_N\|_p > \|N\theta_N\|_p$ diverge per $N \rightarrow \infty$.

Si mostri che invece la serie $\sum_n \theta_{n^2}$ converge nel senso delle distribuzioni; per la convergenza puntuale ed uniforme il suo comportamento è identico a quello della serie precedente.

□

Esercizio 11.17.38. Sia χ_n la funzione che vale 1 nell'intervallo $[2n, 2n + 1]$ e 0 altrove. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x \chi_n(x).$$

1. (a) La serie converge uniformemente?
 (b) La serie converge puntualmente?
 (c) La serie converge nel senso delle distribuzioni?
2. Come cambierebbero le risposte precedenti se la serie fosse $\sum_{n=0}^{\infty} x^\alpha \chi_n(x)$

(a) con $\alpha > 0$?

(b) con $\alpha < 0$?

(Suggerimento: si tracci il grafico delle somme parziali delle serie.) \square

Esercizio 11.17.39. 1. Sia $f(x) = |x|$. Trovare esplicitamente la derivata di f nel senso delle distribuzioni.

2. Sia $g = f$ per $x < 0$, e $g = f + 1$ per $x \geq 0$. Trovare esplicitamente la derivata di g nel senso delle distribuzioni.

\square

Esercizio 11.17.40. Sia f una funzione a crescita polinomiale, derivabile ovunque con derivata continua eccetto che in $x = 0$, dove però i limiti destro e sinistro di f esistono finiti. (Osserviamo che, sotto queste ipotesi, la derivata è localmente integrabile, grazie al Teorema Fondamentale del Calcolo (Teorema 1.27.1). Trovare esplicitamente la derivata di f nel senso delle distribuzioni, in termini della funzione f' , nei due casi seguenti:

1. f è continua in $x = 0$.

2. Nel punto $x = 0$ la funzione f ha un salto di ampiezza $c > 0$, cioè $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = c$.

(Suggerimento: si veda il precedente *Esercizio 11.17.39*.) \square

Esercizio 11.17.41. 1. Sia $T_0 = (\sin x)(\delta_0 + \delta_\pi)$. È vero o è falso che T_0 è la distribuzione zero? Perché?

2. Sia $T_1 = (\sin x)(\delta'_0 + \delta'_\pi)$. È vero o è falso che T_1 è la distribuzione zero? Perché?

Se una delle due distribuzioni è non nulla, calcolarla esplicitamente.

\square

Esercizio 11.17.42. Sia $\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ e $\lambda_n \chi$ il traslato

destro di χ di passo n .

Consideriamo la serie

$$G = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n \chi.$$

- (i) La serie converge in \mathcal{S}' ? Se no spiegare perch , se sì calcolare la somma della serie nel senso delle distribuzioni.
- (ii) Calcolare G' nel senso delle distribuzioni.

□

Esercizio 11.17.43. Sia $f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ e $\lambda_n f$ il traslato destro di f di passo n .

Consideriamo la serie

$$G = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n f.$$

- (i) La serie converge uniformemente sui compatti?
- (ii) La serie converge uniformemente su \mathbb{R} ?
- (iii) La serie converge puntualmente?
- (iv) La serie converge in \mathcal{S}' ? Se no spiegare perch , se sì calcolare G' nel senso delle distribuzioni.

□

Esercizio 11.17.44. Sia

$$\chi_n(x) = \chi_{[2^n, 2^{n+1})}(x)$$

la successione di funzioni caratteristiche degli intervalli $[2^n, 2^{n+1})$.

- (i) La successione converge nel senso delle distribuzioni?
- (ii) La successione converge puntualmente?
- (iii) La successione converge in $L^1(\mathbb{R})$?
- (iv) A quale distribuzione converge (nel senso delle distribuzioni) la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{[2^n, 2^{n+1})}(x)$$

□

Esercizio 11.17.45.

Per $k > 1$ intero, sia $\chi_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{1}{k} \leq t \leq 1 - \frac{1}{k} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ e λ_n la traslazione verso destra di passo n .

Consideriamo la serie

$$G_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n \chi_k.$$

- (i) Per ogni k fissato, la serie G_k converge uniformemente? Perché?
- (ii) La serie G_k converge puntualmente? Se no, spiegare perché, se si calcolare il limite puntuale.
- (iii) Mostrare che, per ogni k , la serie G_k converge in \mathcal{S}' .
- (iv) Qual è il limite $\lim_{k \rightarrow \infty} G_k$ nel senso delle distribuzioni?
- (v) Calcolare la derivata G'_k nel senso delle distribuzioni.
- (vi) Esiste il limite $\lim_{k \rightarrow \infty} G'_k$ nel senso delle distribuzioni? Se sì calcolarlo, se no spiegare perché.

(Suggerimento: Per ogni k fissato, la serie G_k non converge uniformemente perché le sua somme parziali non sono una successione di Cauchy nella norma uniforme, in quanto

$$\left\| \sum_n^m \lambda_n \chi_k \right\|_{\infty} = 1$$

per ogni n, m (si spieghi in dettaglio perché questo è vero). La serie converge invece puntualmente, perché per ogni punto $x \in \mathbb{R}$ il valore delle somme parziali $\sum_n^m \lambda_n \chi_k(x)$ rimane costante quando $|j|$ e m sono così grandi che $m < x < n$ (in tal caso, questo valore è 1 se $\frac{1}{k} \leq [x] \leq 1 - \frac{1}{k}$ e 0 altrimenti). Per ogni $f \in \mathcal{S}$, si ha

$$\left\langle \sum_{n=j}^m \lambda_n \chi_k, f \right\rangle = \sum_{n=j}^m \int_{n+\frac{1}{k}}^{n+1-\frac{1}{k}} f(x) dx$$

(perché?), e questa somma tende a zero per $j, m \rightarrow +\infty$ perché f è in L^1 e quindi $|\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{x > N} f(x) dx| < \varepsilon$ (si forniscano i dettagli che conducono da

questa stima al calcolo del limite della somma), quindi la serie G_k converge nel senso delle distribuzioni per il Corollario 11.7.1. Si osservi che

$$\langle G_k, f \rangle = \lim_{j \rightarrow -\infty, m \rightarrow \infty} \sum_{n=j}^m \int_{n+\frac{1}{k}}^{n+1-\frac{1}{k}} f(x) dx$$

e quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\langle G_k, f \rangle| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \max\{|f(x)| : n - \frac{1}{k} \leq x \leq n + \frac{1}{k}\} = 0$$

a causa della decrescenza rapida di f .

In altre parole, $\lim_{k \rightarrow \infty} G_k = 0$ nel senso delle distribuzioni. In tal modo abbiamo risposto alle domande da (i) a (iv). A questo punto la risposta alla domanda (v) è ovvia: poiché la distribuzione G_k è una serie convergente di distribuzioni, per il Corollario 11.9.11 essa è derivabile (nel senso delle distribuzioni) termine a termine, e quindi

$$\begin{aligned} G'_k &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \chi'_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \left(\delta_{\frac{1}{k}} - \delta_{1-\frac{1}{k}} \right) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\delta_{n+\frac{1}{k}} - \delta_{n-\frac{1}{k}} \right). \end{aligned}$$

La domanda (vi) ha una risposta facile, perché, in base al Corollario 11.9.10, la derivata è un'operazione continua su \mathcal{S}' , e quindi $\lim_k G'_k = D(\lim_k G_k) = D0 = 0$. Per evidenziare come le proprietà formali delle derivate che abbiamo dimostrato in questo capitolo incapsolino dentro di sé argomenti a volte complicati, diamo una dimostrazione diretta di quest'ultimo risultato.

Per ogni $f \in \mathcal{S}$ e per ogni k, n , in base al Teorema del valor medio di Lagrange (Sezione 1.1) esiste $\xi_{n,k} \in [n - \frac{1}{k}, n + \frac{1}{k}]$ tale che

$$\langle G'_k, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f \left(\left(n + \frac{1}{k} \right) - f \left(n - \frac{1}{k} \right) \right) = \frac{2}{k} \sum_{-\infty}^{+\infty} f'(\xi_{n,k}). \quad (11.22)$$

Poiché $f \in \mathcal{S}$, anche la sua derivata f' è a decrescenza rapida. Quindi l'ultimo membro si può maggiorare con $\frac{2}{k} p_{20}(f') \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\xi_{n,k}^2}$. Ma $\xi_{n,k} > n - \frac{1}{k}$ se $n > 0$ e $\xi_{n,k} > n + \frac{1}{k}$ se $n < 0$. Da questo segue facilmente che l'ultima serie è

limitata uniformemente rispetto a k , cioè che $\sup_k \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\xi_{n,k}^2} < \infty$. Allora, a causa del fattore $2/k$, il lato destro di (11.22) tende a zero quando $k \rightarrow \infty$, e quindi $\lim_k G'_k = 0$ in \mathcal{S}' . \square

Esercizio 11.17.46. Per $k > 1$ intero, sia $\chi_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{1}{k+1} < t \leq \frac{1}{k} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Consideriamo la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\chi_k.$$

- La serie converge uniformemente?
- La serie converge in $L^1(0, 1]$?
- La serie converge puntualmente? Se no, spiegare perché, se sì calcolare il limite puntuale.
- La serie converge in \mathcal{S}' ?

\square

Svolgimento. Il segmento da $\frac{1}{k+1}$ a $\frac{1}{k}$ ha lunghezza $\frac{1}{k(k+1)}$, quindi la funzione $f_k := k\chi_k$ è non negativa, ha valore massimo k e norma L^1 uguale a $\frac{1}{k+1}$. Poiché le f_k sono a supporto disgiunto, si ha

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{\infty} = \max_{k=1, \dots, n} \|f_k\|_{\infty} = n,$$

e quindi la serie $\sum_{k=1}^n f_k$ diverge nella norma di L^{∞} . Per la stessa ragione, $\|\sum_{k=1}^n f_k\|_1 = \sum_{k=1}^n \|f_k\|_1$, e quindi la serie $\sum_{k=1}^n f_k$ diverge nella norma di L^1 . Ogni punto x dell'asse reale appartiene al più ad un solo intervallo $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, e quindi un solo addendo della serie può essere non nullo in x : pertanto la serie converge puntualmente.

Per studiare la convergenza nel senso delle distribuzioni, sia g nella classe di Schwartz e consideriamo $\langle f_k, g \rangle$. Poiché l'intervallo di integrazione $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ ha lunghezza $\frac{1}{k(k+1)}$,

$$(k+1)\langle f_k, g \rangle = k(k+1) \int_{[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]} g(x) dx$$

è la media integrale di g in tale intervallo, e quindi tende a $g(0)$ quando $k \rightarrow \infty$, grazie alla continuità di g . Quindi, se $g(0) \neq 0$, abbiamo la stima $\langle f_k, g \rangle \sim \frac{1}{k+1} = O(1/k)$. Se in aggiunta g è anche non negativa, ne segue che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \langle f_k, g \rangle$ è a termini non negativi, ma il suo termine generico tende a zero troppo lentamente perché si possa avere convergenza: la serie non converge nel senso delle distribuzioni. \square

Esercizio 11.17.47. Nell'esercizio precedente, la successione $k\chi_k$ converge in L^1 ? Converte puntualmente? Converte uniformemente? Converte nel senso delle distribuzioni? \square

Svolgimento. Abbiamo visto nell'esercizio precedente che la successione $\{f_k := k\chi_k\}$ diverge in L^∞ , converge a zero in L^1 (con velocità $1/k$), tende a zero puntualmente (per ogni x al più un solo termine è non nullo), e $\langle f_k, g \rangle \sim \frac{1}{k+1} = O(1/k)$, quindi la successione tende a zero nel senso delle distribuzioni. \square

Esercizio 11.17.48. Sia $g(x) = 1/(1+x^2)$ e $\{x_n\}$ una successione infinitesima per $n \rightarrow +\infty$. Poniamo $g_n(x) = n f(nx)$ (queste funzioni sono positive, di norma L^1 uguale a 1, con massimo in zero che vale n , e tendono uniformemente a zero al di fuori di ogni intervallo $(-\delta, \delta)$, quindi formano una identità approssimata)

Consideriamo i traslati $h_n = \lambda_{x_n} h_n$. La funzione h_n ha massimo in x_n : al crescere di n , le funzioni h_n hanno punti di massimo che si avvicinano a 0, e quindi i loro grafici si avvicinano a quelli delle funzioni dell'identità approssimata $\{g_n\}$: ci aspettiamo quindi che la successione $\{h_n\}$ converga a δ_0 nel senso delle distribuzioni. Dimostriamolo. \square

Svolgimento. Per ogni $f \in \mathcal{S}$ dobbiamo dimostrare che $\langle h_n, f \rangle \rightarrow f(0)$ per $n \rightarrow \infty$.

Poiché $\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) dx = 1$, abbiamo

$$\begin{aligned} |\langle h_n, f \rangle - f(0)| &= \left| \int \lambda_{x_n} g_n(x) f(x) dx \right| - f(0) \\ &= \left| \int g_n(x) (\lambda_{-x_n} f(x) - f(0)) dx \right| \\ &= \left| \int g_n(x) (\lambda_{-x_n} f(x) - f(x)) dx \right| + \left| \int g_n(x) (f(x) - f(0)) dx \right| \\ &\leq \|g_n\|_1 \|\lambda_{-x_n} f - f\|_{\infty} + \left| \int g_n(x) (f(x) - f(0)) dx \right|. \end{aligned}$$

Ora è facile vedere che l'ultimo membro tende a zero. Infatti, il secondo integrale all'ultimo membro tende a zero per $n \rightarrow \infty$ perché $\{g_n\}$ è una identità approssimata e f è in \mathcal{S} , quindi uniformemente continua (Teorema 6.1.16); il primo integrale invece tende a zero perché $\|g_n\|_1 = 1$ e $\|\lambda_{-x_n} f - f\|_{\infty}$ è infinitesimo per $x_n \rightarrow 0$ per la continuità della traslazione sullo spazio delle funzioni uniformemente continue (Proposizione 7.6.5).

Si noti che utilizzare il teorema del valor medio integrale in questo esercizio sarebbe stato meno facile che nei precedenti, perché le funzioni g_n non sono a supporto compatto, e quindi occorrerebbe dimostrare anche che i punti in cui gli integrandi $g_n \lambda_{-x_n} f$ assumono il proprio valore medio integrale tendono a zero, cosa non ovvia. \square

Esercizio 11.17.49. (i) Sia f una funzione su \mathbb{R} . Sia χ_N^+ la funzione caratteristica della semiretta $[N, +\infty)$. Mostrare che

- (a) $f\chi_n^+$ converge a zero uniformemente se e solo se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;
- (b) se $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f\chi_n^+$ converge a zero nella norma di L^1 ;
- (c) se f è localmente integrabile a crescita polinomiale, allora $f\chi_n^+$ converge a zero nel senso delle distribuzioni.

(ii) Sia χ_n la funzione caratteristica dell'intervallo $[2n, 2n + 1]$ e $c_n > 0$, con $\lim c_n = 0$. Mostrare che la successione $\{c_n \chi_n\}$ converge a zero uniformemente, in L^1 e nel senso delle distribuzioni.

(iii) Per $n > 1$ sia $K_n = \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right]$. Sia ora χ_n la funzione caratteristica di K_n . Mostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \chi_n$$

converge uniformemente. Spiegare perché da questo segue che il test di Weierstrass (Sezione 1.1) è una condizione sufficiente per la convergenza uniforme di una serie di funzioni, ma non necessaria.

(iv) Sia V uno spazio normato completo. Mostrare la seguente versione del test di Weierstrass: se $v_n \in V$ sono vettori tali che $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|_V < \infty$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge nella norma di V .

(v) Applicare la versione del test di Weierstrass dimostrata alla precedente parte (iv) per mostrare che la serie alla parte (iii) converge in L^1 .

(vi) la serie alla parte (iii) converge nel senso delle distribuzioni?

(vii) Per $n > 1$ sia $J_n = \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right]$. Sia ora χ_n la funzione caratteristica di J_n . La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \chi_n$$

converge uniformemente? Converge in L^1 ? Converge nel senso delle distribuzioni?

□

Svolgimento del primo quesito della parte (vii). La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \chi_n$$

non converge totalmente, poiché l'estremo superiore di \mathbb{R} del termine n -esimo della serie è $\frac{1}{n}$, la cui serie diverge.

Dunque alla serie non si può applicare il Test di Weierstrass. Questo non ci dà informazioni sulla convergenza uniforme della serie. Dobbiamo percorrere un'altra strada. Si può sospettare che i supporti del termine generale della serie

$$J_n = \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right]$$

diventino definitivamente disgiunti. Se cos fosse, la serie convergerebbe uniformemente, essendo ogni addendo pesato con la successione infinitesima $\frac{1}{n}$. Perché ciò accada l'intervallo J_n dovrebbe essere disgiunto dall'intervallo J_{n+1} , per n sufficientemente grande. La condizione che esprime ciò è che l'estremo destro di J_{n+1} si trovi a sinistra dell'estremo sinistro di J_n , ovvero si deve avere

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}.$$

Questa disequazione sembra vera, almeno definitivamente, poiché $\frac{1}{n^2}$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$ e poiché $\frac{1}{n+1}$ è pi piccolo di $\frac{1}{n}$. Tuttavia una manipolazione immediata della disequazione porta a

$$n^2 + n + 1 < 0,$$

condizione che non è verificata per nessun intero! Il motivo di questa apparente contraddizione è che la distanza tra $\frac{1}{n+1}$ e $\frac{1}{n}$ è dell'ordine di $\frac{1}{n^2}$, che è precisamente dello stesso ordine del raggio dell'intervallo J_n .

Sebbene gli intervalli J_n non siano disgiunti, è sicuramente vero che, fissato un n , esiste un $m > n$ tale che gli intervalli J_n e J_m . Questo è vero poiché l'estremo destro di J_m tende a zero per $m \rightarrow +\infty$, e quindi, a patto di scegliere m sufficientemente grande, questo diventa piccolo quanto vogliamo, quindi anche pi piccolo dell'estremo sinistro di J_n .

Ci domandiamo dunque se esiste un k intero tale che, da un certo n in poi, gli intervalli J_n e J_{n+k} siano disgiunti. Se ciò accadesse la serie di partenza potrebbe scriversi come somma di k serie di funzioni infinitesime a supporto disgiunto, e quindi uniformemente convergenti. A questo punto sarebbe uniformemente convergente la serie di partenza.

Sia allora k intero positivo. La condizione che dice che J_n e J_{n+k} siano disgiunti è

$$\frac{1}{n+k} + \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2},$$

ovvero

$$\frac{n+k+1}{(n+k)^2} < \frac{n-1}{n^2}.$$

Eliminando i denominatori (sempre positivi per n e k interi positivi) otteniamo

$$\begin{aligned} n^3 + n^2k + n^2 &= n^2(n+k+1) < (n-1)(n+k)^2 \\ &= (n-1)(n^2 + k^2 + 2nk) = n^3 + nk^2 + 2n^2k - n^2 - k^2 - 2nk. \end{aligned}$$

Consideriamo la disuguaglianza fra il primo e l'ultimo membro: semplificando otteniamo

$$(k-2)n^2 + k(k-2)n - k^2 > 0.$$

Per $k=1$ troviamo la disequazione già ottenuta qualche riga fa. Per $k=2$ otteniamo $-4 > 0$, che è falso per ogni n . Per $k > 2$ otteniamo

$$n^2 + kn - \frac{k^2}{k-2} > 0.$$

Il polinomio in n a primo membro è di secondo grado, ha il coefficiente di grado massimo pari a 1 e il termine noto negativo. Pertanto esistono due radici reali e, poiché il prodotto delle radici (il termine noto) è negativo, una delle due radici è negativa e l'altra positiva. Pertanto la disequazione è verificata a destra della radice positiva (e a sinistra di quella negativa, ma questo fatto non ci serve, visto che l'intero n è positivo).

Questo significa che, fissato $k > 2$, da un certo n in poi la disequazione è verificata, e quindi gli intervalli J_n sono disgiunti. Il più piccolo k intero per cui ciò accade è $k=3$. Ponendo $k=3$ nella disequazione si ottiene che essa è verificata per tutti gli interi maggiori o uguali a 2.

Abbiamo quindi tre famiglie di intervalli disgiunti. Una famiglia è composta da J_2, J_5, J_8, \dots , (ossia dagli intervalli J_{3n-1}), un'altra da J_3, J_6, J_9, \dots (ossia dagli intervalli J_{3n}), e l'ultima da J_4, J_7, J_{10}, \dots (ossia dagli intervalli J_{3n+1}).

La serie di partenza pertanto si decompone come segue:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \chi_n = \chi_1 + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2+3m} \chi_{2+3m} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{3+3m} \chi_{3+3m} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{4+3m} \chi_{4+3m}.$$

Ciascuna delle tre serie è composta da funzioni a supporti disgiunti i cui valori massimi tendono a zero. Quindi in ognuna delle serie le code n -sime hanno valore massimo che tende a zero al crescere di n , come nelle precedenti parti (ii) e (iii) di questo Esercizio. Pertanto, in base al principio di Cauchy, ciascuna di queste tre serie converge uniformemente, e quindi la serie di partenza converge uniformemente alla somma delle tre serie. \square

Esercizio 11.17.50. 1. Sia χ_n la funzione caratteristica della semiretta $[n, \infty)$ e $f_{\alpha, n}(x) = \chi_n(x)/x^\alpha$, definita in $\{0 < x < \infty\}$. Sia $1 \leq p < \infty$. Per quali $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_{\alpha, n}(x)$ converge in $L^p(\mathbb{R}^+)$?

2. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_{\alpha, n}(x)$ converge uniformemente?

3. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_{\alpha, n}(x)$ converge puntualmente?

4. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_{\alpha, n}(x)$ converge nel senso delle distribuzioni?

5. Come diventa la risposta alla domanda precedente se ridefiniamo $f_{\alpha, n}(x) = \chi_n(x) e^{-\alpha|x|}$?

\square

Svolgimento.

(i) La norma L^p di $f_{\alpha, n}$ vale infinito se $\alpha p \leq 1$, e quindi per questi α e p la serie non converge. Invece, se $\alpha p > 1$, la norma vale

$$\|\chi_n(x)/x^\alpha\|_p = \left(\int_n^\infty \frac{1}{|x|^{\alpha p}} dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{\alpha p - 1} \frac{1}{n^{\alpha p - 1}} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt[p]{\alpha p - 1}} n^{\alpha - \frac{1}{p}}.$$

Pertanto, se (e solo se) $\alpha - \frac{1}{p} > 1$, si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_{\alpha, n}\|_p < \infty$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_{\alpha, n}$ converge totalmente nella norma di L^p (si veda la Nota 11.17.33). Ora sappiamo che la serie non converge se $\alpha p < 1$ (in particolare, se α è negativo), mentre si ha convergenza per $\alpha > 1 + \frac{1}{p}$. Poiché gli addendi $f_{\alpha, n}$ sono tutti non negativi, nel caso particolare $p = 1$ si ha $\|\sum_{n=N}^{\infty} f_{\alpha, n}\|_1 = \sum_{n=N}^{\infty} \|f_{\alpha, n}\|_1$ e le code della serie tendono a zero se e solo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_{\alpha, n}\|_1$ converge, il che, per quanto appena visto, succede se e solo se $\alpha (= \alpha p) > 1$.

Ora consideriamo il caso $1 < p < \infty$ e cerchiamo di determinare quando la successione delle somme parziali è di Cauchy nella norma L^p . Si

potrebbe essere tentati di procedere come segue. Denotiamo le somme parziali con $S_m := \sum_{n=1}^m f_{\alpha, n}$ e notiamo che, per $k < m$, si ha $S_m - S_{k-1} = ([x] - k + 1)/x^\alpha$ se $k \leq x < m$, e zero altrimenti. Poniamo $I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{\alpha p}} dx$ con $\alpha p > 1$. Allora,

$$\begin{aligned} \|S_m - S_{k-1}\|_p^p &= \left\| \sum_{n=k}^m \chi_n(x)/x^\alpha \right\|_p^p = \int_k^m \frac{([x] - k + 1)^p}{x^{\alpha p}} dx \\ &= \sum_{j=k}^m (j - k + 1)^p I_j. \end{aligned}$$

Scrivendo per semplicità $\beta = \alpha p - 1$, otteniamo dallo sviluppo in serie binomiale (Sezione 1.1) che

$$\begin{aligned} I_j &= \frac{1}{\alpha p - 1} \left(\frac{1}{j^{\alpha p - 1}} - \frac{1}{(j+1)^{\alpha p - 1}} \right) = \frac{1}{\beta} \frac{(j+1)^\beta - j^\beta}{(j(j+1))^\beta} \\ &= (j+1)^{-\beta} \left(\left(1 + \frac{1}{j}\right)^\beta - 1 \right) = (j+1)^{-\beta} \left(\frac{\beta}{j} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) \right) \sim \frac{\beta}{j^{\beta+1}} \end{aligned} \tag{11.23}$$

Quindi sembrerebbe di aver provato $\|S_m - S_{k-1}\|_p^p \sim \beta \sum_{j=k}^{m-1} (j - k + 1)^p j^{-(\beta+1)} = \beta \sum_{j=k}^{m-1} (1 - (k-1)/j)^p j^{p-\beta-1}$. Allora, affinché $\|S_m - S_{k-1}\|_p^p \rightarrow 0$ per $m > k \rightarrow \infty$ occorrebbe e basterebbe che la serie $\sum_{j=1}^{\infty} j^{p-\beta-1}$ converga, e questo è vero se e solo se $p - \beta - 1 < -1$, ossia $p < \beta$. In particolare, $p - \beta - 1$ deve essere negativo, e quindi $\sum_{j=1}^{\infty} j^{p-\beta-1} = \sum_{n=k}^m (n+k-1)^{p-\beta-1} > \sum_{n=k}^m n^{p-\beta-1}$, ed una condizione necessaria affinché la successione S_n sia di Cauchy è che il limite per $k \rightarrow \infty$ dell'ultima somma sia zero. Questo accade se e solo se la serie $\sum_{n=k}^{\infty} n^{p-\beta-1}$ converge, ovvero se e solo se $p < \beta$, cioè $\alpha p - 1 = \beta > p$. Quest'ultima condizione equivale a $\alpha > 1 + \frac{1}{p}$, o equivalentemente $p > 1/(\alpha - 1)$ (se $\alpha > 1$) oppure $p > 1/(1 - \alpha)$ (se $\alpha < 1$). Ma poiché $1 + \frac{1}{p} > \frac{2}{p}$, questa condizione equivalente alla proprietà da Cauchy, e quindi necessaria e sufficiente per la convergenza, è identica a quella sufficiente già trovata prima. Pertanto la serie converge in L^p se e solo se $\alpha > 1 + \frac{1}{p}$.

Però questo argomento si presta ad una critica. Nel dedurre l'equivalenza asintotica $\|S_m - S_{k-1}\|_p^p \sim \beta \sum_{j=k}^{m-1} (j - k + 1)^p j^{-(\beta+1)}$ abbiamo

applicato la stima (11.23) a ciascun termine della serie, quindi abbiamo sommato una quantità numerabile di infinitesimi di tipo $o-(\beta + 1)$. la somma finita di tali infinitesimi è ancora un infinitesimo dello stesso ordine, ma una somma infinita potrebbe non esserlo (potrebbe perfino divergere). Quindi un argomento corretto non può basarsi su una stima asintotica separata su ogni intervallo $[n, n+1]$. Allora applichiamo una stima simile all'intero intervallo n, ∞ , o meglio agli intervalli $[k, m]$ con $k < m$. Si ha

$$\int_k^m \frac{(x-k)^p}{x^{\alpha p}} dx < \|S_m - S_{k-1}\|_p^p < \int_k^m \frac{(x+1-k)^p}{x^{\alpha p}} dx.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} & \left| \int_k^m \frac{(x+1-k)^p}{x^{\alpha p}} dx - \int_k^m \frac{(x-k)^p}{x^{\alpha p}} dx \right| \\ & \leq \int_k^m \left| \frac{(x+1-k)^p - (x-k)^p}{x^{\alpha p}} \right| dx = \int_k^m \left| \frac{1}{(x-k)^p x^{\alpha p}} \right| dx \\ & = o \left(\int_k^m \frac{(x+1-k)^p}{x^{\alpha p}} dx \right). \end{aligned}$$

Perciò $\|S_m - S_{k-1}\|_p^p \sim \int_k^m \frac{(x-k)^p}{x^{\alpha p}} dx$. Dalla convergenza uniforme dello sviluppo in serie binomiale segue che

$$\begin{aligned} \int_k^m \frac{(x-k)^p}{x^{\alpha p}} dx &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{p}{j} k^{p-j} \int_k^m x^{\alpha p-j} dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{p}{j} \left(\frac{k^{p-j}}{k^{\alpha p-j-1}} - \frac{k^{p-j}}{m^{\alpha p-j-1}} \right) \\ &\sim k^{1-p(\alpha-1)} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{p}{j} = 2^p k^{1-p(\alpha-1)} \end{aligned}$$

(l'ultima uguaglianza vale perché $m > k$ può essere lasciato tendere all'infinito a velocità arbitrariamente elevata rispetto a k , e dallo sviluppo binomiale $\sum_{j=0}^{\infty} \binom{p}{j} = (1+1)^p$). Da questo vediamo che $\|S_m - S_{k-1}\|_p \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ se e solo se $p(\alpha-1) > 1$, ovvero $\alpha > 1 + \frac{1}{p}$.

(ii) È chiaro che $f_{\alpha, n}$ è illimitata se $\alpha < 0$ e costante se $\alpha = 0$, pertanto per $\alpha \leq 0$ il termine generale non tende a zero in norma e quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_{\alpha, n}$ non converge nella norma uniforme (ed in effetti per $\alpha < 0$ diverge, in base all'argomento che stiamo per presentare). Quindi possiamo limitare l'attenzione a $\alpha > 0$. Allora x^α è decrescente per $x > 0$, e se $n \leq x < n+1$ si ha $1/x^\alpha \leq 1/n^\alpha$. Quindi la serie converge totalmente, e perciò uniformemente per il criterio di convergenza uniforme di Weierstrass.

È comunque interessante verificare direttamente la proprietà di Cauchy per le somme parziali, come abbiamo fatto nella parte (i) di questo svolgimento per il caso di L^p . I termini della serie per cui $f_{\alpha, n}(x) \neq 0$ sono quelli per $n = 1, \dots, [x]$, e sono tutti positivi. Pertanto, se $m \geq n$, si ha $\|S_m\|_{L^\infty[n, n+1]} = n/n^\alpha = n^{1-\alpha}$, e $\|S_m\|_\infty = \max\{n^{1-\alpha} : n = 1, \dots, m\}$. Analogamente, per $k < m$, abbiamo $\|S_m - S_{k-1}\|_\infty = \max\{n^{1-\alpha} : n = k, \dots, m\}$. Poiché $\alpha > 1$, la successione $n^{1-\alpha}$ è decrescente, e quindi $\|S_m - S_{k-1}\|_\infty = k^{1-\alpha}$. Pertanto S_m è una successione di Cauchy in $L^\infty(\mathbb{R})$ (e la serie converge uniformemente) per ogni $\alpha > 1$. (Nel caso $\alpha < 1$ la successione è crescente e $\|S_m - S_{k-1}\|_\infty = m^{1-\alpha}$ per $m \geq k$, e nel caso $\alpha = 1$ la successione è costante e così pure lo è $\|S_m - S_{k-1}\|_\infty$: quindi per $\alpha < 0$ la serie non solo non converge, come già sapevamo, ma diverge.)

(iii) Come già osservato, i termini $f_{\alpha, n}(x) \neq 0$ sono quelli con $n = 1, \dots, [x]$. Quindi per ogni x c'è solo un numero finito di termini non nulli, e le somme parziali $S_m(x)$ non cambiano più se $m > [x]$: la serie quindi converge puntualmente ovunque.

(iv) In base al Corollario 11.7.1, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_{\alpha, n}$ converge in \mathcal{S}' se e solo se, per ogni $g \in \mathcal{S}$, converge la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f_{\alpha, n}, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{\infty} x^{-\alpha} g(x) dx. \quad (11.24)$$

Per qualsiasi valore di α , la funzione $x^{-\alpha}$ è C^∞ in $[1, \infty)$ ed a crescita polinomiale (per $\alpha \geq 0$ è addirittura limitata). Pertanto $x^\alpha g \in \mathcal{S}$ per il Corollario 11.9.2. In particolare, per $x \geq 1$, esiste una costante $C > 0$ tale che $|g(x)| < Cx^{\alpha-3}$. Quindi $\int_n^{\infty} x^{-\alpha} g(x) dx < C \int_n^{\infty} x^{-3} dx = C/(2n^2)$, e la serie nell'identità 11.24 è convergente. Quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_{\alpha, n}$ nel senso delle distribuzioni per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (v) Abbiamo visto alla fine dell'Esempio 9.5.4 che esistono funzioni $g_\alpha \in \mathcal{S}$ tali che $g(x) > e^{\alpha|x|}$ per ogni x . Quindi, per una tale g_α , gli integrali nell'ultimo membro della identità 11.24 divergono, e quindi non si ha convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_{\alpha,n}$ nel senso delle distribuzioni.

- Esercizio 11.17.51.* 1. La successione $f_n(x) = \frac{\sin x}{x} e^{inx}$ converge nel senso delle distribuzioni? È possibile stabilire se converge in $L^p(\mathbb{R})$ per qualche $p \in [1, \infty]$? Se sì, per quali p converge? Se no, perché?
2. La successione $g_n(x) = \frac{\sin nx}{nx} e^{inx}$ converge nel senso delle distribuzioni? È possibile stabilire se converge in $L^p(\mathbb{R})$ per qualche $p \in [1, \infty]$? Se sì, per quali p converge? Se no, perché?
3. La successione $h_n(x) = \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} e^{inx}$ converge nel senso delle distribuzioni? È possibile stabilire se converge in $L^p(\mathbb{R})$ per qualche $p \in [1, \infty]$? Se sì, per quali p converge? Se no, perché?

□

Svolgimento.

11.18 Cenni sulle distribuzioni non temperate

In questa Sezione accenniamo alla costruzione di distribuzioni generali, che - quando coincidono con funzioni - non richiedono ipotesi di crescita polinomiale. Introduciamo questo spazio più grande di distribuzioni come il duale dello spazio \mathcal{D} delle funzioni C^∞ a supporto compatto, invece che a decrescenza rapida come facemmo per le distribuzioni temperate. Le distribuzioni studiate prima, ossia il duale \mathcal{S}' della classe di Schwartz \mathcal{S} , si chiamano *temperate*, mentre le distribuzioni nello spazio più grande \mathcal{D}' si chiamano semplicemente distribuzioni. Invitiamo il lettore alla necessaria attenzione, visto che in questo libro, ove utilizziamo quasi sempre solo distribuzioni temperate, le abbiamo chiamato spesso semplicemente distribuzioni e così continueremo a fare, con abuso di notazione, nel resto di questa Parte e nella prossima.

Ci limitiamo qui solo a cenni senza dimostrazioni. Varie dimostrazioni sono state esposte, talvolta in maniera assai approfondita, nelle Sezioni

3.20 e 3.22 del Capitolo 3 sugli spazi vettoriali topologici. Oltre che i fatti preliminari esposti in quel Capitolo, il lettore interessato può studiare una esposizione estesa e dettagliata in [25] e [38].

11.18.1 Lo spazio \mathcal{D}

Definizione 11.18.1. Lo spazio \mathcal{D} delle funzioni C^∞ a supporto compatto si chiama lo spazio delle *funzioni test*. Muniamo questo spazio della seguente famiglia numerabile di norme: per ogni K intero positivo,

$$\|f\|_K := \max\{|D^\alpha f(x)| : x \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq K\}.$$

Più in generale, si denota con $\mathcal{D}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni C^∞ a supporto compatto definite su un dominio Ω . Se si vuole estendere questa definizione a funzioni in più variabili su un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, basta prendere il massimo su Ω e sostituire l'indice di derivazione α con un multiindice $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ il cui grado $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ sia non superiore a n .

Si noti che, ora che le funzioni sono a supporto compatto, non occorre più moltiplicare per polinomi e prendere l'estremo superiore invece che il massimo (come invece facemmo per le distribuzioni temperate, si veda la Nota 9.3.3), perché l'estremo superiore di una funzione continua su un compatto è il massimo (si veda la Sezione 1.1 e la dimostrazione del Teorema di Weierstrass sulla esistenza dei massimi e dei minimi delle funzioni continue sui compatti ([19, Cap. 16 (Appendice)]).

Lo spazio \mathcal{D} è l'unione degli spazi di Fréchet $\mathcal{D}_K = C^\infty(K)$ delle funzioni C^∞ a supporto nel compatto K , introdotto nell'Esempio 9.1.6. Il legame fra questi sottospazi e l'intero spazio delle funzioni test è illustrato nel prossimo enunciato.

Corollario 11.18.2. *Se f_i è una successione di Cauchy in \mathcal{D} , allora tutte le funzioni f_i appartengono a \mathcal{D}_K per qualche compatto K , e $\lim_{i,j} \|f_i - f_j\|_N = 0$ per ogni intero positivo N . Se $f_i \rightarrow 0$ in \mathcal{D} , allora esiste un compatto K che contiene il supporto di tutte le funzioni f_i e le derivate $D^n f_i$ di qualsiasi ordine n convergono a zero uniformemente per ogni n quando $i \rightarrow \infty$. Pertanto ogni successione di Cauchy in \mathcal{D} converge, ovvero lo spazio delle funzioni test è completo.*

Definizione 11.18.3. Un funzionale lineare continuo su \mathcal{D} (nel senso della topologia di \mathcal{D} indotta dalla sua famiglia numerabile di norme) si chiama

una *distribuzione*. Lo spazio delle distribuzioni è quindi il duale \mathcal{D}' , nel senso della Sezione 11.3.

Il prossimo risultato illustra un altro legame fra \mathcal{D} ed i sottospazi \mathcal{D}_K , in linea con il Corollario precedente.

Teorema 11.18.4. *Un funzionale T su \mathcal{D} è continuo, ossia $T \in \mathcal{D}'$, se e solo se per ogni compatto K esistono un intero N ed una costante $C > 0$ tali che $|Tf| \leq C\|f\|_N$.*

Definizione 11.18.5. Se una distribuzione T ammette costanti N che rendono vera la disuguaglianza del precedente Teorema 11.18.4 simultaneamente per ogni compatto K , allora la più piccola tale costante si chiama l'*ordine* di T .

Esempio 11.18.6. Dal precedente Teorema 11.18.4 segue che le delta di Dirac sono distribuzioni.

La derivata di una distribuzione viene definita esattamente come nel caso di distribuzioni temperate (Esempio 11.5.4), ed in base al Teorema 11.18.4 è ancora una distribuzione.

La distribuzione indotta da una funzione localmente integrabile viene definita come nel caso di distribuzioni temperate (Esempio 11.5.4), ed è ora una distribuzione anche se non si assume che sia a crescita polinomiale.

La moltiplicazione di una funzione $f \in C^\infty$ per una distribuzione viene definita come nel caso di distribuzioni temperate (Esempio 11.5.4), ed è ora una distribuzione anche senza assumere che f sia a crescita polinomiale.

La verifica di queste ovvie proprietà viene lasciata al lettore per esercizio.

□

11.18.2 Convergenza nel senso delle distribuzioni

Le proprietà di convergenza di successioni di distribuzioni sono analoghe, con gli ovvi cambiamenti, a quelle per le distribuzioni temperate, come si vede nei prossimi risultati, che sono conseguenze del Teorema 11.18.4 e del Corollario 11.18.2, nonché del principio di uniforme limitatezza (Corollario 3.14.4), esattamente come nella analoga dimostrazione per le distribuzioni temperate (Proposizione 11.5.3).

Parallelamente a quanto visto per le distribuzioni temperate (Definizione 11.5.2), la nozione di convergenza nel senso di \mathcal{D}' è la convergenza debole* indotta da \mathcal{D} , nel senso introdotto nella Definizione 11.4.4:

Definizione 11.18.7. Siano $T, T_i \in \mathcal{D}'$, $i = 1, 2, \dots$. Diciamo che $T_i \rightarrow T$ in \mathcal{D}' se $T_i f \rightarrow T f$ per ogni $f \in \mathcal{D}$.

Teorema 11.18.8. Sia $T_i \in \mathcal{D}'$ una successione di distribuzioni che converge puntualmente (o meglio nel senso debole stella): per ogni $f \in \mathcal{D}$, esiste il limite si ha $\lim_{i \rightarrow \infty} T_i f$. Chiamiamo questo limite $T f$. Allora $T \in \mathcal{D}'$, e per ogni intero $n \in \mathbb{N}$ si ha $D^n T_i \rightarrow D^n T$ nella topologia di \mathcal{D}' .

Il prossimo risultato illustra la bicontinuità della moltiplicazione per funzioni su \mathcal{D}' .

Teorema 11.18.9. Se $T_i \rightarrow T$ in \mathcal{D}' e $h_i \rightarrow h$ in C^∞ (nel senso della topologia dello spazio di Fréchet $C^\infty(\mathbb{R})$ introdotta nell'Esempio 9.1.6), allora $h_i T_i \rightarrow h T$ in \mathcal{D}' .

11.18.3 Supporto e convoluzione di distribuzioni

Il supporto di una distribuzione si definisce come per una distribuzione temperata (Definizione 11.11.1).

Notazione 11.18.10. In seguito, nel Capitolo 18, considereremo distribuzioni con supporto in una semiretta illimitata a destra o a sinistra, che chiameremo *distribuzioni con supporto a destra* (rispettivamente, *a sinistra*).

La nozione di convoluzione di distribuzioni è più delicata rispetto al caso delle distribuzioni temperate. La definizione di convoluzione $u * T$ di una funzione $u \in \mathcal{D}$ ed una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ è identica al caso di distribuzioni temperate, in cui $u \in \mathcal{S}$ e $T \in \mathcal{S}'$, ed ha le stesse proprietà, che lasciamo verificare al lettore. Ad esempio:

Esercizio 11.18.11. Se $\{h_n\}$ è una identità approssimata di funzioni in \mathcal{D} , allora per ogni $g \in \mathcal{D}$ si ha $h_n * g \rightarrow g$ nella topologia di \mathcal{D} , e per ogni $T \in \mathcal{D}'$ si ha $h_n * T \rightarrow T$ in \mathcal{D}' . \square

Ora veniamo alla convoluzione con funzioni in C^∞ invece che in \mathcal{D} . Omettiamo le dimostrazioni (si veda, ad esempio, [25, Chapter 6]).

Teorema 11.18.12. (i) Se $T \in \mathcal{D}'$ è una distribuzione a supporto compatto e $f \in C^\infty$, allora la definizione di convoluzione ha senso anche per $f * T$, commuta con le traslazioni e verifica $D^k(f * T) = (D^k f) * T = f * (D^k T)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Se in aggiunta $g \in \mathcal{D}$ allora $g * T \in \mathcal{D}$ e valgono le seguenti regole di associatività e di commutatività: $(g * f) * T = g * (f * T) = f * (g * T)$.

(ii) Se $T, U \in \mathcal{D}'$ ed almeno una delle due distribuzioni ha supporto compatto, allora l'operatore $Lf = (f * T) * U$ è ben definito. Possiamo quindi definire la convoluzione $T * U$ come $\langle T * U, f \rangle = Lf$.

(iii) Siano $T, U, V \in \mathcal{D}'$. Se almeno una fra T e V ha supporto compatto, vale la regola di commutatività $T * V = V * T$, e la regola di derivazione $D^k(T * V) = (D^k T) * V = T * (D^k V)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$: in particolare, $D^k T = (D^k \delta) * T$, e quindi anche $T = \delta * T$.

Se almeno due dei supporti di T, U, V sono compatti, vale la regola di associatività $(T * U) * V = T * (U * V)$.

11.18.4 Distribuzioni e distribuzioni temperate

È chiaro da quanto visto nella definizione di topologia in \mathcal{D} e \mathcal{S} che \mathcal{D} si immerge come sottospazio di \mathcal{S} e l'immersione è continua. Pertanto, per quanto visto nella Sezione 11.3, lo spazio delle distribuzioni temperate \mathcal{S}' si immerge con continuità nello spazio delle distribuzioni \mathcal{D}' . Viste come funzionali, le distribuzioni temperate sono quelle distribuzioni che si estendono a funzionali continui sulla classe di Schwartz e non solo sulle funzioni C^∞ a supporto compatto. È quindi chiaro che vale il risultato seguente:

Corollario 11.18.13. *Ogni distribuzione a supporto compatto è temperata.*

Capitolo 12

Approssimazione in \mathcal{S}' del treno di impulsi con funzioni di Schwartz

12.1 Il treno di impulsi e la sua trasformata di Fourier su $B_{\frac{1}{2}}$

Questo capitolo è dedicato alla approssimazione (nel senso delle distribuzioni) della distribuzione treno di impulsi con funzioni di Schwartz. Richiamiamo la nozione di treno di impulsi, presentata nella Definizione 11.7.4:

Definizione 12.1.1. (Il treno di impulsi.) (*Definizione tratta dall'Esempio 11.7.4.*) Chiamiamo *treno di impulsi* la distribuzione $K \in \mathcal{S}'$ definita da

$$K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$$

dove δ_n è la delta di Dirac centrata al punto n , ossia

$$\langle \delta_n, f \rangle = f(n) \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{S},$$

e la serie converge nel senso delle distribuzioni (come osservato nell'Esempio 11.7.4).

Calcoliamo ora \widehat{K} a partire dalla definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione (Definizione 11.12.1 (i)):

$$\langle \widehat{K}, f \rangle = \langle K, \widehat{f} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)$$

La serie che definisce \widehat{K} è convergente nel senso delle distribuzioni. Infatti $f \in \mathcal{S}$ implica $\widehat{f} \in \mathcal{S}$ (Teorema 9.7.6), e quindi $\widehat{f}(n)$ tende a zero all'infinito a velocità più che polinomiale, in particolare più rapidamente di $\frac{1}{n^2}$. Pertanto la serie numerica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)$ è convergente per ogni $f \in \mathcal{S}$ per il Corollario 11.7.1).

Ora, la formula di somma di Poisson (Proposizione 10.3.1) asserisce che, per ogni f nella classe di Schwartz, o anche nella classe di Paley-Wiener $B_{\frac{1}{2}}$ (Definizione 10.4.1), si ha

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n).$$

purché la serie di Fourier del periodicizzato di periodo 1 di \widehat{f} converga puntualmente nell'origine. Questo equivale a dire che

$$\langle \widehat{K}, f \rangle \equiv \langle K, \widehat{f} \rangle = \langle K, f \rangle \tag{12.1}$$

per ogni $f \in B_{\frac{1}{2}}$ che soddisfa la succitata condizione. Ridimostreremo questo risultato per ogni $f \in \mathcal{S}$, grazie a una dimostrazione alternativa basata sulla convergenza negli spazi \mathcal{S} e \mathcal{S}' .

Dalla proprietà di dilatazione per la trasformata di Fourier di distribuzioni, Teorema 11.13.9, ora segue:

Corollario 12.1.2. *Poniamo $K_{\tau} := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n\tau}$ (K_{τ} è il treno di impulsi di passo τ). Per ogni $\tau > 0$, osserviamo che il dilatato $\Lambda_{\frac{1}{\tau}} K$, in base all'Esempio 11.13.8 ed all'Esercizio 11.13.10, è $\Lambda_{\frac{1}{\tau}} K = \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n\tau} = \tau K_{\tau}$. Allora*

$$\tau \widehat{K}_{\tau} = \widehat{\Lambda_{\frac{1}{\tau}} K} = \tau \Lambda_{\tau} \widehat{K} = \tau \Lambda_{\tau} K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n/\tau} = K_{\frac{1}{\tau}}.$$

Equivalentemente,

$$\widehat{K}_{\tau} = \frac{1}{\tau} K_{\frac{1}{\tau}}.$$

12.2 La trasformata di Fourier del treno di impulsi

Poiché

$$K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$$

e la serie converge in \mathcal{S}' , la Proposizione 11.12.4 asserisce che

$$\widehat{K} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\delta}_n,$$

e che quest'ultima serie converge nel senso di \mathcal{S}' . (Il fatto che questa serie converga è ovvio anche per via diretta, in base al Corollario 11.7.1, perché $\widehat{\delta}_n(f) = \widehat{f}(n)$ e la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)$ converge perché il termine generale è a decrescenza rapida visto che $\widehat{f} \in \mathcal{S}$ per la Proposizione 11.12.4 dal momento che $f \in \mathcal{S}$.) Ora, dall'Esempio 11.15.1 (ii), sappiamo che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\delta}_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{e^{-2\pi i n \omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n \omega}.$$

In base a (12.1) sappiamo invece di dover trovare al secondo membro

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n.$$

C'è una contraddizione? Per chiarire che non c'è contraddizione mostriamo che la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n \omega} \tag{12.2}$$

converge in \mathcal{S}' a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$.

La serie degli esponenziali (12.2) è una serie di funzioni, ma non converge nel senso delle funzioni, ossia puntualmente, perché il termine generale $e^{-2\pi i n \omega}$ non tende a 0 per $n \mapsto \infty$ per nessun ω (ha modulo 1, e quindi la serie non converge per alcun ω : Sezione 1.1). Però è interessante studiare il comportamento puntuale delle sue somme parziali

$$S_N(\omega) = \sum_{n=-N}^N e^{-2\pi i n \omega}.$$

Sappiamo che non convergono, ma come si comportano?

È immediato osservare che, se ω è intero, $e^{-2\pi i n \omega} = 1$ e quindi

$$S_N(\omega) = 2N + 1.$$

Perciò, se ω è intero,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\omega) = \infty.$$

Invece, se ω non è intero, si può mostrare che $S_N(\omega)$ è limitato al variare di N : più precisamente,

$$|S_N(\omega)| \leq \frac{1}{|\sin \pi \omega|};$$

si veda l'Appendice alla fine del presente capitolo, a pagina 959).

Perciò l'andamento delle somme parziali si mantiene limitato per tutti gli ω non interi, ma esse divergono sugli interi: questo è precisamente ciò che ci aspetteremmo se il limite fosse

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n.$$

Così però abbiamo solo un indizio circa il limite della serie (12.2). Al fine di stabilire in maniera rigorosa a cosa essa converge nel senso delle distribuzioni dobbiamo calcolare

$$\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n \omega}, f \right\rangle,$$

per $f \in \mathcal{S}$. Ma sappiamo già la risposta, riformulata qui come teorema:

Teorema 12.2.1. (Formula di Somma di Poisson espressa nel senso delle distribuzioni.) Vale la seguente uguaglianza:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\delta}_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n,$$

nella quale le due serie convergono nel senso delle distribuzioni.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che, per ogni $f \in \mathcal{S}$, le serie

$$\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\delta}_n, f \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)$$

e

$$\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n, f \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$$

convergono entrambe e coincidono. Ma questo è la Proposizione 10.3.1. \square

Prima di procedere, enunciamo una interessante conseguenza della convergenza della serie (12.2), che prova la prima metà di un fatto generale: l'equivalenza fra periodicità di una distribuzione e discretezza della sua trasformata di Fourier (per l'altra metà si veda il Corollario 13.1.5).

Corollario 12.2.2. (La trasformata di Fourier di una distribuzione periodica è discreta.) Sia f una funzione localmente integrabile con supporto in $[-\tau/2, \tau/2]$, e sia h la funzione localmente integrabile e periodica ottenuta periodicizzando f con periodo τ : cioè $h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{n\tau} f$. Allora la corrispondente distribuzione \widehat{T}_h (notazione dell'Esempio 11.5.4 (i)) è discreta: più precisamente, è la distribuzione impulsiva equispaziata di passo $\frac{1}{\tau}$ data da $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\frac{n}{\tau}) \delta_{\frac{n}{\tau}}$. Si noti che il fattore $\widehat{f}(\frac{n}{\tau})$ nell'ultima espressione è precisamente il coefficiente di Fourier n -simo della funzione periodica h (Proposizione 10.2.3), e quindi in questo senso la trasformata di Fourier della funzione periodica h si identifica con la distribuzione discreta di passo $1/\tau$ il cui istogramma (nel senso della successiva Notazione 13.1.3) è la successione dei coefficienti di Fourier.

Dimostrazione. In base alla proprietà di dilatazione per la trasformata di Fourier (Teorema 11.13.9), è sufficiente dimostrare il Corollario nel caso $\tau = 1$. In tale caso, per la Proposizione 11.15.3, si ha

$$h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n * f$$

e la serie converge nel senso delle distribuzioni, in base all'argomento ripetutamente usato in Sezione 11.7. Allora, in base all'Esempio 11.15.1 (ii),

$$\widehat{T}_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\delta}_n \widehat{f} \tag{12.3}$$

dove la serie converge nel senso delle distribuzioni, grazie alla continuità della trasformata di Fourier su \mathcal{S}' (Teorema 9.7.6). Ora applichiamo il Teorema

12.2.1: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\delta}_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$, e quindi (12.3) diventa

$$\widehat{T}_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n \widehat{f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \delta_n, \quad (12.4)$$

grazie all'Esercizio 11.9.5.

L'ultima asserzione è la Proposizione 10.2.3 (o più precisamente, il suo Corollario 10.2.4). \square

La dimostrazione elementare sul calcolo di \widehat{K} data nel Teorema 12.2.1 è piuttosto formale: vogliamo darne una versione più costruttiva.

Ad esempio, rivediamo in questa luce quanto osservato in Sezione 12.1 a proposito della formula di Poisson. Se invece di prendere $f \in \mathcal{S}$ prendessimo f nella classe di Paley-Wiener $B_{\frac{1}{2}}$ (Definizione 10.4.1) avremmo

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\delta}_n, f \right\rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \langle e^{-2\pi i n \omega}, f \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \\ &= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n, f \right\rangle \end{aligned}$$

(la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)$ converge perché $f \in B_{\frac{1}{2}}$ ed abbiamo fatto uso della formula di somma di Poisson (Proposizione 10.3.1).

Perciò, se $B_{\frac{1}{2}}$ fosse contenuto in \mathcal{S} e fosse denso in \mathcal{S} , questo ci permetterebbe di ridimostrare per \mathcal{S} l'identità

$$K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\delta}_n = \widehat{K}$$

a partire dalla classe a banda limitata. Invece ciò non è vero, come abbiamo mostrato nella Proposizione 11.4.2.

Riassumendo, il Teorema 12.2.1, che non è altro che la formula di somma di Poisson (Proposizione 10.3.1), ci dice che $\widehat{K}(f) = K(f)$ per ogni funzione in \mathcal{S} : ma se vogliamo provare questo risultato in modo costruttivo, cioè approssimando le distribuzioni ad entrambi i membri con funzioni, non possiamo usare un procedimento di approssimazione a partire da $B_{\frac{1}{2}}$, e quindi invocare la formula di somma di Poisson per la classe a banda limitata. Invece dovremmo partire da \mathcal{S} , approssimare K con funzioni un \mathcal{S} , e poi usare la dualità.

12.3 Approssimanti del treno di impulsi

Esempio 12.3.1. (Convergenza dei treni di onde quadre normalizzate al treno di impulsi.) Che cosa succede se consideriamo il treno di onde quadre rinormalizzate di durata α , Ξ_α , introdotto nella Definizione 11.7.8, e facciamo tendere α ad infinito? La risposta è che queste distribuzioni convergono in \mathcal{S}' al treno di impulsi K dell'Esempio 11.7.4. La ragione è la seguente.

Consideriamo la funzione $\chi_\alpha = \alpha \Lambda_\alpha \chi$ ottenuta comprimendo orizzontalmente χ di un fattore $\frac{1}{\alpha}$ e poi rinormalizzandola di un fattore α per mantenerne costante la norma L^1 , come in Sezione 11.1. La distribuzione $T_\alpha = T_{\chi_\alpha}$ data dalla funzione localmente integrabile χ_α agisce sulle funzioni $f \in \mathcal{S}'$ così: $T_\alpha f$ è la media integrale dei valori di f nell'intervallo $[-\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\alpha}]$ di centro 0 e diametro $\frac{1}{\alpha}$. Evidentemente, quindi, $T_\alpha f$ è compreso fra il minimo ed il massimo valore che f assume in questo intervallo. Poiché f è continua, per il Teorema dei Valori Intermedi (Sezione 1.1) questo valore viene assunto da f in qualche punto $\xi(\alpha)$ dell'intervallo $[-\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\alpha}]$. Quindi si ha: $|\xi(\alpha)| \leq \frac{1}{2\alpha}$. La stessa cosa capita ai traslati: per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n T_\alpha f = f(\xi_n(\alpha))$, con $|\xi_n(\alpha) - n| \leq \frac{1}{2\alpha}$.

Il resto del calcolo si può svolgere come nell'Esercizio 11.7.5: per comodità del lettore lo riassumiamo al termine dell'Esempio, ma esiste una variante rapida e semplice dell'argomentazione, che esponiamo per prima cosa. Osserviamo che $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \xi_n(\alpha) = n$. Pertanto basta provare che si può scambiare il limite con la serie:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\xi_n(\alpha)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n).$$

Per dimostrare questo passaggio al limite, applichiamo il Teorema di Convergenza Monotona di Lebesgue (Teorema 1.9.53), invece che ad integrali su \mathbb{R} , alle serie, cioè ad *integrali rispetto alla misura discreta naturale* su \mathbb{Z} dell'Esempio (1.9.22). Qui i termini della serie dipendono dal parametro α . Per poter applicare questo Teorema occorre che la successione dei termini, $\{f(\xi_n(\alpha))\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (che cambia con α), sia limitata da un'unica successione in ℓ^1 indipendente da α . Una tale successione è $a_n := \max\{|f(x)| : n - \frac{1}{2} \leq x \leq n + \frac{1}{2}\}$. Infatti, evidentemente vale la disuguaglianza $|f(\xi_n(\alpha))| \leq a_n$; inoltre, grazie alla decrescenza rapida di f , si ha che $\sum_{N=-\infty}^{\infty} a_n < \infty$. Questo completa il calcolo. \square

Esercizio 12.3.2. Si sviluppi il calcolo del precedente Esempio 12.3.1 senza usare il Teorema di Convergenza Dominata di Lebesgue (Teorema 1.9.54).

Svolgimento. Il calcolo si può svolgere come nell'Esercizio 11.7.5, come segue. Per il Teorema di Lagrange (Sezione 1.1) esiste un numero $\eta_n(\alpha)$ compreso fra n e $\xi_n(\alpha)$ tale che $f(\xi_n(\alpha)) - f(n) = (\xi_n(\alpha) - n)f'(\eta_n(\alpha))$. Quindi $|f(\xi_n(\alpha)) - f(n)| \leq \frac{1}{2\alpha} |f'(\eta_n(\alpha))|$, e poiché f' è a decrescenza rapida, da qui segue che, per ogni intero positivo M , si ha $f(\xi_n(\alpha)) - f(n) = \frac{1}{2\alpha} o(n^{-M})$. Più precisamente, $|f(\xi_n(\alpha)) - f(n)|$ si maggiora con la lunghezza $\frac{1}{2\alpha}$ dell'intervallo $[n, n + \frac{1}{2\alpha}]$ (se $\xi_n(\alpha) \geq n$: oppure $[n - \frac{1}{2\alpha}, n]$ se $\xi_n(\alpha) < n$), moltiplicata per il massimo valore di $|f'|$ in tale intervallo. Poiché l'intervallo si stringe al crescere di α , il suddetto massimo valore è non crescente al crescere di α , e quindi la sua maggiorazione con una quantità $o(n^{-M})$ decrescente a velocità più che polinomiale non dipende da α .

Pertanto la serie

$$\begin{aligned} \langle \Xi_\alpha, f \rangle &= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n T_\alpha, f \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\xi_n(\alpha)) \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) + \frac{1}{2\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(\eta_n(\alpha)) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \langle K, f \rangle, \end{aligned}$$

e quindi Ξ_α converge a K (Definizione 11.5.2). \square

Esempio 12.3.3. (Convergenza dei treni di Gaussiane normalizzate al treno di impulsi.) Consideriamo il caso della serie G_α di traslati di passo 1 della Gaussiana $\alpha \Lambda_\alpha \varphi$ della Definizione 11.7.13. Possiamo ripetere l'argomento del precedente Esempio 12.3.1. Tranne al più per un numero

finito di interi n , il fatto che f e φ siano a decrescenza rapida assicura che la media pesata dei valori di f intorno al punto n con peso $\alpha\varphi(\alpha(x-n))$ è un valore assunto da n in un punto $\xi(\alpha)$ che verifica $|\xi(\alpha)| \leq \frac{1}{2\alpha}$. Il resto dell'argomento rimane identico a quello dell'Esempio succitato, e mostra che $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} G_\alpha = K$ nel senso di \mathcal{S}' .

In particolare, per ogni $f \in \mathcal{S}$ e $\varepsilon > 0$, esiste $\alpha_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $\alpha > \alpha_\varepsilon$,

$$|\langle G_\alpha, f \rangle - \langle K, f \rangle| < \varepsilon. \quad (12.5)$$

□

Corollario 12.3.4. *Per ogni intero m esiste un intero N_m tale che le funzioni di Schwartz $m \sum_{n=-N_m}^{N_m} \lambda_n \Lambda_{N_m} \varphi$ approssimano il treno di impulsi K nel senso delle distribuzioni.*

Dimostrazione. Le somme parziali della serie $G_\alpha = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \Lambda_\alpha \varphi$ convergono a G_α nel senso delle distribuzioni, come mostrato nell'Esempio 11.7.9. In particolare, per ogni $f \in \mathcal{S}$ e $\varepsilon, \alpha > 0$, esiste N_α tale che, per ogni $N \geq N_\alpha$,

$$\left| \langle \alpha \sum_{n=-N}^N \lambda_n \Lambda_\alpha \varphi, f \rangle - \langle G_\alpha, f \rangle \right| < \varepsilon. \quad (12.6)$$

Allora, consideriamo gli α per cui vale la disuguaglianza (12.5) e limitiamo l'attenzione ad α interi: sappiamo che la disuguaglianza vale per tutti gli interi $m := \alpha$ maggiori di un opportuno α_ε (un numero che dipende solo da ε e dalla scelta di $f \in \mathcal{S}$). Per ogni tale intero m scriviamo N_m invece che N_α nella disuguaglianza (12.6). Allora dalla disuguaglianza triangolare e da (12.6) e (12.5) segue che, per ogni $f \in \mathcal{S}$ e per ogni $m > \alpha_\varepsilon$,

$$\left| \langle m \sum_{n=-N_m}^{N_m} \lambda_n \Lambda_m \varphi, f \rangle - \langle K, f \rangle \right| < 2\varepsilon.$$

□

Nota 12.3.5. Si noti che, se non ci fossimo proposti di approssimare il treno di impulsi con funzioni in \mathcal{S} , l'approssimazione del treno di impulsi K con le funzioni C^∞ periodiche G_α (quindi non in \mathcal{S}), stabilita nel precedente Esempio 12.3.3, sarebbe sufficiente a dimostrare costruttivamente l'identità $\widehat{K} = K$ del Corollario 12.2.2. Infatti basterebbe ricalcare l'argomento della

dimostrazione di quel corollario, e precisamente applicare a G_α l'identità (12.4), per ottenere

$$\widehat{G}_\alpha = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\alpha\Lambda_\alpha\phi}(n) \delta_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/\alpha^2} \delta_n$$

grazie alla Proposizione 10.2.3 (si vedano spiegazioni più dettagliate nel Corollario 12.4.6 in seguito). A questo punto, per $\alpha \rightarrow +\infty$, i coefficienti delle delta nei termini di questa serie tendono tutti a 1, e quindi, per ogni $f \geq 0$ in \mathcal{S} , si ha

$$\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/\alpha^2} \delta_n, f \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/\alpha^2} f(n) \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$$

di nuovo per il Teorema di Convergenza Monotona di Lebesgue (Teorema 1.9.53), applicato alle serie, ossia rispetto alla misura discreta naturale su \mathbb{Z} . Questo fatto, insieme ad un ovvio argomento di densità di \mathcal{S} in L^1 , stabilisce che $\widehat{G}_\alpha(f) \rightarrow K(f)$ per ogni funzione non negativa in $L^1(\mathbb{R})$, ed allora, per linearità, la stessa cosa vale per ogni funzione di Schwartz (basta spezzarla come somma delle sue parti positiva e negativa). \square

Nota 12.3.6. I due Esempi 12.3.1 e 12.3.3 di questa Sezione sono casi particolari di un risultato più generale: se ϕ_α è una identità approssimata in L^1 , allora la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \phi_\alpha$ converge in \mathcal{S}' al treno di impulsi quando $\alpha \rightarrow \infty$. Lasciamo al lettore il compito di estendere le dimostrazioni precedenti a questo risultato, e di osservare che il caso del treno di onde quadre normalizzate è un caso particolare di scelta di identità approssimata a supporto compatto. \square

Abbiamo visto nell'Esempio 11.7.9 e nell'Esercizio 11.7.11 che la serie G_α converge puntualmente su tutto \mathbb{R} ed uniformemente sui compatti per ogni $\alpha > 0$, ma non uniformemente su \mathbb{R} perché la somma è una funzione periodica, che non tende a zero all'infinito, mentre le sue somme parziali tendono tutte a zero all'infinito (a velocità più che polinomiale). Inoltre, dall'Esempio 12.3.3, sappiamo che G_α tende al treno di impulsi K in \mathcal{S}' quando α tende a infinito. Per lo stesso argomento G_α non appartiene alla classe di Schwartz, perché, essendo una funzione periodica, non tende a zero all'infinito. Ci proponiamo invece di approssimare K con funzioni in \mathcal{S} ,

come abbiamo fatto nel Corollario 12.3.4 ma in maniera più elegante: a questo scopo introduciamo un *cut-off* in \mathcal{S} per far tendere a zero $G_\alpha(x)$ per $x \rightarrow \pm\infty$, come segue.

Ora moltiplichiamo $G_\alpha(x)$ per una funzione cut-off, cioè una funzione con valori fra 0 e 1 che tende a zero all'infinito con x , ma per ogni x tende a 1 quando $\alpha \rightarrow \infty$. Pertanto, l'effetto del cut-off scompare gradualmente quando α tende ad infinito.

Teorema 12.3.7. (Approssimazione del treno di impulsi con treni di Gaussiane smorzate.)

Per ogni $f \in \mathcal{S}$, $f \geq 0$ poniamo

$$K_\alpha(x) = e^{-\pi x^2/\alpha^2} G_\alpha(x) = e^{-\pi x^2/\alpha^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\pi \alpha^2(x-n)^2}$$

e consideriamo le corrispondenti distribuzioni

$$\langle K_\alpha, f \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2/\alpha^2} G_\alpha(x) f(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha \langle e^{-\pi x^2/\alpha^2} \lambda_n \Lambda_\alpha \varphi, f \rangle.$$

Allora:

(i) K_α appartiene a \mathcal{S} ;

(ii) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} K_\alpha = K$ nel senso delle distribuzioni.

Dimostrazione. La parte (i) segue facilmente dal fatto che K_α è infinitamente derivabile e tende a zero all'infinito come la Gaussiana (per una dimostrazione più dettagliata si veda il Teorema 12.4.1 subito sotto).

Sappiamo dall'Esempio 12.3.3 che $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} G_\alpha = K$ nel senso delle distribuzioni. Inoltre, sia $\phi_\alpha(x) = e^{-\pi x^2/\alpha^2}$. Allora $\phi_\alpha \in \mathcal{S}$, $\phi_\alpha \leq 1$ e $\phi_\alpha \rightarrow 1$ puntualmente ovunque ed uniformemente sui compatti. Perciò l'operatore M_{ϕ_α} su \mathcal{S} dato dalla moltiplicazione per la funzione ϕ_α è continuo in base all'Esempio 11.5.4 (i). Pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} K_\alpha &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} M_{\phi_\alpha} G_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} M_{\phi_\alpha} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} G_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} M_{\phi_\alpha} K \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/\alpha^2} \delta_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n = K. \end{aligned}$$

in base all'Esercizio 11.9.5 ed al passaggio del limite su α sotto il segno di serie grazie al Teorema di Convergenza Dominata, in maniera del tutto analoga all'argomento della parte (ii) della Proposizione 11.6.1. Questo prova (ii). \square

12.4 *Appendice. Esercizio: dimostrazione alternativa diretta del Teorema 12.3.7

Diamo in questa Appendice, molto laboriosa ma assolutamente non necessaria per la lettura del resto di quest'opera, una dimostrazione alternativa, ma in parte lasciata al lettore, del Teorema 12.3.7: ossia, nel senso delle distribuzioni si può approssimare il treno di impulsi K con funzioni di Schwartz K_α ottenute addolcendo con un cut-off Gaussiano il treno di Gaussiane normalizzate. Approfitiamo di questa opportunità per mostrare anche il fatto che le trasformate di Fourier di questi approssimanti sono esattamente dello stesso tipo degli approssimanti stessi (Proposizione 12.4.8 alla fine dell'Appendice), e questo rende naturale il fatto che $\widehat{K} = K$. Il lettore non vivamente interessato è invitato a saltare questa Appendice.

Teorema 12.4.1. *Se K_α è la funzione dell'Esempio 12.3.7, K_α appartiene a \mathcal{S} .*

Dimostrazione. Poiché gli addendi di K_α sono minori di quelli di G_α è ovvio che il test di Weierstrass (Teorema 1.3.29) si applica a K_α esattamente come lo abbiamo applicato prima a G_α nell'Esercizio 11.7.11, e ne segue la convergenza uniforme della serie di K_α in ogni compatto; grazie al fatto che il cut-off tende a zero all'infinito mentre G_α è limitata si vede immediatamente che la serie di K_α converge uniformemente su tutto \mathbb{R} . Se moltiplichiamo K_α per un polinomio, diciamo per $(1 + |x|^k)$, il risultato è lo stesso che moltiplicare G_α per $(1 + |x|^k) e^{-\pi x^2/\alpha^2}$: questa nuova funzione moltiplicatrice continua a tendere a zero all'infinito quando $x \rightarrow \infty$, nonostante il fattore polinomiale, perché $e^{-\pi x^2/\alpha^2} \in \mathcal{S}$. Quindi, per lo stesso ragionamento di prima, anche dopo tale moltiplicazione $(1 + |x|^k) K_\alpha(x)$ si mantiene limitata su tutto \mathbb{R} : abbiamo provato che $p_{00}(K_\alpha)$ è finito. Per completare la dimostrazione del fatto che K_α appartiene a \mathcal{S} basta ora mostrare che $p_{kl}(K_\alpha)$ è finito per ogni k, l . Mostriamo che è finito $p_{0l}K_\alpha$: da qui il caso generale segue moltiplicando per un polinomio come abbiamo appena fatto.

Procediamo per induzione su l . Dobbiamo anzitutto mostrare che $K_\alpha(x)$ è derivabile. Per il Teorema di derivazione per serie uniformemente convergenti con le derivate (Teorema 1.3.35) basta mostrare che la serie delle derivate è uniformemente convergente. La derivata di $e^{-\pi\alpha^2(x-n)^2}$ è $-2\pi\alpha^2(x-n)e^{-\pi\alpha^2(x-n)^2}$. Vogliamo applicare il ragionamento dell'Esercizio 11.7.11. Questa volta gli addendi non sono positivi, ma dobbiamo prenderli in valore assoluto per applicare il test di Weierstrass sopra citato. Allora il termine generale diventa un multiplo di

$$u_{\alpha,n} = \alpha^2 |(x-n)| e^{-\pi\alpha^2(x-n)^2}.$$

Però ora in $x = n$ questo termine generale non ha più il proprio punto di massimo, anzi lì si annulla. Dobbiamo dimostrare che comunque, per $n > 0$ e α grande, il punto di massimo è vicino a $x = n$. In effetti, consideriamo la funzione dispari $h(x) = xe^{-\pi\alpha^2 x^2}$, ed osserviamo che si ha $u = u_{\alpha,0} = |h|$. La derivata h' ha due punti estremi, che corrispondono ai punti di minimo e di massimo di h , ed ai due punti di massimo della funzione pari u . Calcolando h' si ottiene, a parte una costante, una funzione data da un esponenziale moltiplicato per il fattore polinomiale $1 - 2\pi\alpha^2 x^2$. Perciò gli zeri di h' , e quindi di u' , sono nei punti $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}$. Questi sono quindi i punti di massimo di $u = u_{\alpha,0}$. Ovviamente il traslato $\lambda_n u = u_{\alpha,n}$ ha punti di massimo in $x = n + \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}$. Per α grande questi punti di massimo sono vicini a n .

All'esterno dell'intervallo delimitato dai due punti di massimo la funzione $u_{\alpha,n}$ è decrescente a destra e crescente a sinistra (è una funzione simmetrica pari rispetto all'asse $x = n$). Essa decresce all'infinito a velocità più che polinomiale. Perciò ora si può applicare lo stesso ragionamento dell'Esercizio 11.7.11, e concludere che la serie delle derivate dei termini di K_α converge ancora uniformemente sui compatti, e quindi, come già osservato, converge ovunque ad una funzione limitata. Questo dimostra che $p_{01}(K_\alpha)$ è finito. Come già visto, la moltiplicazione per polinomi non cambia quest'ultimo risultato, perché una Gaussiana moltiplicata per qualsiasi polinomio continua a tendere a zero all'infinito: perciò $p_{k1} < \infty$ per ogni k .

Dobbiamo svolgere lo stesso calcolo per tutte le derivate di ordine superiore, ma ci limitiamo a darne un'idea. Per induzione su l si vede che la derivata di ordine l di una Gaussiana è la stessa Gaussiana moltiplicata per un polinomio di grado l (questo ragionamento induttivo è lasciato al lettore). Una analisi simile a quella appena svolta, che omettiamo, porta a vedere che gli zeri delle derivate successive della Gaussiana $e^{-\pi\alpha^2(x-n)^2}$ si collocano in

prossimità di $x = n$ se α è grande, ed all'esterno dell'intervallo che contiene gli zeri la derivata è monotona. L'argomento sopra illustrato si riapplica quindi a tutte le derivate, e porta a concludere che $p_{kl} < \infty$ per ogni k, l . In realtà l'argomento è più delicato, perché non esistono formule per trovare gli zeri di polinomi di grado elevato, ma qui lo omettiamo. \square

Infine, completiamo questa esposizione mostrando un modo assai elegante di approssimare nel senso delle distribuzioni il treno di impulsi con funzioni di Schwartz.

Teorema 12.4.2. (Approssimazione del treno di impulsi con treni di Gaussiane smorzate - dimostrazione diretta.) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} K_\alpha = K$ nel senso delle distribuzioni.

Dimostrazione. Basta provare che $\langle K_\alpha, f \rangle \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} \langle K, f \rangle$ per ogni $f \in \mathcal{S}$ con $f \geq 0$. Infatti, ogni funzione f a valori complessi è la combinazione lineare delle sue parti reale ed immaginaria, e queste sono due funzioni reali ciascuna delle quali è la somma delle proprie parti positiva e negativa. Quindi f è combinazione lineare di quattro funzioni non negative: per linearità è sufficiente provare l'enunciato per queste funzioni. Quindi in questa dimostrazione assumiamo d'ora in poi che $f \geq 0$.

Sappiamo dall'Esempio 12.3.3 che $G_\alpha \rightarrow K$ in \mathcal{S}' se $\alpha \rightarrow \infty$, e d'altra parte il cut-off $e^{-\pi x^2/\alpha^2}$ tende a 1 per ogni x quando $\alpha \rightarrow \infty$. Indichiamo con χ la funzione caratteristica dell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (cioè la funzione che vale 1 in questo intervallo e 0 altrove). Useremo la moltiplicazione per χ per troncature le Gaussiane in modo da restringerle ad un intervallo finito (quando la si usa per questo scopo, χ si chiama talvolta una *funzione finestra*). Allora i termini della serie che definisce la distribuzione K_α all'ultimo membro nel Teorema 12.3.7 si possono scrivere come

$$\alpha \left\langle e^{-\pi x^2/\alpha^2} \lambda_n (\chi \Lambda_\alpha \varphi), f \right\rangle + \eta_{n,\alpha}$$

dove il resto $\eta_{n,\alpha}$ verifica le disuguaglianze del seguente enunciato.

Lemma 12.4.3. *Se $f \in \mathcal{S}$, $f \geq 0$, la funzione*

$$\eta_{n,\alpha} \equiv \alpha \left\langle e^{-\pi x^2/\alpha^2} \lambda_n ((1 - \chi) \Lambda_\alpha \varphi), f \right\rangle$$

verifica $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \eta_{n,\alpha} = 0$ uniformemente rispetto a n a velocità più che polinomiale: più precisamente, $\eta_{n,\alpha} < e^{-\pi \alpha^2/4} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus [n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}])}$.

Dimostrazione del Lemma. Si ha

$$\alpha \left\langle e^{-\pi x^2/\alpha^2} \lambda_n ((1 - \chi)\Lambda_\alpha \varphi), f \right\rangle \leq \alpha \|(1 - \chi)\Lambda_\alpha \varphi\|_1 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus [n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}])}. \quad (12.7)$$

D'altra parte,

$$\alpha \|(1 - \chi)\Lambda_\alpha \varphi\|_1 = 2\alpha \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \varphi(\alpha t) dt = 2 \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\infty} \varphi(t) dt.$$

Se $t > \frac{\alpha}{2}$, allora $\varphi(t) = e^{-\pi t^2} \leq \varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-\pi(t - \frac{\alpha}{2})^2}$, perché φ decresce più velocemente di $e^{-\pi t}$. D'altra parte, il calcolo diretto mostra che $\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\infty} e^{-\pi(t - \frac{\alpha}{2})^2} < 1$. Pertanto

$$\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\infty} \varphi(t) dt < \varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) = e^{-\pi\alpha^2/4}.$$

Quindi da (12.7) si ottiene

$$\eta_{n,\alpha} < e^{-\pi\alpha^2/4} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus [n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}])},$$

e la norma a secondo membro tende a zero per $n \rightarrow \infty$ a velocità più che polinomiale perché f è a decrescenza rapida. \square

Continuazione della dimostrazione del Teorema 12.4.2.

Dal Lemma 12.4.3 segue che, se scriviamo

$$k_\alpha = \langle K_\alpha, f \rangle$$

e

$$j_\alpha = \alpha \left\langle e^{-\pi x^2/\alpha^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n (\chi \Lambda_\alpha \varphi), f \right\rangle,$$

allora $|k_\alpha - j_\alpha| < \|f\|_1 e^{-\pi(\frac{\alpha}{2})^2}$. Quindi, per completare la dimostrazione, basta studiare l'andamento asintotico di j_α .

Grazie alla moltiplicazione per la *funzione finestra* $\chi = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ ed a causa della traslazione di passo n si ha

$$\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(n + \frac{1}{2})^2/\alpha^2} \alpha \lambda_n (\chi \Lambda_\alpha \varphi), f \right\rangle \leq j_\alpha \quad (12.8)$$

$$\leq \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(n - \frac{1}{2})^2/\alpha^2} \alpha \lambda_n (\chi \Lambda_\alpha \varphi), f \right\rangle. \quad (12.9)$$

Ora per completare la dimostrazione del Teorema basta provare la validità del seguente passaggio al limite:

Lemma 12.4.4. $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(n \pm \frac{1}{2})^2/\alpha^2} \alpha \lambda_n(\chi \Lambda_\alpha \varphi) = K.$

Dimostrazione. Osserviamo che, per ogni $\alpha > 0$, la successione $e^{-\pi(n \pm \frac{1}{2})^2/\alpha^2}$ è a somma finita, cioè appartiene a ℓ^1 (Definizione 1.7.1), e la somma tende ad infinito quando $\alpha \rightarrow \infty$. Per ogni n ,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-\pi(n \pm \frac{1}{2})^2/\alpha^2} = 1 \quad (12.10)$$

Il limite non è uniforme rispetto a n , ma per ogni n i valori sono monotoni crescenti al crescere di α .

D'altra parte, la funzione $\alpha \lambda_n(\chi \Lambda_\alpha \varphi)$ è un peso positivo, che nell'intervallo $[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ ha integrale $\alpha \|\chi \Lambda_\alpha \varphi\|_1$ tendente a 1 in maniera monotona crescente quando $\alpha \rightarrow \infty$. Consideriamo la funzione peso normalizzata

$$\psi = \frac{\chi \Lambda_\alpha \varphi}{\|\chi \Lambda_\alpha \varphi\|_1}.$$

Dal Teorema della Media Integrale (Sezione 1.1) applicata alla media pesata $\langle \psi, f \rangle$ e dal Teorema dei Valori Intermedi (Sezione 1.1) applicato alla funzione (continua!) $f \in \mathcal{S}$ segue che esistono punti $\xi_{n,\alpha} \in \mathbb{R}$ tali che la media pesata $\langle \psi, f \rangle$ coincide col valore assunto da f in $\xi_{n,\alpha}$. Pertanto

$$\langle \alpha \lambda_n(\chi \Lambda_\alpha \varphi), f \rangle = \|\chi \Lambda_\alpha \varphi\|_1 f(\xi_{n,\alpha}). \quad (12.11)$$

Si noti che, come osservato nell'Esempio 12.3.3, $\xi_{n,\alpha}$ appartiene all'intervallo $[n - \frac{1}{2\alpha}, n + \frac{1}{2\alpha}]$, e quindi

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \xi_{n,\alpha} = n. \quad (12.12)$$

Ora finalmente possiamo calcolare il limite del primo e dell'ultimo membro della disuguaglianza (12.8) per $\alpha \rightarrow \infty$. Osserviamo che in questi membri si calcola la somma di serie i cui addendi sono due successioni entrambe maggiorate dalla successione $\alpha \langle \lambda_n(\chi \Lambda_\alpha \varphi), f \rangle$, e questa successione appartiene a ℓ^1 . Infatti si ha

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \lambda_n(\chi \Lambda_\alpha \varphi), f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \Lambda_\alpha \varphi, \lambda_{-n}(\chi f) \rangle \quad (12.13)$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R} \setminus [n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}])} < \infty \quad (12.14)$$

perché f è a decrescenza rapida.

D'altra parte, in conseguenza di (12.10), (12.11) e (12.12), il limite puntuale per $\alpha \rightarrow +\infty$ di $\left\langle e^{-\pi(n \pm \frac{1}{2})^2/\alpha^2} \alpha \lambda_n (\chi \Lambda_\alpha \varphi), f \right\rangle$ vale $f(n)$. Quindi rimane solo da provare che si può passare al limite per $\alpha \rightarrow +\infty$ sotto il segno di serie. Grazie alla dominazione ℓ^1 provata in (12.13), questo è lecito per il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue (Teorema 1.9.54), che si applica non solo ad integrali rispetto alla misura di Lebesgue, ma ad integrali rispetto a misure di Borel qualsiasi, in particolare alla misura discreta sugli interi (in tal caso le funzioni sono successioni e gli integrali diventano serie). Per maggiori dettagli sulla teoria della misura si veda [22]. \square

Abbiamo provato che $K_\alpha \rightarrow K$ in \mathcal{S}' per $\alpha \rightarrow \infty$ (Teorema 12.3.7). Dalla continuità della trasformata di Fourier in \mathcal{S}' (Proposizione 11.12.4) segue che $\widehat{K}_\alpha \rightarrow \widehat{K}$ in \mathcal{S}' . Nel resto di questa Appendice calcoliamo \widehat{K}_α e mostriamo che converge a \widehat{K} in \mathcal{S}' : questo dà una nuova dimostrazione dell'identità (12.1), $\widehat{K} = K$, apparentemente indipendente ma di fatto equivalente alla Formula di Somma di Poisson (Proposizione 10.3.1), la cui dimostrazione viene in effetti in parte ricalcata in quelle dei prossimi enunciati.

Nota 12.4.5. Come nell'Esempio 11.7.9 ed in tutta la Sezione 12.3, scriviamo

$$G_\alpha(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\pi\alpha^2(x-n)^2}.$$

La serie è uniformemente convergente, e di conseguenza $G_\alpha(x)$ è una funzione continua. Inoltre, come osservato nell'Esempio 12.4.2, derivando termine a termine questa serie un numero arbitrario di volte si ottiene ancora una serie uniformemente convergente, e quindi $G_\alpha(x)$ è una funzione C^∞ (Teorema 1.3.19 sulla derivazione di successioni di funzioni uniformemente convergenti con le derivate). Ovviamente, $G_\alpha(x)$ è periodica di periodo 1 e pari. \square

Corollario 12.4.6. *Per ogni intero m , il coefficiente di Fourier m -simo della funzione periodica G_α è*

$$\widehat{G}_\alpha(m) = e^{-\pi m^2/\alpha^2}.$$

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 10.2.3, $\widehat{G}_\alpha(m)$ è la trasformata di Fourier a $\omega = m$ della funzione $\phi_\alpha = \alpha e^{-\pi\alpha^2 x^2}$. Rammentiamo che ϕ denota la Gaussiana, $\phi(x) = e^{-\pi x^2}$ (Sezione 8.3). Per la proprietà di dilatazione della trasformata di Fourier, Teorema 8.2.4 (iv), si ha $\widehat{\phi}_\alpha(m) = \widehat{\phi}\left(\frac{m}{\alpha}\right) = e^{-\pi m^2/\alpha^2}$. \square

Corollario 12.4.7.

$$G_\alpha(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi m^2/\alpha^2} e^{2\pi i m x}. \quad (12.15)$$

La serie converge uniformemente con tutte le sue derivate.

Dimostrazione. In base al Corollario 12.4.6, la serie nell'enunciato è la serie di Fourier di G_α , la quale converge uniformemente a G_α per il Corollario 5.12.4 del Teorema di Dirichlet, e per lo stesso motivo convergono uniformemente tutte le serie delle derivate. \square

Pertanto ora abbiamo

$$K_\alpha(x) \equiv e^{-\pi x^2/\alpha^2} G_\alpha(x) = e^{-\pi x^2/\alpha^2} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi m^2/\alpha^2} e^{2\pi i m x}.$$

Proposizione 12.4.8.

$$\widehat{K}_\alpha(\omega) = \alpha \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi m^2/\alpha^2} e^{-\pi \alpha^2(\omega-m)^2}$$

Dimostrazione. Poniamo $\psi_{\alpha,m}(x) \equiv \phi(\frac{x}{\alpha})\phi(\frac{m}{\alpha})e^{2\pi i m x} = e^{-\pi x^2/\alpha^2} e^{-\pi m^2/\alpha^2} e^{2\pi i m x}$. Con questa notazione abbiamo $K_\alpha(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \psi_{\alpha,m}(x)$, e quindi, scambiando la serie uniformemente convergente con l'integrale di Fourier,

$$\widehat{K}_\alpha(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}_{\alpha,m}(\omega). \quad (12.16)$$

D'altra parte,

$$\psi_{\alpha,m}(x) = \psi_{\alpha,0}(x) \phi\left(\frac{m}{\alpha}\right) e^{2\pi i m x} = \Lambda_\alpha \phi(x) \phi\left(\frac{m}{\alpha}\right) e^{2\pi i m x},$$

dove, come al solito, indichiamo con ϕ la Gaussiana. In base alle proprietà di traslazione e di dilatazione della trasformata di Fourier, Teorema 8.2.4 (v) e 8.2.4 (iv),

$$\widehat{\psi}_{\alpha,m}(\omega) = \phi\left(\frac{m}{\alpha}\right) \widehat{\Lambda}_\alpha \phi(\omega - m) = \alpha \widehat{\phi}(\alpha(\omega - m)) \phi\left(\frac{m}{\alpha}\right). \quad (12.17)$$

Allora dalla Proposizione 8.3.2 segue

$$\widehat{\psi}_{\alpha,m}(\omega) = \alpha \phi\left(\frac{m}{\alpha}\right) e^{-\pi \alpha^2(\omega-m)^2} = \alpha e^{-\pi m^2/\alpha^2} e^{-\pi \alpha^2(\omega-m)^2}. \quad (12.18)$$

L'enunciato si ottiene sostituendo (12.18) in (12.16). \square

12.5 Appendice. Progressioni equispaziate sul cerchio unitario

Vogliamo presentare un lemma di natura geometrica sulle radici dell'unità nel piano complesso, che porta alla disuguaglianza

$$\left| \sum_{n=-N}^N e^{-2\pi i n \omega} \right| \leq \frac{1}{|\sin \pi \omega|},$$

enunciata in Sezione 12.2.

Per $\omega \in \mathbb{R}$ consideriamo il numero complesso di modulo uno $w = e^{-2\pi i \omega}$. La successione w^n si distribuisce in maniera equispaziata sul cerchio di raggio 1 nel piano complesso. Cosa possiamo dire delle somme $\sum_{n=0}^N w^n$? Se $\omega = \frac{1}{m}$ per qualche intero m , allora $w^m = 1$, e la somma $\sum_{n=0}^N w^n$ vale 0 per simmetria (è la somma delle radici dell'unità di grado m). Per $n > m$ la

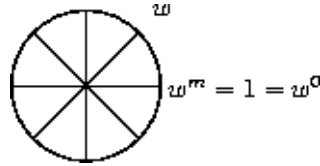


Figura 12.1: Radici dell'unità

successione w^m si ripete per periodicità e quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{mk} w^n = 0.$$

Osserviamo anche che, al variare di n , $|w^n|$ è limitato, perché la successione periodica (di periodo m) w^m assume solo un numero finito di valori (in effetti, il valore massimo di $|w^n|$ si ha dopo un semiperiodo, cioè per $n = \frac{m}{2}$, se m è pari, e altrimenti in prossimità di questo semiperiodo, cioè per $n = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ e $n = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$: si veda la figura 12.2

È chiaro che il massimo modulo delle somme parziali

$$\sum_{n=0}^k w^n$$

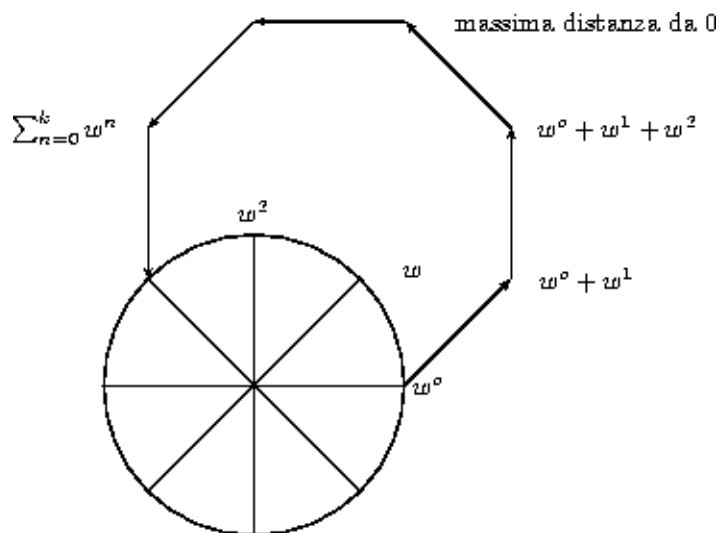


Figura 12.2: Somme parziali della successione delle radici dell'unità

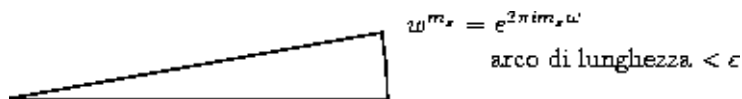


Figura 12.3: Sottosuccessioni di una progressione sul cerchio unitario che si avvicinano ad 1

è tanto più grande quanto più piccolo è l'angolo w (modulo 2π).

Se ora si prende $w = \frac{k}{m} \in \mathbb{Q}$, di nuovo w^n è periodica, perché $w^m = e^{2\pi i \omega m} = e^{2\pi i k} = 1$ anche se in questo caso w^n gira k volte intorno a 0 prima di assumere di nuovo il valore 1. Ma a parte l'ordine con cui i punti w^n si equidistribuiscono sul cerchio, le conclusioni rimangono le stesse di prima. Consideriamo il caso non periodico, cioè quello in cui $\omega \notin \mathbb{Q}$. In questo caso $w^n \neq 1$, per ogni $n \neq 0$, e la successione w^n si addensa sul cerchio in maniera via via più equidistribuita. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero m_ε tale che $|m_\varepsilon \omega| < \varepsilon \pmod{2\pi}$, e quindi

$$|w^{m_\varepsilon} - 1| = (\cos m_\varepsilon \omega - 1)^2 + \sin^2 m_\varepsilon \omega < 1$$

(si veda la figura 12.3).

La successione w^n contiene tutti i punti che sono di angolo multiplo di $m_\varepsilon\omega$ mod 2π , e si addensa quindi sul cerchio. Anche in questo caso si intuisce che le somme parziali

$$\sum_{n=0}^N w^n = 0$$

devono essere limitate, da una costante che diventa più grande quando w mod 2π è piccolo. Però questa intuizione deve essere dimostrata. È più facile dimostrarla in maniera analitica, facendo uso della formula di somma geometrica (Sezione 1.1) : se $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 1$,

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}. \quad (12.19)$$

Lemma 12.5.1. *Sia $w = e^{2\pi i\omega}$. Se ω non è intero, per ogni N intero si ha*

$$\sum_{n=0}^N w^n = e^{i\pi N\omega} \frac{\sin(N+1)\pi\omega}{\sin \pi\omega} = e^{i\pi N\omega} \operatorname{sinc}((N+1)\omega)$$

e quindi

$$\left| \sum_{n=0}^N w^n \right| \leq \frac{1}{|\sin \pi\omega|}.$$

Invece, se ω è intero, si ha

$$\sum_{n=0}^N w^n = N + 1.$$

Dimostrazione. Da (12.19) segue

$$\sum_{n=0}^N w^n = \frac{1 - e^{2\pi i(N+1)\omega}}{1 - e^{2\pi i\omega}}.$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore pre $e^{-\pi i\omega}$ ed il secondo membro diventa

$$e^{-\pi i\omega} \frac{1 - e^{2\pi i(N+1)\omega}}{e^{-\pi i\omega} - e^{\pi i\omega}} = -\frac{1}{2i} e^{-\pi i\omega} \frac{1 - e^{2\pi i(N+1)\omega}}{\sin \pi\omega}.$$

Ora moltiplichiamo e dividiamo per $e^{-\pi i(N+1)\omega}$, per ottenere

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N w^n &= -\frac{1}{2i} e^{-\pi i\omega} e^{\pi i(N+1)\omega} \frac{e^{-\pi i(N+1)\omega} - e^{\pi i(N+1)\omega}}{\sin \pi\omega} \\ &= e^{\pi iN\omega} \frac{\sin \pi(N+1)\omega}{\sin \pi\omega} = e^{i\pi N\omega} \operatorname{sinc}((N+1)\omega). \end{aligned}$$

L'ultima asserzione dell'enunciato è ovvia. \square

Nota 12.5.2. Prendendo la parte reale di entrambi i lati dell'identità del Lemma 12.5.1 otteniamo l'espressione esplicita della somma di Dirichlet

$$\sum_{n=0}^N \cos(2\pi n\omega)$$

calcolata in Sezione 5.8. In effetti, la dimostrazione del Lemma 12.5.1 è pressoché la stessa del calcolo svolto per la somma di Dirichlet nella Proposizione 5.8.2 (ed infatti il risultato si sarebbe potuto dedurre da quel calcolo: i dettagli sono lasciati per esercizio). \square

Capitolo 13

Ricostruzione dei segnali dai loro valori campionati ed aliasing

13.1 Il teorema del campionamento alla luce della teoria delle distribuzioni

Abbiamo visto che è possibile ricostruire esattamente una funzione a banda limitata a partire dai suoi campioni su una griglia di campionamento sufficientemente fitta. Più precisamente vale il Teorema del Campionamento, che abbiamo dimostrato nel Corollario 10.4.6 e richiamiamo qui:

Teorema 2. (*Teorema del Campionamento*) Se $\hat{f}(\omega) = 0$ per ogni ω tale che $|\omega| > \omega_c > 0$, allora, scegliendo $\tau \leq \frac{1}{2\omega_c}$, vale l'identità, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{\tau} - k\right).$$

Ora riscriviamo la dimostrazione di questo teorema visualizzandola alla luce della teoria delle distribuzioni. Il vantaggio di questa nuova dimostrazione è che mostra quale tipo di distorsione si ottiene ricostruendo un segnale a partire dai suoi campioni su una griglia non sufficientemente fitta rispetto alla banda di frequenza del segnale: questa distorsione, che si chiama *aliasing*, viene illustrata in Sezione 13.5 più sotto. In questo Capitolo analizziamo la

natura qualitativa di tale errore, visualizzando i segnali in maniera geometrica, tramite istogrammi (ossia come distribuzioni discrete): nel successivo Capitolo 16 dedurremo stime quantitative.

In realtà quella che stiamo per dare non è veramente una nuova dimostrazione, bensì una visualizzazione geometrica della precedente: il lettore è calorosamente invitato a verificare il fatto che l'idea racchiusa nella visualizzazione geometrica segue passo passo l'argomento del Teorema dello sviluppo in serie di Whittaker, Teorema 10.4.4.

Dimostrazione (nuova dimostrazione del Teorema del Campionamento, sotto l'ipotesi che $f \in \mathcal{S} \cap B_{\omega_c}$).

Campioniamo f su una griglia di passo τ . Faremo corrispondere a questo campionamento la distribuzione ottenuta moltiplicando per f un treno di impulsi K_τ di passo τ . A questo scopo, rammentiamo la notazione stabilita nel Corollario 12.1.2:

Notazione 13.1.1. $K_\tau = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n\tau} = \frac{1}{\tau} \Lambda_{\frac{1}{\tau}} K$.

Esercizio 13.1.2. Ricaviamo la formula della precedente Notazione operando dilatazioni sulle funzioni che approssimano la distribuzione treno di impulsi.

Svolgimento. Esplicitamente, scriviamo

$$K = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n$$

ed invece di introdurre un approssimante di K fabbricato traslando una identità approssimata, operiamo formalmente come se la delta (e quindi K) fosse una funzione, utilizzando per δ_0 la notazione impropria introdotta a pagina 868. Pertanto riscriviamo

$$K(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t - n).$$

Allora la distribuzione associata alla “funzione” $\Lambda_{\frac{1}{\tau}} K$ è

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\frac{1}{\tau}} K(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n \left(\frac{t}{\tau} \right) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_0 \left(\frac{t}{\tau} - n \right) \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_0 \left(\frac{t - n\tau}{\tau} \right) = \tau \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{n\tau}(t) = \tau K_{\tau}(t) \quad (13.1)
\end{aligned}$$

(la distribuzione δ_0 ha per supporto il valore 0 della sua variabile, e quindi $\delta_0 \left(\frac{t-n\tau}{\tau} \right)$ ha per supporto l'istante t per cui $\frac{t-n\tau}{\tau} = 0$, cioè $t = n\tau$): ma in questo modo abbiamo dilatato la “funzione” che rappresenta la distribuzione, ed osserviamo che, vista come peso integrale, la “funzione” $t \mapsto \delta_n(t/\tau)$ ha massa τ (a causa della contrazione di passo τ del suo grafico, e quindi della sua norma come misura), pertanto $\delta_n(t/\tau) = \tau \delta_{n\tau}(t)$ ed il risultato è

$$K_{\frac{1}{\tau}} := \Lambda_{\frac{1}{\tau}} K = \tau \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{n\tau},$$

esattamente come calcolato rigorosamente nell'Esempio 11.13.8. \square

Utilizziamo il Corollario 12.1.2

$$\widehat{\Lambda_{\frac{1}{\tau}} K} = \tau \Lambda_{\tau} \widehat{K}$$

(ossia $\widehat{K_{\frac{1}{\tau}}} = \tau K_{\tau}$), e l'Esercizio 11.9.5

$$f \delta_{n\tau} = f(n\tau) \delta_{n\tau} \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Consideriamo una funzione $f \in \mathcal{S} \cap B_{\omega_c}$ e la sua trasformata di Fourier \widehat{f} . Nel tracciare i grafici di questo capitolo assumiamo che f sia a valori reali: se f è a valori complessi, si devono tracciare i grafici separatamente per le parti reale ed immaginaria di f . Assumiamo quindi f a valori reali. In tal caso $\text{Re } \widehat{f}$ è una funzione pari, e $\text{Im } \widehat{f}$ è dispari (parte (iii) del Corollario 8.2.6). I grafici in Figura 13.1 rappresentano una tale funzione $f \in B_{\omega_c}$ e la parte reale della sua trasformata di Fourier:

Ora,

$$f K_{\tau} = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n\tau) \delta_{n\tau}$$

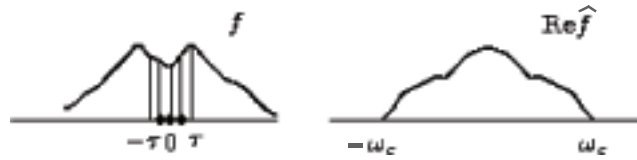


Figura 13.1: Segnale a valori reali e parte reale delle sua trasformata di Fourier

perché $f\delta_{n\tau}(t) = f(n\tau)\delta_{n\tau}(t)$. Quindi la distribuzione fK_τ corrisponde alla successione dei valori campionati di passo τ : se disegniamo convenzionalmente le distribuzioni $\delta_{n\tau}$ come segmenti verticali di altezza 1 a partire dal punto di ascissa $n\tau$, il grafico della distribuzione $fK_{\frac{1}{\tau}}$ consiste dei segmenti verticali sulla griglia di campionamento alti fino a toccare il grafico di f (Figura 13.2).

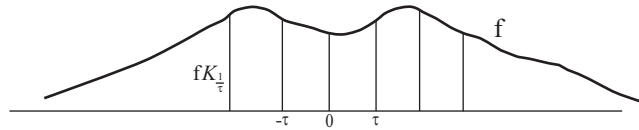


Figura 13.2: Campionamento: $fK_{\frac{1}{\tau}}$

Notazione 13.1.3. Chiamiamo questo “grafico” l’*istogramma* della distribuzione discreta fK_τ .

(Si noti che, ovviamente, l’istogramma di K ha altezza costantemente 1, e quindi l’istogramma del dilatato K_τ ha altezza 1; pertanto quello della sua trasformata di Fourier $\frac{1}{\tau}K_{\frac{1}{\tau}}$ ha altezza $\frac{1}{\tau}$).

Qual’è la trasformata di Fourier di questa distribuzione dei valori campionati? Sappiamo che

$$\widehat{K}_\tau = \frac{1}{\tau}K_{\frac{1}{\tau}}$$

per il Corollario 12.1.2. Ora, se di nuovo rappresentiamo le delta con segmenti verticali sul grafico, otteniamo la Figura 13.3.

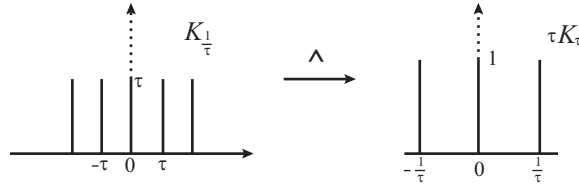


Figura 13.3: $\widehat{K}_\tau = \frac{1}{\tau} K_{\frac{1}{\tau}}$

Abbiamo illustrato la trasformata di Fourier di K_τ (e quindi di $K_{1/\tau}$). Da qui ricaviamo la trasformata di Fourier della distribuzione dei valori campionati:

Lemma 13.1.4.

$$\widehat{fK_\tau} = \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{\frac{n}{\tau}} \widehat{f}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \widehat{fK_\tau} &= \widehat{f} * \widehat{K_\tau} = \widehat{f} * \frac{1}{\tau} K_{\frac{1}{\tau}} \\ &= \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f} * \delta_{\frac{n}{\tau}} = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{\frac{n}{\tau}} \widehat{f} \end{aligned}$$

La prima uguaglianza segue dal Corollario 11.14.3 (ii); la seconda dall'ultima identità del Corollario 12.1.2 (applicata scambiando τ con $\frac{1}{\tau}$); la terza dalla identità (13.1) per K_τ (di nuovo applicata scambiando τ con $\frac{1}{\tau}$); la quarta uguaglianza, infine, è l'espressione dell'operatore di traslazione su \mathcal{S} in termini di convoluzione con la delta (Nota 11.15.4). \square

In altri termini,

$$\widehat{fK_\tau}(\omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\omega - \frac{n}{\tau}\right).$$

Rammentiamo che f appartiene a B_{ω_c} , e quindi $\text{supp} \hat{f} \subset [-\omega_c, \omega_c]$. Pertanto

$$\text{supp} \hat{f} \left(\cdot - \frac{n}{\tau} \right) = \text{supp} (\lambda_{\frac{n}{\tau}} \hat{f}) \subset \left[-\omega_c + \frac{n}{\tau}, \omega_c + \frac{n}{\tau} \right].$$

Ora, se prendiamo $\tau = \frac{1}{2\omega_c}$, abbiamo

$$\frac{n}{\tau} = 2n\omega_c$$

e

$$\left[-\omega_c + \frac{n}{\tau}, \omega_c + \frac{n}{\tau} \right] = [(2n-1)\omega_c, (2n+1)\omega_c].$$

Al variare di n gli intervalli $[(2n-1)\omega_c, (2n+1)\omega_c]$ sono contigui ma non si sovrappongono: infatti, se $J_n := [(2n-1)\omega_c, (2n+1)\omega_c]$, il punto finale di J_n è $(2n+1)\omega_c$ ed il punto iniziale di J_{n+1} è lo stesso punto $(2(n+1)-1)\omega_c = (2n+1)\omega_c$.

Supponiamo ora $\tau < \frac{1}{2\omega_c}$. Poiché il supporto di \hat{f} è un intervallo di lunghezza $2\omega_c$, in questo caso i traslati di \hat{f} di passo $\frac{1}{\tau} > 2\omega_c$ hanno ancora supporti disgiunti.

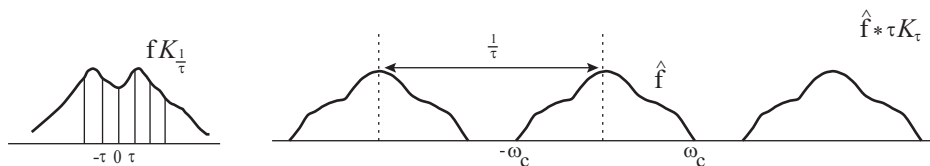


Figura 13.4: Campionamento adeguato, $\tau < \frac{1}{2\omega_c}$: le repliche di \hat{f} sono separate

Se invece $\tau > \frac{1}{2\omega_c}$, non è più così. Si vedano i grafici in Figura 13.5.

Per dimostrare il teorema del campionamento dobbiamo considerare, in virtù della sua ipotesi, solo il caso del campionamento adeguato: $\tau \leq \frac{1}{2\omega_c}$. In questo caso, la trasformata di Fourier della distribuzione $fK_{\frac{1}{\tau}}$ dei dati campionati è una distribuzione di repliche di \hat{f} traslate di $\frac{1}{\tau}$ e dilatate di un fattore τ . Queste repliche hanno supporti disgiunti. Moltiplichiamo questa trasformata di Fourier per la funzione caratteristica $\chi_{[-\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2\tau}]}$ dell'intervallo

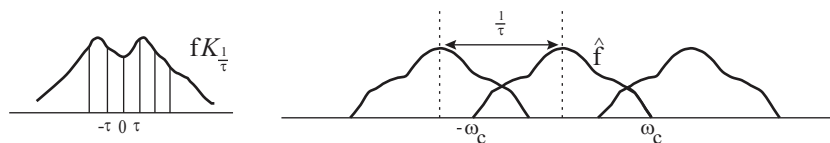


Figura 13.5: Campionamento inadeguato, $\tau > \frac{1}{2\omega_c}$: le repliche di \hat{f} si sovrappongono

centrato in 0 di lunghezza $\frac{1}{\tau}$, cioè della *finestra* $-\frac{1}{2\tau} \leq \omega \leq \frac{1}{2\tau}$, che è un filtro passa basso (o passa banda: si veda l'osservazione dopo la definizione del filtro in (10.13)) di frequenza di taglio $\frac{1}{2\tau}$: così, a parte una dilatazione di ampiezza τ , ritroviamo esattamente \hat{f} (Figura 13.6). Dopo aver applicato

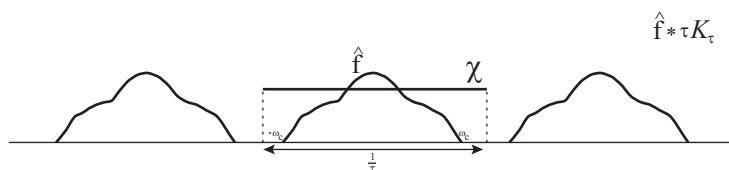


Figura 13.6: Campionamento adeguato: il filtraggio restituisce \hat{f}

il filtro applichiamo l'antitrasformata di Fourier. Questo significa calcolare l'antitrasformata di Fourier di \hat{f} , e quindi ricostruire esattamente il segnale originale f . Vediamo come si ottiene la ricostruzione. La moltiplicazione di $\hat{f}K_\tau$ con $\chi_{[-\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2\tau}]}$ effettuata nel dominio delle frequenze, equivale, come già visto prima (Corollario 11.14.3 (ii)), a convolvere la distribuzione dei valori campionati fK_τ con l'antitrasformata di Fourier di $\chi_{[-\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2\tau}]}$: che è $\text{sinc}(\tau x)$ (Esercizio 10.1.5). Ma questo è precisamente l'enunciato del teorema: la dimostrazione è completata. \square

Per illustrare graficamente l'ultima fase della dimostrazione, tracciamo i grafici nel caso limite $\tau = \frac{1}{2\omega_c}$ (Figura 13.7).

Osserviamo che la funzione $\text{sinc}(2\omega_c x)$ ottenuta antitrasformando il filtro passa basso (o passa banda) $\chi_{[-\omega_c, \omega_c]}$ è esattamente quel dilatato della sinc che vale 1 in 0 e 0 sugli altri punti della griglia di campionamento $\left\{ \frac{n}{2\omega_c} : n \in \mathbb{Z} \right\}$, come illustrato nella Nota 10.4.8.

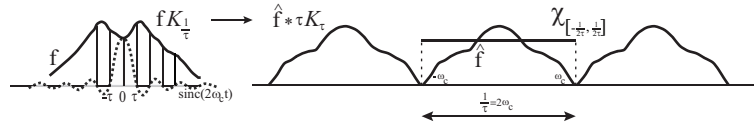


Figura 13.7: Ricostruzione al passo di campionamento corrispondente alla frequenza di taglio

Per uso futuro, enucleiamo in un corollario separato il fatto che l'enunciato del Lemma 13.1.4 è il reciproco della relazione fra discretezza di distribuzioni e periodicità delle loro trasformate di Fourier presentata nel Corollario 12.2.2.

Corollario 13.1.5. (Distribuzioni impulsive equispaziate hanno trasformata di Fourier periodica.) La trasformata di Fourier di una distribuzione impulsiva T equispaziata di passo τ è periodica di periodo $\frac{1}{\tau}$. Più precisamente, sia $\omega_c = \frac{1}{\tau}$, e sia $c_n \in \mathbb{C}$ una successione tale che, per qualche $f \in \mathcal{S} \cap B_{\omega_c}$, si abbia $c_n = f(n\tau)$. Allora la trasformata di Fourier della distribuzione impulsiva $T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{\frac{n}{\tau}}$ è periodica di periodo $\frac{1}{\tau}$, ed è esattamente la distribuzione data dalla funzione somma della serie trigonometrica di periodo $\frac{1}{\tau}$ con coefficienti di Fourier c_n : ossia, \widehat{T} è la distribuzione associata alla funzione periodica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n \omega}$, che già sappiamo essere convergente nel senso delle distribuzioni in base al Corollario 11.6.2.

Dimostrazione. Osserviamo che, a prima vista, la derivazione del Corollario a partire dal Lemma 13.1.4 non sembra ben posta. Per costruire la distribuzione impulsiva T occorre infatti scegliere una funzione f tale che $c_n = f(n\tau)$, e si ottiene che \widehat{T} è la periodicizzazione di passo $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ di \widehat{f} . Ma la scelta di f tale che $c_n = f(n\tau)$ non sembra unica, ed il risultato dipende da tale scelta! Invece, sotto la condizione $f \in \mathcal{S} \cap B_{\omega_c}$, la scelta è unica, per il Teorema del Campionamento che abbiamo appena ridimostrato, e quindi il risultato è ben posto. Notiamo anche che l'ultima asserzione del Corollario è ovvia: dal momento che $T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{\frac{n}{\tau}}$, in base all'Esercizio 11.13.2 (i) abbiamo

$$\widehat{T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \widehat{\delta_{\frac{n}{\tau}}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / \tau}.$$

□

Nota 13.1.6. (Sviluppi in serie di Fourier visti come caso particolare di trasformate di Fourier di distribuzioni.) In base al Corollario 12.2.2, la trasformata di Fourier di una funzione $f \in L^1_*$, considerata come distribuzione, è la distribuzione discreta equispaziata associata alla successione dei coefficienti di Fourier di f (ossia il cui istogramma è dato da questa successione). Viceversa, grazie al Corollario 13.1.5, la trasformata di Fourier di questa successione dei coefficienti di Fourier è la funzione periodica che li ha generati. In altre parole, questi Corollari immergono la teoria degli sviluppi in serie di Fourier nel quadro generale della trasformata di Fourier di distribuzioni e della sua inversione. \square

13.2 Ricostruzione numerica del segnale: modo ingenuo

La dimostrazione del teorema del campionamento illustrata nei disegni precedenti può portare ad un malinteso. L'idea si basa sulla visualizzazione del procedimento di campionamento tramite la moltiplicazione con il treno di impulsi $K_{\frac{1}{\tau}}$, dove $\tau = \frac{1}{2\omega_c}$ (adeguatamente piccolo), seguita dal filtraggio della trasformata di Fourier con un filtro passa basso (di banda $2\omega_c$, cioè di frequenza di taglio ω_c) e poi dalla antitrasformata di Fourier. Ma se davvero volessimo utilizzare numericamente questa strategia passo per passo, la complessità del calcolo ce lo impedirebbe. Infatti, per calcolare la antitrasformata di Fourier anche per un solo valore di t , dobbiamo calcolare (e cioè approssimare numericamente con precisione adeguata) un integrale da $-\infty$ a ∞ ! In ogni caso, il procedimento non è fattibile per una ragione teorica: normalmente noi conosciamo, grazie ai dati provenienti dagli strumenti di misura, i campioni del segnale, ma non il segnale stesso per tutti gli altri valori di t (è proprio quello che vogliamo conoscere). Quindi, anche se fossimo disposti ad aspettare un tempo smisurato per il calcolo di \hat{f} , in linea di principio non potremmo farlo con precisione, perché non conosciamo f , e quindi non sappiamo calcolare \hat{f} . In realtà questa ragione teorica si aggira nell'approssimazione numerica, perché, come già visto nella dimostrazione euristica della Formula di Inversione di Fourier (Teorema 8.1.1 e Corollario 8.1.3), la trasformata di Fourier \hat{f} si approssima numericamente a partire dai valori di f su una griglia equispaziata e possiamo usare proprio la griglia di campionamento dove conosciamo i valori di f (sono i dati campionati). Però,

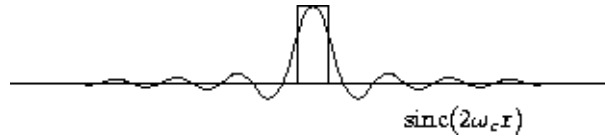


Figura 13.8: Approssimazione della sinc con una funzione semplice dello stesso passo

il fatto è che il passo di campionamento $\tau \leq \frac{1}{2\omega_c}$ per ricostruire esattamente il segnale è di solito assai più lungo di quanto invece non serva per una buona approssimazione numerica di \hat{f} .

Nota 13.2.1. (Adeguatezza dei dati del teorema di campionamento di \hat{f} .) Per capire la ragione dell'ultima asserzione, si pensi che, se il segnale f coincide con $\chi_{[-1,1]}^\vee(t) = \text{sinc}(2t)$, il campionamento sufficiente per la ricostruzione è a passi $\tau = \frac{1}{2\omega_c} = \frac{1}{2}$. Sulla griglia di campionamento $t = n\tau$, quindi, i valori della sinc sono i numeri 1 per $n = 0$ (ossia $t = 0$) e $\frac{\sin(2\pi n\tau)}{2\pi n\tau} = \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} = 0$ per $n \neq 0$, ossia la successione $\{\delta_0(n), n \in \mathbb{Z}\}$: certo questa successione sembrerebbe del tutto inadeguata per il calcolo tramite somme di Riemann dell'integrale di $f(t) = \text{sinc}(2t)$, cioè di $\hat{f}(0)$, perché l'approssimazione con la corrispondente funzione semplice, illustrata nel grafico in Figura 13.8, è visibilmente imprecisa. Eppure, ciò nonostante, questi valori campionati sono sufficienti a ricostruire il segnale tramite il procedimento svolto nel Teorema del Campionamento. In effetti, la somma di Riemann associata a questa successione $\{\delta_0(n)\}$ vale 1, ossia esattamente

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}^\vee(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \text{sinc}(2t) dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin 2\pi t}{2\pi t} dt$$

(l'ultimo integrale si calcola anche applicando il Lemma 5.19.3).

□

Perciò, anche se volessimo utilizzare i valori campionati per approssimare numericamente \hat{f} in maniera precisa, dovremmo scegliere un passo di campionamento così più fitto di quanto non sia necessario per il Teorema del Campionamento che il tempo di esecuzione aumenterebbe in maniera ancora più pesante.

Nota 13.2.2. Se vogliamo approssimare numericamente una trasformata di Fourier su N punti, dobbiamo usare N dati. Per ciascun punto la trasformata

di Fourier richiede allora N moltiplicazioni (e $N - 1$ somme) e quindi il solo calcolo di \hat{f} ha complessità N^2 . Poi, per antitrasformare, ci vogliono altre N^2 operazioni. Accorciare il passo di campionamento τ significa aumentare N (proporzionalmente a $\frac{1}{\tau}$) e quindi far crescere i tempi proporzionalmente a $\frac{1}{\tau^2}$, un ordine di crescita elevato. \square

13.3 Ricostruzione del segnale: modo corretto

Per fortuna, non è necessario approssimare numericamente ogni passaggio dell'idea che porta alla dimostrazione del Teorema di Campionamento. Non occorre calcolare \hat{f} e poi filtrare e antitrasformare: basta ricordare che, alla fine, tutto questo è equivalente a convolvere i dati campionati con i traslati di una opportuna funzione sinc (quella che si annulla su tutta la griglia di campionamento eccetto che per $t = 0$). Perciò basta prendere la successione $f(n\tau)$ dei dati campionati e calcolare numericamente, per ogni valore di t che ci interessa, la serie

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau) \operatorname{sinc}(2\omega_c t - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - n\tau}{\tau}\right). \quad (13.2)$$

Stiamo supponendo che f sia a valori reali (altrimenti applichiamo separatamente questo sviluppo alla parte reale ed alla parte immaginaria). Possiamo separare f nella differenza delle sue parti positiva e negativa, $f = u - v$, con u e $v \geq 0$, ed applicare (13.2) separatamente a u e v ; od equivalentemente, senza perdita di generalità, possiamo supporre che f sia non negativa. Invece la successione $\operatorname{sinc}\left(\frac{t-n\tau}{\tau}\right) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\tau} - n\right)$ è a segni alterni (tranne che vicino all'origine), perché la funzione sinc si annulla in $\{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ e cambia di segno da un intervallo $[n - 1, n]$ al successivo (tranne, appunto, per $n = 0$). Spezzando la serie doppia in (13.2) nelle serie semplici con indici positivi e negativi, troviamo quindi due serie a segni alterni. Per ciascuna di esse, per ogni $M > 0$, il resto M -simo di questa serie si maggiora con il primo termine non sommato, grazie al Teorema di Leibnitz sulle serie numeriche a segni alterni (Sezione 1.1), che è lecito applicare se facciamo l'ipotesi naturale che i dati campionati $f(n\tau)$ (e quindi anche i termini della serie al secondo membro di (13.2)) tendano a zero all'infinito in maniera monotona. Sotto tale

ipotesi si ottiene:

$$\left| f(t) - \sum_{n=-M}^M f(n\tau) \operatorname{sinc}(2\omega_c t - n) \right| \leq 2 \left| f(M\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - M\tau}{\tau}\right) \right|.$$

Ma $|\operatorname{sinc}(x)| \leq \frac{1}{\pi|x|}$ per $|x| > 1$. Perciò il resto M -simo tende a zero almeno come $\frac{1}{M}|f(M\tau)|$: la velocità di decrescenza aumenta con la regolarità di \widehat{f} , grazie al Corollario 8.2.8, ma comunque è almeno dell'ordine di $O(\frac{1}{M})$. Perciò la serie fornisce una buona approssimazione numerica del segnale originale anche se si sommano non molti dei suoi termini: ad esempio, per una precisione dell'ordine di 10^{-3} nel ricostruire un segnale di ampiezza non superiore a 1, occorre sommare al massimo 10^3 termini, e così via.

Ora vediamo come ricostruire in maniera rapida il segnale in un punto t generico ottimizzando la strategia di calcolo della somma della serie.

In realtà si tratta di eseguire una convoluzione di due successioni. Infatti

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - n\tau}{\tau}\right) = u * v_t$$

dove $u = \{f(n\tau)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è la successione dei valori campionati, e $v_t = \left\{\frac{t+n\tau}{\tau}\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è la successione del filtro sinc. Per quanto appena osservato, basta sommare solo i primi termini, e quindi il procedimento numerico è veloce. Si osservi che non è necessario calcolare $f(t)$ per $t = n\tau$, perché nei punti di campionamento il valore di f , $f(n\tau)$ ci viene già fornito come dato di partenza (ed in effetti il calcolo porterebbe ad un'identità), perché la sinc che usiamo vale 0 per $t = n\tau$, $n \neq 0$, e vale 1 per $t = 0$. Dobbiamo calcolare $f(t)$ per gli altri valori di t .

Una strategia numerica tipica è quella della bisezione, cioè dell'interpolazione al punto medio. Cominciamo a calcolare $f(t)$ per i punti medi della griglia di campionamento, cioè per $t_n = (n + \frac{1}{2})\tau$. Per questo basta tabulare una volta per tutte i valori di $\operatorname{sinc} t$ per $t = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ (osserviamo di nuovo che, per $t = n \neq 0$, si ha $\operatorname{sinc} t = 0$ e per $t = 0$ si ha $\operatorname{sinc} t = 1$). Allora il calcolo della convoluzione di cui sopra ci fornisce il valore ricostruito del segnale a tutti i punti di mezzo della griglia di campionamento. Ora, usando questi numeri come nuovi dati e ripetendo l'operazione a "frequenza doppia" cioè a passo di incremento temporale pari a metà, troviamo i valori ricostruiti ai multipli di $\frac{1}{4}$, e così via. Ovviamente in queste iterazioni

gli errori numerici si cumulano, ma questo è naturale, perché più iteriamo e più troviamo valori ricostruiti in nuovi punti, ma i valori iniziali non sono aumentati, sono rimasti sempre gli stessi, e quindi la precisione del risultato cala perché il numero di dati da cui si interpola diventa progressivamente più piccolo del numero dei risultati che si vogliono ottenere. Tabuliamo qui, per comodità del lettore, i primi 70 valori di $\text{sinc}(n + \frac{1}{2})$ (basta elencare i valori per $0 < n < 35$, perché sinc è una funzione pari). Poiché $\frac{1}{70} < 0.005$, essi sono sufficienti per ricostruire segnali di ampiezza non superiore ad uno a meno di due cifre decimali esatte.

$ x $	$\text{sinc } x$	$ x $	$\text{sinc } x$	$ x $	$\text{sinc } x$	$ x $	$\text{sinc } x$
0.5	0.6366	9.5	-0.3335	18.5	0.0172	27.5	-0.0116
1.5	-0.2122	10.5	0.0303	19.5	-0.0163	28.5	0.0112
2.5	0.1273	11.5	-0.0277	20.5	0.0155	29.5	-0.0108
3.5	-0.0909	12.5	0.0255	21.5	-0.0148	30.5	0.0104
4.5	0.0707	13.5	-0.0236	22.5	0.0141	31.5	-0.0101
5.5	-0.0579	14.5	0.0220	23.5	-0.0135	32.5	0.0098
6.5	0.0490	15.5	-0.0205	24.5	0.0130	33.5	-0.0095
7.5	-0.0424	16.5	0.0193	25.5	-0.0125	34.5	0.0092
8.5	0.0374	17.5	-0.0182	26.5	0.0120	35.5	-0.0090

Tabella 13.1: Tabella dei valori della sinc ai punti semi-interi, per la ricostruzione interpolata ai punti medi della griglia di campionamento

13.4 Il teorema del campionamento per funzioni localmente integrabili a crescita limitata, o per distribuzioni

Supponiamo che il segnale f sia una funzione localmente integrabile a crescita polinomiale. Allora $f \in \mathcal{S}'$ e quindi ha senso la sua trasformata di Fourier $\hat{f} \in \mathcal{S}'$. Per dare alla nozione di campionamento della funzione f il significato fisico di media dei valori del segnale presentato in Sezione 11.1, possiamo assumere inoltre che f sia continua. In ogni caso, questa ipotesi vale automaticamente come conseguenza dell'ultima ipotesi necessaria, e cioè che f sia a banda limitata: $\text{supp } \hat{f} \subset [-\omega_c, \omega_c]$. Quest'ultima ipotesi, nel senso delle

distribuzioni, equivale a $\langle \widehat{f}, g \rangle = 0$ per ogni $g \in \mathcal{S}$ con $\text{supp } g \subset O$ dove O è un aperto disgiunto da $[-\omega_c, \omega_c]$. Come visto nel Corollario 10.4.2, da questo segue che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. In particolare, \widehat{f} è continua a supporto compatto, e quindi in $L^1(\mathbb{R})$, il che fa sì che la sua periodizzazione converga in L^1 (Lemma 10.2.2) e quindi puntualmente quasi ovunque, e ci permette di ripetere la dimostrazione del teorema del campionamento. Anzi di più: possiamo anche assumere che \widehat{f} sia non una funzione L^1 bensì una distribuzione approssimabile con funzioni L^1 a supporto compatto (contenuto in $[-\omega_c, \omega_c]$) che siano la trasformata di Fourier di funzioni f localmente integrabili a crescita polinomiale. Infatti se è così il procedimento di ricostruzione a partire da tali approssimanti ci restituisce queste f , e quindi il teorema si applica nel senso della approssimazione in \mathcal{S}' . Più in particolare, se il segnale è la somma di una funzione $f \in B_{\frac{1}{2}}$ più un *ronzio*, ossia un esponenziale $\eta_{\omega_0}(t) := e^{-2\pi i \omega_0 t}$, la trasformata di Fourier di questo segnale è la distribuzione $\widehat{f} + \delta_{\omega_0}$. Ora, se la delta viene approssimata (nel dominio della frequenza, nel senso delle distribuzioni) con approssimanti di Schwartz h_α , ossia con le distribuzioni $F_\alpha(g) = h_\alpha * f$, allora η_α viene approssimato, nel dominio del tempo, con i cutoff $h_\alpha^\vee \eta_\alpha$, e h_α^\vee tende a 1 uniformemente sui compatti. Riassumendo, la trasformata di Fourier del segnale f viene approssimata da $\widehat{f} + h_\alpha$, e quindi il segnale viene approssimato uniformemente sui compatti, e quindi puntualmente (nel dominio del tempo), dalle antitrasformate degli approssimanti, $f + h_\alpha^\vee \eta_\alpha$.

Si noti invece che non potremmo aggiungere a f una delta di Dirac, perché se lo facessimo non avrebbe più senso campionare il segnale: l'istogramma $fK := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \delta_n$ (Notazione 13.1.3) ha senso solo quando f è una funzione. Ma naturalmente, l'ipotesi $f \in B_{\omega_c}$ implica che f sia in $C^\infty(\mathbb{R})$, e quindi, vista come distribuzione, non contenga delta (o più in generale distribuzioni a supporto in un insieme finito).

Problema: Per tutti questi segnali f vale ancora il Teorema del Campionamento?

Ecco la risposta. Se il passo di campionamento τ è minore del passo critico $\tau_c = \frac{1}{2\omega_c}$, allora il Teorema vale: la dimostrazione si ripete parola per parola.

Però, se $\tau = \tau_c = \frac{1}{2\omega_c}$ allora c'è una difficoltà. Poiché \widehat{f} è una distribuzione, \widehat{f} potrebbe contenere, come componente, una distribuzione impulsiva al punto ω_c : cioè, ad esempio, \widehat{f} potrebbe spezzarsi come la somma $\widehat{f} = q + \gamma \delta_{\omega_c}$, dove $\gamma \in \mathbb{C}$ e q è una funzione localmente integrabile a crescita polinomiale con

supporto in $(-\omega_c, \omega_c)$. Qual è la conseguenza di queste componenti?

Questo dipende dalla parità di \widehat{f} . Scriviamo $f = u + iv$ con $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ nel senso della Definizione 9.13 del Capitolo 2. Allora sappiamo che \widehat{u} è pari e \widehat{v} è dispari (Corollario 8.2.6 (iii)).

Perciò, se poniamo $h = \operatorname{Re} q$, $g = \operatorname{Im} q$, $\alpha = \operatorname{Re} \gamma$, $\beta = \operatorname{Im} \gamma$, nel nostro esempio si ha

$$\begin{aligned}\widehat{u} &= h + \alpha\delta_{\omega_c} + \alpha\delta_{-\omega_c} && \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \quad h, \text{ pari, } \operatorname{supp} h \subset (-\omega_c, \omega_c) \\ \widehat{v} &= g + \beta\delta_{\omega_c} - \beta\delta_{-\omega_c} && \text{con } \beta \in \mathbb{R} \quad g, \text{ dispari, } \operatorname{supp} g \subset (-\omega_c, \omega_c)\end{aligned}$$

Qui pensiamo a h e g come funzioni, ma l'argomento vale, in generale, per distribuzioni. Ora filtriamo \widehat{u}, \widehat{v} con il filtro passa-basso $\chi_{[-\omega_c, \omega_c]}$. Il problema a questo punto è: come scegliamo il valore di $\chi_{[-\omega_c, \omega_c]}$ per $\omega = \pm\omega_c$? In accordo con la teoria di Fourier per funzioni periodiche sarebbe naturale scegliere questo valore così:

$$\chi_{[-\omega_c, \omega_c]} = \frac{1}{2}$$

perché lo sviluppo in serie di Fourier (che noi implicitamente utilizziamo per calcolare la trasformata inversa della funzione periodica $\widehat{(uK_{\frac{1}{\tau}})}$) converge al valore $\frac{1}{2}$ ai punti di salto. In ogni caso siamo liberi di fare questa scelta, perché alla fine questo filtraggio serve solo come passo preliminare prima di effettuare la trasformata inversa di Fourier, dove il valore nei singoli punti $\pm\omega_c$ non influenza il risultato dell'integrale di Fourier. Allora facciamo questa scelta. Pertanto scriviamo di nuovo $\tau_c = \frac{1}{2\omega_c}$ e studiamo separatamente la parte reale e la parte immaginaria del segnale.

Parte reale del segnale.

In questo caso si ha

$$\chi_{[-\omega_c, \omega_c]} \widehat{(uK_{\frac{1}{\tau}})} = \begin{cases} \frac{\alpha}{2}\delta_{\omega_c} + \frac{\alpha}{2}\delta_{-\omega_c} = \alpha\delta_{\omega_c} & \text{se } \omega = \omega_c \\ h & \text{se } -\omega_c < \omega < \omega_c \\ \frac{\alpha}{2}\delta_{-\omega_c} + \frac{\alpha}{2}\delta_{-\omega_c} = \alpha\delta_{-\omega_c} & \text{se } \omega = -\omega_c \end{cases} \quad (13.3)$$

perché ai punti $\pm\omega_c$ il valore di $\widehat{(uK_{\frac{1}{\tau}})} = (uK_{2\omega_c})^\vee$ è la somma di due contributi non nulli, uno proveniente da \widehat{u} (pari a $\alpha\delta_{\omega_c}$) e l'altro proveniente dalla sua replica $\widehat{u}(\cdot \mp \frac{1}{\tau}) = \widehat{u}(\cdot \mp 2\omega_c)$ (pari a $\alpha\delta_{-\omega_c}(\omega - 2\omega_c) = \alpha\delta_{\omega_c}$). Questi due

valori vengono divisi per due dal filtro $\chi_{[-\omega_c, \omega_c]}$, che nel punto ω_c vale $\frac{1}{2}$ e poi sommati. Il risultato è che al punto ω_c la funzione

$$\chi_{[-\omega_c, \omega_c]} \widehat{uK}_{2\omega_c}$$

ha una componente impulsiva pari a $\alpha\delta_{\omega_c}$. Lo stesso accade, per parità, al punto $\omega = -\omega_c$. Pertanto, come si vede da (13.3)

$$\chi_{[-\omega_c, \omega_c]} \widehat{uK}_{2\omega_c} = \begin{cases} \widehat{u}h + \alpha\delta_{\omega_c} + \alpha\delta_{-\omega_c} & \text{se } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{se } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

e le componenti impulsive ai punti critici $\pm\omega$ non si perdono e vengono ricostruite correttamente: esse vengono dimezzate dal filtro ma si raddoppiano sommandosi.

Nota 13.4.1. Queste componenti impulsive corrispondono ad una componente del segnale che non tende a zero per $t \rightarrow \pm\infty$, pari a $\alpha(\delta_{\omega_c} + \delta_{-\omega_c})^\vee = \alpha \cos(2\pi\omega_c t)$. Si tratta di una componente monocromatica costante, cioè un ronzio. Di solito non si vogliono ricostuire i ronzii! Ma il teorema del campionamento tratta questo ronzio come una componente del segnale, e la ricostruisce. \square

Illustriamo questa parte dell'argomento con un grafico (Figura 13.9).

Parte immaginaria del segnale.

Qui le cose vanno diversamente, perché la trasformata di Fourier della parte immaginaria di f è una distribuzione dispari (Corollario 9.14 (ii)). Perciò le componenti impulsive alle frequenza $\pm\omega_c$ non si sommano, ma si sottraggono, cancellandosi a vicenda: $\widehat{v}(\omega) = h(\omega) + \beta\delta_{\omega_c}(\omega) - \beta\delta_{-\omega_c}(\omega)$, e

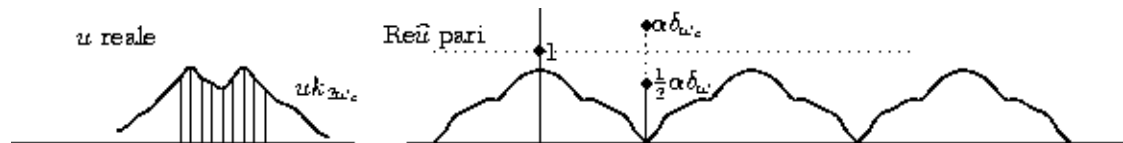


Figura 13.9: La ricostruzione di $\text{Re } f$ preserva le componenti impulsive alla frequenza di taglio

$$\begin{aligned}
 \widehat{v}(\omega) + \widehat{v}(\omega - 2\omega_c) &= h(\omega) + \beta\delta_{\omega_c}(\omega) - \beta\delta_{-\omega_c}(\omega) \\
 &+ h(\omega - 2\omega_c) + \beta\delta_{\omega_c}(\omega - 2\omega_c) - \beta\delta_{-\omega_c}(\omega - 2\omega_c) \\
 &= h(\omega) + h(\omega - 2\omega_c) - \beta\delta_{-\omega_c}(\omega) + \beta\delta_{\omega_c}(\omega) - \beta\delta_{\omega_c}(\omega) \\
 &+ \beta\delta_{3\omega_c}(\omega)
 \end{aligned}$$

perché $\delta_{-\omega_c}(\omega - 2\omega_c) = \delta_{\omega_c}(\omega)$ e $\delta_{\omega_c}(\omega - 2\omega_c) = \delta_{3\omega_c}(\omega)$.

Quindi la somma di due repliche di \widehat{v} traslate in maniera da essere a supporti consecutivi produce una cancellazione della componente impulsiva alla frequenza di separazione dei corrispondenti supporti. La divisione per due che il filtro produce ai punti $\pm\omega_c$ è ora inessenziale: le componenti impulsive ai bordi sono ormai nulle, e non vengono ricostruite. Quindi una parte del segnale si perde, e precisamente la componente $\beta(\delta_{-\omega_c} + \delta_{\omega_c})^\vee = 2\beta \sin(2\pi\omega_c t)$. Si perde cioè la parte dispari della componente di ronzio alla frequenza di taglio. (Si veda la Figura 13.10.)

L'enunciato del Teorema del Campionamento per questa classe di distribuzioni diventa quindi il seguente:

Teorema 13.4.2. (Teorema del campionamento per segnali a banda limitata a crescita polinomiale (funzioni o distribuzioni)). Sia f è un segnale di questo tipo, con $\text{supp } \widehat{f} \subset [-\omega_c, \omega_c]$, ed indichiamo con $\tau_c = \frac{1}{2\omega_c}$ la frequenza di taglio (cioè la frequenza massima, quindi la metà della larghezza di banda). Allora f è ricostruibile esattamente mediante la convoluzione

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau_c) \text{sinc} \left(\frac{t - n\tau_c}{\tau_c} \right)$$

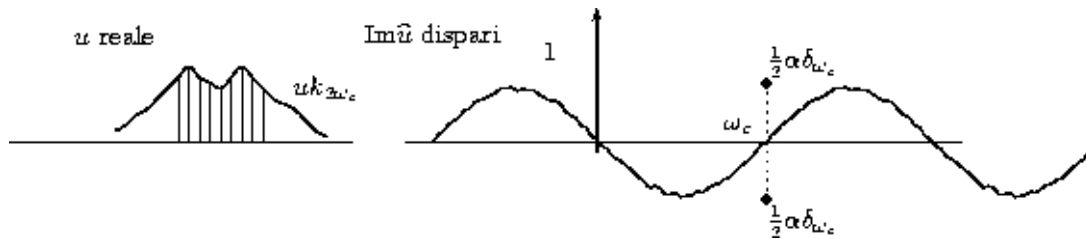


Figura 13.10: La ricostruzione di $\text{Im } f$ annulla componenti impulsive alla frequenza di taglio

a partire dai valori campionati $\{f(n\tau_c)\}_{-\infty}^{\infty}$, eccetto che per la parte dispari delle componenti oscillatorie $e^{\pm 2\pi i\omega_c t}$ alla frequenza di taglio $\pm\omega_c$ (ossia delle componenti che sono multipli di $\sin(2\pi i\omega_c t)$).

Nota 13.4.3. La parte dispari delle componenti oscillatorie in questo enunciato consiste esattamente delle componenti oscillatorie a frequenza ω_c che si annullano ai punti di campionamento. Infatti, questo segue dal prossimo esercizio. \square

Esercizio 13.4.4. Consideriamo un segnale puramente oscillatorio a frequenza ω_c . In forma reale esso si scrive $u(t) = \cos(2\pi\omega_c t - \phi)$, dove ϕ è un ritardo di fase. Mostrare che, se si scrive u come somma di una parte pari ed una parte dispari, $u = u_p + u_d$ allora ai punti di campionamento $t_n = n\tau_c = \frac{n}{2\omega_c}$ si ha $u(t) = u_p(t_n)$ e $u_d(t_n) = 0$ per ogni n . \square

Svolgimento. Le parti pari e dispari di u e v sono date da

$$u_p(t) = \frac{u(t) + u(-t)}{2}$$

$$u_d(t) = \frac{u(t) - u(-t)}{2}.$$

Ma

$$\begin{aligned} u(t_n) &= \cos(2\pi\omega_c t_n - \phi) \\ &= \cos(\pi n - \phi) \\ &= (-1)^n \cos(-\phi) \\ &= (-1)^n \cos \phi. \end{aligned}$$

per periodicità (il traslato del coseno di passo uguale al semiperiodo è l'opposto del coseno, perché $\cos(\omega - \pi) = -\cos(\omega)$). Quindi $u(t_n) = (-1)^n \cos(\phi)$. D'altra parte

$$\begin{aligned} u(-t_n) &= \cos(-2\pi\omega_c t_n - \phi) \\ &= \cos(-\pi n - \phi) \\ &= \cos(2\pi n - \pi n - \phi) && \text{per periodicità} \\ &= \cos(\pi n - \phi) \\ &= (-1)^n \cos(-\phi) \\ &= (-1)^n \cos \phi = u(t_n). \end{aligned}$$

Perciò

$$u_p(t_n) = \frac{u(t_n) + u(-t_n)}{2} = \frac{2u(t_n)}{2} = u(t_n).$$

Invece

$$u_d(t_n) = \frac{u(t_n) - u(-t_n)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

□

13.5 Ricostruzione del segnale a partire da un campionamento inadeguato: aliasing

Ritorniamo ora a considerare il caso del sottocampionamento, cioè del campionamento con passo troppo lungo. Supponiamo che \hat{f} sia supportata in $[-\omega_c, \omega_c]$, ma scegliamo un passo di campionamento $\tau > \frac{1}{2\omega_c}$. Allora il filtraggio del filtro passa-basso $\chi_{[-\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2\tau}]}$ non riesce a isolare una unica replica della trasformata di Fourier \hat{f} perché i traslati di passo $\frac{1}{\tau} < 2\omega_c$ di \hat{f} hanno supporti che si sovrappongono come nella Figura 13.5 (e nella parte alta della Figura 13.13). Perciò l'azione del filtro seleziona una replica del grafico di \hat{f} sommata alle code delle repliche adiacenti. Se ad esempio $\omega_c = 1.2$ e $\tau = 0.5 > \frac{1}{2 \cdot 1.2}$ il supporto di $\chi_{[-\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2\tau}]}$ è l'intervallo $[-1, 1]$ e l'azione del filtro è illustrata in Figura 13.13.

Le aree tratteggiate indicano le zone (gli intervalli $[-\frac{1}{2\tau}, -\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2}(\omega_c - \frac{1}{2\tau})] = [-\frac{1}{2\tau}, \omega_c - \frac{1}{4\tau}]$ dove le copie traslate consecutive del grafico di \hat{f} si sovrappongono. In quelle zone il risultato, dopo il filtraggio, differisce da \hat{f} . Quindi l'inversione di Fourier non ricostruisce il segnale originale.

Si noti che, nel dominio della frequenza, l'errore è dovuto a valori di $\hat{f} * \tau K_\tau$ a frequenza in valore assoluto maggiore di ω_c che si riversano su frequenze minori di ω_c . Per questo motivo questo errore si chiama *aliasing* (in italiano si potrebbe dire mascheramento): frequenze elevate si mascherano come frequenze più basse.

Nelle applicazioni, è evidente come l'aliasing si manifesti nella ricostruzione di segnali acustici. Ad esempio, il nostro orecchio non percepisce frequenze maggiori di 16 KHz e la maggior parte degli strumenti musicali (eccetto i sintetizzatori elettronici) non ha una emissione apprezzabile oltre i 5 o 6 KHz (neanche i sintetizzatori normalmente sono utilizzati per generare frequenze

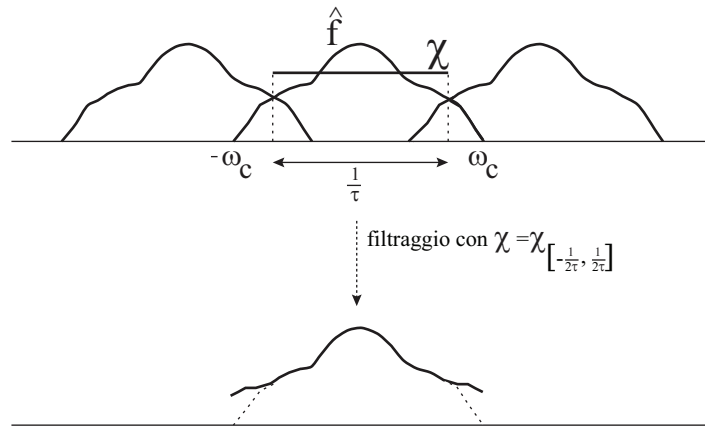


Figura 13.11: Campionamento inadeguato: filtraggio con aliasing

così elevate). Ovviamente l'orecchio ode anche frequenze ottenute dall'interferenza tra due diverse sorgenti. Poiché $e^{2\pi i\omega_1 t} e^{\pm 2\pi i\omega_2 t} = e^{2\pi i(\omega_1 \pm \omega_2)t}$, si ha

$$\begin{aligned} \sin 2\pi(\omega_1 - \omega_2)t &= \sin(2\pi\omega_1 t) \cos(2\pi\omega_2 t) + \cos(2\pi\omega_1 t) \sin(2\pi\omega_2 t) \\ &= \text{combinazione lineare di } e^{2\pi i\omega_1 t}, e^{\pm 2\pi i\omega_2 t} \end{aligned}$$

Quindi, se il segnale di un sintetizzatore contenesse una frequenza, diciamo, di 20 KHz e simultaneamente un violino o un pianoforte emettessero un suono con componenti in frequenza di ampiezza apprezzabile intorno ai 4KHz, l'orecchio potrebbe percepire una traccia di quella componente in frequenza a 20 KHz attraverso la sua interferenza a $20-4=16$ KHz con l'armonica emessa dal violino o dal pianoforte.

Per non perdere nulla del segnale originale, quindi, non ci si limita a ricostruirlo esattamente nella banda di frequenza fino a 16 KHz, si va oltre: si è deciso di riprodurre senza perdita i segnali musicali con spettro di frequenza nullo oltre i 22 KHz, per sicurezza. Quindi la frequenza di campionamento è di 44 KHz ($= 2\omega_c$). Questa è la soglia di campionamento per la registrazione digitale (su compact disc).

Ma l'aliasing si presenta anche in molti altri contesti, ad esempio nella grafica al computer. Supponiamo di voler tracciare una retta su un monitor. Il monitor può accendere i fosfori che sono più prossimi alla retta, ma poiché i

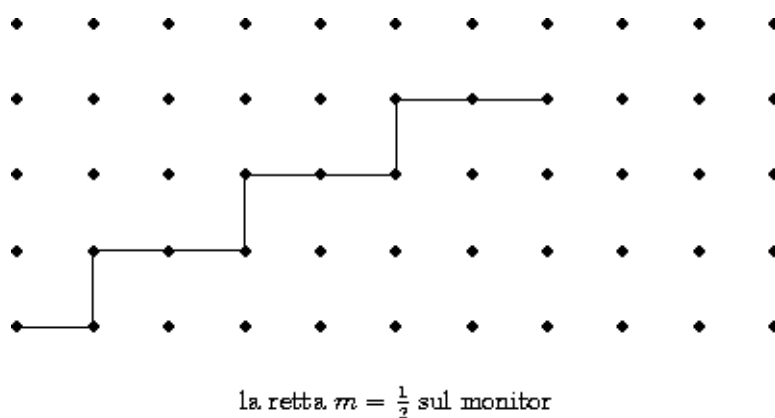


Figura 13.12: Scalettatura di segmenti obliqui in un reticolo

suoi fosfori sono disposti su una griglia regolare, il disegno appare scalettato. La scalettatura è tanto maggiore quanto meno fitta è la griglia dei fosfori (cioè quanto meno elevata è la risoluzione del monitor). A questo proposito si veda l'algoritmo di Bresenham di tracciamento delle linee in *Computer Graphics*, che cerca di ridurre questo fenomeno di aliasing. Il reticolo dei fosfori si può pensare come una porzione del reticolo quadrato di passo τ , cioè $\tau\mathbb{Z} \times \tau\mathbb{Z}$. La retta a pendenza $m = 1$ viene riprodotta correttamente: si accendono i fosfori sulla diagonale. La retta a pendenza $m = \frac{1}{2}$ passa per i punti del reticolo multipli del vettore $(2, 1)$, che quindi si accendono; però questi fosfori sono distanziati di due passi in ascissa e quindi si accendono anche fosfori intermedi, quelli con ascisse dispari la cui posizione è più prossima alla retta: ad esempio quelli nelle posizioni $(1, 0)$ e $(1, 1)$. Per convenzione, in un monitor il verso dell'asse delle ordinate è crescente verso il basso per rispettare l'ordine di scansione da sinistra a destra e dall'alto al basso, come in un libro: quindi il disegno andrebbe ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

La scalettatura è un fenomeno di aliasing. La frequenza elevata qui è legata alla pendenza della retta, ed il campionamento inadeguato al fatto che il reticolo dei fosfori non è sufficientemente fitto.

Un'altra applicazione dell'aliasing è l'*effetto Moiré*, che si presenta quando un reticolo viene sovrapposto ad un altro reticolo ruotato, o a un altro pattern regolare (magari curvilineo). Le zone dove i due reticoli si sfiorano ed incontrano (dal nostro punto di vista di visuale) danno luogo ad una

maggiore densità di copertura della luce e ci appaiono più scure. A seconda dell'angolo di rotazione fra i due reticoli, o comunque alla geometria dal loro pattern, questa fatto genera bande scure di forme geometriche non facilmente calcolabili, ma comunque di solito di ampiezza assai più grande del passo dei reticoli: anche in questo caso l'aliasing produce riversamento di alte frequenze su basse frequenze, e quindi bande spurie ampie (cioè di bassa frequenza). Qui il campionamento dato dal passo dei due reticoli, che non è sufficiente a risolvere nitidamente (senza scalettature, quindi senza aumento dello spessore apparente) la zona di sovrapposizione fra i due.

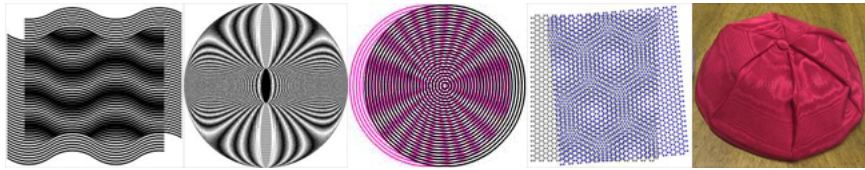


Figura 13.13: Esempi di effetto Moiré (immagini prelevate da Internet)

Una manifestazione evidente dell'effetto Moiré si ha nelle riprese video digitali. Una videocamera capta la luce grazie ad una griglia molto fitta di sensori. Però, se la videocamera inquadra un attore con una giacca a quadretti ad una certa distanza, il reticolo dei quadretti della giacca, visto da quella distanza, può essere di passo simile a quello dei sensori. In tal caso il passo di campionamento (la distanza tra i sensori) diventa non sufficientemente piccolo rispetto al passo del reticolo campionato (i quadretti della giacca). Perciò si ha l'effetto Moiré: bande scure apparenti. Se la videocamera sta facendo una ripresa a colori, le bande possono non coincidere per i diversi canali di colore (rosso, verde e blu) e questo crea bande con dispersione cromatica (cioè di colore cangiante). Inoltre le bande sono di forma non regolare, perché la giacca non è planare bensì curva, e si spostano con i movimenti dell'attore che la indossa, un effetto molto fastidioso.

Un esempio molto interessante di aliasing, che mostra come un segnale oscillatorio ad alta frequenza, campionato a passo inadeguato, possa "mascherarsi" da segnale a bassa frequenza (da cui il nome aliasing) è dato dal seguente esercizio.

Esercizio 13.5.1. Sia $f_{N+1}(t) = e^{i(N+1)t}$ e $f_1(t) = e^{it}$. Allora sulla griglia di campionamento

$$t_0 = 0, t_1 = \frac{2\pi}{N}, t_2 = \frac{4\pi}{N}, \dots, t_N = 2\pi \frac{N-1}{N},$$

si ha

$$f_{N+1}(t_k) = f_1(t_k) \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1.$$

In particolare, la funzione $\sin((N+1)t)$ coincide con la funzione $\sin t$ sui punti $\{t_k = \frac{2\pi k}{N}, k = 0, 1, \dots, N-1\}$, e la funzione $\cos((N+1)t)$ coincide, su questi punti, con $\cos t$. Si osservi che il passo di campionamento è $\tau = \frac{2\pi}{N}$ e la funzione f_{N+1} è la trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni di $\delta_{\frac{N}{\pi}}$, quindi la soppressione della componente sinusoidale conferma esattamente il Teorema 13.4.2. \square

Svolgimento. È ovvio, perché $e^{i(N+1)t} = e^{it}e^{iNt}$, e $e^{iNt_k} = e^{2\pi ik} = 1$ per ogni k . Il resto dell'esercizio si ottiene prendendo parte reale e parte immaginaria di questa identità. Osserviamo che il risultato si potrebbe ottenere, in maniera equivalente, anche dalle formule di addizione del seno e del coseno. Ad esempio:

$$\sin((N+1)t_k) = \sin(Nt_k) \cos t_k + \cos(Nt_k) \sin t_k,$$

ma $Nt_k = 2\pi k$, quindi $\sin(Nt_k) = 0$ e $\cos(Nt_k) = 1$ per ogni k . \square

13.5.1 Campionamento multidimensionale e risoluzione di immagini

I precedenti esempi di aliasing riguardano segnali unidimensionali, ma l'aliasing si incontra più di frequente per le immagini, che sono segnali bidimensionali, ossia con i dati campionati su un reticolo bidimensionale.

La trasformata di Fourier bidimensionale si definisce come

$$\begin{aligned} \hat{f}(s, r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(sx+ry)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi isx} dx \right) e^{-2\pi iry} dy, \end{aligned}$$

e quindi è l'iterazione di due trasformate di Fourier unidimensionali; analogamente per trasformate di Fourier multidimensionali. Ne segue che l'argomento appena presentato, e quindi il teorema del campionamento, continuano a valere per segnali a dimensione $m > 1$ campionati su una griglia m -dimensionale equispaziata: basta sostituire la convoluzione del Teorema del Campionamento (Corollario 10.4.6) con una analoga serie multipla con m indici. Questo è utile per la ricostruzione di segnali bidimensionali come le immagini, quando vogliamo aumentarne artificialmente la risoluzione (ossia infittirne i pixel).

13.6 Ricostruzione di segnali nella pratica quotidiana: prefiltraggio e stabilità

13.6.1 Segnali a durata finita

Nella vita reale, il metodo di ricostruzione che abbiamo esposto nel teorema del campionamento (Corollario ??) non si applica bene, perché le sue condizioni non sono mai soddisfatte nella pratica. Infatti, un segnale reale ha un inizio ed una fine, quindi ha durata finita, e pertanto è a supporto compatto: ma, per il Teorema 8.6.1, non è allora possibile che la sua trasformata di Fourier sia anch'essa a supporto compatto.

In linea di principio, questo problema non impedisce l'applicabilità del teorema del campionamento. Infatti, se siamo interessati a campionare un segnale f solo in un compatto K , possiamo comunque applicare il teorema del campionamento purché f (di cui noi vediamo solo valori sul compatto K) si estenda a tutto \mathbb{R} ad una funzione nella classe a banda limitata B_c , che denotiamo ancora con f : campioniamo f a passo $\tau = \frac{1}{2c}$ solo nell'intervallo temporale K (per semplicità, in questa Sottosezione denotiamo la frequenza di taglio con c invece che ω_c). Se immaginiamo di estendere i campioni all'esterno di K , ponendoli zero al di fuori, stiamo in realtà campionando su tutti gli interi una funzione diversa: la funzione $f_0 = f|_K$ (meglio sarebbe immaginare di campionare una funzione C^∞ che coincide con f_0 sui multipli di τ , visto che vogliamo allontanarci il meno possibile dalla classe a banda limitata, che consiste di funzioni C^∞ , ma l'argomento rimane identico).

Allora, stiamo sostituendo la vera funzione f a banda limitata con il suo troncamento f_0 su K , la cui trasformata di Fourier $g := \widehat{f_0}$ non è a supporto compatto. In quale misura g approssima \widehat{f} ? La risposta dipende da quanto

grande è K . Fissiamo una tolleranza $\varepsilon > 0$ e poniamo $f = f_0 + f_\infty$, dove ovviamente $f_\infty = f|_{\mathbb{C}K}$. Supponiamo di aver scelto il compatto K così grande che la funzione $f \in B_c \subset L^1$ verifichi $\|f_\infty\|_1 < \varepsilon$. Allora $\|g - \widehat{f}\|_\infty = \|\widehat{f_\infty}\|_\infty \leq \|f_\infty\|_1 < \varepsilon$. Quindi la trasformata di Fourier che siamo in grado di calcolare, ovvero la funzione g , approssima la trasformata di Fourier \widehat{f} a meno di ε per ogni valore della frequenza, e pertanto, a partire dai dati campionati sull'intervallo K , siamo in grado di calcolare una buona approssimazione di \widehat{f} (a meno di una tolleranza arbitraria prefissata ε), ed in particolare di verificare a posteriori se è ragionevole assumere che i dati disponibili siano campioni di una funzione a banda limitata. Occorre però tener presente che tutto questo dipende dalla condizione che K sia sufficientemente grande rispetto al segnale, nel senso che la sua coda f_∞ verifica $\|f_\infty\|_1 < \varepsilon$: poiché non sappiamo come sia fatta f fuori di K , questa ipotesi è solo una speranza. Questo è un punto debole nel rigore del procedimento, e ci ritorneremo tra poco.

Ma veniamo all'altro lato della questione: quale funzione viene ricostruita se partiamo dai dati campionati $\{f_0(n\tau)\}$? Come visto nel teorema del campionamento, viene ricostruita esattamente la funzione

$$h(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_0(n\tau) \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{\tau} - n \right) = \sum_{n\tau \in K} f(n\tau) \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{\tau} - n \right).$$

Se avessimo avuto i campioni di f su tutti i multipli di τ , in base al teorema del campionamento avremmo invece ricostruito $f(t) = \sum_n f_0(n\tau) \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{\tau} - n \right)$. La discrepanza è $\sum_{n\tau \notin K} f(n\tau) \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{\tau} - n \right)$. Per stimare questa differenza dobbiamo fare ipotesi ulteriori. Osserviamo che le funzioni $f \in B_c$ appartengono a L^1 , per definizione, ed a L^∞ , perché sono trasformate di Fourier di funzioni a supporto compatto. Quindi è ragionevole assumere che f decresca all'infinito a velocità abbastanza elevata. Anche i dati campionabili $\{f(n\tau)\}$ sono una successione limitata; supponiamo allora che siano anche in uno spazio ℓ^p per qualche $p < \infty$ (ossia che $\|\{f(n\tau)\}\|_{\ell^p}^p := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n\tau)|^p < \infty$). Normalmente, si assume che tutti i segnali siano successioni ℓ^2 , perché questa condizione equivale al fatto che l'energia sia finita. Assumiamo dunque che la successione $\mathbf{f} = \{f(n\tau)\}$ sia in ℓ^2 , ossia che $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n\tau)|^2 < \infty$ (ma il ragionamento resta valido anche se $\mathbf{f} \in \ell^p$ per un qualsiasi $p < \infty$). Poniamo $\mathbf{f}_K = \{f_\infty(n\tau)\}$, ossia $\mathbf{f}_K(n) = f(n\tau)$ se $n\tau \notin K$ e 0 altrimenti. Allora $\mathbf{f}_K \in \ell^2$, e per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $\|\mathbf{f}_K\|_2 < \varepsilon$ se K è abbastanza grande.

Poniamo ora $\mathbf{s}(t) = \left\{ \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{\tau} - n \right) \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Osserviamo che la successione $\operatorname{sinc}^2(x - n)$ si maggiora con $1/n^2$ in $[n, n + 1]$ ed in $[-n - 1, -n]$ se $|n| > 0$ (e con 1 in $[-1, 1]$), quindi appartiene a ℓ^2 per ogni x , con norma ℓ^2 limitata rispetto a t (diciamo, da una costante positiva C). Allora lo stesso vale per \mathbf{s} , che si ottiene da questa successione tramite la dilatazione di passo τ . Quindi, dalla disuguaglianza di Cauchy,

$$\left| \sum_{n\tau \notin K} f(n\tau) \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{\tau} - n \right) \right| = |\langle \mathbf{f}_K, \mathbf{s}(t) \rangle| \\ \leq \| \mathbf{f}_K \|_2 \left(\sum_{n\tau \notin K} \left| \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{\tau} - n \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < C\varepsilon.$$

Quindi l'errore di ricostruzione del segnale si maggiora con $C\varepsilon$, ed a meno di questa tolleranza possiamo applicare il metodo di ricostruzione basato sul teorema del campionamento.

Per futuro riferimento, si noti che abbiamo dimostrato la seguente disuguaglianza:

Corollario 13.6.1. *Esiste una costante $C > 0$ tale che, per ogni successione $\{a_n\} \in \ell^2$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$, la funzione u definita da*

$$u(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{\tau} - n \right)$$

verifica

$$|u(t)| \leq C \| \{a_n\} \|_{\ell^2}.$$

Ci sono però due punti deboli in questo ragionamento.

Il primo è che C è una costante numerica fissa (in effetti, si può dimostrare che è minore di $\pi^2/3$), ma ε è arbitrario, ed al fine di raggiungere la precisione $C\varepsilon$ possiamo essere costretti a scegliere K grande: ma non sempre questo è possibile, perché a volte il periodo in cui si effettua la misura non è prolungabile a piacere. Si pensi ad esempio alle misure del moto apparente dei pianeti nell'anno, o, nel caso in cui la variabile rappresenti uno spazio invece che un tempo, alle misure della deformazione in un'automobile nel corso di un crash test, o ai valori di luminosità dei pixel in una riga di un'immagine di risoluzione prefissata.

Il secondo punto debole è ancora più imbarazzante, e lo abbiamo già preso in esame, ma ora ci ritorniamo in maniera più approfondita. Dato un segnale $f(t)$ per $t \in \mathbb{R}$ di cui conosciamo solo i valori campionati $\{f(n)\}$ nell'intervallo finito K , non possiamo calcolare, neppure in maniera approssimata, la trasformata di Fourier \widehat{f} : sappiamo solo approssimare \widehat{f}_0 a meno di ε , non \widehat{f} , ed anche questo sappiamo farlo solo sotto l'ipotesi non verificabile K sia abbastanza grande che si abbia $\|f_\infty\|_1 < \varepsilon$. In particolare, non siamo in grado di capire in maniera ovvia se il segnale f è nella classe a banda limitata (o meglio, se esiste una funzione $f \in B_c$ che coincide con i dati campionati al variare di n in K). Però, come visto nella discussione sull'aliasing, anche se f non fosse a banda limitata una versione approssimata della ricostruzione si otterrebbe comunque quando sia f sia \widehat{f} decrescono in maniera abbastanza rapida (ad esempio se sono entrambe in L^1 , caso nel quale è applicabile la Formula di Somma di Poisson). Noi abbiamo qualche informazione sull'andamento di f nel compatto K , grazie ai dati campionati, e certamente siamo in grado di prolungarla fuori di K in maniera che sia in L^1 , ma è meno facile trovare una tale estensione che faccia sì che anche $\widehat{f} \in L^1$. Se assumiamo che il segnale f sia nullo fuori di K , allora non solo \widehat{f} non può essere a supporto compatto, ma in generale non è neppure in L^1 , come dimostra l'esempio in cui f sia una funzione caratteristica di un intervallo, la cui trasformata di Fourier coincide in modulo con un dilatato della sinc, che non è in L^1 .

Pertanto la nostra analisi euristica è alquanto teorica. In effetti, nella pratica si procede diversamente, ed esattamente come accennato alla fine della Sezione 13.5 sull'aliasing. Si parte con un segnale f limitato ed a supporto compatto (e quindi anche in L^2) e lo si prefiltra convolvendolo con una funzione $\phi \in B_c$: in tal modo, in base alla moltiplicatività della trasformata di Fourier sotto convoluzione, si ottiene un nuovo segnale $h = \phi * f$ ancora in B_c (ma non più a supporto compatto). Il segnale filtrato h ha un aspetto più liscio e regolare di f , perché ha perso le componenti di alta frequenza; però, in alcune condizioni che spesso si verificano in pratica, h approssima f , almeno nel senso della norma L^2 (e quindi puntualmente quasi ovunque). Più precisamente, supponiamo di poter scegliere c abbastanza grande rispetto all'estensione dell'intervallo in cui \widehat{f} è grande; inoltre esiste certamente ϕ tale che $|\widehat{\phi}(\omega)| \leq 1$ per ogni ω , ed uguale a 1 su un sottointervallo grande $[-d, d] \subset [-c, c]$. Allora $\|h - f\|_2$ è piccolo. Infatti $\|h - f\|_2 = \|\widehat{h} - \widehat{f}\|_2$, e la funzione $\widehat{h} - \widehat{f}$ vale 0 in $[-d, d]$, verifica $|(\widehat{h} - \widehat{f})(\omega)| \leq |\widehat{f}(\omega)|$ per $c \leq |\omega| \leq d$ (un intervallo piccolo) e $|\widehat{h} - \widehat{f}(\omega)| = |\widehat{f}(\omega)|$ se $|\omega| > c$. Ma quest'ultima

disuguaglianza ci dà una buona stima L^2 , perché se c è abbastanza grande allora $\int_{|\omega| \geq c} |\hat{f}|^2 d\omega$ è piccolo, dal momento che $\hat{f} \in L^2$.

Pertanto si adotta il seguente compromesso. Scegliamo la larghezza di banda $2c$ in modo che $\tau = \frac{1}{2c}$ costituisca un passo di campionamento accettabile per la velocità di misura dei nostri strumenti di campionamento (ad esempio proporzionata alla larghezza del nostro canale uditivo, il che porta ai 44 KHz del campionamento dei CD come visto nell'Introduzione, o pari alla distanza fra due pixel adiacenti del nostro sensore di immagini). Poi prefiltriamo il segnale f tagliandone le frequenze al di fuori di questa banda, come spiegato sopra. In tal modo si ottiene un nuovo segnale h modificato (ed allisciato), che in vari casi pratici non differisce troppo da f , come visto prima. A questo punto il procedimento di ricostruzione basato sul teorema del campionamento funziona, però non ricostruisce il segnale originale, bensì il segnale filtrato f . Questo dà luogo, nei casi tipici, ad una ricostruzione non esatta bensì approssimata, però entro una tolleranza prefissata

13.6.2 Stabilità della ricostruzione sotto perturbazioni dei dati

Una volta attuato il procedimento di ricostruzione, almeno nel senso approssimato illustrato alla fine della Sottosezione precedente, occorre domandarci quanto esso sia stabile sotto piccole perturbazioni dei dati. Infatti i dati sono catturati da apparecchiature di misura che sono affette da errore, spesso in maniera casuale, e vogliamo essere sicuri che il procedimento ricostruisca un segnale perturbato non troppo diverso dall'originale. In particolare, vogliamo assicurarci che la discrepanza fra i valori del segnale ricostruito a partire dai valori perturbati e di quello originale non diverga sotto perturbazione dei dati, ma anzi tenda a zero in qualche senso appropriato se le perturbazioni diventano piccole.

Per fortuna, questo è vero e non occorre nessuna fatica per dimostrarlo. Infatti, supponiamo che ogni dato campionato $f(n)$ sia affetto da un errore $a(n)$. Sappiamo che il segnale $f \in B_c$ appartiene a $L^1 \cap L^\infty$, per ipotesi (più precisamente, nella ricostruzione approssimata con prefiltraggio, spiegata nella precedente Sottosezione, non si assume $f \in B_c$, ma si assume comunque $f \in L^1 \cap L^\infty$, e tipicamente $f \in L^2$). Abbiamo allora fatto l'ipotesi ragionevole che la successione $\{f(n)\}$ sia in ℓ^2 . È anche ovvio assumere che la percentuale di errore sperimentale sia limitata da una costante

piccola ε , e quindi $|a(n)| \leq \varepsilon |f(n)|$ per ogni n . Allora anche $\{a(n)\} \in \ell^2$, con $\|\{a(n)\}\|_{\ell^2} \leq \varepsilon \|\{f(n)\}\|_{\ell^2}$, e quindi la stabilità segue direttamente dal Corollario 13.6.1.

13.6.3 Ricostruzione esatta e ricostruzioni approssimate

In questo Capitolo abbiamo esposto i principi teorici della ricostruzione esatta di segnali tramite l'analisi di Fourier a partire da una successione infinita di dati campionati, ma poi ci siamo resi conto che, nella pratica, ogni successione apparentemente infinita di dati è di fatto finita, essendo nulla prima dell'inizio dell'esperimento e dopo la fine. Abbiamo anche capito che il fatto che la successione dei dati sia finita impedisce la validità delle ipotesi necessarie alla ricostruzione esatta e permette solo una ricostruzione approssimata, peraltro entro una tolleranza prefissata (pur di accettare alcune ipotesi naturali di decadimento del segnale che generalmente non sono verificabili). A questo punto, abbiamo deciso di prefiltrare il segnale, che allora è ricostruibile solo entro una tolleranza prefissata: però in tal modo stiamo ricostruendo non il segnale originale, ma una sua approssimazione.

Però, per ricostruire i segnali in maniera approssimata anziché esatta, ci sono anche altri modi. I due modi tipici sono l'interpolazione dei dati tramite polinomi algebrici (*splines*) o tramite polinomi trigonometrici (combinazioni lineari delle funzioni $\sin nt$ e $\cos nt$ al variare di n). Ci limitiamo ad accennarne.

Il modo più semplice di interpolazione polinomiale dei dati è l'interpolazione lineare a tratti, nella quale il grafico dell'approssimante si ottiene congiungendo con un segmento i punti del piano corrispondenti a due dati consecutivi. In tal modo, in tutti gli istanti intermedi fra due tempi di campionamento consecutivi, l'approssimante lineare a tratti ha valori intermedi fra quelli dei due dati campionati, ma rispetto alla ricostruzione ispirata dal teorema del campionamento abbiamo perso qualcosa. Infatti, ora ovviamente non possiamo più sapere quanto l'approssimante differisca dal segnale vero ad ogni tempo intermedio: non è possibile stimare la discrepanza se non imponendo limiti sul valore della derivata del segnale, o, equivalentemente, sulle frequenze massime e minime per le quali la trasformata di Fourier è non nulla. Peggio: questa interpolazione è inutilizzabile nella pratica, perché la derivata non è continua (l'approssimante ha punti angolosi ai punti

di campionamento). Ad esempio, nel caso di ricostruzione di suoni questo procedimento produce distorsioni ad alta frequenza od altri disturbi, e nel caso di immagini produce effetti di bande in prossimità dei punti angolosi.

È però facile ottenere una approssimazione polinomiale non solo continua ma anche di classe C^1 : basta approssimare con splines di grado più elevato. Ad esempio, se invece che segmenti utilizziamo archi polinomiali di terzo grado (quindi determinati da due parametri aggiuntivi), allora abbiamo abbastanza gradi di libertà per interpolare ogni tripletto di dati consecutivi ed in più fissare a nostro piacere la pendenza al punto iniziale. Incollando insieme uno dopo l'altro questi archi di grado tre possiamo fabbricare una curva interpolante di classe C^1 . Ma anche in tal caso, non sapremo stimare l'errore di approssimazione.

L'approssimazione trigonometrica è analoga: se disponiamo di $2n + 1$ campioni, li possiamo interpolare con un unico polinomio trigonometrico di grado $n + 1$: una combinazione lineare delle $2n + 1$ funzioni $\cos kt$ per $k = 0, \dots, n$ e $\sin kt$ per $k = 1, \dots, n$. Il polinomio trigonometrico approssimante, ovviamente, è di classe C^∞ (derivabile infinite volte). Anche in questo caso, però, non possiamo dire nulla sulla precisione dell'approssimazione tranne che sui punti di campionamento, dove ovviamente l'errore è nullo. Anche se volessimo assumere che il segnale vero fosse periodico, non per questo esso coinciderebbe con il polinomio trigonometrico approssimante, a meno che i suoi coefficienti di Fourier non nulli fossero esattamente quelli del polinomio trigonometrico. Si noti che, in tal caso, staremmo assumendo l'annullarsi dei coefficienti di Fourier a frequenze elevate: ossia una condizione analoga a quella del teorema del campionamento, che ci dava la ricostruzione esatta o almeno una buona stima sull'errore. In effetti, questa analogia è legata ad una connessione più profonda: la costruzione del polinomio trigonometrico viene semplificata, e diventa più naturale, se la effettuiamo utilizzando una discretizzazione della trasformata di Fourier e della sua formula di inversione, la Trasformata di Fourier Discreta [3, 10, ?].

13.7 Cenni sul campionamento non uniforme

Abbiamo testè osservato che la ricostruzione mediante il Teorema del Campionamento (Corollario 10.4.6) si applica in particolare a segnali bidimensionali, le immagini. Nel caso di immagini catturate da un sensore tipicamente i punti di campionamento formano una griglia euclidea. Ma ci sono immagini

importanti per le applicazioni dove non è così: ad esempio, la griglia può essere distribuita in maniera radiale in certe immagini tomografiche e nelle immagini ecografiche. Pertanto diventa importante studiare la ricostruzione a partire da campioni non equidistribuiti. Un altro caso tipico di campioni irregolari è quello nel quale gli strumenti campionatori non possono essere fissati rigidamente su una griglia, o quello, frequentissimo, nel quale qualche dato campionato non viene trasmesso e si perde. A causa della perdita della periodicità, la ricostruzione a partire da campioni non uniformemente distribuiti è un problema al confine fra l'analisi numerica e l'analisi reale ma non più una applicazione dell'analisi di Fourier, e qui ci limitiamo a qualche facile esempio (unidimensionale) ed a citare il risultato più importante.

Esempio 13.7.1. Il primo esempio è quello nel quale vengono combinate due serie di campioni, ciascuna equispaziata dello stesso passo (diciamo 1, per semplicità), ma sfasate nel tempo di una distanza ρ . Ovviamente, è sufficiente limitare l'attenzione a $0 < \rho \leq 1/2$. Se $\rho = 1/2$, allora le due serie si combinano per formare un'unica serie equispaziata di passo $1/2$, e quindi in grado di ricostruire senza perdite segnali la cui trasformata di Fourier ha supporto di diametro 2, in base al Teorema del Campionamento (Corollario 10.4.6). Se invece $0 < \rho < 1/2$, i dati campionati permettono comunque di ricostruire il segnale originale?

La risposta è affermativa, pur di seguire un adeguato processo di ricostruzione tramite medie, come ora illustriamo. Consideriamo un segnale f tale che $\hat{f} = 0$ al di fuori dell'intervallo $[-1, 1]$ e due successioni di punti di campionamento $\{n \in \mathbb{Z}\}$ e $\{\rho + n : n \in \mathbb{Z}\}$. Stiamo quindi considerando l'istogramma dei dati campionati fornito dalla distribuzione $f(K + \lambda_\rho K)$ (qui, al solito, λ_ρ è l'operatore di traslazione di passo ρ). Ciascuna delle due distribuzioni fK e $f\lambda_\rho K$ è insufficiente a ricostruire esattamente il segnale, a causa delle sovrapposizioni illustrate, ad esempio per la prima delle due, nel grafico di \widehat{fK} in Figura 13.14 (la trasformata di Fourier \widehat{fK} è la somma di tutte le campane traslate).

Ora esaminiamo la trasformata di Fourier dell'altro istogramma, $f\lambda_\rho K$.

Dalla identità (12.1) sappiamo che $\widehat{K} = K$. Quindi dalla parte (ii) dell'Esempio 11.15.1 e dalla Proposizione 11.15.3 segue che $\widehat{\lambda_\rho K}(\omega) = e^{-2\pi i \rho \omega} K(\omega)$. Infine, dalla parte (i) del Corollario 11.14.3 sappiamo che la trasformata di Fourier di $f\lambda_\rho K$ è il prodotto delle trasformate $\widehat{f * \lambda_\rho K} = \widehat{f} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \rho n} \delta_n$, e quindi, per la proprietà (vi), la somma delle repliche traslate e pesate

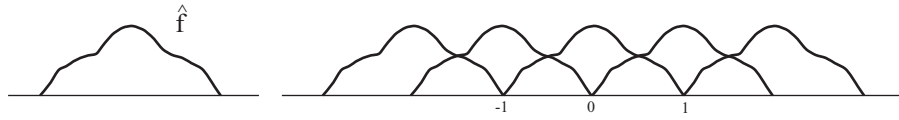


Figura 13.14: A sinistra il grafico di \hat{f} , con supporto di diametro 2; a destra le sue repliche traslate, che formano gli addendi della trasformata di Fourier dell'istogramma \widehat{fK} ottenuto da una sola sequenza di dati a passo uniforme 1, che è inadeguato

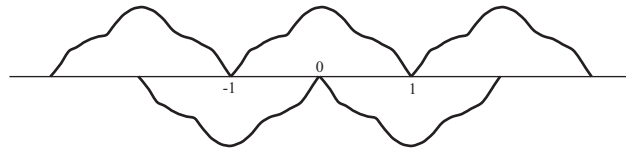


Figura 13.15: Addendi della trasformata di Fourier dell'istogramma ottenuto campionando con la stessa sequenza uniforme ma traslata di passo $1/2$ (ancora inadeguata)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \rho n} \lambda_n(\hat{f}).$$

Rivediamo in questa chiave il caso $\rho = 1/2$, in cui sappiamo già che si ha la ricostruibilità. Nella Figura 13.15 sono disegnate le campane traslate che costituiscono gli addendi della trasformata di Fourier dell'istogramma in questo caso particolare $\rho = 1/2$, nel quale $e^{-2\pi i \rho n} = e^{-i\pi n} = (-1)^n$: i termini pari sono gli stessi del precedente istogramma, i termini dispari sono gli opposti. Quando sommiamo le trasformate di Fourier delle due successioni di campioni, le campane pari si raddoppiano e quelle dispari si cancellano, e rimane una successione di campane a supporto contiguo ma disgiunto, ciascuna una copia di \hat{f} : sapevamo che questo doveva succedere, dal momento che, per $\rho = 1/2$, la combinazione delle due sequenze di punti di campionamento forma una nuova sequenza equispaziata di passo esattamente corrispondente alla massima frequenza di taglio necessaria per riprodurre esattamente il segnale. A questo punto, l'argomento teorico per ricostruire il segnale a partire dalla combinazione dei dati è il solito filtraggio passa basso seguito dalla antitrasformata di Fourier, ma ora bisogna anche dividere per due per eliminare il raddoppio delle campane pari. Osserviamo che questo significa che \hat{f} viene ricostruita a partire dalle due successioni di campioni e la trasformata di Fourier dei loro istogrammi tramite una operazione di media.

Cosa sarebbe successo per $0 < \rho < 1/2$? La trasformata di Fourier del primo istogramma fK è la stessa di prima. Per la seconda, invece di segni

alterni abbiamo la moltiplicazione per una fase progressiva $e^{-2\pi i n \rho}$. Il lettore non abituato alla moltiplicazione di numeri complessi può restringere l'attenzione alla parte reale $\cos(\pi i n \rho)$ ed alla parte immaginaria $\sin(\pi i n \rho)$. Si tratta di numeri oscillanti intorno a zero in maniera periodica, e le campane costituite dalla repliche traslate di \widehat{f} vengono moltiplicate per un peso oscillante (come illustrato nella Figura 13.16, nella quale, come sempre, limitiamo l'attenzione alla parte reale). Se concentriamo l'attenzione al segmento $[-1, 1]$ (quello del filtraggio), entrambi i contributi, quello derivante dalla successione di dati originali e quello dalla successione traslata $\widehat{f \lambda_\rho K}$ sono sovrapposizioni di due repliche traslate di \widehat{f} , il primo con pesi uguali (è la somma delle due repliche traslate) ed il secondo con pesi 1 e $e^{-2\pi i \rho}$. In altre parole, filtrando ed antitrasformando il primo istogramma otteniamo il valore $a(\omega) := \widehat{f}(\omega) + \widehat{f}(\omega + 1)$, mentre dal secondo istogramma otteniamo $b(\omega) := \widehat{f}(\omega) + e^{-2\pi i \rho} \widehat{f}(\omega + 1)$. Osserviamo che la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{-2\pi i \rho} \end{pmatrix}$$

ha determinante $e^{2\pi i \rho} - 1 \neq 0$, e quindi è invertibile, e pertanto ricaviamo

$$\begin{pmatrix} \widehat{f}(\omega) \\ \widehat{f}(\omega + 1) \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a(\omega) \\ b(\omega) \end{pmatrix}.$$

In questo modo abbiamo portato a termine la ricostruzione: si noti però che, se $\rho \sim 0$, l'algoritmo è numericamente poco stabile, perché il determinante di M è vicino a zero, e quindi la matrice inversa M^{-1} ha termini ed autovalori grandi e tende ad amplificare piccole perturbazioni dei dati, sempre di più man mano che ρ viene scelto più vicino a zero. D'altra parte questo comportamento è intrinseco al problema numerico proposto, perché per piccole traslazioni ρ i punti di campionamento della prima successione sono molto vicini a quelli della seconda, e quindi differenze dei due corrispondenti valori di f implicano pendenze ripidissime, che comportano amplificazioni delle perturbazioni.

Ricapitolando, in questi esempi abbiamo considerato un segnale con banda di frequenza di diametro 2, che quindi richiede, per la ricostruzione, una successione uniforme di campioni di passo $1/2$. Invece, abbiamo usato punti di campionamento costituiti da due sequenze equidistribuite di passo 1, ciascuna delle quali quindi inadeguata per la ricostruzione, ed abbiamo visto

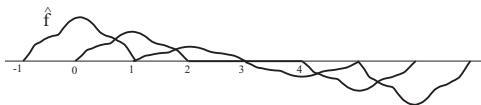


Figura 13.16: Le repliche traslate di \widehat{f} , pesate con un peso oscillante, che formano $\widehat{f} \lambda_\rho \widehat{K}$

che, prese insieme, diventano adeguate. Quindi in questi casi, per l'adeguatezza del processo di ricostruzione, basta che la distribuzione dei campioni sia *in media* di passo $1/2$. \square

Esempio 13.7.2. Consideriamo un secondo esempio di campionamento non uniforme la cui capacità di ricostruire i segnali può essere stabilita a partire dal Teorema del Campionamento (Corollario 10.4.6): quello nel quale si mescolano due successioni equispaziate, la prima di passo, diciamo, 1, e la seconda di passo τ con $\tau > 0$ (ed ovviamente $\tau \neq 1$). Come prima, il supporto di \widehat{f} ha diametro 2. Quindi, in base al Teorema del Campionamento (Corollario 10.4.6), la prima successione di campioni è inadeguata per la ricostruzione, e la seconda è adeguata se $\tau \leq 1/2$ ed inadeguata se $\tau > 1/2$. L'istogramma dei dati è $f \left(K + \frac{1}{\tau} K_{\frac{1}{\tau}} \right)$, perché $\frac{1}{\tau} K_{\frac{1}{\tau}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{n\tau}$ (parte (i) del Corollario ??). In base alla parte (ii) dello stesso Corollario, $\frac{1}{\tau} \widehat{K}_{\frac{1}{\tau}} = K_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n$, e quindi la trasformata di Fourier dell'istogramma è la distribuzione

$$\widehat{f} * K + \widehat{f} * K_\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \widehat{f} + \frac{1}{\tau} \lambda_{\frac{n}{\tau}} \widehat{f}.$$

Queste due distribuzioni, come ormai abbiamo visto più volte, sono due serie di repliche di traslati di \widehat{f} . La seconda serie ha altezza diversa, perché è stata riscalata con il fattore $\frac{1}{\tau}$. Poiché conosciamo l'intera successione dei dati campionati, possiamo scindere le due sottosuccessioni, e quindi separare i due treni di repliche. Per semplicità, riscaliamo il secondo moltiplicandolo per τ , in maniera che le repliche del secondo treno abbiano la stessa altezza 1 di quelle del primo. Consideriamo dapprima il caso $1/2 < \tau < 1$, e poniamo $\frac{1}{\tau} = 1 + \rho$ con $0 < \rho < 1$. La prima delle due successioni di traslati di \widehat{f} ha passo 1, e quindi il traslato n -simo è adiacente al traslato $(n+2)$ -simo, e ciascuno dei due si sovrappone a metà del traslato $(n+1)$ -simo, come già

visto in Figura 13.14. Invece la seconda è formata da repliche più separate: il traslato $(n + 2)$ -simo comincia a distanza $2 + 2\rho$ dall'inizio del traslato n -simo, e quindi a distanza 2ρ a destra della fine dell'altra. Pertanto, ogni replica si sovrappone solo alla precedente ed alla successiva. In maggiore dettaglio: la funzione \widehat{f} ha supporto in $[-1, 1]$, la replica precedente comincia a sinistra dell'intervallo e finisce al punto $-\rho$, ed il primo traslato destro $\lambda_1 \widehat{f}$ comincia al punto ρ e finisce oltre l'intervallo (al punto $2 + \rho$): si veda la Figura 13.17. Quindi, in questa catena di repliche, solo la replica originale \widehat{f} è non nulla nell'intervallo $[-\rho, \rho]$, e quindi ne possiamo ivi leggere il valore. Ora cominciamo un processo di *bootstrap* fra i due campionamenti. Consideriamo i traslati di passo 1: nel sottointervallo $[-\rho, 0]$ si sovrappongono solo le repliche date da \widehat{f} e dal suo traslato sinistro $\lambda_{-1} \widehat{f}$, e, visto che lì ormai la prima di queste funzioni è nota grazie alla fase precedente basata sul secondo campionamento, ne ricaviamo la seconda funzione. Ma in quell'intervallo questa seconda funzione assume gli stessi valori che la prima assume in $[1 - \rho, 1]$; analogamente, nell'intervallo $[0, \rho]$ la funzione \widehat{f} di questa catena di repliche si sovrappone solo con il suo traslato destro $\lambda_1 \widehat{f}$, ed allo stesso modo questo ce ne rivela i valori in $[-1, -1 + \rho]$. A questo punto abbiamo ampliato il dominio di ricostruzione a $[-1, -1 + \rho] \cup [-\rho, \rho] \cup [1 - \rho, 1]$, e proseguiamo il bootstrap paragonando i risultati su questi tre intervalli con quelli del secondo treno di repliche (quelle di passo $1 + \rho$). Infatti, nell'intervallo di sinistra, $[-1, -1 + \rho]$, questo treno di repliche fa sovrapporre \widehat{f} (ivi già nota) solo con il suo traslato di passo $-1 - \rho$, che quindi viene ricostruito, ed i valori che esso assume sono quelli di \widehat{f} fra -2ρ e $-\rho$ (si veda la Figura 13.17). Utilizzando in maniera analoga gli altri due intervalli vediamo che questa fase del bootstrap raddoppia il dominio di ricostruzione, estendendolo a $[-1, -1 + 2\rho] \cup [-2\rho, 2\rho] \cup [1 - 2\rho, 1]$. A questo punto è chiaro come proseguire il bootstrap per raddoppiare il dominio di ricostruzione: in un numero finito di passi si recupera \widehat{f} interamente, ossia su tutto l'intervallo $[-1, 1]$.

Si noti che, in questo caso, la densità media dei punti di campionamento è maggiore di $1/2$ e riusciamo ad operare la ricostruzione di ogni f tale che \widehat{f} ha supporto di lunghezza 2, come avveniva per campioni equidistribuiti.

Veniamo ora all'altro caso, $\tau > 1$, e poniamo $\frac{1}{\tau} = 1 + \rho$ con $-1 < \rho < 0$. In questo caso, da un lato la densità media dei campioni è minore di $1/2$; dall'altro lato, il metodo di ricostruzione illustrato più sopra fallisce: il bootstrap non può cominciare perché non ci sono intervalli in cui la trasformata

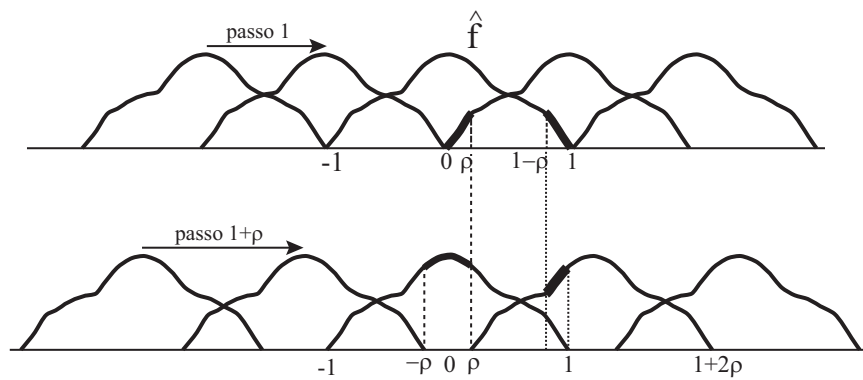


Figura 13.17: Due successioni equispaziate di repliche di passo differente (quelle in alto a passo 1, quelle in basso a passo maggiore) danno luogo ciascuna a campionamento inadeguato, ma di densità complessiva adeguata. La ricostruzione si basa sull'interplay fra le sequenze di repliche con i due passi di traslazione (*bootstrap*). La figura evidenzia alcuni intervalli di ricostruzione ottenuti nelle prime due fasi del bootstrap: il secondo passo di traslazione restituisce i valori di \hat{f} in $[-\rho, \rho]$ (evidenziati con spessore medio). Da questi dati, il primo passo di traslazione restituisce \hat{f} in $[-1, -1 + \rho]$ e $[1 - \rho, 1]$ (evidenziati con spessore grande); a sua volta, questa informazione permette al secondo passo di traslazione di ricostruire \hat{f} in $[-2\rho, -\rho]$ (spessore molto grande), e così via.

di Fourier di uno dei due istogrammi consiste di una sola replica di \widehat{f} (anzi, in molti intervalli il secondo istogramma fa sovrapporre tre repliche invece che due sole). Quindi in questo caso non riusciamo a ricostruire il segnale. \square

I precedenti Esempi 13.7.1 e 13.7.2 suggeriscono una caratterizzazione degli insiemi di campionamento in termini della densità minima dei punti di campionamento. Premettiamo due definizioni.

Definizione 13.7.3. Una successione $\{x_j\}$ di numeri reali si chiama un *insieme di unicità* per la classe a banda limitata B_c se la sola funzione $f \in B_c$ tale che $f(x_j) = 0$ per ogni j è la funzione nulla. In altre parole, se si conoscono i valori di f su un insieme di unicità, esiste una unica ricostruzione dell'intera f a partire dai suoi campioni: per ricostruire f naturalmente occorre trovare un appropriato algoritmo di ricostruzione (come abbiamo fatto nel precedente Esempio 13.7.1).

Però non è detto che esista un tale algoritmo con la proprietà di essere stabile sotto piccole perturbazioni dei dati campionati (ad esempio arrotondamenti numerici). Una successione $\{x_j\} \subset \mathbb{R}$ si dice un *insieme di campionamento stabile* in uno spazio normato di funzioni, ad esempio L^p , se f è ricostruibile dai suoi valori $\{f(x_j)\}$ in maniera da cambiare di poco se i campioni sono perturbati di poco, nel senso che per ogni $p \geq 1$ esiste $C > 0$ tale che ogni $f \in B_c \cap L^p$ verifica

$$\|f\|_p \leq C \|\{f(x_j)\}\|_{\ell^p} := \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Evidentemente gli insiemi stabili sono i soli insiemi di campionamento di interesse nelle applicazioni.

Definizione 13.7.4. Dato un insieme numerabile $X \subset \mathbb{R}$, si chiama *densità di Beurling* di X il numero

$$D(X) := \liminf_{r \rightarrow \infty} \inf_{y \in \mathbb{R}} \frac{|X \cap [y, y+r]|}{r}.$$

Nota 13.7.5. Osserviamo che $\inf_{y \in \mathbb{R}} |X \cap [y, y+r]|$ è il minimo (o meglio, la migliore approssimazione per difetto) del numero di punti di X in intervalli di lunghezza r , pertanto $\inf_{y \in \mathbb{R}} \frac{|X \cap [y, y+r]|}{r}$ è il minimo della densità dei punti

di X in tali intervalli, e quindi $D(X)$ rappresenta il minimo della densità di X in intervalli via via più lunghi, ossia la densità asintotica minima di X . \square

Vale la seguente caratterizzazione degli insiemi di campionamento stabili [?], che non dimostriamo:

Teorema 13.7.6. (Beurling, Landau.) *Se un insieme numerabile $X \subset \mathbb{R}$ ha densità di Beurling $D(X) > 1$ (Definizione 13.7.4), allora è un insieme di campionamento stabile per $B_{\frac{1}{2}} \cap L^p$ per tutti i $p \geq 1$ (Definizione 13.7.3). Viceversa, ogni insieme di campionamento stabile per $B_{\frac{1}{2}} \cap L^p$ verifica $D(X) \geq 1$.*

(Se si vuole considerare B_c invece di $B_{\frac{1}{2}}$, il risultato continua a valere pur di riscalare appropriatamente il valore della densità nel senso del Teorema del Campionamento).

Parte IV

Trasformata di Fourier discreta,
trasformata discreta dei coseni,
trasformata rapida di Fourier,
deconvoluzione

Capitolo 14

La trasformata di Fourier discreta (DFT)

14.1 La relazione fra la periodicità del segnale e discretezza della sua trasformata di Fourier

Nel teorema di campionamento abbiamo discretizzato un segnale (a banda limitata) prendendone campioni equispaziati, ed abbiamo dimostrato che lo si può ricostruire utilizzando opportunamente la trasformata di Fourier. A questo scopo abbiamo applicato la trasformata di Fourier a segnali discreti, cioè a distribuzioni impulsive equispaziate. Però nell'elaborare il corrispondente procedimento numerico (Sezione 13.4) ci siamo accorti che le operazioni aritmetiche da effettuare non hanno mai a che fare con il calcolo di trasformate di Fourier: non si abbandona mai, in realtà, il dominio di partenza. Non si passa al dominio della frequenza, e ci si limita a calcolare operazioni aritmetiche discrete: convoluzioni fra le successioni dei campioni ed opportuni pesi di interpolazione (valori della funzione sinc). Sarebbe auspicabile trovare una formulazione della trasformata di Fourier che si applichi direttamente ad una successione, invece che ad una funzione di una variabile reale, ed il cui risultato consista ancora di una successione, alla quale applicare le procedure di filtraggio e di ricostruzione sotto forma di operazioni lineari (cioè di operazioni matriciali, facili da codificare su un computer).

Questo è possibile, ma impone una restrizione.

Dai Corollari 13.1.5 e 12.2.2 sappiamo che la trasformata di Fourier di una successione discreta equispaziata di impulsi (agli istanti $0, \pm\tau, \pm2\tau, \dots$) è una funzione periodica, e viceversa. Perciò, se vogliamo successioni (cioè funzioni discretizzate a passo costante) la cui trasformata di Fourier sia ancora discreta, allora per la stessa ragione bisogna che le successioni considerate (automaticamente discrete) siano anche periodiche.

Quindi definiremo una trasformata di Fourier discreta (DFT, per Discrete Fourier Transform) sulle successioni periodiche. Se consideriamo le successioni di passo N , questa costruzione si chiama DFT di passo N . Proprio perché questa discretizzazione della trasformata di Fourier è un caso particolare della trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni, in realtà non occorrerebbe introdurre una nuova definizione, perché potremmo dedurre tutte le proprietà a cui siamo interessati da ciò che già sappiamo sulla trasformata di Fourier di distribuzioni impulsive: ma facendolo abbiamo uno sviluppo espositivo assai semplice e conveniente, che esponiamo in questo Capitolo.

14.2 La DFT ottenuta tramite un procedimento di discretizzazione dei coefficienti di Fourier

Procediamo in maniera simile alla spiegazione euristica dell'integrale di Fourier e della formula di inversione, fornita in Sezione 8.1 sulla base di un procedimento di discretizzazione a partire dalle serie di Fourier.

Invece che una successione periodica, dapprima consideriamo una funzione periodica f , di periodo $T > 0$, e sviluppabile in serie di Fourier: diciamo, ad esempio, $f \in C^1$, così la serie di Fourier converge uniformemente a f per il Teorema di Dirichlet (in particolare il suo Corollario 5.12.4). Allora

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T} \quad (14.1)$$

dove

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i n t / T} dt,$$

come nella Nota 5.2.1, in particolare nelle identità (5.6) e (5.7). Ora, per discretizzare la trasformata di Fourier, cominciamo col discretizzare l'integrale che definisce il coefficiente di Fourier c_n .

Ripartiamo l'intervallo $[0, T]$ in N parti della stessa lunghezza $\tau = \frac{T}{N}$, ed approssimiamo in ciascuna di queste parti i valori di f con il valore iniziale $f(n\tau)$, per $n = 0, \dots, N - 1$.

Allora c_n si approssima con

$$\tau_n = \frac{1}{T} \left(\sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau) e^{-2\pi i n k \tau / T} \right) \frac{T}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau) e^{-2\pi i n k / N}$$

poiché $\tau = \frac{T}{N}$. Si osservi che la successione $\{\tau_n\}$ è periodica di periodo N , perché, per ogni k ,

$$e^{-2\pi i (n+N)k/N} = e^{-2\pi i n k / N} e^{-2\pi i k}$$

e $e^{-2\pi i k} = 1$.

Notazione 14.2.1. I numeri complessi di modulo 1

$$e^{-2\pi i k / N}$$

per $k = 0, 1, \dots, N - 1$, si chiamano le radici n -sime dell'unità

La successione $\{\tau_n\}_{n=0, \dots, N-1}$ introdotta sopra viene chiamata la trasformata discreta di Fourier (DFT) della successione $\{f(k\tau)\}_{k=0, \dots, N-1}$.

A questo punto, la serie di Fourier (??) si approssima con

$$f(k\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} \tau_n e^{2\pi i n k \tau / T} = \sum_{n=0}^{N-1} \tau_n e^{2\pi i n k / N}.$$

Scriviamo $x_k = f(k\tau)$, $k = 0, \dots, N - 1$, e $\{y_k\}_{k=0, \dots, N-1} = \text{DFT} \{x_k\}_{k=0}^{N-1}$. Riassumendo:

Definizione 14.2.2. (Trasformata di Fourier discreta e sua inversa.)

Per ogni $\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$ poniamo

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi i n k / N} \quad (\text{DFT})$$

e per ogni $\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$ poniamo

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{2\pi i n k / N}. \quad (\text{IDFT})$$

Vedremo nel prossimo Teorema 14.2.4 che effettivamente la IDFT è la trasformazione inversa della DFT.

Nota 14.2.3. In molti libri la DFT viene normalizzata diversamente, nel modo seguente:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi i n k / N} \quad (\text{DFT})$$

ed in tal modo diventa N volte più grande che qui. Evidentemente, quindi, la trasformazione inversa, per compensare, deve essere N volte più piccola:

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{2\pi i n k / N}. \quad (\text{IDFT}')$$

Nel Capitolo 15, per motivi di convenienza, adatteremo anche noi questa rinormalizzazione, e quindi cambieremo la Definizione 14.2.2. \square

Teorema 14.2.4. (*Inversione della DFT.*)

La seconda formula è una identità: in altre parole, l'operatore

$$\text{IDFT} \{y_n\} = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{2\pi i n k / N} \right\}$$

che manda la successione $\{y_n\}$ nella successione $\{x_n\}_{n=0, \dots, N-1}$ è l'operatore inverso della DFT (e si chiama trasformata di Fourier discreta inversa. In particolare la DFT è una applicazione iniettiva e surgettiva dello spazio \mathbb{C}^N (delle successioni di N numeri complessi) in sé.

Dimostrazione. Scriviamo

$$u_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{2\pi i n k / N}$$

dove

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi i n k / N}$$

Vogliamo mostrare che $u_k = x_k$, per ogni $k = 0, \dots, N-1$.

Sostituendo e scambiando l'ordine delle somme si ha:

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{2\pi i n k / N} e^{-2\pi i n m / N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n (k-m) / N} \end{aligned}$$

Ora abbiamo bisogno di una proprietà di somma delle radici dell'unità, simile al Lemma 12.5.1 (di fatto la proprietà che ci interessa è un caso particolare di quel Lemma, ma per semplicità la ridimostriamo direttamente).

Lemma 14.2.5. *Siano $0 \leq k, m \leq N$ interi. Allora*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n (k-m) / N} = \delta_{km}$$

dove $\delta_{km} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq m \\ 1 & \text{se } k = m \end{cases}$

Se k, m sono interi arbitrari (non necessariamente fra 0 e N), lo stesso enunciato vale se si pone

$$\delta_{km} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq m \pmod{N} \\ 1 & \text{se } k = m \pmod{N} \end{cases}$$

Dimostrazione. Poniamo d'ora in poi $w = w_N := e^{-\frac{2\pi i}{N}}$: questo w è il coniugato della prima radice N -esima di 1 nel piano complesso. Allora, per la formula di somma geometrica (Sezione 1.1),

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{n}{N} (k-m)} = \sum_{n=0}^{N-1} (\bar{w}^{k-m})^n = \frac{1 - (\bar{w}^{k-m})^N}{1 - \bar{w}^{k-m}} = \frac{1 - (\bar{w}^N)^{k-m}}{1 - \bar{w}^{k-m}}$$

se $w^{k-m} \neq 1$.

Invece, se $\bar{w}^{k-m} = 1$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} (\bar{w}^{k-m})^n = \sum_{n=0}^{N-1} (1)^n = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N.$$

Se $k = m$, allora $\bar{w}^{k-m} = 1$ e la somma vale N . Invece, se $k \neq m$, allora \bar{w}^{k-m} è un'altra radice N -esima di 1, ma non vale 1. Però $\bar{w}^N = e^{2\pi i} = 1$. Perciò si ha

$$\sum_{n=0}^{N-1} (\bar{w}^{k-m})^n = \frac{1 - (\bar{w}^N)^{k-m}}{1 - \bar{w}^{k-m}} = \frac{1 - 1}{1 - \bar{w}^{k-m}} = 0.$$

□

Nota 14.2.6. Il precedente Lemma ha anche una naturale dimostrazione geometrica. La somma $\sum (w^{k-m})^n$ è la somma di radici dell'identità. Se $k = m$ stiamo sommando N volte il numero 1 ed otteniamo N . Se $k \neq m$, allora w^{k-m} è una radice di 1, ma non è uguale a 1. La sua potenza N -esima vale 1, e le sue potenze successive sono disposte in modo simmetrico sulla circonferenza di raggio 1 nel piano complesso, come nella Figura 12.2, che riproduciamo qui:

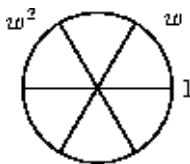


Figura 14.1: Radici dell'unità

Se $k-m$ è un divisore di N allora i numeri $w^{k-m}, w^{2(k-m)}, \dots, w^{(N-1)(k-m)}$ si ripetono (dopo $\frac{N}{k-m}$ passi) e quindi non sono tutte le radici N -esime di 1, ma sono pur sempre disposti in maniera simmetrica, cioè ad angoli equispaziati. Allora la somma deve essere zero per simmetria. □

Fine della dimostrazione del Teorema 14.2.4.

Ormai basta osservare che dal Lemma 14.2.5 si ha

$$u_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \delta_{km} = x_k.$$

□

Nota 14.2.7. In base al Teorema 14.2.4 la DFT è un operatore lineare su successioni di N valori, cioè su \mathbb{C}^N . La sua matrice nella base canonica è data da

$$D = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & \dots \\ 1 & w^3 & w^6 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

perché la condizione $\{y_n\} = DFT_N \{x_n\}$ equivale a

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w^{nk} x_k.$$

Abbiamo dimostrato la formula di inversione

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} w^{-nk} y_n$$

La matrice della IDFT è quindi $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & \dots & w^{-N+1} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & \dots & \dots \\ 1 & w^{-3} & w^{-6} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ Per-

tanto questa deve essere l'inversa della precedente. Il Lemma 14.2.5 dimostra precisamente questo fatto, $DU = I$, con un calcolo diretto. In effetti la formula nel suo enunciato è esattamente l'espressione dell'elemento di ordine (k, m) di DU calcolato svolgendo il prodotto righe per colonne. \square

Concludiamo questa Sezione con un ovvio corollario della definizione di DFT:

Corollario 14.2.8. *Se \hat{x} è la DFT di $x = \{x_k : k = 0, \dots, N-1\}$, allora*

(i)

$$\|\hat{x}\|_{\infty} = \sup_k |\hat{x}_k| \leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x_k| = \frac{1}{N} \|x\|_{\ell^1[0, N-1]};$$

(ii) $\sum_{k=0}^{N-1} |\widehat{x}_k| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|$, ossia

$$\|\widehat{x}\|_{\ell^1[0, N-1]} = \sum_{k=0}^{N-1} |\widehat{x}_k| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |x_k| = \|x\|_{\ell^1[0, N-1]}.$$

14.3 *Un inciso: la trasformata di Fourier sul gruppo ciclico \mathbb{Z}_N con N elementi

Questa Sezione serve a dare una veste più algebrico-geometrica alla trasformata di Fourier di successioni periodiche di periodo N , e non è necessaria per il seguito. Le successioni periodiche di periodo N si possono pensare come funzioni periodiche definite sugli interi. Gli interi, \mathbb{Z} , formano un gruppo rispetto all'operazione di somma: la somma è associativa, esiste un elemento *neutro* che sommato a qualunque m intero restituisce m (questo elemento è l'intero 0), ed infine, per ogni $m \in \mathbb{Z}$ esiste un *elemento inverso* (che in questo caso si chiama opposto), il quale sommato con m , restituisce 0 (è l'intero $-m$). Inoltre la somma è commutativa (\mathbb{Z} si chiama un *gruppo commutativo*).

Però le successioni periodiche di periodo N si possono anche pensare come funzioni su un insieme di N elementi. C'è un particolare insieme di questo tipo che dà una bella interpretazione geometrica della periodicità. Si tratta del gruppo ciclico \mathbb{Z}_N di N elementi, o se si preferisce del gruppo delle radici di ordine N dell'unità nel piano complesso.

Se $w = e^{2\pi i/N}$, questo gruppo è il sottoinsieme di \mathbb{C} dato da

$$\{1, w, w^2, \dots, w^{N-1}\}.$$

Si osservi che questi sono N elementi consecutivi della successione $\{w^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (la periodicità è dovuta al fatto che $w^N = w^{2\pi i} = 1$).

In altre parole, c'è una applicazione naturale da \mathbb{Z} a \mathbb{Z}_N : la mappa

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}_N \\ n &\mapsto w^n. \end{aligned}$$

\mathbb{Z}_N è un insieme del cerchio \mathbb{T} dei numeri complessi di modulo 1, che sono i numeri del tipo $\{e^{2\pi i\omega} : \omega \in \mathbb{R}\}$. \mathbb{T} è un gruppo per l'operazione di moltiplicazione. Si osservi che $e^{2\pi i\omega} e^{2\pi i\theta} = e^{2\pi i(\omega+\theta)}$. Perciò la mappa ρ manda la somma su \mathbb{Z} nel prodotto su \mathbb{Z}_N . In altre parole, $\rho : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}_N$ è moltiplicativa

in rapporto alle rispettive operazioni di gruppo: si dice che ρ è un *omomorfismo* di \mathbb{Z} su \mathbb{Z}_N (esso è così basilare che si chiama l'*omomorfismo canonico* di \mathbb{Z} su \mathbb{Z}_N).

Il concetto di omomorfismo di un gruppo qualsiasi su \mathbb{T} ci richiama alla memoria il fatto che abbiamo già visto all'opera una famiglia estremamente interessante di tali omomorfismi. Infatti si ha:

Proposizione 14.3.1. *Gli omomorfismi continui di \mathbb{R} su \mathbb{T} sono tutti e soli gli esponenziali*

$$\chi_\omega : x \mapsto e^{2\pi i \omega x} \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

Qui non dimostriamo che tutti gli omomorfismi siano di questo tipo, ma osserviamo che questi sono omomorfismi (continui) perché, come già visto, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\chi_\omega(x + y) = e^{2\pi i \omega(x+y)} = e^{2\pi i \omega x} e^{2\pi i \omega y} = \chi_\omega(x) \chi_\omega(y),$$

quindi χ_ω è moltiplicativo. Che χ_ω sia continuo è ovvio, perché lo è la funzione esponenziale.

La famiglia $\{\chi_\omega : \omega \in \mathbb{R}\}$ è una famiglia di omomorfismi di grande importanza in Analisi Armonica: essa forma un sistema ortonormale completo in L^2_* , e i prodotti scalari

$$(f, \chi_\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\chi_\omega(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt = \widehat{f}(\omega)$$

sono i valori della trasformata di Fourier di $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Per via di questo ruolo cruciale, gli omomorfismi continui di un gruppo commutativo su \mathbb{T} hanno un nome speciale: si chiamano i *caratteri* del gruppo. I caratteri sono i blocchi costituenti dell'analisi di Fourier per funzioni su \mathbb{R} . Esattamente allo stesso modo si può costruire una trasformata di Fourier su un arbitrario gruppo commutativo G su cui sia definita una struttura di integrale, come ora indichiamo. Sia $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione su G , con integrale finito, e siano $\{\chi_s\}$ i caratteri di G (qui s varia in un opportuno insieme di indici, che indicheremo con \widehat{G} in analogia all caso di \mathbb{R} , dove i caratteri χ_ω erano parametrizzati da $\omega \in \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$). Allora la trasformata di Fourier di funzioni su G si definisce così:

$$\widehat{f}(s) = \int_G f(g) \overline{\chi_s(g)} dg.$$

Ci limitiamo a esaminare in concreto il caso del gruppo \mathbb{Z}_N . Quali sono i caratteri di \mathbb{Z}_N ? Osserviamo che, se $\tau : \mathbb{Z}_N \mapsto \mathbb{T}$ è un carattere, cioè una funzione moltiplicativa (automaticamente continua, perché \mathbb{Z}_N è un insieme finito, quindi discreto), allora, componendo τ con l'omomorfismo canonico $\rho : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}_N$, si ottiene un carattere $\psi = \tau \circ \rho$ di \mathbb{Z} . Infatti è ovvio che la composizione di due applicazioni moltiplicative è moltiplicativa:

$$\begin{aligned}\psi(n+m) = \tau \circ \rho(n+m) &= \tau(\rho(n)\rho(m)) \\ &= \tau(\rho(n))\tau(\rho(m)) \\ &= \psi(n)\psi(m).\end{aligned}$$

Ma $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Quindi una vasta classe di caratteri di \mathbb{Z} si ottiene per restrizione da \mathbb{R} : sono esattamente le funzioni χ_ω dove $\chi_\omega(n) = e^{2\pi i \omega n}$. Poiché $\rho(n) = e^{2\pi i n/N}$, ora abbiamo $\chi_\omega(n) = \rho(n)^\omega$. Ma allora, quali di questi caratteri di \mathbb{Z} provengono da caratteri di \mathbb{Z}_N tramite la corrispondenza vista prima, $\chi_\omega = \tau \circ \rho$? Richiedere che un carattere sia di questo tipo significa richiedere che $\tau \circ \rho = \chi_\omega = \rho^\omega$, e quindi che $\tau(w) = w^\omega$ per ogni $w \in \mathbb{Z}_N$. Indichiamo quest'ultima funzione con τ_ω . Però non per tutti gli $\omega \in \mathbb{R}$ la funzione τ_ω è un carattere di \mathbb{Z}_N , perché non sempre rispetta la proprietà di periodicità. Se $w = e^{2\pi i/N} \in \mathbb{Z}_N$, allora $w^N = 1$ e si deve avere $\tau_\omega(w^N) = \tau_\omega(1) = 1$. Ma $\tau_\omega(w^N) = w^{N\omega}$. In generale $w^{N\omega} = e^{2\pi i \omega} \neq 1$: il valore 1 si ottiene solo se $\omega \in \mathbb{Z}$. Quindi le funzioni τ_ω su \mathbb{Z} danno luogo a caratteri di \mathbb{Z}_N se e solo se $\omega \in \mathbb{Z}$. Osserviamo però che questi caratteri τ_m si ripetono in modo periodico al variare di m : infatti, se $w \in \mathbb{Z}_N$, allora $w = e^{2\pi i k/N}$ per qualche k intero, e $\tau_m(w) = e^{2\pi i m k/N}$. Perciò

$$\begin{aligned}\tau_{m+N}(w) = e^{2\pi i(m+N)k/N} &= e^{2\pi i m k/N} e^{2\pi i k} \\ &= e^{2\pi i m k/N} \\ &= \tau_m(w).\end{aligned}$$

Quindi sull'insieme dei caratteri c'è la stessa struttura di periodicità di periodo N . Più precisamente:

Proposizione 14.3.2. *L'insieme dei caratteri \widehat{G} di un gruppo commutativo G è anch'esso un gruppo commutativo.*

Dimostrazione. \widehat{G} ha una operazione di prodotto, perché dati due caratteri χ_1 e χ_2 essi si possono moltiplicare fra loro, e si ottiene un altro carattere $(\chi_1\chi_2)(x) \equiv \chi_1(x)\chi_2(x)$ che verifica:

$$\begin{aligned}\chi_1\chi_2(x+y) &= \chi_1(x+y)\chi_2(x+y) = \chi_1(x)\chi_1(y)\chi_2(x)\chi_2(y) \\ &= \chi_1\chi_2(x)\chi_1\chi_2(y).\end{aligned}$$

Inoltre esiste un elemento neutro (il carattere dato dalla funzione costante 1) ed ogni carattere χ ha un inverso (il carattere $x \mapsto \chi(x)^{-1}$). Infine, è chiaro che l'operazione di prodotto in \widehat{G} è commutativa, perché $\chi_1(x)$ e $\chi_2(x)$ appartengono a \mathbb{T} , sono numeri complessi, e quindi il loro prodotto commuta: $\chi_1(x)\chi_2(x) = \chi_2(x)\chi_1(x)$, cioè $\chi_1\chi_2 = \chi_2\chi_1$. \square

Ora sappiamo che il gruppo dei caratteri di \mathbb{Z}_N contiene gli N caratteri $\{\tau_n\}_{n=0,1,\dots,N-1}$ (o se si preferisce $\{\tau_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, ma a causa della periodicità questi caratteri sono gli stessi N di prima). Perciò, grazie alla periodicità, abbiamo ottenuto il risultato seguente:

Proposizione 14.3.3. *Il gruppo dei caratteri di \mathbb{Z}_N è \mathbb{Z}_N (cioè tutti i caratteri sono del tipo τ_n per qualche $n = 0, 1, \dots, N-1$).*

Come si scrive la trasformata di Fourier rispetto ai caratteri di \mathbb{Z}_N (cioè la trasformata di Fourier in \mathbb{Z}_N)?

Consideriamo una funzione su \mathbb{Z}_N . Questa funzione non è altro che una successione periodica di periodo N o, se si preferisce, una successione finita $\{x_0, \dots, x_{N-1}\}$ di numeri complessi. Indichiamo con X questa successione finita. Allora, per definizione, calcolare la trasformata di Fourier significa eseguire il prodotto scalare con i caratteri. Il prodotto scalare sul cerchio \mathbb{T} si scriverebbe in modo ovvio in termini della naturale struttura di integrale, quella rispetto a $d\theta$. D'altra parte il suo sottoinsieme \mathbb{Z}_N delle radici N -esime dell'unità è un sottoinsieme finito: qui invece dell'integrale avremo una somma. Di solito su \mathbb{T} si considera l'integrale normalizzato: se f è una funzione su \mathbb{T} , si pone

$$\int_{\mathbb{T}} f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta.$$

Analogamente, se X è una funzione su \mathbb{Z}_N , scriviamo

$$\int_{\mathbb{Z}_N} f = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k.$$

Allora la trasformata di Fourier \widehat{X} , data dal *prodotto scalare* con i caratteri, è:

$$\begin{aligned}\widehat{X}(n) = (X, \tau_n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \overline{\tau_n(w^k)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi i n k / N}.\end{aligned}$$

Ebbene, questa è esattamente la DFT della successione $X = \{x_0, \dots, x_{N-1}\}$ (Definizione 14.2.2). Abbiamo provato:

Proposizione 14.3.4. *La trasformata di Fourier sul gruppo ciclico \mathbb{Z}_N con N elementi è la DFT di ordine N .*

14.4 Convoluzione ciclica normalizzata e DFT

Vogliamo introdurre una convoluzione per successioni periodiche di periodo N , ma diversamente da quanto abbiamo fatto per funzioni periodiche nella Definizione 6.1.2. In quel caso ponemmo

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t) dt$$

Senza normalizzare l'integrale (in vari libri questo integrale viene normalizzato dividendo per 2π). Ora, invece:

Definizione 14.4.1. (Convoluzione di successioni periodiche.) Se $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ e $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ sono successioni periodiche di periodo N , poniamo

$$(x * y)_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{n-k} y_k.$$

Nota 14.4.2. (Convoluzione ciclica normalizzata.) Abbiamo già notato che, poiché le successioni di periodo N hanno solo N valori diversi, di solito non le si considera alla stregua di successioni infinite periodiche, bensì di

successioni finite di N valori $\{x_0, \dots, x_{N-1}\}$. In tal caso, la definizione di convoluzione diventa la seguente: per $n = 0, \dots, N - 1$,

$$(x * y)_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{n-k \pmod{N}} y_k$$

dove $(n - k \pmod{N})$ vale $n - k$ se $0 \leq n - k < N$ e vale $n - k + N$ se $-N \leq n - k < 0$. Quindi $x * y(n) = \tilde{x} * \tilde{y}(n)$ dove \tilde{x} e \tilde{y} sono le successioni infinite ottenute periodicizzando x e y a passo n (cioè definendo $\tilde{x}_{n+jN} = x_n$ per $0 \leq n < N - 1$ e $j \in \mathbb{Z}$). \square

Nota 14.4.3. (Convoluzione sul gruppo ciclico \mathbb{Z}_N) In Sezione 14.2 abbiamo considerato un altro modo di visualizzare le successioni periodiche di periodo N , come funzioni (cioè successioni) sul gruppo ciclico $\mathbb{Z}_N = \{1 = w^0, w, w^2, \dots, w^{N-1}\}$ dove $w = e^{2\pi i/N}$. Scrivendo $\theta = \frac{2\pi i}{N}$ possiamo identificare \mathbb{Z}_N con la successione di angoli $\{0, \theta, 2\theta, \dots, (N - 1)\theta\}$, dove, naturalmente, $N\theta = 2\pi = 0 \pmod{2\pi}$. Allora le successioni x su \mathbb{Z}_N sono funzioni del parametro discreto $n\theta$, ed identificando gli angoli modulo 2π otteniamo

$$x * y(n\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n\theta - k\theta) y(k\theta).$$

Quindi la convoluzione delle successioni x e y è la convoluzione rispetto alla operazione di somma di \mathbb{Z}_N . \square

Avendo introdotto la nozione di convoluzione, ora studiamo la DFT della convoluzione di due successioni, cioè l'analogo delle proprietà di moltiplicatività dimostrata per i coefficienti di Fourier di funzioni in $L^1(\mathbb{R})$ nel Teorema 8.5.1.

Nota 14.4.4. Si riveda la dimostrazione del Teorema 8.5.1 e si noti che la proprietà dimostrata in quel teorema, cioè

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$$

è conseguenza solo del fatto che la misura di Lebesgue su \mathbb{R} è invariante per traslazione e che gli esponenziali sono moltiplicativi da \mathbb{R} a \mathbb{C} : cioè del fatto che per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, per ogni $t, s \in \mathbb{R}$ si ha

$$e^{2\pi i(t+s)\omega} = e^{2\pi i t \omega} e^{2\pi i s \omega}.$$

Se si scrive $\chi_\omega(t) = e^{2\pi i\omega t}$ quest'ultima identità equivale alla moltiplicatività

$$\chi_\omega(t+s) = \chi_\omega(t)\chi_\omega(s)$$

cioè al fatto che χ_ω è un carattere di \mathbb{R} (si veda la definizione di carattere data in Sezione 14.3 e la Proposizione 14.3.1). Ma in Sezione 14.3 abbiamo osservato che, dato un gruppo commutativo G con una struttura di integrale (cioè una misura, nella terminologia di [22]) invariante per traslazione, allora si può definire sulle funzioni in $L^1(G)$ una trasformata di Fourier usando, al posto degli esponenziali complessi, i caratteri di G . (Per inciso, è interessante sapere che, se sul gruppo si ha una definizione di convergenza rispetto alla quale le operazioni di prodotto e di inverso sono continue, esiste sempre una misura invariante: per la dimostrazione, non elementare, si veda, ad esempio [24] e la sua bibliografia). \square

Poiché i caratteri sono moltiplicativi, per la loro definizione, allora ci aspettiamo che la moltiplicatività della trasformata di Fourier rispetto alla convoluzione, $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$, valga, in generale, per l'analisi armonica sui gruppi commutativi. Questo fatto è vero, ma molto più in generale di quanto non sia opportuno presentare qui. Noi ci limitiamo al caso particolare $G = \mathbb{Z}_N$, dove conosciamo esplicitamente la trasformata di Fourier: è la DFT (Proposizione 14.3.4). Per semplicità d'ora in avanti, quando non c'è ambiguità, indichiamo la DFT con la stessa notazione che si usa per la trasformata di Fourier su \mathbb{R} :

Notazione 14.4.5. Se $x = \{x_0, \dots, x_{N-1}\} \in \mathbb{Z}_N$, scriviamo $\widehat{x} = \text{DFT}(x)$.

Teorema 14.4.6. Se x e y sono vettori in \mathbb{C}^N (successioni di N elementi, o, se si preferisce, successioni periodiche di periodo N , o equivalentemente funzioni su \mathbb{Z}_N), allora

$$\widehat{x * y} = \widehat{x}\widehat{y}.$$

Dimostrazione. Bisogna provare che, se

$$z_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_{n-j}y_j = (x * y)_n$$

allora

$$\begin{aligned} (\text{DFT}(z))_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k w^{kn} \\ &= \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k w^{kn} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k w^{kn} \right) \end{aligned}$$

dove $w = e^{-2\pi i/N}$.

Come anticipato, questo segue dalla moltiplicatività degli esponenziali: $w^k = w^{k-m} w^m$ per ogni k, m . Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k w^{kn} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_{k-m} y_m \right) w^{kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_{k-m} w^{(k-m)n} y_m w^{mn} \\ &= \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} y_m w^{mn} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j w^{jn} \right) \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $j = k - m$ e scambiato l'ordine delle somme. Nell'ultima somma, dove gli indici variavano da k a $k - N - 1$, abbiamo usato la periodicità per riportarci a $j = 0, \dots, N - 1$, in piena analogia al Lemma 5.1.1. \square

Esercizio 14.4.7. Se non si normalizzasse la convoluzione, ossia se si ponesse $(x \tilde{*} y)_n = \sum_{j=0}^{N-1} x_{n-j} y_j = (x * y)_n$, allora per ottenere la stessa proprietà di moltiplicatività, $\widehat{x \tilde{*} y} = \widehat{x} \widehat{y}$, occorrerebbe non normalizzare la DFT, ossia definire $\widehat{x}_n = \sum_{k=0}^{N-1} w^{nk} x_k$. \square

Definizione 14.4.8. (Parità.) Se x è una successione periodica di periodo N , poniamo $x^\dagger = x_{-n} = x_{N-n}$. In particolare, se si considera x come una successione finita di N elementi, abbiamo

$$x_n^\dagger = x_{N-n} \quad (n = 0, \dots, N - 1).$$

Lemma 14.4.9. Per tutte le successioni finite x e y si ha

$$(x * y)^\dagger = x^\dagger * y^\dagger.$$

Dimostrazione. Per ogni $n = 0, \dots, N - 1$,

$$\begin{aligned}
 (x^\dagger * y^\dagger)_n &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_{n-j}^\dagger y_j^\dagger \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_{j-n} y_{-j} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_{N-j-n} y_{N+j} \quad (\text{sostituendo } j \rightarrow N - j) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_{-j-n} y_j \quad (\text{per la periodicit\`a}) \\
 &= (x * y)_{-n} = (x * y)_n^\dagger.
 \end{aligned}$$

□

Il prossimo risultato estende alla DFT la propriet\`a di parit\`a della trasformata di Fourier (Teorema 8.2.4 (ii)).

Lemma 14.4.10. *Per ogni successione finita $x \in \mathbb{C}^N$ (ovvero periodica di periodo N),*

$$\widehat{x}^\dagger = \widehat{x}^\dagger.$$

Dimostrazione. Poich\`e $w^N = 1$, per ogni $n = 0, \dots, N - 1$ si ha

$$\begin{aligned}
 \widehat{x}_n^\dagger = \widehat{x}_{N-n} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j w^{(N-n)j} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j w^{-nj} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_{N-j} w^{-n(N-j)} = (\widehat{x}^\dagger)_n.
 \end{aligned}$$

□

Estendiamo ora alla DFT la propriet\`a di coniugazione della trasformata di Fourier (Teorema 8.2.4 (ix)).

Lemma 14.4.11. Per ogni successione finita $x \in \mathbb{C}^N$ (ovvero periodica di periodo N),

$$\widehat{\widehat{x}} = (\widehat{x})^\dagger.$$

Dimostrazione. Per $n = 0, \dots, N-1$ si ha

$$\begin{aligned} (\widehat{\widehat{x}})_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}_k w^{kn} = \frac{1}{N} \overline{\sum_{k=0}^{N-1} x_k w^{-nk}} \\ &= (\widehat{x})_{-n} = (\widehat{x})_n^\dagger. \end{aligned}$$

□

Il prossimo risultato è l'analogo per la DFT della proprietà della trasformata di Fourier iterata (Teorema 8.2.4 (iii)).

Teorema 14.4.12. Per ogni successione finita $x \in \mathbb{C}^N$,

$$\widehat{\widehat{x}} = \frac{1}{N} x^\dagger.$$

In altre parole, $\widehat{x} = \frac{1}{N} (x^\dagger)^\vee = \frac{1}{N} (x^\vee)^\dagger$, e quindi

$$x^\vee = N \widehat{\widehat{x}} = N \widehat{x}^\dagger.$$

Dimostrazione. Consideriamo x come successione periodica di periodo N . Per ogni $n = 0, \dots, N-1$, dal Teorema 14.2.4 si ha $\widehat{x^\vee} = x$, cioè

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k w^{-km} \right) w^{nm} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_k w^{-km} w^{nm}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{1}{N} x_{-n} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k w^{-km} w^{-nm} = (\widehat{\widehat{x}})_n.$$

□

Corollario 14.4.13. *Se x, y sono successioni finite di N elementi (ovvero periodiche di periodo N) si ha*

$$(i) \quad (xy)^\vee = \check{x} * \check{y}$$

$$(ii) \quad \widehat{xy} = N\widehat{x} * \widehat{y}$$

Dimostrazione. Dal Teorema 14.4.6 sappiamo che, per tutte le successioni finite di N elementi $\xi, \eta \in \mathbb{C}^N$ si ha $\widehat{\xi * \eta} = \widehat{\xi}\widehat{\eta}$. D'altra parte, dal Teorema 14.2.4 si ha che la DFT è surgettiva sullo spazio delle successioni finite, quindi esistono successioni finite ξ, η tali che $x = \widehat{\xi}$ e $y = \widehat{\eta}$. Perciò

$$(xy)^\vee = (\widehat{\widehat{\xi}\widehat{\eta}})^\vee = (\widehat{\xi * \eta})^\vee = \xi * \eta = \check{x} * \check{y}.$$

Questo prova (i). Da (i) segue $xy = \widehat{\check{x} * \check{y}}$, e quindi

$$\begin{aligned} \widehat{xy} &= \widehat{\widehat{\check{x} * \check{y}}} \\ &= \frac{1}{N}(\check{x} * \check{y})^\dagger \quad (\text{Teorema 14.4.12}) \\ &= \frac{1}{N}(\check{x})^\dagger * (\check{y})^\dagger \quad (\text{Lemma 14.4.9}) \\ &= N\widehat{x} * \widehat{y} \quad (\text{Teorema 14.4.12 applicato due volte}). \end{aligned}$$

Questo prova (ii). □

Corollario 14.4.14. *Per tutte le successioni finite $x, y \in \mathbb{C}^N$,*

$$(x * y)^\vee = \frac{1}{N}\check{x}\check{y}$$

Dimostrazione. Dall'ultima identità del Teorema 14.4.12 sappiamo che

$$\widehat{x}^\dagger = \frac{1}{N}\check{x}$$

(abbiamo già usato questo fatto nella dimostrazione del Corollario 14.4.13 (ii)). Da questo fatto e dalla proprietà di convoluzione (Teorema 14.4.6) si ha

$$(x * y)^\vee = N(\widehat{x * y})^\dagger = N(\widehat{\widehat{x}\widehat{y}})^\dagger = N\widehat{x}^\dagger\widehat{y}^\dagger = \frac{1}{N}\check{x}\check{y}.$$

□

14.5 Convoluzione ciclica non normalizzata e moltiplicatività della sua DFT

La Definizione 14.4.1 di convoluzione ciclica, con la normalizzazione per il fattore $\frac{1}{N}$, consente di dimostrare la moltiplicatività nella forma elegante del Teorema 14.4.6, ma ha uno svantaggio concettuale. Le successioni finite con N valori si immergono nello spazio ℓ^1 di tutte le successioni di somma finita in maniera naturale: alla successione $x = \{x_0, \dots, x_{N-1}\} \in \mathbb{Z}_N$ si fa corrispondere $\tilde{x} \in \ell^1 = \ell^1(\mathbb{N})$ data da $\tilde{x} = \{x_0, \dots, x_{N-1}, 0, 0, \dots\}$. Vorremmo che la definizione di convoluzione ciclica per le successioni finite di N termini fosse un caso particolare della definizione per ℓ^1 , dove si ha:

$$(x * y)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} y_k.$$

In questa espressione per la convoluzione su ℓ^1 non ci sono fattori di normalizzazione $\frac{1}{N}$ (non possono esserci: qui $N = \infty$). Per ottenere la desiderata conformità con il caso di successioni infinite occorre quindi cambiare la definizione di convoluzione su \mathbb{Z}_N :

Definizione 14.5.1. (Convoluzione ciclica non normalizzata.) Se $x, y \in \mathbb{C}^N$ (successioni finite di N elementi, ovvero periodiche di periodo N), la loro convoluzione ciclica non normalizzata è:

$$(x \tilde{*} y)_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_{n-k} y_k.$$

Teorema 14.5.2. *Come accennato nella Notazione a pagina 1016, scriviamo d'ora in poi $\hat{x} = \text{DFT}(x)$, $\hat{y} = \text{DFT}(y) \in \mathbb{C}^N$. Allora si ha*

$$\widehat{x \tilde{*} y} = N \hat{x} \hat{y}.$$

Dimostrazione. Segue dalle Definizioni 14.4.1 e 14.5.1 che

$$x \tilde{*} y = N x * y.$$

Perciò dal Teorema 14.4.6 otteniamo

$$\widehat{x \tilde{*} y} = N \widehat{x * y} = N \hat{x} \hat{y}.$$

□

Nota 14.5.3. Ricordiamo che, al fine di ottenere la moltiplicatività (senza il fattore N) della DFT di una convoluzione non normalizzata, occorre usare una DFT non normalizzata (Esercizio 14.4.7).

L'esistenza di due diverse normalizzazioni per la convoluzione ciclica, con due conseguenti teoremi per la trasformata di Fourier, non è una particolarità del caso finito: si ha anche nel caso continuo. In effetti, per $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ abbiamo definito la convoluzione senza normalizzazione

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy$$

(Definizione 6.1.11), ma d'altra parte, per $f, g \in L_*^1$ (funzioni periodiche di periodo 2π), abbiamo normalizzato:

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy$$

(Definizione 6.1.2). Se invece per $f, g \in L_*^1$ avessimo definito la convoluzione non normalizzata,

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy,$$

avremmo avuto la stessa normalizzazione per L_*^1 e per L^1 , però invece che

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$$

sarebbe risultato

$$\widehat{f * g}(n) = 2\pi\widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$$

(la verifica è lasciata come esercizio).

In questo libro abbiamo cercato di mascherare il più possibile questa ambiguità scegliendo il periodo uguale a 1, ossia definendo i coefficienti di Fourier $\widehat{f}(n)$ come $\int_0^1 f(t) e^{-2\pi int} dt$ (solo nei Capitoli 5 e 6 abbiamo rinunciato al fattore 2π all'esponente per alleggerire la notazione e non dover sempre scrivere $\cos(2\pi nt)$ o $\sin(2\pi nt)$, e quindi solo in quei capitoli abbiamo costantemente utilizzato funzioni periodiche di periodo 2π , ma dopo aver avvertito il lettore che questa era una scelta locale). Questa scelta del periodo, e quindi dei coefficienti di Fourier, ci ha poi portato a definire la trasformata di Fourier tramite un integrale con peso $e^{-2\pi i\omega t}$ invece che $e^{-i\omega t}$: in tal modo,

per la trasformata di Fourier inversa, il fattore di normalizzazione diventa 1. Purtroppo non si può scegliere altrettanto oculatamente il periodo nel caso della DFT, perché se $N = 1$ la DFT è, banalmente, l'operatore identità su successioni di un solo elemento. \square

Corollario 14.5.4. *Per tutte le successioni $x, y \in \mathbb{C}^N$ (successioni finite di N elementi, ovvero periodiche di periodo N), si ha*

$$(i) \quad \check{x}\check{y} = (x\tilde{y})^\vee$$

$$(ii) \quad (xy)^\wedge = \widehat{x\tilde{y}}$$

$$(iii) \quad (xy)^\vee = \frac{1}{N} \check{x}\check{y}$$

Dimostrazione. Dalle Definizioni 14.4.1 e 14.5.1 abbiamo che $x\tilde{y} = Nx * y$. Perciò:

$$(i) \quad \text{in base al Corollario 14.4.14, } (x\tilde{y})^\vee = N(x * y)^\vee = \check{x}\check{y};$$

$$(ii) \quad \text{in base al Corollario 14.4.13 (ii), } (xy)^\wedge = N\widehat{x} * \widehat{y} = \widehat{x\tilde{y}};$$

$$(iii) \quad \text{in base al Corollario 14.4.13 (i), } (xy)^\vee = \check{x} * \check{y} = \frac{1}{N} \check{x}\check{y}.$$

\square

14.6 Proprietà di traslazione della DFT e identità di Parseval

Definizione 14.6.1. (Base canonica di \mathbb{C}^N : la delta discreta.) Per $k = 0, \dots, N - 1$ poniamo

$$\delta_k = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}$$

con 1 al posto k -esimo. Osserviamo che δ_k corrisponde al k -esimo vettore canonico della base di \mathbb{C}^N (abbiamo già osservato più volte che lo spazio delle successioni di N elementi è isomorfo a \mathbb{C}^N).

Esercizio 14.6.2. $\widehat{\delta}_k = \frac{1}{N} \{1, w^k, w^{2k}, \dots, w^{(N-1)k}\}$.

Svolgimento. Per ogni $n = 0, \dots, N - 1$, $(\widehat{\delta}_k)_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \delta_{kj} w^{jn} = \frac{1}{N} w^{kn}$. \square

Proposizione 14.6.3. (La traslazione come convoluzione con la delta.) Sia λ_k l'operatore di traslazione ciclica sullo spazio \mathbb{C}^N delle successioni di N elementi (ovvero di periodo N):

$$(\lambda_k x)_n = x_{n-k}$$

(qui $n - k$ è inteso modulo N). Allora, nella notazione del Lemma 14.2.5,

$$\lambda_k x = N\delta_k * x = \delta \tilde{*} x.$$

Dimostrazione. Per ogni $n = 0, \dots, N - 1$ si ha:

$$\begin{aligned} (\delta_k * x)_n &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (\delta_k)_{n-j} x_j \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \delta_{k, n-j} x_j \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \delta_{j, n-k} x_j \\ &= \frac{1}{N} x_{n-k} \\ &= \frac{1}{N} (\lambda_k x)_n \end{aligned}$$

perché $\delta_{k, n-j} = 1$ se e solo se $k = n - j$, cioè se e solo se $j = n - k$, e zero altrimenti. \square

Da questi fatti segue l'analogo per la DFT della proprietà di traslazione della trasformata di Fourier (Teorema 8.2.4 (v)):

Corollario 14.6.4. (Proprietà di traslazione.) Per ogni $k = 0, \dots, N - 1$ e per ogni $x \in \mathbb{C}^N$ (successione finita di N elementi, ovvero periodica di periodo N),

$$\widehat{\lambda_k x}_n = w^{kn} \widehat{x}_n.$$

Dimostrazione. È una conseguenza immediata del Corollario 14.6.3, e del Teorema di convoluzione 14.4.6 e dell'Esercizio 14.6.2. \square

Esercizio 14.6.5. Ridimostrare il Corollario 14.6.4 calcolando la DFT di entrambi i lati e mostrando che sono uguali.

□

Per il prossimo risultato abbiamo bisogno del seguente fatto preliminare:

Esercizio 14.6.6. Per ogni successione di N elementi $x \in \mathbb{C}^N$, ovvero periodica di periodo N , si ha:

$$(i) \quad \hat{x}_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n$$

$$(ii) \quad x_0 = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{x}_n.$$

Svolgimento.

(i) Segue direttamente dalla Definizione 14.2.2 di DFT.

(ii) Segue dalla Definizione 14.2.2 di IDFT.

□

Proposizione 14.6.7. (*Identità di Parseval per la DFT.*) Per ogni $x \in \mathbb{C}^N$ (ovvero successione periodica di periodo N),

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{x}_k|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k \bar{x}_{-k}^\dagger \\
&= N(x * \bar{x}^\dagger)_0 && \text{(Definizione 14.4.1)} \\
&= N \sum_{k=0}^{N-1} (x * \bar{x}^\dagger)_k^\wedge && \text{(Esercizio 14.6.6)} \\
&= N \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}_k \widehat{\bar{x}^\dagger}_k && \text{(Teorema 14.4.6)} \\
&= N \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}_k \widehat{x}_k^\dagger && \text{(Lemma 14.4.10)} \\
&= N \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}_k \widehat{\bar{x}}_k^{\dagger\dagger} && \text{(Lemma 14.4.11)} \\
&= N \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}_k \widehat{x}_k \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} |\widehat{x}_k|^2.
\end{aligned}$$

□

14.7 Proprietà di parità della DFT

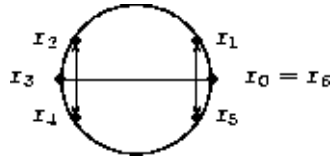
Definizione 14.7.1. Si dice che la successione finita $x \in \mathbb{C}^N$ (ovvero periodica di periodo N) è pari se $x^\dagger = x$, dispari se $x^\dagger = -x$.

Esempio 14.7.2. Considerando le successioni $x \in \mathbb{C}^N$ come funzioni su \mathbb{Z}_N (come in Sezione 14.3), si ottiene che x è pari se i suoi valori sono invarianti per la riflessione dei punti di \mathbb{Z}_N (considerati come punti sul cerchio complesso di raggio 1) rispetto all'asse orizzontale, e dispari se sotto questa riflessione i valori cambiano di segno.

Da qui segue che, per x dispari, allora $x_0 = 0$, e se N è pari anche $x_{\frac{N}{2}} = 0$.

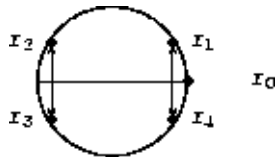
□

Esercizio 14.7.3. $N = 6$



In questo caso, x pari $\Rightarrow x_1 = x_5 = x_{N-1} = x_{-1}$ e $x_2 = x_4 = x_{-2}$; x dispari $\Rightarrow x_0 = -x_{-0} = -x_0 = 0$, $x_3 = -x_{-3} = -x_3 = 0$, $x_1 = -x_5 = -x_{-1}$ e $x_2 = -x_4 = -x_{-2}$. \square

Esercizio 14.7.4. $N = 5$



In questo caso, x pari $\Rightarrow x_1 = x_4 = x_{N-1} = x_{-1}$ e $x_2 = x_3$; x dispari $\Rightarrow x_0 = -x_{-0} = -x_0 = 0$, $x_1 = -x_4 = -x_{-1}$ e $x_2 = -x_3 = -x_{-2}$. \square

Esercizio 14.7.5. (i) $N = 4$: mostrare che in questo caso, le successioni pari sono quelle del tipo $\{a, b, c, b\}$ con $a, b, c \in \mathbb{C}$ e quelle dispari sono del tipo $\{0, b, 0, -b\}$ con $b \in \mathbb{C}$.

(ii) $N = 5$: mostrare che in questo caso, le successioni pari sono quelle del tipo $\{a, b, c, c, b\}$ con $a, b, c \in \mathbb{C}$ e quelle dispari sono del tipo $\{0, b, c, -c, -b\}$ con $b, c \in \mathbb{C}$.

(iii) Caratterizzare in maniera simile le successioni pari e dispari per $N = 3$ e per $N = 6$. □

Proposizione 14.7.6. (i) Se $x \in \mathbb{C}^N$ è pari (nel senso della Definizione 14.7.1) allora \widehat{x} è pari, e viceversa.

(ii) Se $x \in \mathbb{C}^N$ è dispari allora \widehat{x} è dispari, e viceversa.

Dimostrazione. Consideriamo $x \in \mathbb{C}^N$ come successione periodica di periodo N . Dire che x è pari significa che $x = x^\dagger$. Poiché $\widehat{x^\dagger} = (\widehat{x})^\dagger$ (Lemma 14.4.9) si ha $(\widehat{x})^\dagger = \widehat{x^\dagger} = \widehat{x}$. Questo prova (i). La dimostrazione di (ii) è analoga. □

Proposizione 14.7.7. (i) Se $x \in \mathbb{C}^N$ è una successione di N valori reali, allora $\operatorname{Re} \widehat{x}$ è una successione pari e $\operatorname{Im} \widehat{x}$ è dispari, e viceversa;

(ii) se $x \in \mathbb{C}^N$ è a valori immaginari, allora $\operatorname{Re} \widehat{x}$ è una successione dispari e $\operatorname{Im} \widehat{x}$ è pari, e viceversa.

Dimostrazione. La parte (i) segue direttamente dal Lemma 14.4.11, che, per una successione x a valori reali, asserisce che $\widehat{x} = (\widehat{\widehat{x}})^\dagger$. Di conseguenza, visto che ovviamente $\overline{x^\dagger} = \overline{x}$, se x è reale abbiamo $\overline{\widehat{x}} = (\widehat{x})^\dagger$, e quindi

$$(\operatorname{Re} \widehat{x})^\dagger = \operatorname{Re}(\widehat{x}^\dagger) = \operatorname{Re} \overline{\widehat{x}} = \operatorname{Re} \widehat{x},$$

ed analogamente $(\operatorname{Im} \widehat{x})^\dagger = -\operatorname{Im} \widehat{x}$.

Viceversa, se $\operatorname{Re} \widehat{x}$ è pari e $\operatorname{Im} \widehat{x}$ è dispari, allora

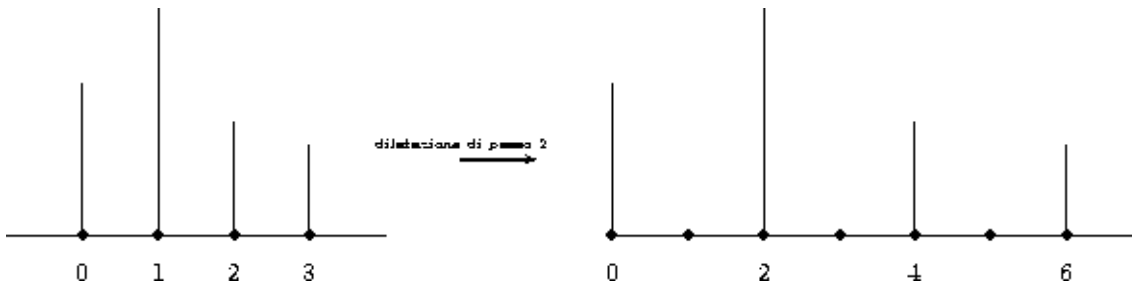
$$(\widehat{x})^\dagger = (\operatorname{Re} \widehat{x} + i \operatorname{Im} \widehat{x})^\dagger = (\operatorname{Re} \widehat{x})^\dagger + i(\operatorname{Im} \widehat{x})^\dagger = \operatorname{Re} \widehat{x} - i \operatorname{Im} \widehat{x} = \overline{\widehat{x}}. \quad (14.2)$$

Quindi $\widehat{x} = (\overline{\widehat{x}})^\dagger$. D'altra parte, per il Lemma 14.4.11, $(\widehat{\widehat{x}})^\dagger = \widehat{x}$. Da queste due identità segue che $\widehat{x} = \widehat{\widehat{x}}$, e quindi, per l'invertibilità della DFT (Teorema 14.2.4), x è reale.

La dimostrazione di (ii) è analoga. □

Corollario 14.7.8. (i) Se la successione finita (o periodica) x è a valori reali e pari, allora \widehat{x} è reale e pari;

(ii) se x è immaginaria e pari, allora \widehat{x} è immaginaria e pari;



(iii) se x è reale e dispari, allora \hat{x} è immaginaria e dispari;

(iv) se x è immaginaria e dispari, allora \hat{x} è reale e dispari.

Dimostrazione. Per provare (i) basta ricordare che, per la Proposizione 14.7.6, se x è pari anche \hat{x} è pari, quindi tali sono la sua parte reale ed immaginaria. Però, se x è anche reale, $\text{Im } \hat{x}$ deve essere dispari in base alla Proposizione 14.7.7 (i). Quindi $\text{Im } \hat{x}$ è simultaneamente pari e dispari, e perciò è nullo: quindi \hat{x} è reale. Le altre parti dell'enunciato si dimostrano in maniera analoga. \square

14.8 Proprietà di dilatazione della DFT

Cosa vuol dire dilatare una successione? Supponiamo di avere $x \in \mathbb{C}^N$ e che gli N valori x_0, \dots, x_{N-1} siano considerati alla stregua di dati in un istogramma, al variare del tempo $i = 0, \dots, N - 1$. Dilatare questo istogramma con passo 2 significa lasciar variare il tempo su un intervallo doppio, da 0 a $2N - 1$, ed equidistribuire gli N valori su questo intervallo raddoppiato. In tal modo, però, riempiamo solo metà degli indici da 0 a $2N - 1$: per gli altri indici l'altezza dell'istogramma rimane 0. Quindi stiamo raddoppiando la lunghezza della successione di dati, ma non l'informazione: usiamo i dati originali e li frammentiamo con zeri.

Definizione 14.8.1. Per ogni intero positivo K e per ogni $x \in \mathbb{C}^N$, in analogia con la notazione introdotta per le distribuzioni (Definizione 11.13.6; si veda anche l'Esempio 11.13.8), la dilatazione di passo K , $\Lambda_{\frac{1}{K}} x \in \mathbb{C}^{KN}$, è la successione finita (ovvero periodica di periodo KN)

$$\left(\frac{1}{K}\Lambda_{\frac{1}{K}}x\right)_m = \begin{cases} x_j & \text{se } m = Kj, j = 0, \dots, N - 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esempio 14.8.2. $\Lambda_{\frac{1}{2}}x = \{x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots, x_{N-1}, 0\}$.

Se il disegno in figura 14.8 riguardasse distribuzioni invece che successioni periodiche, avremmo niente altro che l'operatore di dilatazione $\frac{1}{2}\Lambda_{\frac{1}{2}}$ definito nella Definizione 11.13.6: la distribuzione ora è

$$F = \sum_{i=1}^{N-1} x_i \delta_i,$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\Lambda_{\frac{1}{2}}F = \sum_{i=1}^{N-1} x_i \delta_{2i}.$$

La trasformata di Fourier, in base al Teorema 11.13.9, verifica

$$\frac{1}{2}\widehat{\Lambda_{\frac{1}{2}}F} = \Lambda_2\widehat{F}. \quad (14.3)$$

Ma nel nostro caso, pensata come successione, $x \in \mathbb{C}^N$ diventa una successione periodica di periodo N . Quindi $\frac{1}{2}\Lambda_{\frac{1}{2}}F$ è periodica di periodo $2N$ (i suoi elementi sono $\{x_0, 0, x_1, 0, \dots, x_{N-1}, 0\} \in \mathbb{C}^{2N}$ e poi ripetuti per periodicità) e $\widehat{\Lambda_{\frac{1}{2}}F}$ è anche essa periodica di periodo $2N$. D'altra parte, l'identità (14.3) rivela che $\frac{1}{2}\widehat{\Lambda_{\frac{1}{2}}F} = \Lambda_2\widehat{F}$ è determinata da soli N valori (perché \widehat{F} è una successione periodica di impulsi, di periodo N). Quindi $\Lambda_2\widehat{F}$, al variare dell'indice da 0 a $2N - 1$ deve ripetere due volte i suoi valori, con due repliche consecutive, la prima sui primi N indici e la seconda sui successivi N indici. Si noti che, considerata come distribuzione, $\Lambda_2\widehat{F}$ è una successione periodica di impulsi centrati non più agli istanti interi, ma ai semi-interi $\frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots\}$. Nondimeno, se la si considera nell'ambito degli indici puramente discreti della DFT, quello che conta non è dove sono centrati questi impulsi, ma quanti sono i dati che bastano per determinare la successione periodica, quindi quanto è il periodo. In questo modo abbiamo dimostrato un risultato sulla DFT con l'approccio indiretto di passare attraverso la trasformata di Fourier di distribuzioni (si vedano la Nota 13.1.6 e Sezione 14.1). Ora enunciamo il risultato e lo dimostriamo in maniera intrinseca. Per maggior generalità, invece della dilatazione di passo 2, consideriamo la dilatazione per un qualsiasi passo K intero positivo. \square

Teorema 14.8.3. (Proprietà di dilatazione per la DFT.) Se K è un intero positivo, $x \in \mathbb{C}^N$ ed il suo dilatato $\frac{1}{K}\Lambda_{\frac{1}{K}}x$ di passo K è definito come in Definizione 14.8.1, allora si ha:

$$\begin{aligned} \widehat{\left(\frac{1}{K}\Lambda_{\frac{1}{K}}x\right)}_n &= (\text{DFT}_{KN}\left(\frac{1}{K}\Lambda_{\frac{1}{K}}x\right))_n \\ &= \begin{cases} \frac{1}{K}\widehat{x}_n & \text{per } n = 0, \dots, N-1 \\ \frac{1}{K}\widehat{x}_{n-N} & \text{per } n = N, \dots, 2N-1 \\ \frac{1}{K}\widehat{x}_{n-2N} & \text{per } n = 2N, \dots, 3N-1 \\ \dots & \\ \frac{1}{K}\widehat{x}_{n-(K-1)N} & \text{per } n = (K-1)N, \dots, KN-1 \end{cases} \end{aligned}$$

In altre parole

$$\left(\frac{1}{K}\Lambda_{\frac{1}{K}}x\right)_n = \frac{1}{K}\widehat{x}_{n \bmod N}$$

per $n = 0, \dots, KN-1$, od anche

$$(\text{DFT}_{KN}\left(\frac{1}{K}\Lambda_{\frac{1}{K}}x\right))_n = \frac{1}{K} \text{DFT}_N(x)_{n \bmod N}.$$

In particolare, se identifichiamo $\frac{1}{K}\Lambda_{\frac{1}{K}}x$ con la sua estensione periodica di periodo N , l'ultima identità diventa

$$(\text{DFT}_{KN}\left(\frac{1}{K}\Lambda_{\frac{1}{K}}x\right))_n = \frac{1}{K} \text{DFT}_N(x)_n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Dimostrazione. Scriviamo $w = e^{-2\pi i/KN}$. Osserviamo che w è una radice dell'unità di ordine KN , e $w^K = e^{-2\pi i/N}$ è una radice dell'unità di ordine N . Rammentiamo che

$$(\Lambda_K x)_j = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq mK \\ x_m & \text{se } j = mK, m = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

Quindi, per ogni n ,

$$\begin{aligned}
 (\text{DFT}_{KN}(\frac{1}{K}\Lambda_{\frac{1}{K}}x))_n &= \frac{1}{KN} \sum_{j=0}^{KN-1} (\frac{1}{K}\Lambda_{\frac{1}{K}}x)_j w^{jn} & (14.4) \\
 &= \frac{1}{KN} \sum_{m=0}^{N-1} x_m w^{mKn} \\
 &= \frac{1}{K} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m (w^K)^{mn} \\
 &= \frac{1}{K} (\text{DFT}_N(x))_n,
 \end{aligned}$$

dove abbiamo considerato $\text{DFT}_N(x) \in \mathbb{C}^N$ come successione periodica di periodo N . Questo prova il Teorema nella forma dell'ultima identità dell'enunciato. Se invece consideriamo $\text{DFT}_N(x)$ come successione finita di N passi, allora se $n = n_0 \bmod N$, cioè se $n = n_0 + kN$, ($k = 0, \dots, N-1$) si ha

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m (w^K)^{mn} &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m (w^K)^{mn_0} (w^K)^{kN} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m (w^K)^{mn_0}
 \end{aligned}$$

perché $w^{kN} = 1$ e quindi $(w^K)^{kN} = 1$. Perciò (14.4) diventa

$$(\text{DFT}_{KN}(\frac{1}{K}\Lambda_{\frac{1}{K}}x))_n = \frac{1}{K} (\text{DFT}_N(x))_{n_0}.$$

Questo prova il Teorema nella forma delle altre identità dell'enunciato.

□

14.9 La DFT di successioni a valori reali

Nel resto di questo capitolo usiamo intensamente le proprietà di parità e disparità di successioni e delle loro DFT. Per evidenziare queste proprietà riscriviamo la DFT di una successione periodica come facemmo in Sezione 5.6 per i coefficienti di Fourier, scrivendoli come integrale da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ invece che da 0 a π .

Nota 14.9.1. Se $x \in \mathbb{C}^N$ è considerata come una successione periodica di periodo N , a causa della periodicità della successione w^n dalla Definizione 14.2.2 segue che, per $k = 0, \dots, N - 1$:

$$\text{DFT}(x)_k = \hat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=[-\frac{N}{2}]+1}^{\frac{N}{2}} x_n w^{nk}.$$

(Se N è dispari, allora il primo termine della sommatoria ha per indice il più piccolo intero $k > [-\frac{N}{2}] + 1$, cioè $k = (-\frac{N}{2} - \frac{1}{2}) + 1 = -\frac{N}{2} + \frac{1}{2}$, e l'ultimo ha per indice il più grande intero $k < \frac{N}{2}$, cioè $k = [\frac{N}{2}] = \frac{N-1}{2}$). \square

Nota 14.9.2. Supponiamo che $x \in \mathbb{C}^N$ sia a valori reali. Allora, dalla Proposizione 14.4.11, sappiamo che $\overline{\hat{x}} = \hat{x}^\dagger$. Perciò $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}$, e se $\frac{N}{2}$ è intero (cioè se N è pari) anche $\hat{x}_{\frac{N}{2}} \in \mathbb{R}$ (nel seguito ci basterà il caso N pari, ma non abbiamo bisogno di restringere l'attenzione a questo caso particolare). Osserviamo quindi che, se x è una successione di N numeri reali e N è pari, \hat{x} è determinata dagli $\frac{N}{2} - 1$ numeri complessi $\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{\frac{N}{2}-1}\}$ più i due numeri reali x_0 e $x_{\frac{N}{2}}$ (perché $\hat{x}_{-m} = \overline{\hat{x}_m}$); invece, se N è dispari, \hat{x} è determinata da $\frac{N-1}{2}$ (ossia $[\frac{N}{2}]$) numeri complessi $\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{\frac{N-1}{2}}\}$ e dal numero reale x_0 . Poiché un numero complesso consiste di una coppia di numeri reali, in entrambi i casi \hat{x} è determinata da N numeri reali, tanti quanti i dati (cioè la successione x). \square

Nota 14.9.3. (DFT reale.) Dalla espressione della DFT data nella Nota 14.9.1 e dalle considerazioni sulla simmetria della Nota 14.9.2 segue che, se $x \in \mathbb{C}^N$ è a valori reali, allora \hat{x} è determinata dai suoi valori \hat{x}_k , $k = 0, \dots, \frac{N}{2}$, dati da

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left(\cos \frac{2\pi nk}{N} - i \sin \frac{2\pi nk}{N} \right) x_n \quad (\text{RDFT}).$$

In altre parole,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \hat{x}_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} x_n \cos \frac{2\pi nk}{N}, \\ \operatorname{Im} \hat{x}_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} x_n \sin \frac{2\pi nk}{N}.\end{aligned}$$

□

Definizione 14.9.4. (RDFT.) Le formule della Nota 14.9.3 definiscono una nuova trasformata da \mathbb{R}^N a $\mathbb{C}^{\frac{N}{2}-1} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ se N è pari, o a $\mathbb{C}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \oplus \mathbb{R}$ se N è dispari (perché $\operatorname{Im} \hat{x}_0 = 0 = \operatorname{Im} \hat{x}_{\frac{N}{2}}$ in quanto $\sin \frac{2\pi nk}{N} = 0$ per $k = 0$ e $k = \frac{N}{2}$: questo fatto era stato anticipato nella Nota 14.9.2). La nuova trasformata si chiama DFT reale (RDFT).

D'ora in avanti, per semplicità, limitiamo l'attenzione a N pari.

Proposizione 14.9.5. (Formula di inversione per la RDFT.) Per ogni N pari, $x \in \mathbb{R}^N$ e $n = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}$,

$$x_n = \hat{x}_0 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left(\operatorname{Re}(\hat{x}_k) \cos \frac{2\pi kn}{N} - \operatorname{Im}(\hat{x}_k) \sin \frac{2\pi kn}{N} \right) + \hat{x}_{\frac{N}{2}} \cos(\pi k) \quad (\text{IRDFT}).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
 x_n &= \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \widehat{x}_k w^{kn} \quad (\text{Definizione 14.2.2, Nota 14.9.1}) \\
 &= \widehat{x}_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} (\widehat{x}_k w^{kn} + \widehat{x}_{-k} w^{-kn}) + \widehat{x}_{\frac{N}{2}} \cos(\pi k) \\
 &\quad (\text{perché } \cos(\pi k) = (-1)^k = w^{kN/2}) \\
 &= \widehat{x}_0 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \operatorname{Re}(\widehat{x}_k w^{kn}) + \widehat{x}_{\frac{N}{2}} \cos(\pi k) \quad (\text{dal momento che } \widehat{x}_{-k} = \overline{\widehat{x}_k}) \\
 &= \widehat{x}_0 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left(\operatorname{Re}(\widehat{x}_k) \cos \frac{2\pi kn}{N} - \operatorname{Im}(\widehat{x}_k) \sin \frac{2\pi kn}{N} \right) + \widehat{x}_{\frac{N}{2}} \cos(\pi k).
 \end{aligned}$$

□

14.10 La DFT di successioni reali pari: Trasformata Discreta dei Coseni (DCT)

Dal Corollario 14.7.8 (i) sappiamo che la DFT di una successione reale e pari è reale e pari. Per comodità di notazione, consideriamo la DFT a $2N$ punti di una successione reale pari $x \in \mathbb{R}^{2N}$. Poiché x è reale, sappiamo dalla Nota 14.9.3 che \widehat{x} è determinata dagli N valori \widehat{x}_k , $k = 0, \dots, N-1$: gli altri si ottengono dalla simmetria di parità, $\widehat{x}_{-k} = \widehat{x}_k$. Ma poiché x è anche pari, la formula della RDFT presentata nella Nota 14.9.3 ora diventa:

Nota 14.10.1. (RDFT di successioni pari.) Se $x \in \mathbb{R}^{2N}$ è pari e $w = w_{2N} = e^{-2\pi i/2N} = e^{-\pi i/N}$, allora \widehat{x} è determinato dagli $N+1$ valori reali x_k

($k = 0, \dots, N$) dati da

$$\begin{aligned}
 \widehat{x}_k &= \frac{1}{2N} \sum_{n=-N+1}^N x_n w^{nk} \\
 &= \frac{1}{2N} \left[x_0 + \sum_{n=1}^{N-1} (x_n w^{nk} + x_{-n} w^{-nk}) + x_N w^{Nk} \right] \\
 &= \frac{1}{N} \left[\frac{x_0}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} x_n \frac{w^{nk} + w^{-nk}}{2} + \frac{x_N}{2} (-1)^k \right] \\
 &= \frac{1}{N} \left[\frac{x_0}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} x_n \cos \frac{\pi nk}{N} + \frac{x_N}{2} \cos(\pi k) \right].
 \end{aligned}$$

□

Le uguaglianze della Nota 14.10.1 definiscono la seguente nuova trasformata da \mathbb{R}^{N+1} a \mathbb{R}^{N+1} :

Definizione 14.10.2. (Trasformata Discreta dei Coseni : DCT). Per $x \in \mathbb{R}^{N+1}$ si definisce $\widehat{x} = \text{DCT}(x)$ nel modo seguente: per $k = 0, \dots, N$,

$$\widehat{x}_k = \frac{1}{N} \left[\frac{x_0}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} x_n \cos \frac{\pi nk}{N} + \frac{x_N}{2} \cos(\pi k) \right]$$

In paragone alla formula di inversione per la DFT, la DCT ha una proprietà ancora più simmetrica: a parte un fattore di normalizzazione, è uguale alla sua trasformata inversa, come mostra il risultato seguente:

Proposizione 14.10.3. (Formula di inversione per la DCT.) Se $x \in \mathbb{R}^{N+1}$ e $\widehat{x} = \text{DCT}(x)$, allora $x = 2N \text{DCT}(\widehat{x})$.

Dimostrazione. Poiché x è reale e pari, lo è anche \widehat{x} , come già osservato più sopra (Corollario 14.7.8 (i)). Ponendo $\text{Im} \widehat{x}_k = 0$ nella formula di inversione della RDFT (Proposizione 14.9.5, dove bisogna sostituire $2N$ al posto di N) si ottiene, per $n = 0, \dots, N$:

$$x_n = \widehat{x}_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \widehat{x}_k \cos \frac{\pi nk}{N} + \widehat{x}_N \cos(\pi k) = 2N \widehat{x}_n = 2N \text{DCT}(\widehat{x})_n.$$

□

Nota 14.10.4. La DCT, cioè la DFT di una successione reale pari, è analoga allo sviluppo in serie di Fourier di soli coseni di funzione periodiche pari (Esercizio 5.2.8 (i)) ed alla trasformata di Fourier in coseni di funzioni reali pari (Corollario 8.2.6 (i)).

Si osservi che la formula di inversione (Proposizione 14.10.3) può essere estesa ai valori di n interi al di fuori dell'intervallo $0, \dots, N$ e produce una estensione x periodica di periodo $2N$ e pari. \square

Nota 14.10.5. (DCT di successioni reali dispari: Discrete Sine Transform.) Se si parte da un $x \in \mathbb{R}^{2N}$ dispari invece che pari, si ottengono risultati analoghi con seni al posto dei coseni. In questo caso, per disparità, si ha $x_0 = 0 = x_N$, e si trova

$$\begin{aligned}\widehat{x}_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} x_n \sin \frac{\pi nk}{N} \quad (k = 0, \dots, N) \quad (\text{DST}), \\ x_n &= 2 \sum_{k=1}^{N-1} \widehat{x}_k \sin \frac{\pi nk}{N} = 2N \widehat{\widehat{x}}_n \quad (n = 1, \dots, N-1) \quad (\text{IDST}).\end{aligned}$$

(la seconda uguaglianza vale anche per $n = 0$ e $n = N$, ma è banale in questi due casi perché $x_0 = 0 = x_N$ e i seni si annullano). \square

14.11 DFT, periodicizzazione e formula di somma di Poisson

In questa breve Sezione finale riformuliamo mediante la DFT, in maniera più compatta ed elegante ma più formale, la formula di somma di Poisson che abbiamo presentato in maniera naturale in termini di periodicizzazioni (Corollario 10.3.2 e Nota 10.3.5). Una versione più esplicita e meno formale del prossimo enunciato verrà formulata e dimostrata nel Lemma 16.1.1.

Proposizione 14.11.1. (Formula di somma di Poisson espressa mediante la DFT.) *Sia f una funzione che soddisfa le ipotesi della formula di somma di Poisson di passo τ (Corollario 10.3.2 e Nota 10.3.5), e per $n \in \mathbb{Z}$ poniamo $x_n = n\tau$, $\omega_n = \frac{n}{N\tau}$. Scriviamo $f_n = f(x_n)$, $\widehat{f}_n = \widehat{f}(\omega_n)$. Per $N > 0$ rammentiamo la definizione di operatore di periodicizzazione \mathcal{P}_N di passo N ,*

introdotto nella Definizione 10.2.1 per funzioni di variabile reale anziché per successioni:

$$\mathcal{P}_N\{f_n\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{n+jN}.$$

Nelle ipotesi fatte sulla funzione f , questa serie converge: supponiamo per semplicità una condizione leggermente più forte, ossia che i dati $\{f_n\}$ siano una successione in ℓ_1 .

Allora la formula di somma di Poisson diventa:

$$\tau N \{DFT_N \mathcal{P}_N\{f_n\}\}_k = \mathcal{P}_N\{\widehat{f}_n\}_{-k}.$$

In altre parole, il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \{f_n\} & \xrightarrow{\uparrow} & \{\widehat{f}_n\} \\ \mathcal{P}_N \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}_N \\ \mathcal{P}_N\{f_n\} & \xrightarrow{\tau N DFT_N} & \tau N \{DFT_N \mathcal{P}_N\{\widehat{f}_n\}\} \end{array}$$

Nel caso $\tau = 1$, la formula di somma di Poisson discreta diventa

$$DFT(f)_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(-k + mN)$$

(si veda anche il Lemma 16.1.1 nel seguito).

Dimostrazione. Sappiamo dalla Nota 10.3.5 che, per ogni ω , si ha

$$\tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_n e^{2\pi i x_n \omega} = \mathcal{P}_{\frac{1}{\tau}} \widehat{f}(\omega). \quad (14.5)$$

Riscriviamo il primo membro di questa identità in termini di DFT e periodizzazione di passo N e calcoliamolo alla frequenza $\omega_k = k/N\tau$. Poiché $x_n = n\tau$ si ottiene

$$\begin{aligned} \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{2\pi i x_n \omega_k} &= \tau \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_{n+jN} e^{2\pi i (n+jN)k/N} \\ &= \tau \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \mathcal{P}_N\{f_m\}_n e^{2\pi i (n+jN)k/N} \\ &== \tau N DFT_N \{\mathcal{P}_N\{f_m\}^\dagger\}_{-k}, \end{aligned}$$

perché le serie hanno termini in ℓ_1 , quindi sono assolutamente convergenti, e pertanto riordinabili, grazie al teorema del riordinamento di Riemann (Sezione 1.1).

Consideriamo ora il lato di destra dell'identità (14.5), $\mathcal{P}_{\frac{1}{\tau}}\widehat{f}(\omega)$, e calcoliamolo alla frequenza ω_k . Poiché gli ω_k sono spazati di passo $\frac{1}{N\tau}$, in un intervallo di lunghezza $1/\tau$ cadono esattamente N degli ω_k . Pertanto la periodizzazione di passo $1/\tau$ della *funzione* \widehat{f} , calcolata sulla successione $\{\omega_k\}$, equivale alla periodizzazione di passo N della *successione* \widehat{f}_k : ovvero,

$$\mathcal{P}_{\frac{1}{\tau}}\widehat{f}(\omega_k) = \mathcal{P}_N\{\widehat{f}_k\}.$$

Questo conclude la dimostrazione. \square

14.12 Esercizi sulla DFT

Esercizio 14.12.1. Sia $x = \{0, -2i, 0, 2i\}$ una successione estesa per periodicità a tutti gli interi. Quale delle seguenti può essere la sua trasformata di Fourier?

1. $\square \quad \widehat{x} = \{0, \frac{i}{4}, 0, -\frac{i}{4}\}$
2. $\square \quad \widehat{x} = \{0, 1, 0, 1\}$
3. $\square \quad \widehat{x} = \{0, 2i, 0, -2i\}$
4. $\square \quad \widehat{x} = \{0, -1, 0, 1\}$
5. $\square \quad$ nessuna delle precedenti

\square

Esercizio 14.12.2. Sia $x = \{x_0, \dots, x_{N-1}\}$ una successione estesa per periodicità a tutti gli interi. Se $(\lambda_m x)(n) = x(n - m)$, come si esprime $\widehat{\lambda_m x}(k)$ in termini di $\widehat{x}(k)$?

\square

Esercizio 14.12.3. Sia $x = \{x_0, \dots, x_{N-1}\}$ una successione estesa per periodicità a tutti gli interi. Se

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n = 0$$

quale delle seguenti successioni può essere la sua DFT?

1. $\{0, 1, 2, 3, \dots, N - 1\}$
2. $\{1, 2, 3, \dots, N - 1\}$
3. $\{-1, -2, -3, \dots, N - 1\}$
4. $\{1, 0, 0, \dots, N - 1\}$

□

Esercizio 14.12.4. Sia $x = \{x_0, \dots, x_{N-1}\}$ una successione estesa per periodicità a tutti gli interi. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

1. Se $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ è dispari allora $x_0 = x_2 = 0$
2. Se $(\lambda_m x)(n) = x(n - m)$ allora $\widehat{\lambda_m x}(k) = e^{-\frac{2\pi i m k}{N}} \widehat{x}(k)$
3. Se x è reale e pari allora \widehat{x} è immaginaria e pari
4. Se x è reale allora $\widehat{x}(k) = x(k)$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.5. Siano $x = \{1, -1, 0, 2\}$ e $y = \{1, 2, 2, 1\}$ estese per periodicità a tutti gli interi. Allora

1. $\widehat{x * y}(1) = -\frac{i}{4}$
2. $\widehat{x * y}(1) = \frac{1}{4}(2 - i)(1 + i)$
3. $\widehat{x * y}(1) = -\frac{1}{4}(1 + 3i)(1 + i)$
4. $\widehat{x * y}(1) = -\frac{1}{4}$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.6. Siano $x = \{1, 1, 2, 2\}$ e $y = \{1, 0, -1, 1\}$ due successioni estese per periodicità a tutti gli interi. Quali delle seguenti asserzioni sono vere?

1. $\widehat{x * y}(1) = \frac{i}{4}(2 + i)$
2. $\widehat{x * y}(1) = \frac{1}{4}(2 + i)(-1 + i)$
3. $\widehat{x * y}(1) = \frac{i}{4}$
4. $\widehat{x * y}(1) = \frac{1}{4}$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.7. Sia $x = \{x_0, \dots, x_{N-1}\}$ una successione estesa per periodicità a tutti gli interi. Sia $y = \{y_0, \dots, y_{N-1}\}$ con $y_n = x_n - x_{n-1}$ per $n = 1, \dots, N - 1$ e $y_0 = x_0$. Esprimere $\widehat{y}(k)$ in termini di $\widehat{x}(k)$ □

Esercizio 14.12.8. Siano $x = \{1, 1, -1, 1\}$ e $y = \{1, 0, -2, 2\}$ estese per periodicità a tutti gli interi. Allora

1. $\widehat{x * y}(1) = \frac{1}{2}(3 + 2i)$
2. $\widehat{x * y}(1) = \frac{1}{4}i(3 + 2i)$
3. $\widehat{x * y}(1) = -\frac{1}{4}i$
4. $\widehat{x * y}(1) = -\frac{i}{4}$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.9. Consideriamo successioni di 6 elementi $\{x_0, \dots, x_5\}$ estese per periodicità a tutti gli interi. Quali delle seguenti successioni sono dispari (eventualmente più di una oppure nessuna)?

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. $\{1, 2, 3, -3, -2, -1\}$
3. $\{0, -1, 0, 0, 0, 1\}$
4. $\{0, 2, -3, 0, 3, -2\}$

5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.10. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

1. Se x è pari allora $x(k) = x(N - k) \forall k$
2. Se x è pari allora $x_0 = 0$
3. Se x è reale e pari allora $\hat{x}(k) = \hat{x}(-k) \forall k$
4. Se $(\lambda_m x)(n) = x(n - m)$ allora $(\lambda_m x)^\wedge(k) = \hat{x}(k - m)$

□

Esercizio 14.12.11. Consideriamo la successione di 5 elementi $\{1, i, -1, 2, -i\}$ estesa per periodicità a tutti gli interi. Allora

1. $\hat{x}(0) = 1$
2. $\hat{x}(0) = \frac{2}{5}$
3. $\hat{x}(0) = 0$
4. $\hat{x}(0) = \frac{2}{5}i$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.12. Siano $x = \{1, -2, -1, 1\}$ e $y = \{-1, 1, 2, 2\}$ estese per periodicità a tutti gli interi. Allora

1. $\widehat{x * y}(1) = -\frac{1}{4}$

2. $\widehat{x * y}(1) = \frac{1}{4}(2 + 3i)(-3 + i)$
3. $\widehat{x * y}(1) = \frac{i}{4}$
4. $\widehat{x * y}(1) = 0$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.13. Consideriamo successioni di N elementi $\{x_0, \dots, x_{N-1}\}$ estese per periodicità a tutti gli interi. Scrivere la definizione della trasformata di Fourier discreta e la relativa formula di inversione

Siano $x = \{-1, 2, 2, 1\}$ e $y = \{1, 2, 1, -1\}$ estese per periodicità a tutti gli interi. Allora

1. $\widehat{x * y}(1) = \frac{3}{4}$
2. $\widehat{x * y}(1) = 0$
3. $\widehat{x * y}(1) = -\frac{3}{4}i(-3 - i)$
4. $\widehat{x * y}(1) = -\frac{3}{4}i$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.14. Consideriamo la successione di 5 elementi $\{i, i, 0, 2 + i, 1\}$ estesa per periodicità a tutti gli interi. Allora

1. $\hat{x}(0) = \frac{3+3i}{5}$
2. $\hat{x}(0) = \frac{i}{5}$
3. $\hat{x}(0) = 0$
4. $\hat{x}(0) = \frac{2}{5}$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.15. Consideriamo successioni di 6 elementi $\{x_0, \dots, x_5\}$ estese per periodicità a tutti gli interi. Quali delle seguenti successioni sono pari (eventualmente più di una oppure nessuna)?

1. $\{0, 1, 2, 3, 2, 1\}$
2. $\{1, 1, -1, -1, 1, 1\}$
3. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
4. $\{1, -2, 1, 0, 1, -1\}$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.16. Siano $x = \{x_0, \dots, x_{N-1}\}$ ed $y = \{y_0, \dots, y_{N-1}\}$ due successioni di N elementi estese per periodicità a tutti gli interi. Scrivere la definizione di $(x * y)(n)$ ed enunciare il teorema sulla trasformata di Fourier di $(x * y)$. □

Esercizio 14.12.17. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

1. Se x è dispari allora $x_0 = 0$
2. Se x è pari e y è dispari allora $x + y$ è dispari
3. $\hat{x}(k) = \frac{1}{N}x(-k)$

4. Se $\hat{x}(k)$ è la trasformata di Fourier di $x(n)$ allora

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}(k) e^{2\pi i n k}$$

□

Esercizio 14.12.18. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

1. Se x è dispari allora $x(k) = x(N - k) \forall k$
 2. $(x_1 * x_2)^{\wedge}(k) = N \hat{x}_1(k) \hat{x}_2(k)$
 3. Se x è reale e pari allora

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{2\pi n k}{N}$$

4. La trasformata di Fourier di $x(n)$ è

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{2\pi i n k}$$

□

Esercizio 14.12.19. Consideriamo la successione di 5 elementi $\{-i, 0, 3, 2i, -1\}$ estesa per periodicità a tutti gli interi. Allora

1. $\hat{x}(0) = 0$
 2. $\hat{x}(0) = \frac{i}{5}$
 3. $\hat{x}(0) = \frac{2+i}{5}$
 4. $\hat{x}(0) = \frac{3-i}{5}$
 5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.20. Consideriamo una successione di N elementi $\{x_0, \dots, x_{N-1}\}$ estesa per periodicità a tutti gli interi. Quanto vale $\widehat{x}(k)$? Se x è una successione pari, quanto vale $\widehat{x}(k)$ in questo caso?

□

Esercizio 14.12.21. Siano $x = \{-2, -2, 1, -1\}$ e $y = \{1, 1, 2, 2\}$ estese per periodicità a tutti gli interi. Allora

1. $\widehat{x * y}(1) = 0$
2. $\widehat{x * y}(1) = -6$
3. $\widehat{x * y}(1) = 6i$
4. $\widehat{x * y}(1) = \frac{1}{4}(-3 + i)(-1 + i)$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.22.

Consideriamo successioni di 6 elementi $\{x_0, \dots, x_5\}$ estese per periodicità a tutti gli interi. Quali delle seguenti successioni sono dispari (eventualmente più di una oppure nessuna)?

1. $\{0, 2, -1, 0, 1, -2\}$
2. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. $\{0, 1, -1, 0, 1, -1\}$
4. $\{-1, 2, -3, 0, 3, -2\}$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.23. Sia $x = \{1, 2 + i, 0, 2 + i\}$ una successione estesa per periodicità a tutti gli interi. Quale delle seguenti può essere la sua trasformata di Fourier?

1. $\widehat{x} = \frac{1}{4} \{i, i, -3i, i\}$

2. $\hat{x} = \frac{1}{4} \{5i, i, -3i, -i\}$
3. $\hat{x} = \frac{1}{4} \{5i, 2, -3i, 2\}$
4. $\hat{x} = \frac{1}{4} \{5i, i, -3i, i\}$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.24. Sia $x = \{0, 2i, 0, -2i\}$ una successione estesa per periodicità a tutti gli interi. Quale delle seguenti può essere la sua trasformata di Fourier?

1. $\{0, -i, 0, i\}$
2. $\{0, 1, 0, -1\}$
3. $\{1, 0, 0, -1\}$
4. $\{0, 1, 0, 1\}$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.25. Sia $x = \{0, -2i, 0, 2i\}$ una successione estesa per periodicità a tutti gli interi. Quale delle seguenti può essere la sua trasformata di Fourier?

1. $x = \{0, \frac{i}{4}, 0, -\frac{i}{4}\}$
2. $x = \{0, 1, 0, 1\}$
3. $x = \{0, 2i, 0, -2i\}$
4. $x = \{0, -1, 0, 1\}$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.26. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

1. Se $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ è dispari allora $x_2 = 0$
2. Se $(\lambda_m x)(n) = x(n - m)$ allora $\widehat{\lambda_m x}(k) = e^{-\frac{2\pi i m k}{N}} \widehat{x}(k)$
3. Se x è dispari allora $x_0 = 0$
4. Se x è reale allora $\widehat{\bar{x}}(k) = \widehat{x}(k)$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.27. Un segnale f è campionato a frequenza $\omega = 44\text{Khz}$. Qual è il massimo passo di campionamento di f perché il segnale sia ricostruibile senza perdite dai suoi campioni?

1. $\tau = 88$
2. $\tau = \frac{1}{88}$
3. $\tau = \frac{1}{44}$
4. $\tau = \frac{1}{22}$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 14.12.28. Sia K un sottomultiplo di N . Si calcoli la DFT su N punti della funzione caratteristica dell'intervallo $[-\frac{N}{2K}, \frac{N}{2K}]$. Si calcoli poi la DFT della funzione caratteristica dell'intervallo traslato $[\frac{N}{2} - \frac{N}{2K}, \frac{N}{2} + \frac{N}{2K}]$.
Suggerimento: per la seconda domanda, si faccia uso della proprietà di traslazione della DFT, Proposizione 14.6.4. □

Esercizio 14.12.29. La riga centrale di un'immagine consiste di dati numerici $\{x_n, n = 1, \dots, N = 1024\}$. Sia K un sottomultiplo di N . Vogliamo filtrare l'immagine in modo che, nel dominio delle frequenze, i dati siano moltiplicati per il filtro triangolare m che vale 0 per frequenze da 1 a $N - \frac{N}{K}$, vale 1 alla frequenza $N/2$, vale di nuovo zero dalla frequenza $N - \frac{N}{K}$ in poi, e varia linearmente nell'intervallo di frequenze da $N - \frac{N}{K}$ a $N + \frac{N}{K}$: ossia, moltiplichiamo la DFT del segnale per questo filtro passa banda triangolare

m di raggio N/K centrato alla frequenza $N/2$ (la frequenza centrale). Si usi la convoluzione normalizzata.

Suggerimento: Moltiplicare la DFT del segnale per un filtro equivale a convolvere il segnale per la DFT inversa del filtro. Ora, se il moltiplicatore fosse una funzione caratteristica centrata alla frequenza 0, allora l'antitrasformata sarebbe una funzione sinc, del tipo $\frac{\sin Ax}{Ax}$. Invece è una funzione triangolare, che è la convoluzione di una funzione caratteristica di ampiezza metà per sé stessa: quindi l'antitrasformata è il quadrato puntuale, ossia del tipo $\frac{\sin^2 Ax}{(Ax)^2}$. Ora lasciamo al lettore, con un po' di pazienza, trovare le unità di scala: l'ampiezza A e la costante di normalizzazione. Un indizio: la successione ha lunghezza $N = 1024$ punti, e l'ampiezza del triangolo è $2\frac{N}{K}$ punti, quindi il convolutore dovrebbe essere del tipo $\frac{\sin^2 2\pi k/N}{(2\pi k/N)^2}$. Il valore massimo di questa funzione è 1: esso deve essere normalizzato affinché diventi uguale all'integrale del moltiplicatore diviso per N (si vedano il Corollario 14.2.8 (i) ed il precedente Esercizio 14.12.28). Il moltiplicatore è la convoluzione di una funzione caratteristica di ampiezza N/K per sé stessa, quindi (subesercizio!) il suo integrale è uguale all'integrale della funzione caratteristica, ovvero N/K . Pertanto dobbiamo moltiplicare per N/K il convolutore, ma dovevamo già dividerlo per N : quindi dobbiamo, in totale, normalizzarlo dividendo per K . Infine, poiché il filtro è centrato a metà periodo, esso è stato traslato di un semiperiodo: pertanto (si veda il precedente Esercizio 14.12.28) il convolutore deve essere moltiplicato per l'esponenziale complesso di modulo 1 associato alla traslazione di un semiperiodo, che è la funzione a segni alterni $(-1)^k$. Quindi, in totale, il filtraggio dovrebbe consistere nel convolvere la successione di partenza per $\frac{1}{K}(-1)^k \frac{\sin^2 2\pi k/N}{(2\pi k/N)^2}$.

Tutte le verifiche e le correzioni sono lasciate al lettore: sono importanti, perché è facile dimenticarsi che, rispetto alla trasformata di Fourier, le identità e le disuguaglianze per la DFT di ordine N comportano spesso un fattore di normalizzazione $1/N$. Il lettore deve verificare questi fattori di normalizzazione passaggio per passaggio (è per questo che abbiamo consigliato di usare la convoluzione normalizzata, ma quel che conta è che il lettore utilizzi sempre o la convoluzione normalizzata o quella non normalizzata, senza alternare fra le due). Al termine del calcolo, consigliamo di verificare il risultato nel caso il segnale $\{x_n\}$ sia una generica delta di Dirac.

□

Esercizio 14.12.30. Sia $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{N-1})$ e $\hat{\mathbf{x}}$ la sua DFT.

- (i) Supponiamo che $|\widehat{x}_i| < 1$ per ogni $i = 1, \dots, N-1$. Consideriamo il prodotto di convoluzione $\mathbf{x}^{(n)} := \mathbf{x} * \dots * \mathbf{x}$ (n fattori). Si dimostri che $\sum_{j=1}^{N-1} x_j^{(n)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.
- (ii) Si dia una dimostrazione alternativa del fatto che $x^{(n)}_0 \rightarrow 0$ utilizzando la proprietà del valore iniziale della DFT.

Svolgimento.

- (i) Dalla definizione di (IDFT) si ha

$$\mathbf{x}^{(n)}_k := \sum_{j=1}^{N-1} \widehat{\mathbf{x}}^{(n)}_j e^{2\pi i j k / N},$$

e quindi

$$|\mathbf{x}^{(n)}_k| \leq \sum_{j=1}^{N-1} |\widehat{\mathbf{x}}^{(n)}_j|.$$

D'altra parte, per la moltiplicatività della DFT rispetto alla convoluzione,

$$\widehat{\mathbf{x}}^{(n)}_j = (\widehat{\mathbf{x}}^n)_j,$$

e il membro di destra tende a zero quando $n \rightarrow \infty$ perché $|\widehat{\mathbf{x}}_j| < 1$ per ogni j . Pertanto anche $\mathbf{x}^{(n)}_k$ tende a zero al crescere di n .

- (ii) Dalla definizione di DFT,

$$\widehat{x}^{(n)}_k := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} x^{(n)}_j e^{-2\pi i j k / N},$$

otteniamo, ponendo $k = 0$,

$$\sum_{j=1}^{N-1} x_j^{(n)} = N \widehat{x}^{(n)}_0.$$

Utilizzando di nuovo la moltiplicatività per convoluzione,

$$\widehat{\mathbf{x} * \mathbf{y}}_k = \widehat{x}_k \widehat{y}_k,$$

facciamo vedere che tende a zero

$$\widehat{x^{(n)}}_0 = \text{DFT}(\mathbf{x} * \cdots * \mathbf{x})_0 = \widehat{x}_0 \cdots \widehat{x}_0 = (\widehat{x}_0)^n.$$

In effetti, la successione $(\widehat{x}_0)^n$ converge a zero se $n \rightarrow +\infty$, poiché, per ipotesi, $|\widehat{x}_k| < 1$ per ogni k .

(ii) Dalla formula di inversione per la DFT

$$x^{(n)}_k = \sum_{j=1}^{N-1} \widehat{x^{(n)}}_j e^{2\pi jk/N},$$

ponendo $k = 0$ otteniamo

$$x^{(n)}_0 = \sum_{j=1}^{N-1} \widehat{x^{(n)}}_j = \sum_{j=1}^{N-1} (\widehat{x}_j)^n.$$

Poiché il limite su n commuta con la somma finita, da questa identità e dalla proprietà moltiplicativa $\widehat{x^{(n)}}_j = (\widehat{x}_j)^n$ otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{(n)}_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{N-1} (\widehat{x}_j)^n = \sum_{j=1}^{N-1} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\widehat{x}_j)^n = 0,$$

di nuovo perché $|\widehat{x}_j| < 1$ per ogni j .

□

Capitolo 15

La trasformata rapida di Fourier

Questo capitolo è dedicato a sviluppare algoritmi veloci per il calcolo della DFT. Parte della presentazione è tratta da [2].

15.1 Dalla DFT alla FFT

Abbiamo già annunciato nella Nota 14.2.3 che in questo capitolo intendiamo usare una diversa normalizzazione della DFT rispetto a quella introdotta nella definizione originale della trasformata di Fourier discreta (Definizione 14.2.2). In effetti, per semplificare i numerosi passaggi, scriviamo l'indice k come variabile fra parentesi, e poniamo

$$\hat{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi i k n / N} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (15.1)$$

dove, a differenza che in quella Definizione, abbiamo scritto n invece di nT e k invece di k/NT . Il precedente fattore di normalizzazione, dato dalla divisione per N , può essere applicato comunque alla fine dei passaggi, se lo si desidera.

Ponendo $w = e^{-2\pi i / N}$ la (15.1) diventa

$$\hat{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w^{kn} \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (15.2)$$

In generale, per $x(n)$ complesso e $k = 0, \dots, N-1$, la (15.2) si può scrivere

$$\begin{aligned}\hat{x}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re} x(n) \operatorname{Re} w^{kn} - \operatorname{Im} x(n) \operatorname{Im} w^{kn} \\ &+ i(\operatorname{Re} x(n) \operatorname{Im} w^{kn} + \operatorname{Im} x(n) \operatorname{Re} w^{kn}).\end{aligned}\quad (15.3)$$

Dall'espressione precedente risulta chiaro che il calcolo diretto di $\hat{x}(k)$ richiede $4N$ moltiplicazioni reali e $2N$ addizioni reali per ogni valore di k .

Poiché bisogna valutare $\hat{x}(k)$ per N diversi valori di k , il calcolo diretto della DFT di una sequenza $x(n)$ richiede $4N^2$ moltiplicazioni reali e $2N^2$ addizioni reali, ovvero, in altri termini N^2 moltiplicazioni complesse.

Poiché la quantità dei calcoli è $O(N^2)$, è evidente che il numero delle operazioni aritmetiche richiesto per il calcolo diventa enorme per valori grandi di N .

Per questo motivo sono molto interessanti procedure di calcolo che riducano il numero di moltiplicazioni e addizioni.

La maggior parte delle tecniche usate per migliorare l'efficienza del calcolo della DFT sfrutta le seguenti proprietà particolari di w^{kn} :

Simmetria:

$$w^{k(N-n)} = w^{-kn} = \overline{w^{kn}}$$

Questa proprietà vale perché

$$w^{kN} = e^{\frac{-2\pi ikN}{N}} = e^{-2\pi ik} = 1.$$

Periodicità:

$$w^{kn} = w^{k(N+n)} = w^{n(N+k)}$$

Questa proprietà vale per la stessa ragione, dal momento che

$$w^{k(N+n)} = e^{-2\pi ik(N+n)/N} = e^{-2\pi ik} w^{kn}.$$

Algoritmi di calcolo che sfruttano sia la simmetria sia la periodicità della sequenza w^{kn} erano noti già da molto tempo prima dell'avvento degli elaboratori elettronici. Essi erano stati studiati perché a quei tempi qualunque accorgimento che riducesse i calcoli fatti a mano, anche solo di un fattore 2, era visto con interesse.

Runge, e più tardi Danielson e Lanczos, svilupparono algoritmi la cui complessità era $O(N \log N)$ invece che $O(N^2)$. A quei tempi questa differenza, che adesso è cruciale, era di grande importanza però non vitale, perché prima che esistessero i calcolatori elettronici bisognava fare i calcoli a mano, e questo è possibile solo per piccoli valori di N , per i quali N^2 e $N \log N$ non sono molto diversi. La possibilità di ridurre notevolmente i tempi di calcolo per grandi N (da N^2 a $N \log N$), quindi usando necessariamente calcolatori elettronici, non fu riscoperta fino al 1965, quando J. Cooley e J. Tukey [7] pubblicarono un algoritmo per il calcolo della trasformata di Fourier discreta che vale quando N è un numero non primo, cioè prodotto di due o più interi. Algoritmi di questo tipo divennero noti come algoritmi per la trasformata rapida di Fourier o semplicemente FFT (acronimo per *Fast Fourier Transform*).

Il principio fondamentale su cui si basano tutti questi algoritmi è la scomposizione del calcolo della DFT di una successione di lunghezza N in DFT di dimensioni via via più piccole.

In questo capitolo ci occuperemo di due classi fondamentali di algoritmi di FFT. La prima, detta a decimazione nel tempo, prende il nome dal fatto che nello scomporre il calcolo in trasformate di ordine più piccolo, la successione $x(n)$ viene suddivisa in successioni sempre più corte (per un segnale nel dominio del tempo, l'indice è associato al tempo, da cui il nome). Nella seconda classe di algoritmi, la successione che viene scomposta in sottosuccessioni sempre più corte è quella dei coefficienti della DFT, da cui il nome di decimazione di frequenza.

15.2 Algoritmi FFT basati sulla decimazione nel tempo

Il modo più semplice per mostrare il principio della decimazione nel tempo è quello di considerare il caso particolare di N potenza di 2, cioè

$$N = 2^\nu.$$

Poiché N è un intero pari, possiamo provare a calcolare $\hat{x}(k)$ dividendo $x(n)$ in due successioni di $\frac{N}{2}$ punti ciascuna, costituite una dai punti che hanno indice pari in $x(n)$, l'altra da quelli che hanno indice dispari. Mostriamo che in tal modo la DFT su N punti si spezza in due DFT su $\frac{N}{2}$ punti:

questo procedimento si chiama *decimazione* (poiché qui avviene sugli indici del segnale originale, che modellano istanti successivi in cui il segnale è dato, si parla di *decimazione nel tempo*: nella prossima Sezione 15.3 illustreremo un procedimento analogo che scinde indici pari e dispari nel segnale trasformato, quindi che decima le frequenze).

La (15.2) diventa:

$$\hat{x}(k) = \sum_{n \text{ pari}} x(n)w^{kn} + \sum_{n \text{ dispari}} x(n)w^{kn}, \quad (15.4)$$

ovvero, ponendo $n = 2r$ per n pari e $n = 2r + 1$ per n dispari,

$$\begin{aligned} \hat{x}(k) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)w^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)w^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)(w^2)^{rk} + w^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)(w^2)^{rk}. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Osserviamo che ciascuna di queste due ultime sommatorie è una DFT su $\frac{N}{2}$ punti: infatti $w^2 = e^{-\frac{2\pi i}{N/2}}$ e le successioni dei dati in ingresso consistono di $\frac{N}{2}$ punti. Poniamo

$$\hat{g}(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)(w^2)^{rk}, \quad (15.6)$$

$$\hat{h}(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)(w^2)^{rk}, \quad (15.7)$$

La (15.5) diventa

$$\hat{x}(k) = \hat{g}(k) + w^k \hat{h}(k). \quad (15.8)$$

Anche se l'indice k può assumere N valori, $k = 0, \dots, N-1$, occorre calcolare \hat{g} e \hat{h} solo per k tra 0 e $\frac{N}{2} - 1$ perché sia $\hat{g}(k)$ che $\hat{h}(k)$ sono periodiche in k con periodo $\frac{N}{2}$.

Dopo aver calcolato le due DFT corrispondenti alle due sommatorie in (15.5), dobbiamo combinarle per ottenere la DFT su N punti, $\hat{x}(k)$. La Figura 15.1

mostra il tipo di calcoli necessario per ottenere $\hat{x}(k)$ in base alla (15.5) per una successione di $N = 8$ dati.

Ciò che la Figura 15.1 mostra è il fatto che vengono calcolate due DFT di 4 punti: $\hat{g}(k)$ indica la DFT sui quattro punti $x(2r)$ di indice pari, $\hat{h}(k)$ indica la DFT sui quattro punti di indice dispari.

Il valore di $\hat{x}(0)$ si ottiene moltiplicando $\hat{h}(0)$ per w^0 e sommando il risultato a $\hat{g}(0)$ e così via. Per ottenere $\hat{x}(4)$ dovremmo moltiplicare $\hat{h}(4)$ per w^4 e sommare il risultato a $\hat{g}(4)$. Dato che, come già visto, $\hat{g}(k)$ e $\hat{h}(k)$ sono entrambe periodiche con periodo 4, si ha $\hat{g}(4) = \hat{g}(0)$ e $\hat{h}(4) = \hat{h}(0)$.

Perciò $\hat{x}(4)$ si ottiene moltiplicando $\hat{h}(0)$ per w^4 e sommando il risultato a $\hat{g}(0)$.

Le due scatole rettangolari in Figura 15.1 rappresentano due DFT a 4 punti, eseguite rispettivamente sui dati di ingresso di indice pari $x(2r)$, $r = 0, 1, 2, 3$, e di indice dispari $x(2r + 1)$, $r = 0, 1, 2, 3$. Le linee illustrano il percorso dei dati nelle varie fasi del calcolo. Dopo aver eseguito ciascuna DFT a 4 punti, i quattro risultati in uscita dalla prima e dalla seconda vengono sommati con pesi. Il congiungersi di due linee rappresenta una somma. Se un addendo viene moltiplicato per un peso, nella figura il peso viene scritto a fianco alla linea che rappresenta l'addendo. A causa di (15.8) i pesi sono le potenze w^k , $k = 0, 1, \dots, 7$, e gli addendi pesati sono solo quelli in uscita dalla seconda DFT a 4 punti (quelli che provengono dai dati in ingresso con gli indici dispari).

Confrontiamo ora il numero di moltiplicazioni e di addizioni richieste per il calcolo della DFT nel caso in cui si usi la definizione (15.8) e si svolga il calcolo diretto.

Abbiamo già visto che in questo caso sono necessarie N^2 moltiplicazioni ed addizioni complesse (le addizioni in realtà sono $N(N - 1)$, ma assumeremo d'ora in poi N grande, in modo che $N - 1 \approx N$).

La (15.3) richiede il calcolo di due DFT su $\frac{N}{2}$ punti, e quindi $2 \left(\frac{N}{2}\right)^2$ moltiplicazioni complesse e circa $2 \left(\frac{N}{2}\right)^2$ addizioni complesse. Le due DFT su $\frac{N}{2}$ punti devono poi essere combinate come mostrato in (15.8), il che richiede altre N moltiplicazioni complesse, corrispondenti al prodotto della seconda sommatoria per w^k , ed altre N addizioni complesse, corrispondenti alla somma di questo prodotto con la prima sommatoria. In totale abbiamo quindi che il calcolo di (15.8) per tutti i valori di k richiede $N + 2 \left(\frac{N}{2}\right)^2$ moltiplicazioni e addizioni complesse.

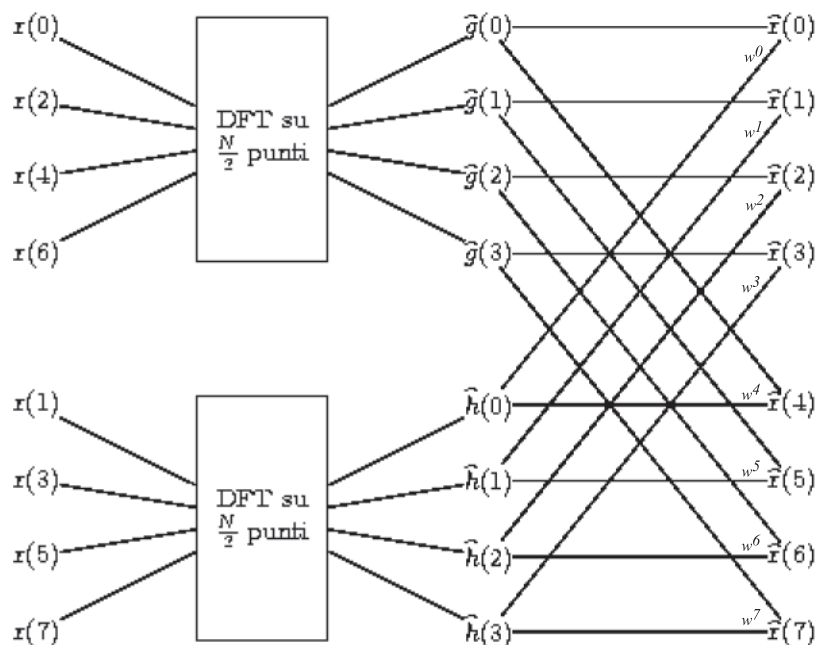


Figura 15.1: la DFT a N punti scissa in due DFT a $N/2$ punti (qui e nelle figure seguenti $N = 8$)

Si noti che per il ricombinamento il numero di operazioni è un polinomio di grado 1 in N , quindi cresce linearmente con N , mentre per il calcolo della DFT su N elementi il numero di operazioni cresce quadraticamente.

Abbiamo visto che l'espressione (15.8) corrisponde a spezzare il calcolo originario su N punti in due calcoli su $N/2$ punti.

Ora iteriamo la decimazione, o meglio la scissione in due DFT di ordine metà. Dato che N è una potenza di 2, anche $\frac{N}{2}$ è pari. Quindi il calcolo di ciascuna DFT su $\frac{N}{2}$ punti della (15.8) si può effettuare tramite il calcolo e la successiva combinazione di due DFT su $\frac{N}{4}$ punti. Quindi $\hat{g}(k)$ e $\hat{h}(k)$ si possono calcolare così:

$$\begin{aligned}
 \widehat{g}(k) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)(w^2)^{rk} & (15.9) \\
 &= \sum_{s=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4s)(w^{4sk}) + \sum_{s=0}^{\frac{N}{4}-1} x(2(s+1))w^{2(2s+1)k} \\
 &= \sum_{s=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4s)(w^4)^{sk} + w^{2k} \sum_{s=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4s+2)(w^4)^{sk}.
 \end{aligned}$$

Analogamente

$$\widehat{h}(k) = \sum_{s=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4s+1)(w^4)^{sk} + w^{2k} \sum_{s=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4s+3)(w^4)^{sk}. \quad (15.10)$$

Per il caso particolare della Figura 15.1, gli schemi di calcolo ottenuti applicando la (15.9) e la (15.10) sono mostrati nella Figura 15.2

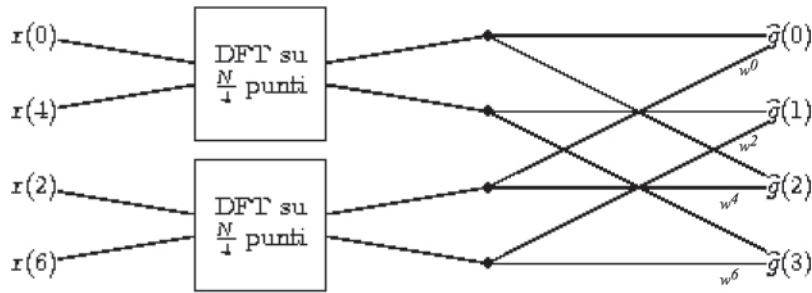


Figura 15.2: la DFT a $N/2$ punti spezzata in due DFT a $N/4$ punti (il blocco in alto della Figura 15.1)

Introducendo questi schemi nel grafo della Figura 15.1 otteniamo il grafo completo (Figura 15.3)

Esercizio 15.2.1. Ricavare in maniera alternativa l'algoritmo di decimazione nel tempo della FFT, appena illustrato nelle equazioni (15.9) e (15.10),

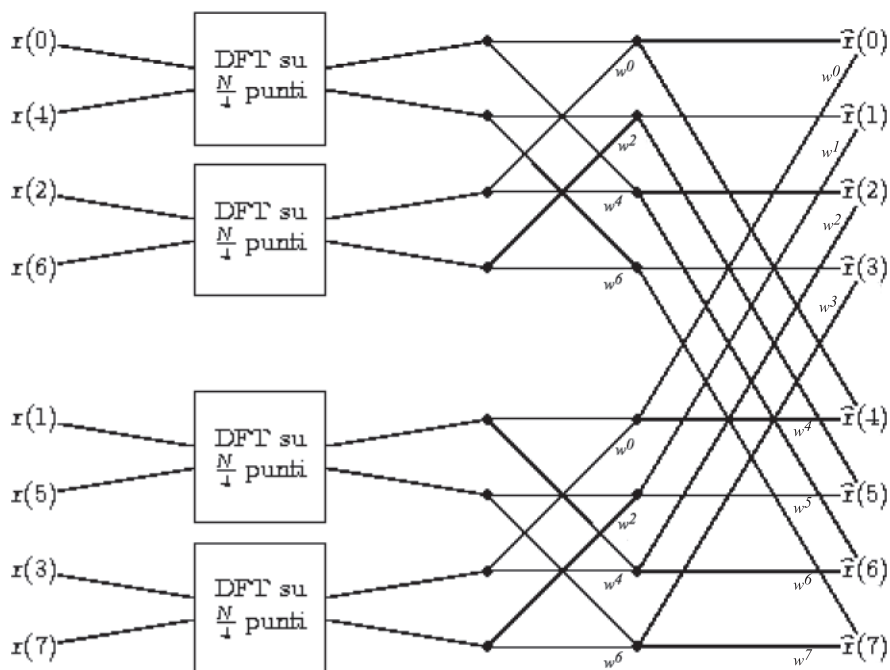


Figura 15.3: il grafico degli ultimi due stadi della DFT a 8 punti

utilizzando le proprietà di dilatazione (Teorema 14.8.3) e di traslazione (Proposizione 14.6.4) della DFT.

Suggerimento. A titolo di esempio, illustriamo il caso $N = 8$. Nel segnale $x \in \mathbb{C}^8$ separiamo come prima gli indici pari da quelli dispari per ottenere due nuovi segnali x^+ e x^- , ma ora, invece di considerare questi due nuovi segnali come due vettori con quattro componenti

$$\begin{aligned} X^+ &= \{x_0, x_2, x_4, x_6\} \\ X^- &= \{x_1, x_3, x_5, x_7\} \end{aligned}$$

continuiamo a considerarli come vettori ad otto componenti inframmezzando i quattro dati che li compongono con zeri:

$$\begin{aligned} x^+ &= \{x_0, 0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, 0\} \\ x^- &= \{0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, x_7\}. \end{aligned}$$

Chiaramente si ha $x = x^+ + x^-$. D'altra parte, il nostro scopo è di ridurre il calcolo di \widehat{x} a quello delle due DFT di ordine quattro $\widehat{X}^+, \widehat{X}^-$. Dal Teorema

di dilatazione 14.8.3 sappiamo che

$$\widehat{x}^+ = \{\widehat{X}^+_{0}, \widehat{X}^+_{1}, \widehat{X}^+_{2}, \widehat{X}^+_{3}, \widehat{X}^+_{0}, \widehat{X}^+_{1}, \widehat{X}^+_{2}, \widehat{X}^+_{3}\}$$

(abbiamo ommesso il fattore di normalizzazione $\frac{1}{2}$ dell'enunciato del Teorema 14.8.3 perché ora stiamo utilizzando una DFT non normalizzata).

Lo stesso risultato si avrebbe per la successione $\{x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, x_7, 0\}$, ma noi siamo invece interessati alla successione $x^- = \{0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, x_7\}$, che si ottiene dalla precedente per una traslazione di passo uno. Dalla proprietà di traslazione (Proposizione 14.6.4) segue quindi che

$$\widehat{x}^- = \{\widehat{X}^-_{0}, w\widehat{X}^-_{1}, w^2\widehat{X}^-_{2}, w^3\widehat{X}^-_{3}, w^4\widehat{X}^-_{0}, w^5\widehat{X}^-_{1}, w^6\widehat{X}^-_{2}, w^7\widehat{X}^-_{3}\}.$$

Poiché $x = x^+ + x^-$ e $w^4 = -1$ (quindi $w^{k+4} = -w^k$), da qui segue

$$\widehat{x} = \widehat{x}^+ + \widehat{x}^- = \{\widehat{X}^+_{0} + \widehat{X}^-_{0}, \widehat{X}^+_{1} + w\widehat{X}^-_{1}, \widehat{X}^+_{2} + w^2\widehat{X}^-_{2}, \widehat{X}^+_{3} + w^3\widehat{X}^-_{3}, \\ \widehat{X}^+_{0} - \widehat{X}^-_{0}, \widehat{X}^+_{1} - w\widehat{X}^-_{1}, \widehat{X}^+_{2} - w^2\widehat{X}^-_{2}, \widehat{X}^+_{3} - w^3\widehat{X}^-_{3}\}.$$

Questo è esattamente lo spezzamento della DFT a 8 punti nelle due DFT a 4 punti ottenuto in (15.5), ed illustrato graficamente nella Figura 15.1.

□

Riassumendo, per la DFT su 8 punti che abbiamo usato come esempio, dapprima abbiamo ridotto il calcolo si è ridotto a quello di due DFT su 4 punti, poi abbiamo scisso queste DFT a 4 punti in due DFT su 2 punti. Ora consideriamo la DFT su 2 punti, ad esempio $x(0), x(4)$, che è schematizzata in Figura 15.4.

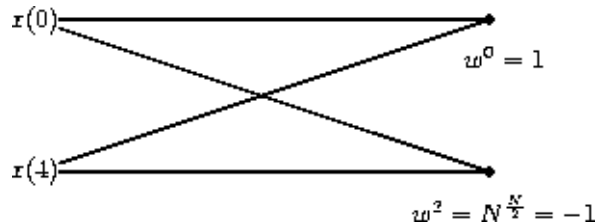


Figura 15.4: il blocco in alto nella Figura 15.3

Di nuovo, inserendo questo schema nel grafo di Figura 15.3 si ottiene il grafo completo (Figura 15.5) per il calcolo della DFT su 8 punti.

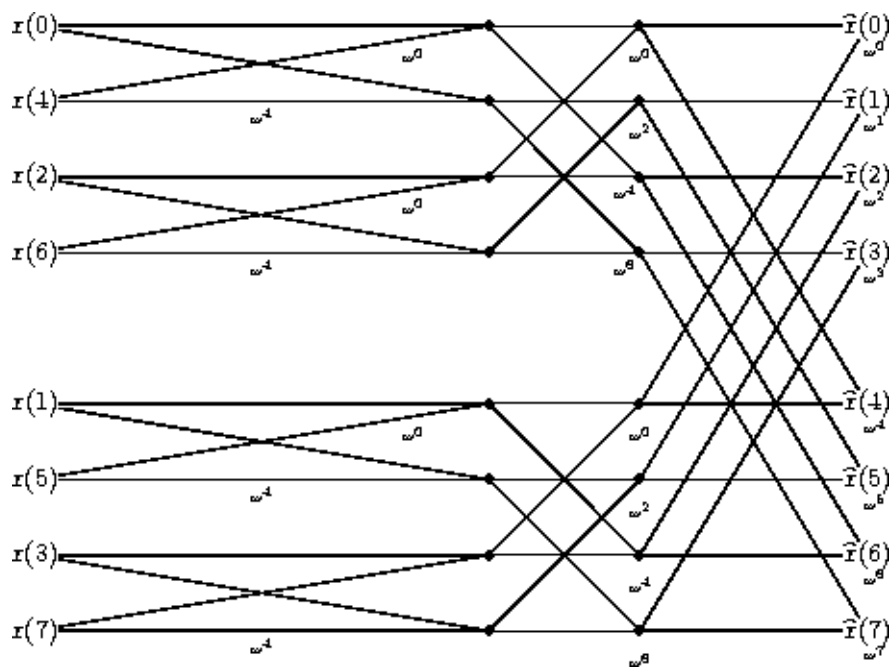


Figura 15.5: il grafo a farfalle completo della DFT a 8 punti

Il caso più generale, in cui N è una potenza di 2 con esponente maggiore di 3, si tratta iterativamente in modo analogo, scomponendo la trasformata su N punti delle (15.9) e (15.10) in trasformate su $\frac{N}{2}$ punti, poi queste ultime in trasformate su $\frac{N}{4}$ punti e così di seguito finché non si arriva a trasformate su 2 punti. Ciò richiede ν stadi di calcolo, dove $\nu = \log_2(N)$.

Abbiamo visto in precedenza che, quando una trasformata su N punti viene scomposta in due trasformate su $\frac{N}{2}$ punti, il numero di moltiplicazioni e addizioni complesse è $N + 2\left(\frac{N}{2}\right)^2$.

Quando le trasformate su $\frac{N}{2}$ punti vengono scomposte in trasformate su $\frac{N}{4}$ punti, si devono calcolare quattro trasformate, ciascuna delle quali richiede $\left(\frac{N}{4}\right)^2$ moltiplicazioni e addizioni. Bisogna poi ricombinarle come si vede in (15.9) e (15.10). Il calcolo complessivo per questi due stadi richiede, allora, $N + 2\left(\frac{N}{2}\right) + 4\left(\frac{N}{4}\right)^2$ moltiplicazioni e addizioni complesse.

Se $N = 2^\nu$, questo procedimento si ripete $\nu = \log_2(N)$ volte, ed alla fine occorrono solo DFT su due punti (le quali, come vedremo in Figura 15.6), richiedono solo somme e differenze, ma non moltiplicazioni). Il numero complessivo di operazioni per l'intero processo diventa quindi $O(N \log_2(N))$.

Questo numero di operazioni coincide con quanto si osserva nella Figura 15.5, che fornisce una versione grafica della dimostrazione.

Più precisamente, ogni stadio comporta N moltiplicazioni e addizioni complesse per la fase di ricombinamento; l'intero processo si traduce in $\log_2(N)$ tali stadi, e se ne ricava, come prima, un totale di $N \log_2(N)$ moltiplicazioni e addizioni complesse.

Ora mostriamo come sia possibile ridurre ulteriormente il totale delle operazioni aritmetiche.

Come abbiamo visto, e come mostrato in Figura 15.5, ogni stadio di calcolo ha come ingresso una successione di N numeri complessi e la trasforma in un'altra successione di N numeri complessi. Questo succede per $\nu = \log_2(N)$ ed alla fine porta alla DFT desiderata.

Indichiamo con $X_m(s)$, $s = 0, \dots, N-1$, $m = 1, \dots, \nu$, la successione di numeri complessi che risultano dal m -simo stadio di calcolo. Per comodità riscriviamo l'insieme dei campioni di ingresso con la notazione $X_0(s)$. Le successioni $X_m(s)$ e $X_{m+1}(s)$ sono quindi le successioni rispettivamente di ingresso e di uscita del $(m+1)$ -simo stadio di calcolo. Ogni stadio induce una separazione fra indici pari e dispari. Ad esempio, nel caso $N = 8$, le

separazioni nei tre stadi iterativi sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \{0, \dots, 7\} &\rightarrow \{0, 2, 4, 6\} \cup \{1, 3, 5, 7\} \\ \{0, 2, 4, 6\} &\rightarrow \{0, 4\} \cup \{2, 6\} \\ \{1, 3, 5, 7\} &\rightarrow \{1, 5\} \cup \{3, 7\} \end{aligned}$$

Pertanto, in questo caso $N = 8$, illustrato in Figura 15.5, risulta:

$$\begin{aligned} X_0(0) = x(0) \quad X_0(1) = x(4) \quad X_0(2) = x(2) \quad X_0(3) = x(6) \\ X_0(4) = x(1) \quad X_0(5) = x(5) \quad X_0(6) = x(3) \quad X_0(7) = x(7). \end{aligned} \quad (15.11)$$

Usando queste notazioni si verifica facilmente che il calcolo base del grafo è quello mostrato in Figura 15.6.

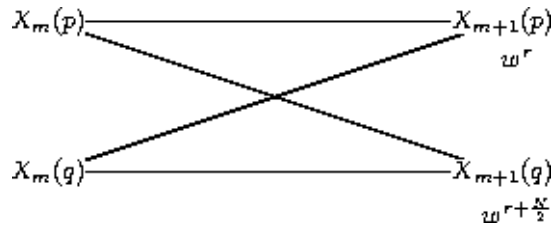


Figura 15.6: il blocco di base della FFT: somme e differenze

Le equazioni rappresentate da questo grafo sono della forma

$$\begin{aligned} X_{m+1}(p) &= X_m(p) + w^r X_m(q) \\ X_{m+1}(q) &= X_m(p) + w^{r+\frac{N}{2}} X_m(q), \end{aligned} \quad (15.12)$$

dove consideriamo gli N dati spezzati in due blocchi contigui di cardinalità $N/2$ e gli indici p e q sono indici corrispondenti nei due blocchi, ossia distando di $N/2$; l'esponente r varia al variare di p e q all'interno dei rispettivi blocchi, da 0 a $\frac{N}{2} - 1$.

A causa della sagoma in Figura 15.6, questo grafo viene comunemente chiamato *a farfalla*.

Le espressioni (15.12) suggeriscono un modo per ridurre di un fattore due il numero delle moltiplicazioni complesse. Infatti, si noti che

$$w^{\frac{N}{2}} = e^{\frac{-2\pi i}{N}(\frac{N}{2})} = e^{-\pi i} = -1,$$

per cui le (15.12) diventano:

$$\begin{aligned} X_{m+1}(p) &= X_m(p) + w^r X_m(q) \\ X_{m+1}(q) &= X_m(p) - w^r X_m(q). \end{aligned} \quad (15.13)$$

Le (15.13) sono rappresentate dalla Figura 15.7.

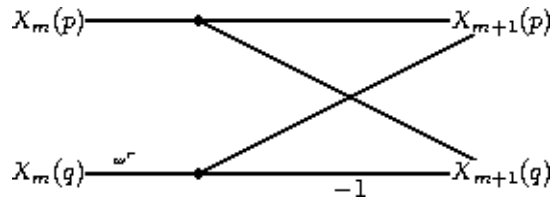


Figura 15.7: la farfalla di base con pesi ottimizzati

Poiché ogni stadio ha $\frac{N}{2}$ farfalle della forma in Figura 15.7 e gli stadi sono $\log_2(N)$, il numero totale di moltiplicazioni è ora diventato $\frac{N}{2} \log_2(N)$. La Figura 15.8 è il grafo della Figura 15.5 con i pesi ottimizzati grazie alla sostituzione (15.13).

Dalla Figura 15.8 si nota che, per il calcolo degli elementi in posizione p e q della $(m+1)$ -sima successione (cioè dell'uscita del m -simo stadio di bisezione) sono necessari solo gli elementi p e q della m -sima successione (cioè del suo ingresso). Pertanto, se $X_{m+1}(p)$ e $X_{m+1}(q)$ vengono memorizzati negli stessi registri di memoria usati per $X_m(p)$ e $X_m(q)$, sono necessari in totale solo N registri per svolgere l'intero calcolo.

Questo procedimento viene comunemente chiamato *calcolo sul posto*: ogni nuova successione calcolata in uscita da un qualsiasi stadio viene memorizzata nelle stesse celle di memoria della successione di ingresso originaria.

Notiamo dalla Figura 15.5 che, affinché il calcolo possa essere fatto *sul posto*, i dati di ingresso devono essere memorizzati in ordine non sequenziale. In effetti l'ordine con il quale i dati di ingresso sono memorizzati è a disposizione invertita di bit (*bit reversal*). Vediamo cosa si intende con questa terminologia.

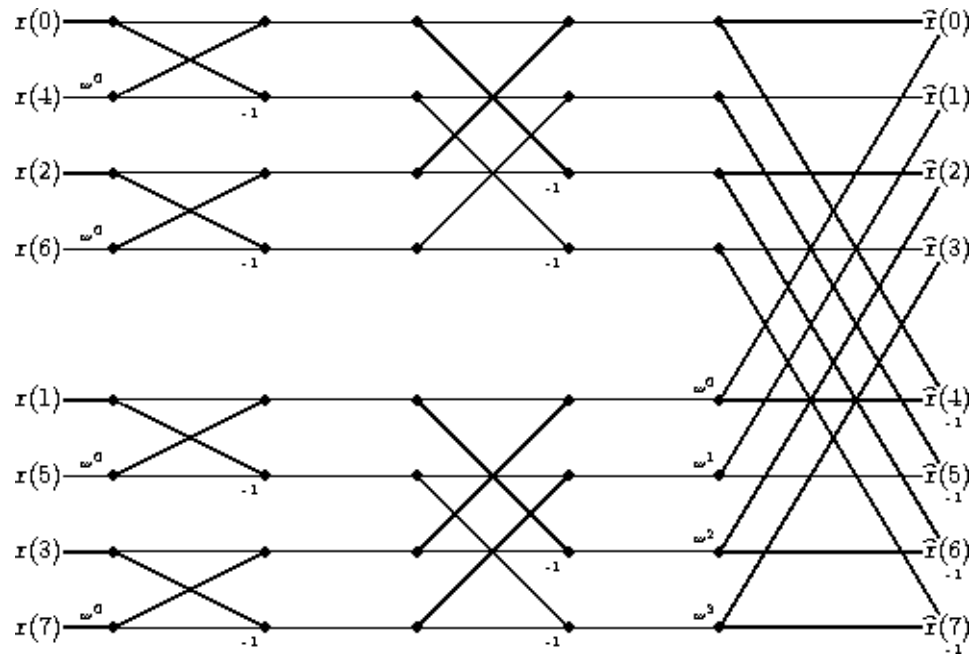


Figura 15.8: il grafico della FFT per $N = 8$ con pesi ottimizzati

15.2.1 Bit reversal

Osserviamo innanzitutto che per il grafo di 8 punti dell'esempio sono necessarie 3 cifre binarie per dare un indice a ciascun dato. Se scriviamo gli indici delle identità(15.11) in forma binaria otteniamo l'insieme di relazioni:

$$\begin{aligned}
 X_0(000) &= x(000) & X_0(001) &= x(100) \\
 X_0(010) &= x(010) & X_0(011) &= x(110) \\
 X_0(100) &= x(001) & X_0(101) &= x(101) \\
 X_0(110) &= x(011) & X_0(111) &= x(111).
 \end{aligned} \tag{15.14}$$

Asseriamo che, se $(n_2 n_1 n_0)$ è la rappresentazione binaria dell'indice della successione $x(n)$, il campione $x(n_2 n_1 n_0)$ risulta memorizzato nella posizione $X_0(n_0 n_1 n_2)$. In altre parole, per determinare la posizione di $x(n_2 n_1 n_0)$ nella successione di ingresso dobbiamo *invertire l'ordine dei bit* dell'indice n .

Per vedere perché ai fini del calcolo sul posto sia necessario l'ordine a disposizione invertita dei bit riprendiamo in esame il procedimento che ha dato luogo alla Figura 15.5. La successione $x(n)$ è prima stata divisa nei campioni di indice pari e in quelli di indice dispari, con i primi collocati nella metà superiore della Figura 15.1 e i secondi nella metà inferiore. (Per inciso: è chiaro che i dati della seconda metà vengono usati dopo quelli della prima, quindi i registri che li contengono possono essere riscritti dopo aver ultimato il lavoro con quelli che contengono i dati della prima metà. In altre parole questi ultimi vanno scritti prima.)

Formalmente questa separazione dei dati può essere fatta esaminando il bit meno significativo (n_0) nell'indice n . Se il bit meno significativo è zero il valore della successione corrisponde ad un campione di posto pari e compare pertanto nella metà superiore della successione $X_0(s)$; viceversa, se il bit meno significativo è uno, il valore della successione corrisponde a un campione di posto dispari, e compare di conseguenza nella metà inferiore di $X_0(s)$. Riassumendo, l'ultimo bit uguale a zero significa che il numero considerato (indice della successione) è pari, mentre l'ultimo bit uguale a 1 significa che è dispari. Invece primo bit uguale a 0 significa essere nella prima metà piccola (numeri piccoli: nel nostro esempio con tre cifre binarie, questi sono i numeri da 0 a 3), mentre primo bit uguale a 1 significa essere nella seconda metà (numeri grandi, da 4 a 7). In seguito alla trasformazione, gli indici con ultimo bit uguale a 0 finiscono quindi nella prima metà di queste

due successioni, ossia nei posti con primo bit uguale a 0, mentre quelli con ultimo bit uguale a 1 finiscono nella seconda metà, ovvero nei posti con primo bit uguale a 1.

Successivamente le due sottosuccessioni pari e dispari vengono separate a loro volta nelle loro proprie parti pari e dispari, e ciò si basa sul secondo bit meno significativo nell'indice dei dati. Infatti, asseriamo che, se consideriamo dapprima la successione costituita dai campioni di posto pari, quando il secondo bit meno significativo è 0 il valore della successione è un campione di posto pari all'interno di questa sottosuccessione; se viceversa il secondo bit meno significativo è 1, allora il valore della successione ha posto dispari. Per capire perché, consideriamo un numero binario $j = n_k n_{k-1} \dots n_0$. Se $n_0 = 0$, allora j è pari e $\frac{j}{2}$ è intero. D'altra parte, $\frac{j}{2} = n_k n_{k-1} \dots n_1$, perché dividere per 2 un numero pari corrisponde a traslarne di un passo a destra le cifre binarie scartandone l'ultima, cioè a sopprimere la cifra zero alla fine (esattamente come dividere per 10 un multiplo di 10, cioè un numero la cui espressione decimale finisce con la cifra zero, significa cancellare lo zero finale). Pertanto i termini di posto pari della sottosuccessione degli indici pari sono quelli con $n_1 = 0$ (analogamente a prima), e viceversa quelli di posto dispari si ottengono da $n_1 = 1$.

Se invece j è dispari, allora $j = n_k n_{k-1} \dots n_0$ con $n_0 = 1$, e si ha $j = m + 1$ dove m è pari con espressione binaria $m = n_k n_{k-1} \dots n_1$. Quindi, anche in questo caso, i termini di posto pari della sottosuccessione degli indici dispari sono quelli con $n_1 = 0$ e quelli di posto dispari sono quelli con $n_1 = 1$. Ne segue quindi che, dopo la trasformazione, la prima metà degli indici (quelli di valore piccolo) viene scomposta a sua volta in due metà, la prima delle quali corrisponde al penultimo bit $n_1 = 0$, e la seconda a $n_1 = 1$.

Il procedimento viene ripetuto finché non si ottengono N sottosuccessioni di lunghezza uno. Questa separazione in sottosuccessioni con indici pari e dispari è rappresentata nel diagramma ad albero della Figura 15.9.15.9. Gli indici vengono quindi riordinati rovesciando l'ordine dei loro bit binari.

Ora è chiaro che la necessità dell'ordinamento iniziale a disposizione invertita dei bit è conseguenza del modo in cui la DFT si scompone in DFT iterate di ordine metà.

15.2. ALGORITMI FFT BASATI SULLA DECIMAZIONE NEL TEMPO 1069

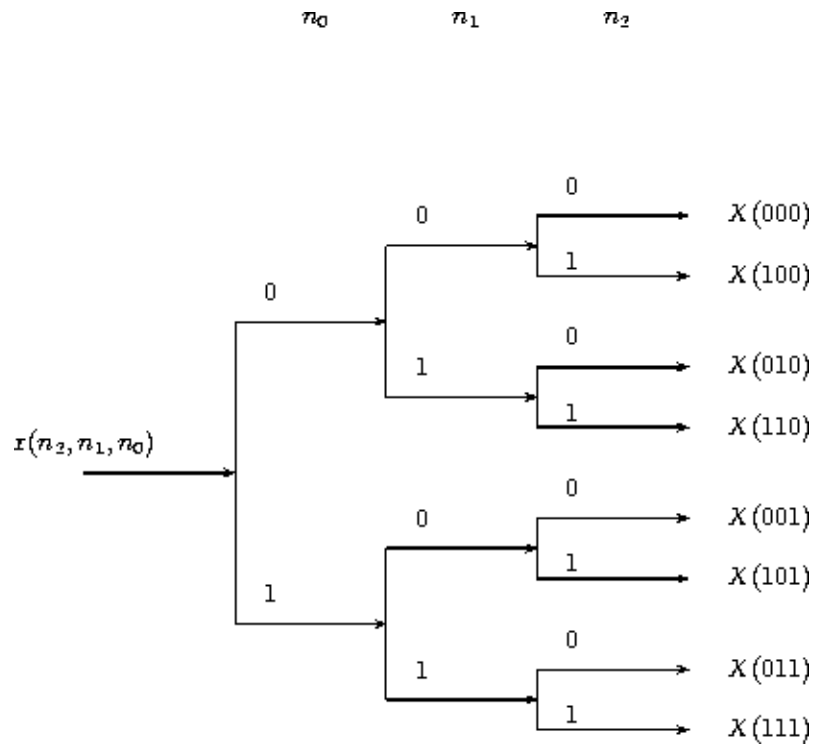


Figura 15.9: parità dei bit binari e bit reversal

15.3 Algoritmi FFT basati sulla decimazione in frequenza

In Sezione 15.2 abbiamo visto algoritmi di FFT basati sulla decimazione nel tempo, sviluppati scomponendo il calcolo della DFT attraverso la scelta di sottosuccessioni di lunghezza metà della successione di ingresso $x(n)$.

Un altro modo di procedere è quello di dividere in analoghe sottosuccessioni la successione di uscita $\hat{x}(k)$.

Gli algoritmi FFT originati con questo procedimento si dicono basati sulla decimazione in frequenza.

Per ricavarli, sempre nel caso in cui N sia una potenza di 2, possiamo innanzitutto dividere la successione di ingresso $x(n)$ nella prima metà e nella seconda metà dei suoi punti: cioè

$$\hat{x}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)w^{nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2})w^{(n+N/2)k}$$

oppure, grazie ad un cambiamento di variabili nella seconda sommatoria:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)w^{nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2})w^{(n+N/2)k} & (15.15) \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)w^{nk} + w^{kN/2} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n + \frac{N}{2})w^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (x(n) + x(n + \frac{N}{2})w^{kN/2}) w^{nk}. \end{aligned}$$

Questa espressione si semplifica ulteriormente se si osserva che la successione $w^{kN/2}$ assume solo due valori. Infatti:

$$w^{kN/2} = e^{-\frac{2\pi i}{N} \frac{kN}{2}} = e^{-i\pi k} = (-1)^k.$$

La (15.15) si scrive quindi

$$\hat{x}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (x(n) + (-1)^k x(n + \frac{N}{2})) w^{nk}.$$

15.3. ALGORITMI FFT BASATI SULLA DECIMAZIONE IN FREQUENZA 1071

Considerando ora separatamente gli indici k pari e k dispari, ed indicando con $\hat{x}(2r)$ e $\hat{x}(2r+1)$ rispettivamente i valori di indice pari e quelli di indice dispari, abbiamo:

$$\hat{x}(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (x(n) + x(n + \frac{N}{2})) w^{2rn} \quad (15.16)$$

e

$$\hat{x}(2r+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (x(n) - x(n + \frac{N}{2})) w^n w^{2rn} \quad (15.17)$$

per $r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

Le due sommatorie in (15.16) e (15.17) sono nient'altro che due DFT su $\frac{N}{2}$ punti. Questo si vede in modo più chiaro se si pone

$$g(n) = x(n) + x(n + \frac{N}{2})$$

e

$$h(n) = x(n) - x(n + \frac{N}{2}).$$

In tal modo le uguaglianze (15.16) e (15.17) diventano:

$$\hat{x}(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g(n) (w^2)^{rn} \quad (15.18)$$

e

$$\hat{x}(2r+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (h(n) w^n) (w^2)^{rn}. \quad (15.19)$$

Pertanto possiamo calcolare la DFT su N punti formando innanzitutto le successioni $g(n)$ e $h(n)$, poi calcolando $h(n)w^n$ ed infine calcolando la DFT a $\frac{N}{2}$ punti di ciascuna di queste due successioni: queste due DFT ci danno i valori di uscita $\hat{x}(k)$ rispettivamente per k pari e dispari.

Il procedimento è illustrato nella Figura 15.10, nel caso di una DFT su 8 punti.

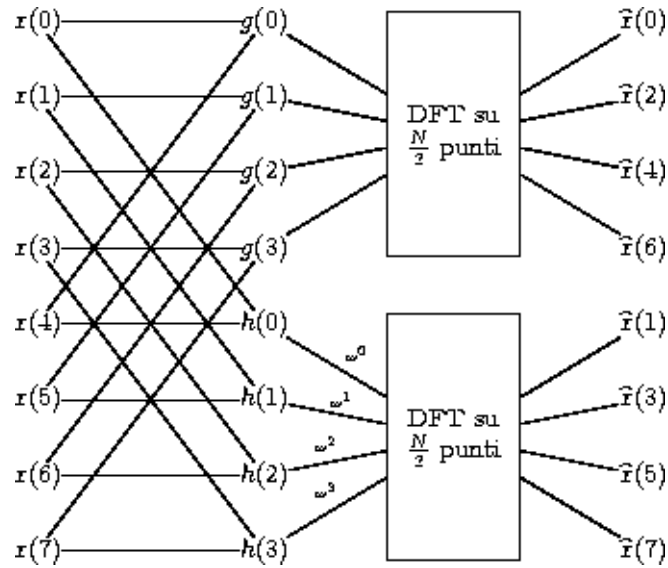


Figura 15.10: decimazione in frequenza: la DFT a N punti scomposta in due DFT a $N/2$ punti ($N = 8$)

Procedendo il modo simile a quello usato per ricavare gli algoritmi basati sulla decimazione del tempo, notiamo di nuovo che $\frac{N}{2}$ è ancora pari poiché N è una potenza di 2: quindi il procedimento in (15.18) e (15.19) si può ripetere sulle due DFT su $\frac{N}{2}$ punti. Le successioni dei loro dati in uscita si scindono quindi in due sottosuccessioni che devono poi essere combinate come nel passo precedente per calcolare le DFT su $\frac{N}{4}$ punti. Lo schema dei primi due stadi è mostrato nella Figura 15.11.

Nel caso di $N = 8$ il calcolo si è così ridotto a quello di DFT su 2 punti, le quali, come abbiamo visto in precedenza, si calcolano sommando e sottraendo i dati di ingresso. Il grafo completo è in Figura 15.12.

È interessante osservare che ora questo grafo ha i dati in ingresso in ordine normale, ma fornisce i valori in uscita a disposizione invertita di bit.

Notiamo anche che lo schema base di calcolo è, come nel caso della decimazione nel tempo, del tipo a farfalla: possiamo quindi sviluppare un procedimento di calcolo sul posto.

Come in precedenza, indichiamo la successione dei numeri complessi che risultano dal m -simo stadio di calcolo con $X_m(s)$, dove $s = 0, \dots, N - 1$ e

15.3. ALGORITMI FFT BASATI SULLA DECIMAZIONE IN FREQUENZA 1073

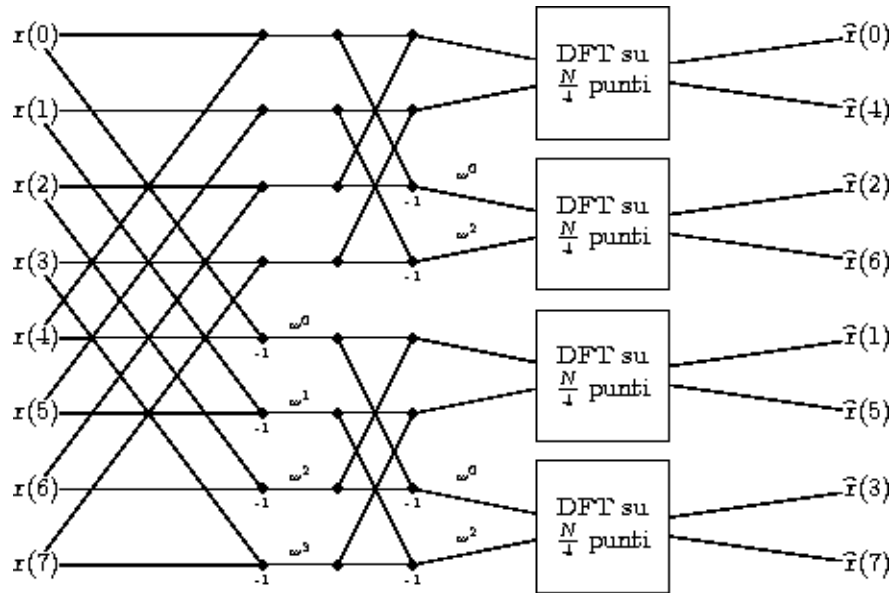


Figura 15.11: decimazione in frequenza: i primi due stadi

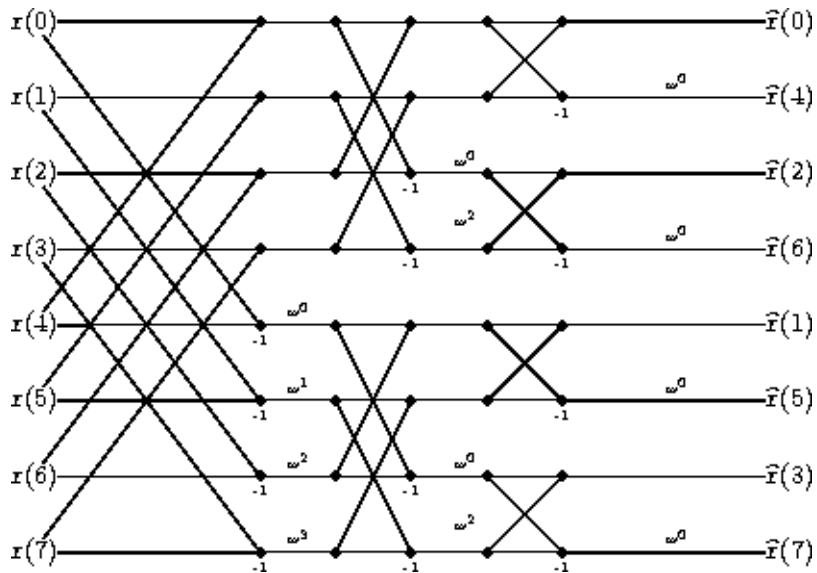


Figura 15.12: decimazione in frequenza: il grafo completo per $N = 8$

$m = 0, \dots, \nu$. La Figura 15.13 mostra la forma del calcolo base della farfalla; le equazioni corrispondenti sono

$$\begin{aligned} X_{m+1}(p) &= X_m(p) + X_m(q) \\ X_{m+1}(q) &= [X_m(p) - X_m(q)] w^r \end{aligned} \quad (15.20)$$

al variare dell'esponente intero r , come indicato nelle figure.

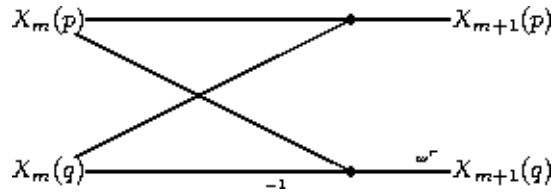


Figura 15.13: la farfalla del blocco elementare per la decimazione in frequenza

Applichiamo ora questi algoritmi a ritroso per calcolare la DFT inversa. Consideriamo una farfalla di un algoritmo basato sulla decimazione nel tempo, come quella rappresentata in Figura 15.7 le cui corrispondenti equazioni sono

$$\begin{aligned} X_{m+1}(p) &= X_m(p) + w^r X_m(q) \\ X_{m+1}(q) &= X_m(p) - w^r X_m(q). \end{aligned} \quad (15.21)$$

Se supponiamo di cominciare con le uscite $\hat{x}(k)$ in ordine normale come in Figura 15.8 possiamo invertire le relazioni (15.21) e ricavare X_m in funzione di X_{m+1} , ossia

$$\begin{aligned} X_m(p) &= \frac{1}{2} [X_{m+1}(p) + X_{m+1}(q)] \\ X_m(q) &= \frac{1}{2} [X_{m+1}(p) - X_{m+1}(q)] w^{-r}. \end{aligned} \quad (15.22)$$

Poiché $X_\nu(k) = \hat{x}(k)$ e $X_0(k)$ coincide con $x(k)$ a parte l'ordine, che è a disposizione invertita di bit, possiamo calcolare $x(n)$ applicando ripetutamente l'equazione (15.22). Il grafo risultante per $N = 8$ è quello mostrato in Figura 15.14, che quindi descrive un algoritmo di trasformata rapida di Fourier inversa (IFFT).

in frequenza. Analogamente si può affermare, che per ogni algoritmo FFT a decimazione nel tempo esiste un algoritmo a decimazione in frequenza il quale corrisponde a scambiare ingressi e uscite e a invertire la direzione di tutte le frecce nel grafo di flusso.

15.4 Algoritmi FFT a radice 2

Vediamo una formulazione degli algoritmi discussi nei paragrafi precedenti più adatta all'implementazione numerica.

Richiamiamo di nuovo l'espressione che usiamo in questo Capitolo per la DFT:

$$\hat{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w^{kn} \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (15.23)$$

Nel caso generale in cui $N = 2^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, la DFT, in base alla sua Definizione 14.2.2, ha una naturale espressione in forma binaria. Per renderla esplicita, scriviamo gli sviluppi binari degli interi k , $n \leq N$ che compaiono in (15.23):

$$\begin{aligned} k &= 2^{\nu-1}k_{\nu-1} + 2^{\nu-2}k_{\nu-2} + \dots + k_0 \\ n &= 2^{\nu-1}n_{\nu-1} + 2^{\nu-2}n_{\nu-2} + \dots + n_0 \end{aligned} \quad (15.24)$$

Identifichiamo l'intero k con la n -upla delle sue cifre binarie $(k_0, \dots, k_{\nu-1})$. Quindi \hat{x} diventa una funzione di $(k_0, \dots, k_{\nu-1})$. Analogamente, x si può pensare come funzione di $(n_0, \dots, n_{\nu-1})$. Se sostituiamo queste espressioni nell'uguaglianza (15.23), essa diventa:

$$\hat{x}(k_0, \dots, k_{\nu-1}) = \sum_{n_0} \sum_{n_1} \dots \sum_{n_{\nu-1}} x(n_0, \dots, n_{\nu-1})w^p \quad (15.25)$$

dove

$$p = (2^{\nu-1}k_{\nu-1} + 2^{\nu-2}k_{\nu-2} + \dots + k_0)(2^{\nu-1}n_{\nu-1} + 2^{\nu-2}n_{\nu-2} + \dots + n_0).$$

La sommatoria in (15.23) è stata sostituita dalle ν sommatorie in (15.25) perché n varia in maniera biunivoca al variare di ciascuna delle sue ν cifre binarie.

Ora fattorizziamo w^p in due modi diversi. A seconda della fattorizzazione di w^p otteniamo due tipi di algoritmo, *a decimazione nel tempo* o *a decimazione in frequenza*. Esaminiamo i due casi in dettaglio.

Il primo algoritmo che esaminiamo è quello di decimazione nel tempo, cioè quello di Cooley-Tukey [7], già introdotto nella Sezione 15.2. Possiamo riscrivere w^p come

$$w^p = w^{(2^{\nu-1}k_{\nu-1}+\dots+k_0)(2^{\nu-1}n_{\nu-1})} w^{(2^{\nu-1}k_{\nu-1}+\dots+k_0)(2^{\nu-2}n_{\nu-2})} \dots w^{(2^{\nu-1}k_{\nu-1}+\dots+k_0)n_0}. \quad (15.26)$$

Consideriamo il primo fattore in (15.26):

$$\begin{aligned} w^{(2^{\nu-1}k_{\nu-1}+\dots+k_0)(2^{\nu-1}n_{\nu-1})} &= w^{2^{\nu}2^{\nu-2}k_{\nu-1}n_{\nu-1}} \dots w^{2^{\nu}k_1n_{\nu-1}} w^{2^{\nu-1}k_0n_{\nu-1}} \\ &= w^{2^{\nu-1}k_0n_{\nu-1}} \end{aligned}$$

perché

$$w^{2^{\nu}} = w^N = (e^{-2\pi i/N})^N = 1.$$

Allo stesso modo il secondo fattore si può scrivere:

$$\begin{aligned} w^{(2^{\nu-1}k_{\nu-1}+\dots+k_0)(2^{\nu-2}n_{\nu-2})} &= w^{2^{\nu}2^{\nu-3}k_{\nu-1}n_{\nu-2}} \dots w^{2^{\nu-1}k_1n_{\nu-2}} w^{2^{\nu-2}k_0n_{\nu-2}} \\ &= w^{2^{\nu-2}(2k_1+k_0)n_{\nu-2}} \end{aligned}$$

di nuovo perché tutti i fattori che all'esponente hanno un multiplo *intero* di 2^{ν} valgono 1. Lo stesso argomento si applica agli altri termini in (15.26). Grazie a queste relazioni, (15.25) si può riscrivere come

$$\begin{aligned} \widehat{x}(k_{\nu-1}, k_{\nu-2}, \dots, k_0) & \quad (15.27) \\ &= \sum \sum \dots \sum x(n_{\nu-1}, n_{\nu-2}, \dots, n_0) \\ &= w^{2^{\nu-1}k_0n_{\nu-1}} w^{2^{\nu-2}(2k_1+k_0)n_{\nu-2}} \dots w^{(2^{\nu-1}k_{\nu-1}+\dots+k_0)n_0}. \end{aligned}$$

Se si pone $x(n_{\nu-1}, n_{\nu-2}, \dots, n_0) = x_0(n_{\nu-1}, n_{\nu-2}, \dots, n_0)$ e si effettuano le somme iterativamente una dopo l'altra, le uguaglianze 15.27 si trasformano nel seguente sistema lineare:

$$\begin{aligned}
x_1(k_0, n_{\nu-2}, \dots, n_0) &= \sum_{n_{\nu-1}} x_0(n_{\nu-1}, \dots, n_0) w^{2^{\nu-1}(k_0 n_{\nu-1})} & (15.28) \\
x_2(k_0, k_1, n_{\nu-3}, \dots, n_0) &= \sum_{n_{\nu-2}} x_1(k_0, n_{\nu-2}, \dots, n_0) w^{2^{\nu-2}(2k_1+k_0)n_{\nu-2}} \\
&\vdots \\
x_\nu(k_0, k_1, \dots, k_{\nu-1}) &= \sum_{n_0} x_{\nu-1}(k_0, k_1, \dots, n_0) w^{(2^{\nu-1}k_{\nu-1}+\dots+k_0)n_0} \\
\widehat{x}(k_{\nu-1}, k_{\nu-2}, \dots, k_0) &= x_\nu(k_0, k_1, \dots, k_{\nu-1}) ..
\end{aligned}$$

I primi membri delle identità (15.28) sono le successioni intermedie risultanti dai vari stadi di calcolo illustrati nella Sezione 15.2: in effetti, le identità (15.28) sono precisamente la formulazione originale dell'algoritmo FFT di Cooley-Tukey per $N = 2^\nu$. Come osservato in Sezione 15.2, la successione di uscita $\widehat{x}(k)$ è in ordine invertito di bit.

Vediamo un esempio con $n = 4$, cioè $\nu = 2$.

In questo caso

$$\begin{aligned}
k &= 2k_1 + k_0 \\
n &= 2n_1 + n_0 \quad \text{dove } k_1, n_1 = 0, 1
\end{aligned}$$

La (15.25) diventa

$$\widehat{x}(k_1, k_0) = \sum \sum x_0(n_1, n_0) w^{(2k_1+k_0)(2n_1+n_0)} \quad (15.29)$$

Usando la fattorizzazione descritta sopra, si ha

$$\widehat{x}(k_1, k_0) = \sum \left(\sum x_0(n_1, n_0) w^{2k_0 n_1} \right) w^{(2k_1+k_0)(n_0)} \quad (15.30)$$

Poniamo

$$x_1(k_0, n_0) = \sum x_0(n_1, n_0) w^{2k_0 n_1} \quad (15.31)$$

Facendo assumere a $k_0.n_0$ i diversi valori possibili possiamo scrivere la (15.31) in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} x_1(0,0) \\ x_1(0,1) \\ x_1(1,0) \\ x_1(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & w^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^0 \\ 1 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(0,0) \\ x_0(0,1) \\ x_0(1,0) \\ x_0(1,1) \end{pmatrix}$$

La sommatoria in (15.30) si può riscrivere ponendo

$$x_2(k_0, n_0) = \sum x_1(k_1, n_0) w^{2(k_1+k_0)n_0} \quad (15.32)$$

oppure, equivalentemente

$$\begin{pmatrix} x_2(0,0) \\ x_2(0,1) \\ x_2(1,0) \\ x_2(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & w^0 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & w^1 \\ 0 & 0 & 1 & w^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0,0) \\ x_1(0,1) \\ x_1(1,0) \\ x_1(1,1) \end{pmatrix}$$

Da (15.30) e da (15.32) si ricava

$$\hat{x}(k_1, k_0) = x_2(k_0, k_1) \quad (15.33)$$

cioè il risultato finale $x_2(k_0, k_1)$ si ottiene dalla sommatoria più esterna in ordine invertito di bit.

Una seconda maniera di fattorizzare w^p si ottiene scomponendo k invece di n : questo algoritmo è detto di Sande-Tukey, o anche, come abbiamo già visto, a decimazione in frequenza. Vediamolo nel caso particolare di $N = 4$: la formulazione più generale è analoga.

Riscriviamo in modo equivalente l'uguaglianza (15.29):

$$\hat{x}(k_1, k_0) = \sum \sum x_0(n_1, n_0) w^{(2k_1+k_0)(2n_1+n_0)} \quad (15.34)$$

Da qui

$$w^{(2k_1+k_0)(2n_1+n_0)} = w^{(2k_1)(2n_1+n_0)} w^{(k_0)(2n_1+n_0)} = w^{(2k_1n_0)} w^{(k_0)(2n_1+n_0)}$$

La (15.34) si può riscrivere

$$\hat{x}(k_1, k_0) = \sum \left(\sum x_0(n_1, n_0) w^{(k_0)(2n_1+n_0)} \right) w^{(2k_1n_0)}$$

Introducendo opportuni passi intermedi analoghi a quelli in (15.28) scriviamo

$$\begin{aligned} x_1(k_0, n_0) &= \sum x_0(n_1, n_0) w^{k_0(2n_1+n_0)} \\ x_2(k_0, k_1) &= \sum x_1(k_0, n_0) w^{2k_1 n_0} \\ \hat{x}(k_1, k_0) &= x_2(k_0, k_1) \end{aligned} \quad (15.35)$$

dove abbiamo posto $x_0(n_1, n_0) = x(n_1, n_0)$ per comodità di notazione. Il grafo corrispondente alle uguaglianze (15.35) è in Figura 15.15.

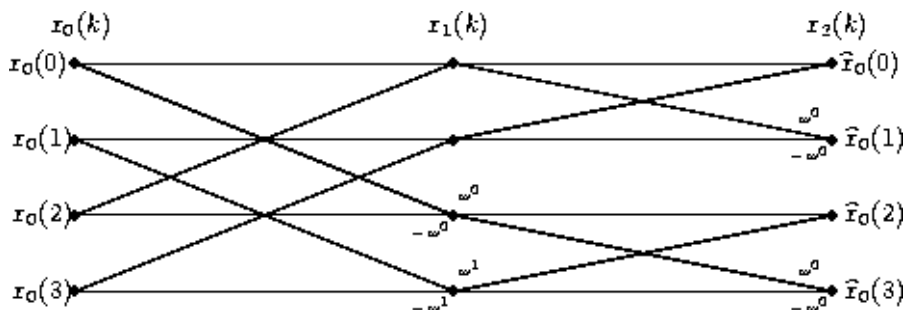


Figura 15.15: FFT a radice 2 per $N = 4$

15.5 Algoritmi di FFT a radice arbitraria

Nella Sezione 15.4 abbiamo studiato la DFT su N punti con $N = 2^p$, ed i corrispondenti algoritmi di FFT, detti a *radice 2*, i quali portano ad una considerevole riduzione sul numero di moltiplicazioni ed addizioni complesse da effettuare.

Però l'ipotesi $N = 2^p$ è restrittiva. In questa Sezione esaminiamo algoritmi FFT per un intero N arbitrario, quindi fattorizzato non come una potenza di 2 bensì come prodotto di m numeri interi qualsiasi: $N = r_1 \cdots r_m$, r_k .

Esaminiamo prima il caso di due soli fattori: $N = r_1 r_2$. Per derivare algoritmi FFT in questo caso particolare, esprimiamo gli indici k, n come in (15.24):

$$\begin{aligned} k &= k_1 r_1 + k_0 \quad \text{con } k_0 = 0, 1, \dots, r_1 - 1, \quad k_1 = 0, 1, \dots, r_2 - 1 \\ n &= n_1 r_2 + n_0 \quad \text{con } n_0 = 0, 1, \dots, r_2 - 1 \quad n_1 = 0, 1, \dots, r_1 - 1. \end{aligned}$$

Osserviamo che questa scomposizione è unica.

In questa notazione, (15.23) diventa

$$\hat{x}(k_1, k_0) = \sum_{n_0=0}^{r_2-1} \left[\sum_{n_1=0}^{r_1-1} x(n_1, n_0) w^{kn_1 r_2} \right] w^{kn_0} \quad (15.36)$$

perché $w^{r_1 r_2} = w^r = 1$.

L'esponentiale $w^{kn_1 r_2}$ si può fattorizzare nel modo seguente:

$$\begin{aligned} w^{kn_1 r_2} &= w^{(k_1 r_1 + k_0) n_1 r_2} = w^{r_1 r_2 k_1 n_1} w^{k_0 n_1 r_2} \\ &= [w^{r_1 r_2}]^{k_1 n_1} w^{k_0 n_1 r_2} = w^{k_0 n_1 r_2} \end{aligned}$$

perché $w^{r_1 r_2} = 1$.

Inoltre si ha:

$$w^{kn_0} = w^{(k_1 r_1 + k_0) n_0}.$$

La 15.36 diventa:

$$\hat{x}(k_1, k_0) = \sum_{n_0=0}^{r_2-1} \left[\sum_{n_1=0}^{r_1-1} x(n_1, n_0) w^{k_0 n_1 r_2} \right] w^{(k_1 r_1 + k_0) n_0} \quad (15.37)$$

oppure, ponendo $x(n_1, n_0) = x_0(n_1, n_0)$ ed introducendo passi intermedi analogamente a quanto fatto in (15.35),

$$\begin{aligned} x_1(k_0, n_0) &= \sum_{n_0=0}^{r_1-1} x_0(n_1, n_0) w^{k_0 n_1 r_2} \\ x_2(k_0, k_1) &= \sum_{n_0=0}^{r_2-1} x_1(k_0, n_0) w^{(k_1 r_1 + k_0) n_0}. \end{aligned} \quad (15.38)$$

Il risultato finale è:

$$\hat{x}(k_1, k_0) = x_2(k_1, k_0). \quad (15.39)$$

Notiamo che, come negli algoritmi a radice 2 (Sezione 15.4, il risultato è in ordine dei bit invertito.

Le uguaglianze (15.38) e (15.39) costituiscono l'algoritmo FFT nel caso $N = r_1 r_2$.

Vediamo un esempio nel caso $r_1 = r_2 = 4$; in tal caso abbiamo $N = r_1 r_2 = 16$. Usando le uguaglianze (??), esprimiamo gli indici k e n in radice 4:

$$\begin{aligned} k &= 4k_1 + k_0 & \text{con } k_1, k_0 = 0, 1, 2, 3 \\ n &= 4n_1 + n_0 & \text{con } n_1, n_0 = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (15.40)$$

Nel prodotto kn spezziamo n come nella seconda uguaglianza (15.40). In questo modo sviluppiamo (15.37) con l'approccio della decimazione nel tempo (si vedano le uguaglianze da (15.26) a (15.28)). L'uguaglianza (15.37) diventa:

$$\hat{x}(k_1, k_0) = \sum_{n_0=0}^3 \left[\sum_{n_1=0}^3 x(n_1, n_0) w^{4k_0 n_1} \right] w^{(4k_1 + k_0)n_0}.$$

Usando i passi intermedi introdotti in (15.38) otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1(k_0, n_0) &= \sum_{n_1=0}^3 x_0(n_1, n_0) w^{4k_0 n_1} \\ x_2(k_0, k_1) &= \sum_{n_0=0}^3 x_1(k_0, n_0) w^{(4k_1 + k_0)n_0}. \end{aligned} \quad (15.41)$$

Ora si ricava dalla (15.39) la struttura dell'algoritmo in radice 4:

$$\hat{x}(k_1, k_0) = x_2(k_1, k_0). \quad (15.42)$$

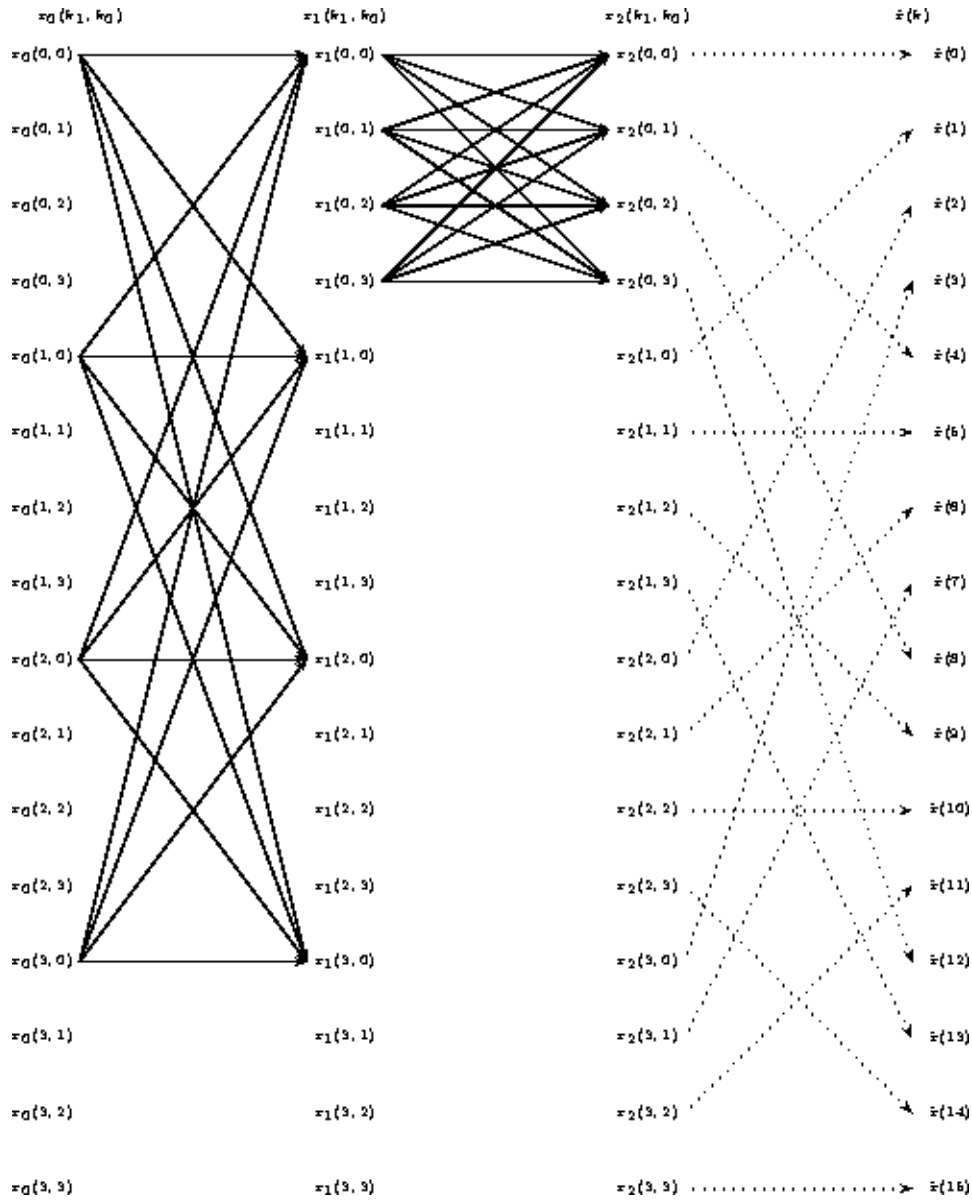


Figura 15.16: FFT a radice 4

Le ultime tre uguaglianze costituiscono l'algoritmo FFT in radice 4, nel caso $N = 16$.

Il grafo risultante è mostrato in Figura 15.16.

Vediamo come si ottiene questo grafo: dalla (15.41) si vede che bisogna calcolare due vettori intermedi e che ogni nodo ha quattro spigoli in ingresso ed in uscita. Per esempio, per ogni $k_1 = 0, 1, 2, 3$, gli spigoli in ingresso al nodo $x(k_1, k_0)$ sono quelli provenienti da

$$x_0(0, k_0), x_0(1, k_0), x_0(2, k_0), x_0(3, k_0).$$

Il grafo in Figura 15.16 non riporta tutti gli spigoli presenti, e neppure i fattori w^p , che si possono calcolare direttamente dalle (15.41).

L'ultima parte a destra illustra la permutazione finale per ottenere il vettore $x(n)$ con indici ordinati. Come vedremo più avanti, l'algoritmo a radice 4 riduce di circa il 30% il numero di moltiplicazioni necessarie rispetto all'algoritmo a radice 2 per lo stesso valore di N .

Esaminiamo ora l'algoritmo generale di Cooley-Tukey per $N = r_1 \cdots r_k \in \mathbb{N}$.

Come prima, esprimiamo gli indici k, n nella forma

$$\begin{aligned} k &= k_{m-1}(r_1, \dots, r_{m-1}) + k_{m-2}(r_1, \dots, r_{m-2}) + \cdots + k_1 r_1 + k_0 \\ n &= n_{m-1}(r_2, \dots, r_m) + n_{m-2}(r_3, \dots, r_m) + \cdots + n_1 r_m + n_0 \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} k_{i-1} &= 0, 1, 2, \dots, r_i - 1 & 1 \leq i \leq m \\ n_{i-1} &= 0, 1, 2, \dots, r_{m-1} - 1 & 0 \leq i \leq m - 1. \end{aligned}$$

Ora l'espressione (15.23) della DFT diventa

$$\hat{x}(k_{m-1}, \dots, k_0) = \sum_{n_0} \cdots \sum_{n_{m-1}} x_0(n_{m-1}, \dots, n_0) w^{kn}, \quad (15.43)$$

dove le sommatorie sono estese a tutti gli indici $\{n_i : n_i = 0, 1, \dots, r_{m-1} - 1\}$ con $0 \leq i \leq m - 1$.

Sostituendo il valore di n , otteniamo dalla (15.42):

$$w^{kn} = w^{k[n_{m-1}(r_2 \cdots r_m) + \cdots + n_0]}. \quad (15.44)$$

Il primo fattore si può scrivere:

$$\begin{aligned} w^{kn_{m-1}(r_2 \cdots r_m)} &= w^{[k_{m-1}(r_1 \cdots r_{m-1}) + \cdots + k_0][n_{m-1}(r_2 \cdots r_m)]} \\ &= [w^{r_1 \cdots r_m}]^{[k_{m-1}(r_1 \cdots r_{m-1}) + \cdots + k_1]n_{m-1}} w^{k_0 n_{m-1}(r_2 \cdots r_m)}. \end{aligned} \quad (15.45)$$

Poiché $w^{r_1 \cdots r_m} = w^N = 1$, la (15.45) diventa

$$w^{kn_{m-1}(r_2 \cdots r_m)} = w^{k_0 n_{m-1}(r_2 \cdots r_m)}$$

per cui la (15.44) diventa

$$w^{nk} = w^{n_{m-1}k(r_2 \cdots r_m)} w^{k[n_{m-1}(r_3 \cdots r_m) + \cdots + n_0]}.$$

Sostituendo in (15.43) abbiamo

$$\begin{aligned} &\hat{x}(k_{m-1}, \dots, k_0) \\ &= \sum_{n_0} \cdots \left[\sum_{n_{m-1}} x_0(n_{m-1}, \dots, n_0) w^{k_0 n_{m-1}(r_2 \cdots r_m)} \right] w^{k[n_{m-2}(r_3 \cdots r_m) + \cdots + n_0]}. \end{aligned}$$

Ponendo, di nuovo, $x(n_{m-1}, \dots, n_0) = x_0(n_{m-1}, \dots, n_0)$, definiamo un vettore intermedio x_1

$$x_1(k_0, n_{m_2}, \dots, n_0) = \sum_{n_{m-1}} x_0(n_{m-1}, \dots, n_0) w^{k_0 n_{m-1}(r_2 \cdots r_m)}.$$

Ora la (??) diventa

$$\hat{x}(k_{m-1}, \dots, k_0) = \sum_{n_0} \cdots \left[\sum_{n_{m-1}} x_1(k_0, n_{m_2}, \dots, n_0) \right] w^{k[n_{m-2}(r_3 \cdots r_m) + \cdots + n_0]}. \quad (15.46)$$

Con una decomposizione analoga alle precedenti, si ottiene

$$w^{kn_{m_2}(r_3 \cdots r_m)} = w^{(k_1 r_1 + k)n_{m-2}(r_3 \cdots r_m)}.$$

Allora, ponendo

$$x_2(k_0, k_1, n_{m_3}, \dots, n_0) = \sum_{n_{m-2}} x_1(k_0, n_{m-2}, \dots, n_0)^{(k_1 r_1 + k)n_{m-2}(r_3 \cdots r_m)},$$

trasformiamo la (15.46) in

$$\hat{x}(k_{m-1}, \dots, k_0) = \sum_{n_0} \dots \left[\sum_{n_{m-3}} x_2(k_0, n_{m-3}, \dots, n_0) \right] w^{k[n_{m-3}(r_4 \dots r_m) + \dots + n_0]}.$$
(15.47)

Riducendo iterativamente la (15.47) allo stesso modo, otteniamo un sistema lineare espresso come successione ricorsiva di uguaglianze della forma

$$\begin{aligned} x_1(k_0, \dots, k_{i-1}, n_{m-i-1}, \dots, n_0) \\ = \sum_{k_{m-i}} x_{i-1} x_{i-1}(k_0, \dots, k_{i-2}, n_{m-i}, \dots, n_0) w^{[k_{i-1}(r_1 \dots r_{i-1}) + \dots + k_0] n_{i-1} (r_{i+1} \dots r_m)} \end{aligned}$$

per $i = 1, 2, \dots, m$.

Questa espressione è valida se si assume che

$$(r_{i+1} \dots r_m) = 1 \quad \text{per } i > m - 1 \quad \text{e } k = 0.$$

Il risultato finale è dato da:

$$\hat{x}(k_{m-1}, \dots, k_0) = x_m(k_0, \dots, k_{m-1}).$$

Un algoritmo alternativo si può ottenere espandendo, nel prodotto kn , il termine k invece del termine n (cioè con decimazione in frequenza invece che nel tempo). Omettiamo i dettagli.

Infine, calcoliamo il numero di operazioni necessarie per eseguire l'algoritmo FFT discusso sopra per $N = r_1 \dots r_m$.

Il vettore x_1 in (??) ha N elementi: per calcolare ciascun elemento occorrono r_1 operazioni (una moltiplicazione complessa e una addizione complessa), per un totale di Nr_1 operazioni per ottenere x_1 .

Analogamente occorrono Nr_2 operazioni per calcolare x_2 da x_1 ; continuando così si trova che il calcolo di x_m richiede $N(r_1 + \dots + r_m)$ operazioni.

Questa stima non tiene conto della simmetria dell'esponenziale complesso, che può invece essere sfruttata per ridurre il numero totale di operazioni; vediamo come.

Consideriamo per esempio un algoritmo a radice 4, con $N = 16$. In questo caso le uguaglianze sono

$$x_1(k_0, n_0) = \sum_{n_1=0}^3 x_0(n_1, n_0) w^{4k_0 n_1} \quad (15.48a)$$

$$x_2(k_0, k_1) = \sum_{n_0=0}^3 x_0(k_0, n_0) w^{(4k_1+k_0)n_0} \quad (15.48b)$$

$$\hat{x}(k_1, k_0) = x_2(k_0, k_1). \quad (15.48c)$$

La (15.48c) si può riscrivere

$$\hat{x}(k_1, k_0) = \sum_{n_0=0}^3 \left[\sum_{n_1=0}^3 x_0(n_1, n_0) w^{4k_0 n_1} \right] w^{4k_1 n_0} w^{k_0 n_0}.$$

Il fattore $w^{k_0 n_0}$ può essere spostato nella sommatoria più interna, in modo da avere

$$\hat{x}(k_1, k_0) = \sum_{n_0=0}^3 \left\{ \left[\sum_{n_1=0}^3 x_0(n_1, n_0) w^{4k_0 n_1} \right] w^{k_0 n_0} \right\} w^{4k_1 n_0},$$

oppure, in forma ricorsiva,

$$x_1(k_0, n_0) = \left[\sum_{n_1=0}^3 x_0(n_1, n_0) w^{4k_0 n_1} \right] w^{k_0 n_0} \quad (15.49a)$$

$$x_2(k_0, k_1) = \sum_{n_0=0}^3 x_0(k_0, n_0) w^{4k_1 n_0} \quad (15.49b)$$

$$\hat{x}(k_1, k_0) = x_2(k_0, k_1). \quad (15.49c)$$

Consideriamo il fattore $w^{4k_0 n_1}$ nell'uguaglianza ((15.49a)). Poiché $N = 16$ si ha:

$$w^{4k_0 n_1} = (w^4)^{k_0 n_1} = (e^{-4i(2\pi/16)})^{k_0 n_1} = (e^{-i\pi/2})^{k_0 n_1}.$$

Quindi $w^{4k_0 n_1}$ assume solo i valori $\pm 1, \pm i$, a seconda del valore dell'intero $k_0 n_1$. Le moltiplicazioni per ± 1 in (15.49a) non sono altro che addizioni o sottrazioni. Quelle per $\pm i$ si riducono a sottrazioni o addizioni precedute

dallo scambio delle parti reali e immaginarie del secondo addendo. Questo equivale a dire che la somma in parentesi quadra nella (15.49a) si può calcolare senza effettuare moltiplicazioni.

Il risultato della somma deve poi essere moltiplicato per $w^{k_0 n_1}$.

Un argomento analogo si applica all'uguaglianza (15.49b): anch'essa può essere valutata senza alcuna moltiplicazione.

15.6 Velocizzazione del calcolo della FFT per dati reali: pre-elaborazione (pre-processing) e post-elaborazione (post-processing)

In questa Sezione come ottimizzare il calcolo della DFT quando i dati in input sono reali. Una parte della presentazione è tratta da [3]. Qui la normalizzazione della DFT è indifferente per quanto concerne la semplicità di scrittura, quindi ritorniamo alla definizione originale (Definizione 14.2.2):

$$\hat{x}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k w^{nk} \quad (15.50)$$

Spesso si è interessati a calcolare la DFT di una successione reale per $x \in \mathbb{R}^N$. In tal caso si può usare la formula per la RDFT ottenuta nella Nota 14.9.3. Però la RDFT porta a una complessità di calcolo dell'ordine di N^2 . È certamente preferibile usare l'algoritmo della FFT, che ha una complessità di calcolo molto minore, dell'ordine di $N \log_2 N$. Però la FFT è un algoritmo di calcolo della DFT di successioni a valori complessi: qui abbiamo tutte le parti immaginarie nulle, e quindi sprechiamo metà dell'allocazione in memoria dei dati. Per economizzare le risorse possiamo ricombinare opportunamente i dati di input (pre-processing) e di output (post-processing) in modo da ottenere:

1. due DFT di N dati reali eseguendo una DFT di N dati complessi;
2. una DFT di $2N$ dati reali eseguendo una DFT di N dati complessi.

Ecco gli algoritmi:

Proposizione 15.6.1. *Siano $x, y \in \mathbb{R}^N$. Poniamo $z = x + iy$ (pre-processing). Allora le DFT soddisfano le relazioni*

$$\begin{aligned}\widehat{x} &= \frac{1}{2}(\widehat{z} + \overline{\widehat{z}}^\dagger) \\ \widehat{y} &= -\frac{i}{2}(\widehat{z} - \overline{\widehat{z}}^\dagger).\end{aligned}\tag{post-processing}$$

Dimostrazione. Come sempre, scriviamo $w = e^{-2\pi i/N}$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z_n w^{nk}) &= x_n \cos \frac{2\pi nk}{N} + y_n \sin \frac{2\pi nk}{N} \\ \operatorname{Im}(z_n w^{nk}) &= y_n \cos \frac{2\pi nk}{N} - x_n \sin \frac{2\pi nk}{N}.\end{aligned}$$

Da questo segue

$$\begin{aligned}\widehat{z}_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} z_n w^{nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left(x_n \cos \frac{2\pi nk}{N} + y_n \sin \frac{2\pi nk}{N} \right) \\ &\quad - \frac{i}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left(x_n \sin \frac{2\pi nk}{N} - y_n \cos \frac{2\pi nk}{N} \right)\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\widehat{x}_k &= \frac{\widehat{z}_k + \overline{\widehat{z}_k}^\dagger}{2} \\ \widehat{y}_k &= \frac{\widehat{z}_k - \overline{\widehat{z}_k}^\dagger}{2i}\end{aligned}$$

□

Nota 15.6.2. Il tempo di calcolo delle fasi di pre-processing, $(x_k, y_k) \rightarrow x_k + iy_k$ per $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$ e di post-processing $(\widehat{z}_k, \overline{\widehat{z}_k}^\dagger) \rightarrow \widehat{z}_k \pm \overline{\widehat{z}_{-k}}^\dagger$ per

$k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$, è dell'ordine di N , quindi trascurabile rispetto al tempo di calcolo $N \log_2 N$ della FFT per grandi valori di N . Perciò l'algoritmo della Proposizione 15.6.1 dimezza l'allocatione di memoria senza allungare apprezzabilmente il tempo di calcolo. \square

Lemma 15.6.3. *Sia N pari; poniamo $w_N = e^{-2\pi i/N}$ e $w_{2N} = e^{-\pi i/N}$. Per $u \in \mathbb{R}^{2N}$, come abbiamo fatto per la FFT separiamo le sottosuccessioni $x_n = u_{2n}$ dei termini pari e $y_n = u_{2n-1}$ dei termini dispari (pre-processing). Allora $x, y \in \mathbb{R}^N$, e per $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$, si ha*

$$\begin{aligned}\widehat{u}_k &= \frac{1}{2}(\widehat{x}_k + w_{2N}^{-k}\widehat{y}_k), \\ \widehat{u}_{k+N} &= \frac{1}{2}(\widehat{x}_k - w_{2N}^{-k}\widehat{y}_k).\end{aligned}$$

(relazioni a farfalla).

Dimostrazione. Osserviamo che $w_{2N}^2 = w_N$. Perciò abbiamo

$$\begin{aligned}\widehat{u}_k &= \frac{1}{2N} \sum_{n=-N+1}^N z_n w^{nk} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} (z_{2n} w_{2N}^{2nk} + z_{2n-1} w^{(2n-1)k}) \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} x_n w_N^{nk} + \frac{1}{2N} w_{2N}^{-k} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} y_n w_N^{nk} \\ &= \frac{1}{2}(\widehat{x}_k + w_{2N}^{-k}\widehat{y}_k).\end{aligned}$$

Abbiamo così provato la prima uguaglianza dell'enunciato. La seconda ora segue dal fatto che x e y sono periodiche di periodo N , mentre $w_{2N}^{k+N} = -w_{2N}^k$ perché $w_{2N}^N = -1$. \square

A partire da questo Lemma, un calcolo elementare prova il seguente risultato:

Proposizione 15.6.4. *Sia $u \in \mathbb{R}^{2N}$ e x, y come nel Lemma 15.6.3. Poniamo $z_n = x_n + iy_n = u_{2n} + iu_{2n-1}$ per $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$ (pre-processing). Allora $z \in \mathbb{C}^N$ e*

$$\begin{aligned}\widehat{u}_k &= \frac{1}{4}\widehat{z}_k(1 - iw_{2N}^{-k}\widehat{y}_k) + \frac{1}{4}\widehat{z}_{-k}(1 + iw_{2N}^{-k}\widehat{y}_k), & k = 0, \dots, \frac{N}{2} \\ \widehat{u}_{k+N} &= \frac{1}{4}\widehat{z}_k(1 + iw_{2N}^{-k}\widehat{y}_k) + \frac{1}{4}\widehat{z}_{-k}(1 - iw_{2N}^{-k}\widehat{y}_k), & k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, 0\end{aligned}$$

Per la DFT, abbiamo sviluppato l'algoritmo FFT di calcolo rapido. Vorremmo elaborare un analogo algoritmo per la DCT e la DST. Limitiamo l'attenzione alla DCT (il caso della DST è analogo).

Poiché la DCT è la DFT di successioni reali pari, si ha:

Esercizio 15.6.5. La DCT di una successione reale $x \in \mathbb{R}^N$ consiste degli $N + 1$ coefficienti $\{\widehat{u}_0, \dots, \widehat{u}_N\}$ della DFT complessa a dimensione $2N$ dell'estensione pari u di x (data da $u_{-n} = u_n = x_n$, $n > 0$).

□

Nota 15.6.6. Poiché u è reale e pari, i coefficienti $\widehat{u}_0, \dots, \widehat{u}_N$ sono reali e pari, per le Proposizioni 14.7.6 e 14.7.7. □

Grazie all'esercizio 15.6.5, possiamo ridurre il problema del calcolo rapido della DCT all'algoritmo della FFT tramite pre-processing e post-processing. I calcoli sono faticosi: ci limitiamo all'enunciato.

Proposizione 15.6.7. (DCT veloce tramite pre-processing e post-processing.) *Sia $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}^{2N}$ la sua estensione pari, e $z_n = u_{2n} + i(u_{2n+1} - u_{2n-1})$, per $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$ (pre-processing). Allora:*

$$\begin{aligned}\widehat{x}_k &= \frac{1}{4}(\widehat{z}_k + \widehat{z}_{-k} - \frac{\widehat{z}_k - \widehat{z}_{-k}}{2 \sin \frac{\pi k}{N}}) & k = 1, \dots, \frac{N}{2}; \\ \widehat{x}_{k+N} &= \frac{1}{4}(\widehat{z}_k + \widehat{z}_{-k} + \frac{\widehat{z}_k - \widehat{z}_{-k}}{2 \sin \frac{\pi k}{N}}) & k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, -1; \\ \widehat{x}_0 &= \frac{1}{2}\widehat{z}_0 + \frac{1}{2N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} u_{2n-1}; \\ \widehat{x}_N &= \frac{1}{2}\widehat{z}_0 - \frac{1}{2N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} u_{2n-1}.\end{aligned}$$

Nota 15.6.8. A causa del denominatore $\sin \frac{\pi k}{N}$, che è vicino a zero per k piccolo e N grande, la trascrizione numerica diretta della Proposizione 15.6.7 è numericamente instabile: occorre invece riscrivere le uguaglianze eliminando il denominatore. \square

15.7 Esercizi sulla FFT

Esercizio 15.7.1. Supponiamo che un computer richieda un tempo τ per il calcolo della FFT di una successione di 2^{15} valori. Quanto tempo è necessario per la FFT di una successione di 2^{16} valori?

1. $\frac{15\tau}{2 \cdot 16}$
2. $2 \frac{16}{15} \tau$
3. $15 \cdot 16\tau$
4. $16 \log_2 16\tau$
5. nessuna delle precedenti

\square

Esercizio 15.7.2. Supponiamo che un computer richieda un tempo τ per il calcolo della FFT di una successione di 2^{15} valori. Quanto tempo è necessario per la FFT di una successione di 2^{16} valori?

1. $\frac{15\tau}{2 \cdot 16}$
2. $2 \frac{16}{15} \tau$
3. $15 \cdot 16\tau$
4. $16 \log_2 16\tau$
5. nessuna delle precedenti

\square

Esercizio 15.7.3. Supponiamo che un computer richieda un tempo T per il calcolo della FFT di una successione di $2^7 = 128$ valori. Quanto tempo è necessario per la FFT di una successione di $2^{13} = 8192$ valori?

1. $\frac{7 \cdot 8192}{13 \cdot 128} T$
2. $\frac{13 \cdot 8192}{7 \cdot 128} T$
3. $13 \cdot 8192 \cdot T$
4. $\frac{13 \cdot 128}{7 \cdot 8192} T$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 15.7.4. Supponiamo che un computer richieda un tempo T per il calcolo della FFT di una successione di 2^6 valori. Quanto tempo è necessario per la FFT di una successione di 2^{12} valori?

1. $12 \cdot 2^{12} T$
2. $2^7 T$
3. $\frac{T}{12 \cdot 2^{12}}$
4. $\frac{T}{2^7}$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 15.7.5. Supponiamo che un computer richieda un tempo τ per il calcolo della FFT di una successione di 2^{15} valori. Quanto tempo è necessario per la FFT di una successione di 2^{16} valori?

1. $\frac{15\tau}{2 \cdot 16}$
2. $2 \frac{16}{15} \tau$
3. $15 \cdot 16\tau$
4. $16 \log_2 16\tau$
5. nessuna delle precedenti

□

Esercizio 15.7.6. Supponiamo che un computer richieda un tempo τ per il calcolo della FFT di una successione di 2^{15} valori. Quanto tempo è necessario per la FFT di una successione di 2^{16} valori?

1. $\frac{15\tau}{2 \cdot 16}$
2. $2 \frac{16}{15} \tau$
3. $15 \cdot 16\tau$
4. $16 \log_2 16\tau$
5. nessuna delle precedenti

□

Capitolo 16

L'errore di approssimazione della trasformata di Fourier con la DFT: stime numeriche dell'aliasing

Abbiamo osservato nella Sezione 14.3 che la DFT di ordine N è la nozione naturale di trasformata di Fourier sul gruppo ciclico di N elementi. Però nella pratica siamo sempre interessati a trasformate di Fourier di funzioni sui reali, oppure di funzioni periodicizzate: nel secondo caso si sta usando una trasformata di Fourier i cui valori sono una funzione sul gruppo \mathbb{Z} degli interi, ossia una successione (la successione dei coefficienti di Fourier). D'altra parte, la DFT, che si applica solo a successioni periodiche, è insostituibile nei problemi di calcolo, perché le sue numerose proprietà di simmetria permettono di realizzare algoritmi di calcolo veloce (i vari algoritmi di FFT presentati nel Capitolo 15). È quindi necessario approssimare trasformate e coefficienti di Fourier con la DFT, e quindi valutare l'errore numerico che si commette in questa approssimazione.

In questa chiave, richiamiamo il fatto che dalla Proposizione 10.2.3 e dal suo Corollario 10.2.4 segue che, se si periodicizza una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$, i coefficienti di Fourier della funzione periodicizzata coincidono con la trasformata di Fourier di f alle frequenze corrispondenti. In altre parole, i campioni di \hat{f} possono essere ottenuti come coefficienti di Fourier di una funzione associata.

Ora, la DFT è una trasformata di Fourier discreta di successioni (ovvero di-

stribuzioni discrete) periodiche. Vogliamo investigare analoghe relazioni fra i valori della DFT della discretizzazione di f ed i coefficienti di Fourier o i campioni della trasformata di Fourier nel senso appena visto. Più precisamente, indicando in questo Capitolo con \tilde{f}_k , per evitare ambiguità, i valori della DFT, ci chiediamo:

- qual è la relazione fra i valori \tilde{f}_k della DFT ed i coefficienti di Fourier $\hat{f}(k)$? Se si approssimano i secondi con i primi, qual è l'errore numerico?
- se si usa la DFT per approssimare la trasformata di Fourier di f , come si valuta l'errore numerico commesso? In particolare, come si stima la differenza fra \tilde{f}_k ed il valore $\hat{f}(k)$ della trasformata di Fourier alla frequenza k ?

In entrambi i casi, vedremo che gli errori di approssimazione sono manifestazioni del fenomeno di aliasing (Sezione 13.5), dovuti al fatto che la discretizzazione nel tempo produce una periodicizzazione nel dominio della frequenza: quindi il valore dell'approssimazione ad una data frequenza risente di contributi anche su frequenze diverse, e precisamente su una successione equispaziata nel dominio della frequenza indotta per reciprocità dalla griglia di campionamento nel dominio del tempo (Definizione 16.2.2). Pertanto il presente Capitolo è una analisi degli errori numerici indotti dall'aliasing.

Le prossime sezioni sono dedicate a risolvere questi due problemi in condizioni di generalità via via maggiori. La presentazione è tratta dall'eccellente monografia [3], alla quale rinviamo il lettore interessato ad approfondimenti ed esempi.

16.1 Approssimazione dei coefficienti di Fourier di funzioni periodiche con la DFT

16.1.1 La formula di somma di Poisson discreta

Consideriamo l'approssimazione con la DFT dei coefficienti di Fourier di funzioni periodiche di periodo T . Più precisamente, consideriamo funzioni f definite sull'intervallo $[-T/2, T/2]$, che per il calcolo della DFT discretizziamo ad un numero N di campioni $f(x_n)$ con $x_n = nT/N$ al variare di n da $-\frac{N}{2} + 1$ a $\frac{N}{2}$. Nonostante il fatto di dover discretizzare f , nondimeno facciamo ipotesi sulla sua regolarità come funzione di una variabile continua:

assumiamo che valgano le condizioni sufficienti per la convergenza della sua serie di Fourier illustrate nel Teorema 5.15.1 (continuità a tratti con la derivata, con un numero finito di salti nel periodo). Consideriamo la serie di Fourier di f : $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{-2\pi i k x/T}$ con $\widehat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-2\pi i k x/T} dx$. Nell'intervallo $[-T/2, T/2]$ essa converge a $f(x)$ per ogni x che non sia un punto di salto ed alla media aritmetica dei limiti destro e sinistro ai punti di salto; altrove, essa converge nello stesso senso al prolungamento periodico di f . Per comodità, supponiamo che i punti x_n non siano punti di salto, o più semplicemente che non ci siano punti di salto, neanche agli estremi del periodo (questa ipotesi non costa niente, perché in ogni caso siamo solo interessati agli N valori ai punti di campionamento, e possiamo interpolargli con una f arbitrariamente liscia). Allora, per $n = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}$,

$$f(x_n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{-2\pi i k x_n/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{-2\pi i k n/N}. \quad (16.1)$$

Sotto queste ipotesi, possiamo facilmente dimostrare il seguente analogo discreto della formula di somma di Poisson (Proposizione 10.3.1):

Lemma 16.1.1. (Variante discreta della formula di somma di Poisson.) *Se la funzione f , periodica di periodo T , è tale che la sua serie di Fourier converge a $f(x)$ ai punti di campionamento $x_n = nT/N$ ($n = [-\frac{N}{2}] + 1, \dots, \frac{N}{2}$), allora la DFT della successione $\{f(x_n)\}$, che indichiamo con $\text{DFT}(f)$ oppure con \widetilde{f} , verifica*

$$\text{DFT}(f)_k \equiv \widetilde{f}_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(-k + mN),$$

o equivalentemente

$$\widetilde{f}_k^\dagger = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k + mN) = (\mathcal{P}\widehat{f})_k.$$

Dimostrazione. Sostituiamo l'espressione 16.1 nel calcolo della DFT della successione $\{f(x_n)\}$: per $k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}$ (assuendo per semplicità, qui

ed in seguito, N pari), si ottiene

$$\begin{aligned} \text{DFT}(f)_k \equiv \tilde{f}_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=[-\frac{N}{2}]+1}^{\frac{N}{2}} f(x_n) e^{-2\pi i n k / N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=[-\frac{N}{2}]+1}^{\frac{N}{2}} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m) e^{-2\pi i m n / N} \right) e^{-2\pi i n k / N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m) \sum_{n=[-\frac{N}{2}]+1}^{\frac{N}{2}} e^{-2\pi i (m+k)n / N} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(-k + mN) \end{aligned}$$

perché, in base al Lemma 14.2.5, $\frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} e^{-2\pi i (m+k)n / N} = 1$ se $m = -k$ mod N e 0 altrimenti. \square

Nota 16.1.2. Se f è una funzione periodica di periodo T che verifica l'ipotesi del precedente Lemma 16.1.1, allora la funzione $f^\sharp = f \chi_{[0, T]}$ verifica l'ipotesi della Proposizione 14.11.1, ed inoltre $\mathcal{P}_1 f^\sharp = f^\sharp$. Allora l'identità del Lemma 16.1.1 per f coincide con l'identità della Proposizione 14.11.1 per f^\sharp .

\square

16.1.2 Funzioni periodiche con banda spettrale limitata: ricostruzione esatta

Introduciamo la seguente definizione, analoga a quella data per funzioni su \mathbb{R} quando introducemmo la classe a banda limitata, ovvero di Paley–Wiener (10.4.1):

Definizione 16.1.3. Supponiamo che, per qualche $M > 0$, la funzione periodica f di periodo T abbia coefficienti di Fourier $\hat{f}(k)$ nulli per $|k| > M$. Allora f è un polinomio trigonometrico: in analogia con il caso non periodico, in questo Capitolo diciamo che f ha *banda spettrale limitata*, ovvero che è *limitata in banda*.

Rammentiamo (Corollario 5.2.6) che le frequenze nello sviluppo di Fourier di una funzione f periodica di periodo T sono date da $k = 0, \pm \frac{2\pi}{T}, \pm \frac{4\pi}{T}, \dots$. Quindi l'indice M a cui i coefficienti di Fourier cominciano ad annullarsi nella Definizione 16.1.3 corrisponde alla frequenza $2\pi M/T$.

Dalla formula di somma di Poisson discreta (Lemma 16.1.1) segue questo analogo discreto del teorema del campionamento (Corollario 10.4.6):

Proposizione 16.1.4. (Il teorema del campionamento discreto: ricostruzione con la DFT dei coefficienti di Fourier di funzioni a banda limitata.) Sia f una funzione periodica con serie di Fourier convergente a f ai punti di campionamento $[-\frac{N}{2}] + 1, \dots, \frac{N}{2}$ (assuendo come sempre, per semplicità, N pari).

(i) Se f è a banda limitata con coefficienti di Fourier $\widehat{f}(k) = 0$ per $|k| \geq N/2$, allora la DFT di ordine N di f riproduce esattamente gli N coefficienti di Fourier non nulli, nel senso che $\widetilde{f}_k = \widehat{f}(k)$ per $[-\frac{N}{2}] + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$.

(ii) Se $\widehat{f}(k) = 0$ per $|k| > N/2$ e N è pari, allora

$$\widetilde{f}_k = \begin{cases} \widehat{f}(k) & \text{per } |k| \leq \frac{N}{2} - 1, \\ \widehat{f}(-\frac{N}{2}) + \widehat{f}(\frac{N}{2}) & \text{per } |k| = \frac{N}{2}. \end{cases}$$

Se f è a valori reali, allora $\widetilde{f}_{\frac{N}{2}} = 2 \operatorname{Re} \left(\widehat{f}(\frac{N}{2}) \right)$.

(iii) Se f ha periodo T , allora la condizione $\widehat{f}(k) = 0$ per $|k| \geq N/2$ della parte (i) equivale a dire che, se $\pi\Omega/2$ è l'estremo inferiore delle frequenze ω tali che i coefficienti di Fourier si annullano, allora $N \geq T\Omega$, ovvero il passo di campionamento $\tau = T/N$ verifica la condizione di Nyquist $\tau \leq 1/\Omega$.

(iv) La identità degli N coefficienti di Fourier di f da $[-\frac{N}{2}] + 1$ a $\frac{N}{2}$ con i valori della DFT di ordine N , nel senso della parte (i), è possibile se e solo i coefficienti di Fourier soddisfano l'identità $\widehat{f}(k) = 0$ per $|k| \geq N/2$, ossia verificano la condizione di Nyquist della parte (iii). Se f non è a banda limitata oppure è a banda limitata in un intervallo di indici non contenuto in $[-\frac{N}{2}] + 1, \frac{N}{2}$, allora approssimare $\widehat{f}(k)$ con \widetilde{f}_k per $[-\frac{N}{2}] + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$ in generale produce un errore di approssimazione (aliasing, con la terminologia del Capitolo 13).

Dimostrazione. Le parti (i) e (iv) seguono immediatamente dal Lemma 16.1.1. Per la parte (ii), osserviamo che i coefficienti di Fourier agli indici $-\frac{N}{2}$ e $\frac{N}{2}$ non sono uguali, ma i valori della DFT invece lo sono, a cause

della periodicità di passo N . Quindi la DFT mescola (sommandoli) i due modi di oscillazione $\pm \frac{N}{2}$. Se f ha valori reali, allora $\widehat{f}(\frac{N}{2}) = \overline{\widehat{f}(-\frac{N}{2})}$, e la somma dà come risultato $2 \operatorname{Re} \left(\widehat{f}(\frac{N}{2}) \right)$. Infine, per provare (iii), basta notare che, se f ha periodo T , i modi di oscillazione di indici $\pm \frac{N}{2}$ corrispondono alla frequenza massima di oscillazione $\frac{N}{2} \frac{2\pi}{T}$: allora la condizione che i coefficienti di Fourier si annullino per indici di valore assoluto maggiore o uguale a $\frac{N}{2}$ equivale a richiedere $N\pi/T \geq \pi\Omega$. \square

16.1.3 Caso generale di funzioni periodiche con banda spettrale illimitata: l'errore di approssimazione

Consideriamo il caso in cui la funzione f non sia a banda limitata, oppure lo sia ma abbia coefficienti di Fourier $\widehat{f}(k) \neq 0$ per qualche $|k| > \frac{N}{2}$. In tal caso sostituire $\widehat{f}(k)$ con il corrispondente valore \widetilde{f}_k della DFT di ordine N causa un errore di approssimazione (aliasing), come notato nella Proposizione 16.1.4 (iv). Diamo ora una stima di questo errore numerico.

Teorema 16.1.5. *(L'errore di approssimazione dei coefficienti di Fourier con la DFT.) Sia f una funzione periodica di periodo T e m un intero non negativo.*

- (i) *Se $m > 1$ e f e le sue prime $m-1$ derivate sono continue in $[-T/2, T/2]$ e la derivata $f^{(m)}$ è limitata con un numero finito di discontinuità nel periodo, tutte di tipo salto, allora, per $-\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$, vale la stima*

$$\widetilde{f}_k - \widehat{f}(k) = o\left(\frac{1}{N^m}\right).$$

- (ii) *Se $m > 0$ ed inoltre la derivata $f^{(m)}$, oltre ad essere limitata, è monotona a tratti, allora vale la stima*

$$\widetilde{f}_k - \widehat{f}(k) = O\left(\frac{1}{N^{m+1}}\right).$$

- (iii) *Per $m \geq 1$ la costante $C = C_k$ dell'infinitesimo a secondo membro della stima (ii) dipende da k proporzionalmente a $\frac{1}{(1-\frac{k}{N})^m}$. In particolare, il rapporto massimo fra queste costanti al variare di k è dell'ordine*

di 3^{m-1} , e le stime dell'errore per k grande sono maggiori che per k piccolo. Per funzioni f a valori reali (o a valori puramente immaginari), si ha $C_{|k|} \sim \frac{1}{(1-\frac{|k|}{N})^{m-1}}$: queste costanti crescono quando k si allontana da 0 (sono maggiori per k dell'ordine di $\pm N/2$ che per $k = 0$, di un fattore 2^{m-1}).

Stessa conclusione vale per la stima (i), dove la dipendenza da k dell'infinitesimo, per $m > 1$, è proporzionale a $\frac{1}{(1-\frac{k}{N})^{m-1}}$.

Dimostrazione. Dalla formula di somma di Poisson discreta (Lemma 16.1.1) segue, per $-\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$,

$$\tilde{f}_k - \hat{f}(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{f}(k + jN) + \hat{f}(k - jN). \quad (16.2)$$

Grazie al Corollario 5.18.2, se vale l'ipotesi della parte (i), esiste una successione $\{a_j > 0\}$ con $\lim_j a_j = 0$ ed una costante $C > 0$ (indipendente da k) tali che

$$\hat{f}(k + jN) < C \frac{a_j}{|k + jN|^m}$$

per ogni $-\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$. Osserviamo che

$$\frac{1}{|k \pm jN|^m} = \frac{1}{N^m} \frac{1}{|j \pm \frac{k}{N}|^m}$$

e $|\frac{k}{N}| \leq \frac{1}{2}$. Pertanto il secondo membro di (16.2) si maggiora, uniformemente rispetto a k , con

$$\frac{2Ca_j}{N^m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|j - \frac{1}{2}|^m},$$

mentre, per ciascun k , la maggiorazione può essere resa più forte così:

$$\frac{2Ca_j}{N^m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|j - \frac{k}{N}|^m}.$$

Poiché la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|j - \frac{1}{2}|^m}$ è convergente per $m \geq 2$, da qui segue la stima in (i). Inoltre, dal teorema di confronto di una serie con un integrale (Lemma

??), otteniamo che, se $m > 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|j - \frac{k}{N}|^m} &\approx \int_1^{\infty} \frac{1}{(x - \frac{k}{N})^m} dx = \int_{1 - \frac{k}{N}}^{\infty} \frac{1}{t^m} dx \\ &= \frac{1}{1-m} \frac{1}{t^{m-1}} \Big|_{1 - \frac{k}{N}}^{\infty} = \frac{1}{m-1} \frac{1}{(1 - \frac{k}{N})^{m-1}}. \end{aligned}$$

ed il primo membro differisce dall'ultimo membro per non più di $\frac{1}{|1 - \frac{k}{N}|^m}$. Quindi la stima diventa

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k + jN) &< C' \left(\frac{1}{(1 - \frac{k}{N})^{m-1}} + \frac{1}{|1 - \frac{k}{N}|^m} \right) \frac{a_j}{|k + jN|^m} \\ &< C' \frac{2}{(1 - \frac{k}{N})^{m-1}} \frac{a_j}{|k + jN|^m}. \end{aligned} \quad (16.3)$$

con C' indipendente da k . Se f è a valori reali, allora $\widehat{f}(k) = \overline{\widehat{f}(-k)}$ (Corollario 5.2.5), e quindi il modulo di \widehat{f} è una successione pari, ossia simmetrica, per cui l'andamento dell'errore dipende solo da $|k|$; analoga conclusione vale per f a valori immaginari.

Analogamente, per provare (ii), facciamo ricorso al Teorema 5.18.5 per ottenere

$$\widehat{f}(k + jN) < C \frac{1}{|k + jN|^{m+1}}$$

per ogni $-\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$ e per qualche costante $C > 0$. Da qui l'argomento della parte (i) porta direttamente alla stima (ii). La costante $C = C_k$ della stima (ii), grazie alla disuguaglianza (16.3), dipende da k proporzionalmente a $\frac{1}{(1 - \frac{k}{N})^{m-1}}$. In particolare, C_k è minima per $k = -\frac{N}{2} + 1$ ed è massima per $k = \frac{N}{2}$, ed il rapporto fra queste due costanti massima e minima di controllo dell'errore è quindi dell'ordine di $(\frac{3}{2})^{m-1} / (\frac{1}{2})^{m-1} = 3^{m-1}$. L'ultima osservazione prova (iii). \square

Nota 16.1.6. La seconda parte del Teorema 16.1.5, dimostrata per $m > 0$, vale anche, con una dimostrazione più elaborata, per $m = 0$, ossia per funzioni limitate e monotone a tratti (si veda un riferimento bibliografico in [3, pg. 189]. \square

16.2 Approssimazione della trasformata di Fourier con la DFT

In questa Sezione valutiamo l'errore di approssimazione della trasformata di Fourier con la DFT. Studiamo dapprima funzioni a supporto compatto, diciamo - senza perdita di generalità- un intervallo, campionate con una griglia di N punti in tale intervallo; poi funzioni con trasformata di Fourier a supporto compatto; infine, il caso generale.

16.2.1 Funzioni a supporto compatto

Sia f una funzione a supporto nel compatto $[-T/2, T/2]$. Come prima, siamo interessati solamente a N valori campionati di f , ai punti equispaziati $x_n = n/T$, dove $-\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq N/2$. Pertanto possiamo supporre che f sia arbitrariamente regolare in $[-T/2, T/2]$ (possiamo raccordare gli N valori campionati con una curva arbitrariamente liscia, che ci dà il grafico di f). Quindi assumiamo che la serie di Fourier converga a f , che la trasformata di Fourier sia definita e che valga la formula di somma di Poisson. Per comodità e concretezza, in questa Sezione supponiamo che f sia di classe $C^{(m-1)}$ ed ammetta (5.18.3) derivata di ordine m limitata e monotona a tratti (equivalentemente, la derivata di ordine m è continua a tratti e monotona a tratti).

Nota 16.2.1. Stiamo implicitamente assumendo che $f(-T/2) = f(T/2) = 0$. Se i due valori estremi fossero differenti, la funzione f avrebbe un salto al bordo: in tal caso ai punti $\pm T/2$ la serie di Fourier convergerebbe alla media aritmetica di questi valori estremi, ed il decadimento asintotico della trasformata di Fourier e dei coefficienti di Fourier sarebbe più lento, dell'ordine di $1/\omega$ e $1/n$ rispettivamente (Corollario 8.2.8 e Proposizione 5.18.3; si vedano anche il Lemma 5.18.1 ed il Teorema 5.18.5). \square

Osserviamo che gli N campioni di f sono presi ai punti $x_n = nT/N$ equispaziati nell'intervallo di supporto, $[-T/2, T/2]$ (naturalmente, come sempre, $-\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq \frac{N}{2}$): il passo di campionamento quindi è $\tau = T/N$. Pertanto l'input della DFT non cambia se sostituiamo f con la sua periodicizzazione di passo T . In altre parole, possiamo utilizzare i risultati della precedente Sezione 16.1 (o meglio della Sottosezione 16.1.3, perché il fatto che la funzione originale sia a supporto compatto esclude che anche il suo spettro di Fourier lo sia (Sezione 8.7)). In particolare, per questa scelta di f abbiamo aliasing.

Possiamo quindi far uso dell'espressione tramite la DFT della formula di somma di Poisson per i dati campionati $f_n = f(x_n)$ e $\widehat{f}_k = \widehat{f}(\omega_k)$, con $\omega_k = \frac{k}{N\tau} = k/T$ (Proposizione 14.11.1); si dice che queste frequenze sono *ottenute per reciprocità* a partire dalla successione x_n dei punti di campionamento nel dominio del tempo. Per uso futuro, definiamo formalmente questa nozione:

Definizione 16.2.2. Dato T, Ω reali positivi ed N intero positivo, le due successioni equispaziate di N punti $x_n = nT$ nel dominio del tempo e $\omega_n = n\Omega$ nel dominio della frequenza ($-\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq \frac{N}{2}$) si dicono *connesse per reciprocità* se vale la *relazione di reciprocità* $T\Omega = 1$.

In tal modo, ricordando che $N\tau = T$, otteniamo:

$$T\{\text{DFT}_N \mathcal{P}_N\{f_n\}\}_k = \mathcal{P}_N\{\widehat{f}_k\}.$$

D'altra parte, ora la successione degli N campioni f_n non cambia sotto l'azione di \mathcal{P}_N , perché questa periodizzazione consiste nel sommare a ciascun campione valori del tipo $f(x_{n+jN}) = f(x_n + jT/2)$, ovvero valori di f su punti che giacciono fuori dell'intervallo di supporto $[-T/2, T/2]$, e su questi punti f si annulla. In altre parole, $\mathcal{P}_N\{f_n\} = \{f_n\}$. Quindi abbiamo trovato il risultato seguente:

Proposizione 16.2.3. *Nella notazione appena sviluppata, si ha*

$$T\{\text{DFT}_N\{f_n\}\}_k = \mathcal{P}_N\{\widehat{f}_k\}.$$

In seguito alla normalizzazione per il fattore T che emerge in questa variante della formula di somma di Poisson, vogliamo ora valutare l'errore di approssimazione così definito:

Definizione 16.2.4. (Errore di aliasing.) L'errore commesso nell'approssimare alle frequenze ω_k (con $-\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$) la trasformata di Fourier di f con la sua DFT, nella notazione appena sviluppata, è

$$T \text{DFT}_N\{f_n\}_k - \widehat{f}(\omega_k).$$

Analogamente alla notazione utilizzata nella Sottosezione 16.1.1, scriviamo $\text{DFT}_N\{f_n\}_k \equiv \widetilde{f}_k$. Pertanto l'errore di approssimazione, detto anche *errore di aliasing*, è

$$T\widetilde{f}_k - \widehat{f}_k.$$

Ora dalla Proposizione 16.2.3 abbiamo:

Corollario 16.2.5. *Per funzioni a supporto compatto campionate su N punti equispaziati nell'intervallo di supporto, l'errore di aliasing alle frequenze equispaziate ω_k ottenuta per reciprocità (Definizione 16.2.2) dai punti di campionamento, è*

$$|\mathcal{P}_N\{\widehat{f}_k\} - \widehat{f}_k|.$$

In altre parole, l'errore di aliasing è la differenza fra la trasformata di Fourier dell'input alle frequenze ω_k e la sua periodicizzazione di passo N , ovvero, in termini di frequenze, di passo $1/T$ (due frequenze $\omega_k = \frac{k}{NT}$ distano $\frac{k}{NT}$, quindi la periodicizzazione di passo N sui loro indici equivale alla periodicizzazione di passo $1/T$ nei valori della frequenza, esattamente come si è già osservato nella dimostrazione della Proposizione 14.11.1). Il lettore è vivamente consigliato di rivedere la situazione identica che abbiamo incontrato nella dimostrazione del teorema del campionamento di Shannon, sia nel Capitolo 10, sia nel Capitolo 13.

Il prossimo teorema dà una stima di questo errore.

Teorema 16.2.6. *(L'errore di approssimazione della trasformata di Fourier con la DFT, per funzioni a supporto compatto.) Sia f una funzione con supporto in $[-T/2, T/2]$, campionata negli N punti $x_n = nT/N$, dove $-\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq \frac{N}{2}$, e per $-\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$ siano $\omega_k = k/T$ le frequenze ottenute dai punti x_n per reciprocità (Definizione 16.2.2). Poniamo $f_n = f(x_n)$ e $\widehat{f}_k = f(\omega_k)$, e scriviamo $\widetilde{f}_k = \text{DFT}\{f_n\}_k$.*

- (i) *Sia $m > 1$ e supponiamo che f e le sue derivate $f^{(j)}$ per $j = 1, 2, \dots, m-1$ siano continue in $[-T/2, T/2]$, con $f^{(j)}(-T/2) = f^{(j)}(T/2)$ (quindi stiamo assumendo la continuità delle derivate del periodicizzato di f di passo T). Supponiamo inoltre che la derivata $f^{(m)}$ sia limitata con un numero finito di discontinuità nel periodo, tutte di tipo salto. Allora, per $-\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$, l'errore di aliasing soddisfa la stima*

$$T\widetilde{f}_k - \widehat{f}(k) = o\left(\frac{1}{N^m}\right).$$

- (ii) *Se $m > 0$ ed in aggiunta alle ipotesi della parte (i) si assume che la derivata $f^{(m)}$, oltre ad essere limitata, sia monotona a tratti, allora vale la stima*

$$T\widetilde{f}_k - \widehat{f}(k) = O\left(\frac{1}{N^{m+1}}\right).$$

(iii) Se la condizione $f^{(k)}(-T/2) = f^{(k)}(T/2)$ vale solo per $k = 1, \dots, p < m - 1$, allora le stime precedenti dell'errore di aliasing diventano

$$T\tilde{f}_k - \hat{f}(k) = o\left(\frac{1}{N^{p+1}}\right).$$

(iv) Per la dipendenza da k delle costanti di questi infinitesimi valgono le stesse stime del Teorema 16.1.5 (iii).

Dimostrazione. L'argomento procede in maniera analoga a quella del teorema corrispondente per i coefficienti di Fourier (Teorema 16.1.5). Ci limitiamo a dare la dimostrazione del risultato più forte (la parte (ii)), ed un cenno di (iii): il lettore può ricavarne quella della parte (i) per esercizio seguendo la traccia del teorema citato.

Come sempre, partiamo calcolando alle frequenze ω_k la formula di somma di Poisson, ma questa volta non quella discreta bensì quella per variabile continua, nel caso di periodizzazione di passo τ (10.9). Scegliamo il passo $\tau = T/N$ (l'incremento fra due punti di campionamento consecutivi). Poiché $f(x_n) = 0$ se $|x_n| \geq \frac{T}{2}$, ossia se $|n| \geq \frac{N}{2}$ (qui stiamo assumendo che $f(-T/2) = f(T/2) = 0$), si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{T}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f(x_n) e^{-2\pi i x_n \omega_k} &= \mathcal{P}_{N/T} \hat{f}(\omega_k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega_k + \frac{jN}{T}\right) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_k + jN) \end{aligned} \quad (16.4)$$

(nel primo membro c'è una somma finita anziché una serie perché il supporto di f è compatto). In questa identità il primo membro si riscrive come

$$\frac{T}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f(x_n) e^{2\pi i x_n \omega_k} = \frac{T}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f(x_n) e^{2\pi i n k/N} = T\tilde{f}_k.$$

Quindi per l'errore di aliasing si ottiene:

$$T\tilde{f}_k - \hat{f}(k) = \sum_{j \neq 0} \hat{f}(\omega_k + jN). \quad (16.5)$$

D'altra parte, consideriamo $\mathcal{P}_T f$, il periodicizzato di f di passo T : per la Proposizione 10.2.4, i suoi coefficienti di Fourier sono connessi alla trasformata di Fourier di f nel modo seguente:

$$\widehat{f}(n/T) = T\widehat{\mathcal{P}_T f}(n).$$

In altre parole,

$$\widehat{f}(\omega_{k+jN}) = \widehat{f}\left(\frac{k+jN}{T}\right) = T\widehat{\mathcal{P}_T f}(n). \quad (16.6)$$

Questo riduce il secondo membro di (16.5) ad una serie di coefficienti di Fourier, che si stimano esattamente come nella dimostrazione del Teorema 16.1.5: in tal modo si ottengono (ii) (ed analogamente (i)), e (iv).

Se la condizione di annullamento ai bordi delle derivate successive, o almeno di uguaglianza ai bordi, viene meno prima di raggiungere la derivata di ordine $m - 1$, allora l'ordine di decadimento dei coefficienti di Fourier è più blando, come osservato nella Nota 16.2.1. Applicando i risultati citati in quella Nota otteniamo la stima (iii). \square

Nota 16.2.7. La seconda parte del Teorema 16.1.5, dimostrata per $m > 0$, vale anche, con una dimostrazione più elaborata, per $m = 0$, ossia per funzioni limitate e monotone a tratti (si veda un riferimento bibliografico in [3, pg. 189]. \square

16.2.2 Funzioni a banda spettrale limitata

Consideriamo ora l'errore di approssimazione con la DFT di funzioni f con banda spettrale limitata. In realtà questa Sezione potrebbe essere unificata con la successiva che tratta il caso generale di funzioni non necessariamente a supporto compatto ne' nel dominio del tempo ne' in quello della frequenza, perché le stime dell'errore sono analoghe, ma preferiamo trattare a parte il caso di banda spettrale limitata per evidenziare in seguito come l'errore nel caso generale sia la somma di contributi di addendi limitati nel tempo o nella frequenza. Inoltre, il caso con spettro di Fourier a supporto compatto ricalca l'argomento che dimostra il teorema del campionamento (Teorema ???: si veda anche il Capitolo 13), ed è opportuno evidenziarne qui l'analogia.

Sia quindi f una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ tale che \widehat{f} ha supporto nel compatto $[-\Omega/2, \Omega/2]$. Il primo problema da affrontare è: come si scelgono gli N

punti di campionamento nel dominio del tempo? Dobbiamo scegliere N punti equispaziati in un intervallo $[-A/2, A/2]$, ma poiché nel dominio del tempo f non può avere supporto compatto (Sezione ??), ora non c'è un modo naturale di scegliere A . Allora cominciamo invece con lo scegliere una partizione equispaziata per il campionamento nel dominio delle frequenze: N punti equispaziati $\omega_n = n/\Omega$, con $-\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq N/2$. Nel dominio del tempo, consideriamo una successione equispaziata di N punti $x_n = n\tau$ con $-\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq N/2$. Affinché non ci sia aliasing, sappiamo dall'approccio generale del teorema del campionamento, ed in particolare dalle Sottosezioni 16.1.2 e 16.1.3 che si deve scegliere

$$\tau \leq 1/\Omega. \quad (16.7)$$

Allora gli N punti nel dominio del tempo si equidistribuiscono nell'intervallo $[-A/2, A/2] \equiv [-N\tau, N\tau] \subset [-\Omega, \Omega]$. In altre parole, scegliamo

$$A = N\tau. \quad (16.8)$$

Poiché la funzione f non è a supporto compatto, troncarla su questo intervallo ci fa perdere parte dei suoi valori, e dobbiamo quindi aspettarci un errore di approssimazione, questa volta dovuto al troncamento nel tempo invece che nella frequenza.

Stimiamo qualitativamente questo errore applicando, come sempre, la formula di somma di Poisson (10.7), che, nella notazione di (16.4), ora diventa:

$$\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x_n) e^{-2\pi i x_n \omega_k} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega_k + \frac{j}{\tau}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_{k+jN}) \quad (16.9)$$

(stime quantitative saranno ricavate in generale, nella prossima Sezione 16.2.3).

Ora, al secondo membro sopravvive solo il termine $\hat{f}(\omega_k)$, perché per $j \neq 0$ la frequenza $\omega_{k+jN} = \omega_k + \frac{j}{\tau}$ è fuori del supporto $[-\Omega/2, \Omega/2]$ di \hat{f} , dal momento che abbiamo scelto $\tau \leq 1/\Omega$ (16.7). In realtà, nel solo caso $k = -\frac{N}{2}$, se i limiti $\hat{f}\left(\omega_{\frac{N}{2}}^{-}\right)$ o $\hat{f}\left(\omega_{-\frac{N}{2}}^{+}\right)$ sono non nulli, allora sopravvivono due termini e non uno solo, ma in tal caso sceglieremo Ω leggermente più grande per evitare questo inconveniente banale.

Invece al primo membro i termini da $-\frac{N}{2} + 1$ a $\frac{N}{2}$ sono, a meno della costante N , la DFT di ordine N calcolata a ω_k .

Pertanto nel caso presente, ponendo come al solito $\tilde{f}_f = \text{DFT}\{f(x_n)\}_k$, la formula di somma di Poisson diventa:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega_k) &= \tau N \left(\tilde{f}_k + f_{-\frac{N}{2}} e^{-2\pi i \frac{N}{2} k/N} + \sum_{|n| > \frac{N}{2}} f_n e^{-2\pi i n k/N} \right) \\ &= \tau N \left(\tilde{f}_k + f_{-\frac{N}{2}} (-1)^k + \sum_{|n| > \frac{N}{2}} f_n e^{-2\pi i n k/N} \right).\end{aligned}$$

La DFT non è completamente simmetrica rispetto agli indici. Nel nostro caso abbiamo scelto di far variare gli indici da $-\frac{N}{2} + 1$ a $\frac{N}{2}$. Invece avremmo potuto scegliere il range da $-\frac{N}{2}$ a $\frac{N}{2} - 1$. Poiché la DFT si applica a successioni periodiche non fa differenza; ma qui la successione $f_n = f(x_n)$ non è periodica, ed ora che f non è più a supporto compatto non è più neanche ipotizzabile che valga $f(x_{\pm \frac{N}{2}}) = 0$. Pertanto occorre periodicizzare la successione f_n , o equivalentemente alterare l'ultimo addendo della DFT in modo che divenga $\frac{1}{2} (f_{-\frac{N}{2}} + f_{\frac{N}{2}}) (-1)^k$ invece che $f_{\frac{N}{2}} (-1)^k$. In tal modo, la formula di somma di Poisson diventa

$$\tau N \left(\tilde{f}_k + \frac{1}{2} (f_{-\frac{N}{2}} + f_{\frac{N}{2}}) (-1)^k + \sum_{|n| > \frac{N}{2}} f_n e^{-2\pi i n k/N} \right) = \widehat{f}(\omega_k),$$

e pertanto, rammentando la scelta fatta per A (16.8), per l'errore di approssimazione (Definizione 16.2.4) troviamo

$$|A\tilde{f}_k - \widehat{f}(\omega_k)| \leq \tau \left(\frac{1}{2} (|f_{-\frac{N}{2}}| + |f_{\frac{N}{2}}|) + \left| \sum_{|n| > \frac{N}{2}} f_n e^{-2\pi i n k/N} \right| \right). \quad (16.10)$$

Da questa disuguaglianza possiamo ricavare stime per l'errore trovando maggiorazioni per la serie a secondo membro, in analogia a quanto si è fatto nel Teorema 16.2.6. Però in quel teorema si doveva maggiorare una serie costruita con gli addendi \widehat{f}_k , per i quali valgono stime di decadimento in base alla regolarità di f . Qui invece gli addendi sono costruiti a partire dai valori campionati $f_n = f(x_n)$ di f , e quindi ora dobbiamo imporre condizioni non sulla regolarità di f ma sul suo decadimento all'infinito. Rinviamo questa analisi al caso generale nella prossima Sottosezione 16.2.3. Osserviamo solo

che (16.10) prova il fatto seguente, che non è altro che quanto il buon senso suggerisce. Se allarghiamo l'intervallo $[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$ in cui viene campionata la funzione f , allora, per (16.8), deve aumentare N (perché il passo di campionamento τ non può essere aumentato a causa della condizione di Nyquist (16.7)). In altre parole, se aumentiamo A il range di somma nella serie a secondo membro decresce e quindi l'errore si riduce; esso tende a zero con N se assumiamo che la serie converga (il che è sostanzialmente analogo ad una delle ipotesi di applicabilità della formula di somma di Poisson, si veda la Proposizione 10.3.1).

16.2.3 Il caso generale: funzioni a supporto non compatto ed a banda spettrale illimitata

Il ragionamento svolto nella Sottosezione precedente apre la strada a stime dell'errore nel caso generale. Infatti, se f non ha supporto compatto, al secondo membro della formula di Poisson (16.9) rimangono tutti i termini invece che il solo $\widehat{f}(\omega_k)$, e quindi ora invece di (16.10) si ottiene:

$$|A\widetilde{f}_k - \widehat{f}(\omega_k)| \leq \tau \left(\frac{1}{2} (|f_{-\frac{N}{2}}| + |f_{\frac{N}{2}}|) + \left| \sum_{|n| > \frac{N}{2}} f_n e^{-2\pi i n k / N} \right| \right) + \left| \sum_{|j| \leq 1} \widehat{f}(\omega_k + \tau j) \right|. \quad (16.11)$$

In questa somma, gli addendi a secondo membro rappresentano i contributi all'errore esaminati nelle due Sottosezioni precedenti: il primo è l'errore di troncamento dovuto al fatto che f non ha supporto compatto, l'ultimo è l'errore di troncamento dovuto al fatto che \widehat{f} non ha supporto compatto.

Teorema 16.2.8. (L'errore di approssimazione della trasformata di Fourier con la DFT.) *Sia f una funzione campionata negli N punti $x_n = nT/N$, dove $-\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq \frac{N}{2}$, e per $-\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$ siano $\omega_k = k/T$ le frequenze ottenute dai punti x_n per reciprocità (Definizione 16.2.2). Poniamo $f_n = f(x_n)$ e $\widehat{f}_k = f(\omega_k)$, e scriviamo $\widetilde{f}_k = \text{DFT}\{f_n\}_k$. Sia $m > 0$ e supponiamo che f e le sue derivate $f^{(j)}$ per $j = 1, 2, \dots, m-1$ siano continue in $[-T/2, T/2]$, con $f^{(j)}(-T/2) = f^{(j)}(T/2)$ (quindi stiamo assumendo la continuità delle derivate del periodizzato di f di passo T). Supponiamo inoltre che la derivata $f^{(m)}$ sia limitata con un numero finito*

di discontinuità nel periodo, e monotona a tratti. A seconda dell'ordine di infinitesimo di f per $x \rightarrow \pm\infty$ si hanno varie stime dell'errore di aliasing alle frequenze ω_k . Studiamo qui due casi tipici.

- (i) Se $f(x) < Me^{-\alpha|x|}$ per qualche M , $\alpha > 0$ e per tutti gli $|x| > T/2$, allora esistono costanti $C_k > 0$, indipendenti da N , e $C \geq C_k$ indipendente da k e N , tali che, per $\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$, l'errore di aliasing soddisfa la stima

$$|T\tilde{f}_k - \hat{f}(k)| \leq \frac{2Me^{-\alpha(\frac{1}{2}-\frac{1}{N})}}{\alpha} + \frac{C_k}{N^{m+1}} \quad (16.12)$$

dove $C_k < C' \frac{1}{(1-\frac{k}{N})^m}$ e C' è una costante indipendente da k e N .

- (ii) Se valgono le ipotesi della parte (i) tranne che per la stima asintotica su f , che ora assumiamo essere $f(x) < M/|x|^r$ per qualche M , $r > 1$ e per tutti gli $|x| > T/2$, allora la stima diventa

$$|T\tilde{f}_k - \hat{f}(k)| \leq \frac{2M}{r-1} \frac{1}{\left(\frac{T}{2} - \frac{T}{N}\right)^{r-1}} + \frac{C_k}{N^{m+1}} \quad (16.13)$$

dove $C_k < C' \frac{1}{(1-\frac{k}{N})^m}$ e C' è una costante indipendente da k e N .

- (iii) Se la condizione $f^{(k)}(-T/2) = f^{(k)}(T/2)$ vale solo per $k = 1, \dots, p < m-1$, allora le stime precedenti dell'errore di aliasing diventano rispettivamente

$$|T\tilde{f}_k - \hat{f}(k)| \leq \frac{2Me^{-\alpha(\frac{1}{2}-\frac{1}{N})}}{\alpha} + o\left(\frac{1}{N^{p+1}}\right)$$

e

$$|T\tilde{f}_k - \hat{f}(k)| \leq \frac{2M}{r-1} \frac{1}{\left(\frac{T}{2} - \frac{T}{N}\right)^{r-1}} + o\left(\frac{1}{N^{p+1}}\right).$$

Per la dipendenza da k delle costanti di questi infinitesimi valgono le stesse stime delle parti (i) e (ii).

Dimostrazione. Per provare (i), stimiamo il primo termine al secondo membro di (16.11), trascurando il fattore moltiplicativo τ :

$$\left(\frac{1}{2} \left(|f_{-\frac{N}{2}}| + |f_{\frac{N}{2}}| \right) + \left| \sum_{|n| > \frac{N}{2}} f_n e^{-2\pi i n k / N} \right| \right) \leq \left| \sum_{|n| \geq \frac{N}{2}} f_n e^{-2\pi i n k / N} \right| \leq \sum_{|n| \geq \frac{N}{2}} |f(x_n)|. \quad (16.14)$$

Poiché la funzione $e^{-\alpha x}$ è decrescente per $x \geq 0$ possiamo applicare il criterio di confronto di una serie con un integrale (Lemma ??) ed otteniamo

$$\sum_{n \geq \frac{N}{2}} |f(x_n)| \leq M \int_{\frac{T}{2} - \tau}^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{M}{\alpha} e^{-\alpha(\frac{T}{2} - \tau)}. \quad (16.15)$$

Combinando (16.14) e (16.15) si trova

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \left(|f_{-\frac{N}{2}}| + |f_{\frac{N}{2}}| \right) + \left| \sum_{|n| > \frac{N}{2}} f_n e^{-2\pi i n k / N} \right| \right) &\leq \frac{2M}{\alpha} e^{-\alpha(\frac{T}{2} - \tau)} \\ &= \frac{2M}{\alpha} e^{-\alpha \frac{T}{2} + \frac{\alpha T \tau}{N}} \end{aligned} \quad (16.16)$$

perché $\tau = T/N$ da (16.8).

Ora consideriamo l'altro termine al secondo membro di (16.11). A prima vista sembra di poter applicare la stima del Teorema 16.2.6 (ii), ed in effetti ora proviamo che tale stima vale, ma occorre modificare leggermente l'argomento di quel teorema perché ora non vale più l'ipotesi che f sia a supporto compatto. Infatti, ricordando la prima identità in (16.2.1), ora abbiamo:

$$\widehat{f}(\omega_k + \tau j) = \widehat{f}\left(\omega_{\frac{k+jN}{\tau}}\right) = \left(\int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}} + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} \right) f(x) e^{-2\pi i(k+jN)x/T} dx.$$

Il termine centrale al lato destro di questa disuguaglianza è nient'altro che il coefficiente di Fourier di indice $k+jN$ della funzione f (periodicizzata a partire dall'intervallo $[-T/2, T/2]$), definito nel Corollario 5.2.6, il quale si stima come nel Teorema 16.1.5: è infinitesimo come $O(1/N^{m+1})$. Consideriamo gli

altri due termini, ed integriamo per parti. In tal modo troviamo:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i(k+jN)x/T} dx \\
 &= \frac{T}{-2\pi i(k+jN)} f(x) e^{-2\pi i(k+jN)x/T} \Big|_{\frac{T}{2}}^{\infty} \\
 & \quad - \frac{T}{-2\pi(k+jN)} \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi(k+jN)x/T} dx \\
 &= -\frac{T}{2\pi(k+jN)} \left(f(T/2) e^{-\pi i(k+jN)} - \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i(k+jN)x/T} dx \right).
 \end{aligned} \tag{16.17}$$

Un calcolo analogo vale per l'integrale $\int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}} f(x) e^{-2\pi i(k+jN)x/T} dx$, però in questo caso il termine di bordo nell'integrale per parti vale $-f(-T/2)e^{\pi i(k+jN)}$. Poiché l'esponenziale è periodico con periodo T e per la funzione f (e le sue derivate) si è assunta l'identità $f(-T/2) = f(T/2)$, i termini di bordo dei due integrali si elidono a vicenda, e l'integrazione per parti ci riporta alla stessa somma di due integrali, ma con f' al posto di f e con un multiplo di $k+jN$ al denominatore. Ripetendo m volte l'integrazione per parti, e tenendo conto del fatto che $D^m f$ è limitata, otteniamo che anche la somma dei due integrali si maggiora con un termine del tipo C/N^{m+1} per qualche $C > 0$ che possiamo prendere indipendente da k . Quindi il primo membro di (16.14) si maggiora con C/N^{m+1} , ed il resto dell'argomento procede come nella dimostrazione del Teorema 16.2.6 (ii) per arrivare alla stima al secondo membro di (16.12). Questo prova (i).

La dimostrazione di (ii) è identica, tranne per il fatto che l'integrale in (16.15) ora diventa $M \int_{\frac{T}{2}-\tau}^{\infty} x^r dx = \frac{M}{r-1} \frac{1}{(\frac{T}{2}-\tau)^{r-1}}$, il che porta, passo dopo passo, alla disuguaglianza in (ii). \square

Capitolo 17

Metodi numerici per deconvoluzione e trasformata di Fourier a finestre

17.1 Deconvoluzione non partizionata

Abbiamo osservato nella Nota 11.1.1 che, per un auditorium la cui risposta all'impulso non si modifica per traslazione temporale dell'impulso, il segnale $h(t - t_0)$ ascoltato al tempo t dopo che è stato prodotto un segnale impulsivo al tempo t_0 è la convoluzione $h^\dagger * \delta(t_0) = h(t - t_0)$. D'altra parte le combinazioni lineari delle delta sono dense, nel senso delle distribuzioni, nelle funzioni continue f a crescita al più polinomiale: questo equivale a dire che le somme di Riemann approssimano l'integrale di f . Pertanto, il segnale acustico ascoltato nell'auditorium quando i musicisti suonano un segnale f è la convoluzione $h * f$.

Poiché ora siamo interessati unicamente a segnali campionati, quindi discreti, non è indispensabile utilizzare distribuzioni, e vorremmo derivare questo risultato in modo più elementare.

17.1.1 Operatori lineari invarianti per traslazione

Definizione 17.1.1. (Filtri.) Un *filtro* T , anche detto *sistema* nel linguaggio ingegneristico, è una trasformazione lineare, non necessariamente inverti-

bile, che mappa una sequenza in ingresso $f(n)$ in una in uscita $g(n)$, oppure un segnale in ingresso $f(t)$ di variabile continua t in uno in uscita $g(t)$.

Ad esempio, l'operatore che restituisce al tempo $t > 0$ la media da 0 a $1+t$ dei valori del segnale in ingresso è un filtro non invertibile (segnali diversi possono avere la stessa media, e comunque i valori dell'ingresso per tempi negativi non fanno differenza, e pertanto si perde l'iniettività. Invece, data una funzione (o successione) h in L^1 (rispettivamente ℓ^1) tale che la trasformata di Fourier (o DFT) \widehat{h} non si annulla mai, il filtro $T(f) = h * f$ è invertibile, come conseguenza della proprietà di convoluzione della trasformata di Fourier (per maggiori dettagli si veda la Sottosezione 17.1.2 più sotto).

Definizione 17.1.2. (Risposta di un filtro all'impulso.) Si chiama *risposta all'impulso* del filtro T la funzione $h = T\delta_0$, dove δ_0 è il segnale puramente impulsivo (delta di Dirac, nel senso dell'Esempio 11.5.4 (iii)) al tempo $t = 0$. Si osservi che, se il filtro agisce su segnali discreti, la delta di Dirac è il segnale che vale 1 al tempo 0 e 0 altrove; se agisce su segnali di variabile continua, la delta di Dirac e la convoluzione vanno intese nel senso delle distribuzioni (Sezione 11.14).

Definizione 17.1.3. Si dice che un filtro T è *invariante per traslazione temporale* se l'operatore T commuta con le traslazioni: per ogni segnale f in ingresso e per ogni k, n ,

$$T(\lambda_k x)(n) = \lambda_k (Tx)_n .$$

In altre parole, detta g la risposta all'input f , allora $g(n - k)$ è la risposta all'input $f(n - k)$ ritardato (o anticipato, se $k < 0$) di un numero k di campioni. Analoga definizione si pone per filtri su segnali di variabile continua (che vengono applicati alla delta di Dirac nel senso delle distribuzioni, in analogia a quanto visto nella Sezione 11.9).

Questo significa che il filtro modella un'apparecchiatura di elaborazione il cui operato non cambia col tempo, analogamente al funzionale del campionamento della Sezione 11.1.

Proposizione 17.1.4. *Ogni operatore lineare continuo invariante per traslazione è un convolutore (e precisamente il convolutore per la propria funzione di risposta all'impulso).*

Dimostrazione. Per semplicità presentiamo la dimostrazione per segnali discreti a supporto finito. Il caso di supporto infinito, poco interessante per le applicazioni, segue immediatamente dalla continuità dell'operatore e viene lasciato per esercizio; il caso di segnali di variabile continua è analogo, ma lo scambio dell'operatore con l'operazione di convoluzione va inteso nel senso degli operatori lineari sulle distribuzioni (Sezione 11.9).

Sia f il segnale discreto in ingresso, e rammentiamo che, come nella Proposizione 11.15.3 nel caso di variabile continua, si ha $\delta_0 * f = f$, perché

$$\delta_0 * f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta_0(n-k)$$

e $\delta_0(n-k) = 1$ se $n = k$ e 0 altrimenti. Inoltre, sia h la risposta impulsiva dell'operatore, e rammentiamo che, per l'invarianza per traslazione, si ha

$$T(\delta(n-k)) = T(\delta(\cdot - k))(n) = T\lambda_k\delta_0(n) = \lambda_k T\delta_0(n) = \lambda_k h(n) = h(n-k).$$

Ora segue dalla linearità che

$$\begin{aligned} (Tf)(n) &= T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)T[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)h(n-k) = f * h(n) = h * f(n). \end{aligned}$$

□

Includiamo qui alcune altre definizioni utili.

Definizione 17.1.5. Si dice che un filtro T è *stabile* se per qualche costante $C > 0$ e per tutti i segnali f si ha

$$\|Tf\|_{\infty} \leq C\|f\|_{\infty},$$

ossia se l'operatore T è continuo in L^{∞} (o ℓ^{∞}), nel senso della Definizione 4.6.2. La più piccola di tali costanti C è, in base alla suddetta Definizione, la norma $\|T\|$ dell'operatore, considerato come operatore su L^{∞} o ℓ^{∞} .

Proposizione 17.1.6. Il filtro T è stabile se e solo se la sua risposta all'impulso, $h = T\delta_0$, appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ (rispettivamente, $\ell^1(\mathbb{Z})$), e $\|T\| = \|h\|_1$.

Dimostrazione. La stabilità di T equivale alla disuguaglianza $\|Tf\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$. D'altra parte, come prima, $Tf = T(\delta_0 * f) = h * f$. Quindi T è stabile se e solo se $\|h * f\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$. Osserviamo che

$$\|h * f\|_\infty = \sup_t |h * f(t)| = \sup_t |\langle \lambda_t h, f \rangle| \leq \|\lambda_t h\|_1 \|f\|_\infty = \|h\|_1 \|f\|_\infty$$

in base alle disuguaglianze (11.4) e (??), rispettivamente. Quindi $\|Tf\|_\infty \leq \|h\|_1 \|f\|_\infty$. Inoltre, in base alle disuguaglianze (11.5) e (??) rispettivamente, la norma $\|h\|_1$ è la più piccola costante che verifica questa disuguaglianza per ogni f in $L^p(\mathbb{R})$ e in ℓ^p , rispettivamente. \square

Definizione 17.1.7. Si dice che un filtro T è *causale* se la risposta del filtro per ogni tempo t_0 dipende soltanto dall'ingresso per $t \leq t_0$, ossia se la sua risposta all'impulso è zero per $t < 0$.

17.1.2 Deconvoluzione non partizionata: soppressione a posteriori di equalizzazioni ambientali

Un problema frequente nel trattamento dei segnali acustici è l'inversione di un operatore di convoluzione precedentemente applicato, o *deconvoluzione*. Un esempio tipico è la soppressione dell'equalizzazione causata dalla sala d'ascolto su un segnale musicale.

Riassumiamo la natura di questa equalizzazione in termini di risposta all'impulso dell'auditorium. Per essere precisi, ciò che qui chiamiamo *riverbero* in realtà è solo la distorsione di equalizzazione indotta dall'ambiente sullo spettro di Fourier del segnale, che forse dovremmo più appropriatamente chiamare *rimbombo*: il vero riverbero è più complesso, perché ha un fronte d'onda d'ingresso che si traduce in un ritardo iniziale, oltre che uno smorzamento che si può considerare finisca con un fronte d'onda d'uscita, ovvero un ritardo finale. Notiamo un altro aspetto che introduce una difficoltà: il riverbero cambia da punto a punto nella sala d'ascolto, come d'altra parte anche il rimbombo. Come conseguenza, l'eliminazione dei riverberi (e dei rimbombi) è un problema molto più complesso di quella dell'equalizzazione, e non viene affrontata qui. Ci limitiamo ad affrontare il problema della eliminazione di un'equalizzazione fissa imposta al segnale acustico, unica per tutta la stanza d'ascolto: stiamo modellando il caso semplificato in cui il suono sia stato registrato e dopo equalizzato.

Chiamiamo f il segnale musicale suonato dai musicisti. In fase di ascolto udiamo un segnale $g = h * f$ distorto dall'equalizzazione indotta. La funzione h (la risposta all'impulso dell'auditorium) può essere misurata facilmente: basta misurare la risposta all'impulso dell'ambiente. Vogliamo ricostruire il segnale musicale originale eliminando l'equalizzazione. Questo si chiama *deconvolvere* il segnale distorto dall'equalizzazione indotta, ovvero *de-equalizzare*. D'ora in avanti, il segnale originale h è inteso come una successione di dati $\{h_n\}$ equispaziati nel tempo ad un appropriato passo di campionamento, e così pure il segnale distorto $\{g_n\}$. Questi segnali hanno lunghezza finita nel tempo, quindi l'indice n varia in un insieme finito, ma allo scopo di calcolarne la DFT li consideriamo implicitamente estesi a successioni infinite ponendoli uguale a 0 al di fuori del loro dominio temporale originale. Questo fatto è ora particolarmente importante, perché ci accingiamo a considerare la DFT dei segnali, e quindi dovremmo avere segnali periodici. Invece i segnali in questo ambito non sono periodici, e pertanto devono essere approssimati in modo periodico, il che però modifica i dati veri. Il modo di procedere è di considerare segnali di N campioni nel tempo, e periodicizzarli all'esterno del loro supporto temporale: in tal modo i dati originali non vengono modificati. Per'ò dovremo convolvere segnali di lunghezza temporale diversa, e per poter applicare la DFT alla convoluzione abbiamo bisogno di un periodo unico per tutti. Questo si ottiene estendendo con zeri il segnale più corto in maniera che entrambi siano della stessa lunghezza. Per sicurezza, onde evitare effetti di aliasing legati alla periodicizzazione, spesso prendiamo i segnali originali di N campioni e li estendiamo comunque con zeri ad un range più ampio, ad esempio $2N$.

Un modo rapido di effettuare la deconvoluzione è il seguente: si calcola una volta per tutte la DFT della risposta impulsiva dell'ambiente, \hat{h} , e la si memorizza; poi si esegue la DFT del segnale equalizzato, che, grazie alla proprietà di convoluzione per la DFT, Teorema 14.4.6, è la successione prodotto $\hat{g}(k) = \hat{h}(k)\hat{f}(k)$; infine, per ciascun k si divide il k -simo valore per il corrispondente $\hat{h}(k)$ per ottenere $\hat{f}(k)$ come risultato, ed infine si effettua la IDFT.

Il problema da risolvere è il fatto che la DFT della risposta impulsiva può avere qualche valore nullo (di solito le sue parti reali ed immaginaria, separatamente, ne hanno parecchi, perché oscillano molto; è più raro che questi zeri separati capitino simultaneamente alla stessa frequenza, ovvero siano zeri dell'intera DFT, però accade). Possiamo escludere che ci siano zeri

non isolati per \widehat{h} , o più precisamente intervalli di frequenze I dove \widehat{h} sia identicamente nullo: se così fosse, i segnali musicali con spettro di Fourier con supporto in I verrebbero annullati, in altre parole l'auditorium li inghiottirebbe, il che ovviamente non succede. Me se succedesse, allora, senza perdite ulteriori per il segnale (già in talo modo tagliato dall'auditorium) potremmo troncature \widehat{f} a zero su tutto I ed evitare il problema della divisione per zero in I alla stregua di quanto stiamo per illustrare in maggior dettaglio.

Supponiamo quindi che i punti di zero di \widehat{h} siano una successione, finita od infinita.

Alle frequenze k (ossia indici per la DFT) per le quali $\widehat{h}(k) = 0$, non possiamo dividere per $\widehat{h}(k)$: è vero che a queste frequenze, di nuovo per la proprietà di convoluzione, si annulla anche il numeratore $\widehat{g}(k)$, ma non sappiamo calcolare il quoziente quando numeratore e denominatore si annullano entrambi. Per poter procedere si opera un troncamento (*cut-off*): si sceglie un intervallo intorno al tempo k ed in questo intervallo si pone artificialmente uguale a zero la trasformata di Fourier discreta del segnale equalizzato, ossia il numeratore della frazione. Ora il numeratore è zero in un intorno della frequenza k , mentre il denominatore si annulla solo in k (di solito con andamento lineare). Pertanto il numeratore si annulla più velocemente del denominatore, e quindi è sensato porre artificialmente uguale a zero il quoziente al punto k : ma naturalmente si è in tal modo introdotto un troncamento locale della trasformata di Fourier segnale equalizzato, e quindi si ottiene una distorsione del segnale originale. L'effetto è tanto meno avvertibile quanto più corto è l'intervallo intorno alla frequenza k dove operiamo il troncamento. Vogliamo stimare quanto stretto si debba prendere l'intervallo di troncamento per mantenere al di sotto di una soglia prefissata l'errore globale nella ricostruzione del segnale originale dopo l'eliminazione dell'equalizzazione. Preferiamo svolgere questo calcolo per la trasformata di Fourier del segnale, invece che per la DFT, perché nel caso discretizzato l'intervallo non può diventare arbitrariamente piccolo (deve contenere almeno tre campioni consecutivi con k al centro).

Supponiamo che il segnale originale f sia la risposta all'impulso h siano funzioni in $L^1(\mathbb{R})$.

Di solito si assume anche che \widehat{h} sia a supporto compatto, come anche f e \widehat{f} , ma questa ipotesi, per quanto fisicamente ovvia ed assai comoda, non è strettamente necessaria. Quanto a condizioni più o meno restrittive, di solito, trattando con segnali acustici, supponiamo che essi siano a valori

reali, nel qual caso le trasformate di Fourier hanno parte reale pari e parte immaginaria dispari per il Corollario 8.2.6 (quindi se ne considerano i grafici solo per frequenze positive), ma questa ipotesi non è necessaria.

Vogliamo stimare l'errore che si commette quando si impone il cut-off. Supponiamo per semplicità di notazione che \widehat{h} abbia un numero finito di zeri $\omega_1, \dots, \omega_n$, che dal punto di vista fisico sono le frequenze di risonanza dell'auditorium. Questa ipotesi è necessariamente vera se gli zeri non si addensano e \widehat{h} è a supporto compatto, ma in ogni caso, quando gli zeri sono infiniti, la trattazione che segue si adatta parola per parola se si prendono unioni infinite anziché finite). Centrato ad ogni zero ω_j prendiamo un intervallo di cut-off I_j , la cui lunghezza $m(I_j)$ dobbiamo scegliere sufficientemente piccola per non introdurre errori eccessivi quando applichiamo la trasformata di Fourier inversa per ricostruire il segnale originale. Osserviamo in effetti che la trasformata di Fourier troncata dopo il cut-off è $\widehat{F} = \left(1 - \sum_{j=1}^n \chi_j\right) \widehat{f}$, dove χ_j denota la funzione caratteristica dell'intervallo I_j . Pertanto, quando il segnale originale f viene rimpiazzato con la trasformata di Fourier inversa $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega$, l'errore commesso è esattamente

$$(f - F)(\omega) = \int_{\cup_j I_j} \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega} d\omega,$$

che si migliora con

$$\|f - F\|_{\infty} \leq \sum_j m(I_j) \|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \sum_j m(I_j) \|f\|_1.$$

In particolare, F converge uniformemente a f quando la somma delle misure degli intervalli tende a zero. Pertanto, se si vuol mantenere l'errore di troncamento inferiore ad una soglia $\varepsilon > 0$ prefissata, basta prendere gli intervalli I_j così piccoli che

$$\sum_j m(I_j) \leq \varepsilon / \|f\|_1. \quad (17.1)$$

Naturalmente non sappiamo a priori quale sia la norma L^1 del segnale originale f , ma sappiamo che essa differisce di poco da quella del segnale troncato F se gli intervalli I_j sono piccoli (grazie alla convergenza uniforme di F a f). Quindi prendiamo intervalli ragionevolmente piccoli, applichiamo la trasformata di Fourier inversa per calcolare F , ne stimiamo la norma L^1 con un'integrazione numerica ed usiamo questo risultato in (17.1) per restringere ulteriormente gli intervalli se necessario.

In questo modo abbiamo trovato un algoritmo numerico che tiene sotto controllo l'errore di troncamento. Però si crea un altro problema, legato alla sensibilità del nostro apparato uditivo. Il segnale ricostruito F si ottiene applicando la trasformata di Fourier inversa ad una funzione \hat{F} che è stata troncata su certi intervalli. La trasformata di Fourier di una funzione troncata presenta un fenomeno di ringing, in analogia a quanto visto per le serie di Fourier nello studio del fenomeno di Gibbs nella Sezione 5.19, ed in effetti per lo stesso motivo: le oscillazioni della trasformata di Fourier di una funzione caratteristica, ossia la funzione sinc (Esercizio 10.1.5). Sappiamo, dalla trattazione del fenomeno di Gibbs di cui sopra, che l'ampiezza del ringing è proporzionale al salto della funzione troncata, nel nostro caso \hat{f} . Quindi la soppressione dell'equalizzazione produce effetti di ringing in prossimità delle frequenze di risonanza dell'auditorium, forse udibili almeno per quei segnali per i quali l'ampiezza della trasformata di Fourier (ovvero il contenuto in frequenza) è elevata in prossimità di tali frequenze. Per i segnali acustici abituali (non monocromatici) l'effetto non è normalmente molto fastidioso; lo sarebbe molto di più per immagini, nelle quali le modulazioni del ringing danno luogo a segmenti alternati chiari e scuri, a cui il nostro sistema visivo è molto sensibile. In ogni caso, anche per segnali audio, la variazione dell'ampiezza massima data dal fenomeno di Gibbs è dell'ordine dell'otto per cento (Nota 5.19.6, ed una distorsione dell'otto per cento, anche se solo in certi istanti discreti e per certe frequenze prefissate, non è accettabile. Quindi si evita il problema utilizzando un modo diverso di dividere per \hat{h} troncando via gli intervalli centrati agli zeri di questo denominatore: si effettua una *inversione regolarizzata*, eventualmente seguita da una *inversione regolarizzata di Wiener*. Questi due filtri sono definiti qui di seguito.

Nota 17.1.8. (Filtro di inversione regolarizzata.) Sia h la risposta all'impulso dell'ambiente, f il segnale da ricostruire e $g = f * h$ il segnale registrato, affetto da rimbombo ambientale. La ricostruzione esatta dovrebbe avvenire mediante divisione di \hat{g} per \hat{h} seguita da trasformata inversa di Fourier, ma questo metodo non è attuabile a causa degli zeri di \hat{h} . D'altra parte, osserviamo che la divisione per un numero complesso z equivale alla moltiplicazione per $\bar{z}/|z|^2$. Allora, fissata una soglia di tolleranza $\varepsilon > 0$, approssimiamo la divisione per $\hat{h}(\omega)$ con la moltiplicazione per il *moltiplicatore di inversione regolarizzata*

$$\frac{\overline{\hat{h}(\omega)}}{|\hat{h}(\omega)|^2 + \varepsilon}.$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ questo moltiplicatore tende alla divisione per \widehat{h} alle frequenze dove $\widehat{h}(\omega) \neq 0$, ma in ogni caso, fissato $\varepsilon > 0$, esso non introduce salti di alcun tipo (il denominatore non si annulla ed è continuo), ed quindi, una volta antitrasformato il risultato secondo Fourier, non si ha ringing.

Si osservi un altro aspetto numericamente essenziale dell'operazione di inversione regolarizzata. Il segnale registrato g , ed anche la risposta all'impulso h , sono affetti da rumore. Quindi lo sono anche le loro trasformate di Fourier. Il rumore può dar luogo a zeri inesistenti nel segnale vero, ed in ogni caso dà luogo a disturbi indesiderati all'ascolto (tipicamente fruscio) o, nel caso di immagini, alla vista (variazioni granulari dell'intensità e del colore). Una opportuna ricostruzione numerica deve pertanto sopprimerlo. Purtroppo, invece, la divisione per \widehat{h} ingigantisce il segnale registrato laddove \widehat{h} è piccolo, e quindi esalta il rumore in queste zone. Se si sceglie la soglia ε più alta del livello massimo di rumore, il denominatore del moltiplicatore di inversione regolarizzata non si avvicina più a zero in prossimità degli zeri di \widehat{h} neppure in seguito all'aggiunta del rumore, ed il problema dell'esaltazione del rumore resta numericamente sotto controllo. \square

Nota 17.1.9. (Filtro di inversione regolarizzata di Wiener.) Nell'operazione di inversione tramite divisione per \widehat{h} , si dovrebbe osservare che l'esaltazione del rumore e la singolarità che si presentano in prossimità delle frequenze ω dove $\widehat{h}(\omega) = 0$ sono meno sensibili se anche \widehat{f} è piccolo: ad esempio, se \widehat{f} è identicamente nullo in un intervallo intorno a ω , la divisione non ha alcun effetto e non esalta il rumore. Naturalmente, proprio a causa del rumore, i segnali non sono mai identicamente nulli in un intervallo tranne che al di fuori del range dei rivelatori, ma in ogni caso è chiaro che si dovrebbe pesare il moltiplicatore di inversione regolarizzata in modo che sia più piccolo laddove \widehat{f} è piccolo. La scelta consueta è il *moltiplicatore di inversione regolarizzata di Wiener*

$$\frac{\overline{\widehat{h}(\omega)}|\widehat{f}(\omega)|^2}{|\widehat{h}(\omega)|^2|\widehat{f}(\omega)|^2 + \varepsilon}.$$

Sfortunatamente, l'inversione regolarizzata di Wiener non può essere applicata direttamente al problema dell'eliminazione dell'equalizzazione (e del rumore), perché si tratta di un problema di deconvoluzione dove la funzione f è l'incognita, e quindi \widehat{f} non è noto a priori. Per applicare il metodo di Wiener, prima si applica il procedimento di inversione regolarizzata della Nota 17.1.8 per ottenere un valore approssimato di \widehat{f} , che dipende anche dalla

tolleranza ε scelta, e poi si usa questo valore approssimato nel moltiplicatore di Wiener. Questo procedimento combinato riduce ulteriormente, a parità di scelta della soglia, sia il rumore sia l'insorgere di valori elevati legati alle singolarità. \square

Un problema ancora più grave del ringing e dell'esaltazione del rumore è la notevole complessità di calcolo che si deve affrontare per deconvolvere segnali di lunghezza tipica (del'ordine almeno di un minuto), come spiegheremo all'inizio della Sezione 17.3.

17.2 Trasformata di Fourier a finestre e convoluzione a finestre; equalizzazione in tempo reale

Normalmente, l'eliminazione a posteriori dell'equalizzazione non è l'obiettivo più interessante: vorremmo invece deequalizzare in tempo reale, mentre ascoltiamo il segnale musicale e non solo alla fine. Questo perché in tal modo potrebbe essere possibile effettuare correzioni interattive in tempo reale, ma soprattutto perché non c'è modo di sapere a priori quanto sarà lungo il segnale: per segnali di lunghezza tipica il metodo globale ha una complessità di calcolo eccessiva (si veda l'inizio della Sezione 17.3).

A questo scopo ora descriviamo un algoritmo che ci permette di partizionare il segnale in finestre temporali di un numero fissato L di campioni e di effettuare la trasformata di Fourier per ogni finestra temporale, ricostruendo alla fine da questi ritagli il segnale originale.

Mettiamo in guardia il lettore sul meccanismo di suddivisione a finestre. Anche se stiamo trattando con dati campionati, i valori che dobbiamo elaborare per ogni finestra sono i valori campionati del segnale moltiplicato per una appropriata funzione che rappresenta l'effetto del troncamento sulla finestra data. Ad esempio, il moltiplicatore naturale è la funzione caratteristica della finestra (nel dominio del tempo). Ma questo moltiplicatore introduce un salto nel risultato che si intende campionare, e quindi, una volta trasformato secondo Fourier e poi ricostruito, può dar luogo al ringing del fenomeno di Gibbs (Sezione 5.19). Si evita il problema utilizzando finestre differenti dai troncamenti netti, ovvero date da moltiplicatori g differenti dalle funzioni caratteristiche, che simulino un gradino in maniera liscia, senza salti. In effetti, questo equivale ad eseguire una partizione dell'unità unidimensionale,

nel senso del Corollario 1.10.16. A questo scopo potremmo usare l'approssimazione C^∞ del gradino, introdotta nell'Esempio 1.6.10, ma l'utilizzo dei moltiplicatori esponenziali porta ad una complessità numerica di solito non necessaria. È sufficiente considerare approssimazioni di ordine C^1 : ad esempio, per approssimare una finestra netta, ossia la funzione caratteristica di un intervallo, diciamo $[0, 1]$, si usa spesso la *finestra di Hanning*, data dal moltiplicatore $g(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi x))$ per $0 \leq x \leq 1$, e 0 altrove.

Il segnale è acquisito già in forma digitalizzata, quindi in termini dei suoi campioni, e pertanto, ovviamente, ne calcoliamo la DFT invece che la trasformata di Fourier continua (ed implementiamo il calcolo tramite un algoritmo di FFT presentato nel Capitolo 15, ma qui non siamo interessati ai dettagli dell'implementazione della DFT come FFT). Ripetiamo però quanto abbiamo già osservato all'inizio della Sottosezione 17.1.2: la DFT di un segmento di L dati campionati è periodica, mentre il segnale e la sua trasformata di Fourier, nel senso continuo, non lo sono. Per correggere questo problema dobbiamo scartare un sottosegmento di $M < L$ campioni, e quindi limitare l'attenzione a $L - M$ dei dati iniziali nella finestra. Siccome però tutti i dati devono concorrere all'elaborazione, questo vuol dire che la finestra successiva deve recuperare gli M campioni scartati, ossia deve iniziare non dopo L campioni bensì dopo $L - M$ campioni. Pertanto due finestre consecutive si sovrappongono su M dati. Questo crea una ridondanza nell'elaborazione a vantaggio dell'eliminazione degli artefatti di periodicizzazione. Più M è piccolo, minore è la sovrapposizione, e quindi la ridondanza; più M è grande, migliore è l'eliminazione degli artefatti. Il miglior compromesso si trova a metà strada (ma non lo dimostriamo): $M = L/2$.

Analizziamo in dettaglio l'algoritmo nel caso di nostro interesse, ossia quando dobbiamo convolvere un segnale f di lunghezza sconosciuta e potenzialmente illimitata (il suono originale) con un segnale h (la risposta all'impulso) di lunghezza N fissata ma abbastanza elevata, tipicamente almeno 2^{16} campioni per una risposta all'impulso lunga vari secondi campionata alla frequenza di campionamento di 48 Kilohertz. Per convolvere i due segnali dobbiamo usare lo stesso numero di dati per ciascuno (la stessa *finestra*). L'idea di base è di segmentare il segnale f in finestre di N dati. Il calcolo diretto della convoluzione richiede quindi $N^2 = 2^{32}$ operazioni, un numero gigantesco di calcoli. Riduciamo però la complessità di calcolo impiegando la FFT invece del calcolo diretto: si sceglie $M > N$, e come si è detto è preferibile prendere $M = 2N$, si partiziona f in segmenti consecutivi di M campioni, si aggiungono zeri a h affinché passi da lunghezza N a lunghezza

M , ed a questo punto si calcolano le FFT a M punti di h e di un segmento di f e le si moltiplicano fra loro. Il risultato è un segmento di M dati della DFT di $f * h$, grazie alla proprietà di convoluzione per la DFT, Teorema 14.4.6. Applichiamo a questo segmento di dati la FFT inversa su M punti per ricavare una versione M -periodicizzata di $f * h$, ma ne memorizziamo solo gli ultimi $M - N$ valori, aggiungendoli a quanto memorizzato fino a questo momento nell'elaborazione delle finestre precedenti. Dopo di che, cambiamo finestra, passando alla successiva: ma per questo trasliamo gli indici solo di $M - N$ punti, perché dobbiamo riutilizzare gli ultimi N come spiegato prima. Questo algoritmo si chiama *Sovrapposizione e Memorizzazione*. Richiede il calcolo di FFT su M punti, il che, come si è detto, di solito significa $2N$, ossia almeno 2^{17} , valori.

Un algoritmo più efficiente, introdotto in [31] e poi migliorato in [29] ai fini dell'implementazione in tempo reale, è quello di *Sovrapposizione e Memorizzazione Segmentata* che ora presentiamo.

Il suono f , di lunghezza arbitraria, viene segmentato in finestre di lunghezza L . Segmentiamo invece la risposta all'impulso h , che è lunga N campioni, in finestre di lunghezza $K = L/2$ e poi le allunghiamo con zeri per portarle a lunghezza L , per le ragioni appena spiegate (scarto di $L/2$ risultati per ogni finestra al fine della eliminazione della periodicità). Sia $P = 2N/L$ il numero di finestre in cui si è partizionata h . Vogliamo calcolare la convoluzione $g = f * h$. Sia χ_n la funzione caratteristica della n -sima finestra temporale, dal campione $n(L/2)$ al campione $L + n(L/2)$ ($n = 0, 1, \dots$), ossia

$$\chi_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } \frac{nL}{2} < t < L + \frac{nL}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Come già osservato, la traslazione da una finestra alla successiva è di $K = L/2$.

Il segmento del segnale f relativo a questa finestra è $f_n = f\chi_n$. Invece il segmento prelevato da h per la stessa finestra è $h_n = h\chi'_n$, dove $K = L/2$ e

$$\chi'_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } nK < t < (n+1)K, \quad \text{ossia } \frac{nL}{2} < t < \frac{(n+1)L}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Allora, considerando f composto da un numero indeterminato di finestre, ma h da P finestre, abbiamo

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

e

$$h = \sum_{j=0}^P h_j.$$

Grazie alla linearità della DFT, le trasformate sono

$$\widehat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}_n$$

$$\widehat{h} = \sum_{j=0}^P \widehat{h}_j$$

dove \widehat{f} e \widehat{h} sono rispettivamente le DFT di f e h . Denotiamo con \widehat{g} la DFT di $g = f * h$. Ora abbiamo

$$\widehat{g} = \widehat{f} \cdot \widehat{h} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^P (\widehat{h}_j \cdot \widehat{f}_n).$$

Consideriamo il contributo \widehat{g}_0 : esso è dato dalla trasformata di Fourier \widehat{f}_0 del primo segmento temporale del segnale originale f moltiplicata per la trasformata di Fourier di *tutta* la risposta all'impulso:

$$\widehat{g}_0 = \sum_{j=0}^P \widehat{f}_0 \widehat{h}_j = \widehat{f}_0 \sum_{j=0}^P \widehat{h}_j. \quad (17.2)$$

Analogamente, i contributi dei segmenti successivi \widehat{f}_m , $m = 0, 1, \dots$, sono la trasformata di Fourier del segmento temporale m -simo di f (quello che comincia al tempo $mK = mL/2$) moltiplicata per tutta \widehat{h} :

$$\widehat{g}_m = \sum_{j=0}^P \widehat{f}_m \widehat{h}_j.$$

Ora applichiamo a ciascuno di essi la IDFT (trasformata DFT inversa), che denotiamo con \vee . Per $m = 0, 1, \dots$ otteniamo i seguenti contributi parziali al calcolo della convoluzione g :

$$g_m = \sum_{j=0}^P (\widehat{f}_m \widehat{h}_j)^\vee.$$

D'altra parte, per linearità si ha

$$\widehat{g} = \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{g}_m.$$

Quindi, applicando di nuovo la IDFT e la proprietà di convoluzione per la DFT, Teorema 14.4.6, otteniamo

$$g = \sum_{m=0}^{\infty} (\widehat{g}_m)^{\vee} = \sum_{m=0}^{\infty} g_m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^P (\widehat{f}_m \widehat{h}_j)^{\vee} = \sum_{m=0}^{\infty} f_m * h. \quad (17.3)$$

Pertanto g viene ricostruito sommando i contributi parziali ottenuti dalla trasformata DFT inversa dei segmenti \widehat{g}_m , ossia i g_m , dei quali però, come già fatto nel precedente algoritmo di Sovrapposizione e Memorizzazione non segmentata, al fine di eliminare gli artefatti di periodicizzazione della IDFT, si prendono solo gli ultimi $L-K = L/2$ valori prima di aggiungerli ai segmenti di g precedentemente memorizzati.

Il contributo parziale g_m al calcolo della convoluzione g è quindi nient'altro che $f_m * h$, ossia la convoluzione con la risposta all'impulso h della sola m -sima finestra di f . Allora, quando in (17.3) si ricostruisce g a partire da questi contributi g_m , i dati del contributo m -simo devono essere sommati agli altri sull'asse dei tempi a partire dall'inizio di tale finestra temporale, ossia dall'istante mK , come nella Figura 17.1, nella quale, per rendere il disegno più leggibile, abbiamo indicato le DFT $\widehat{h}_i \widehat{f}_j$ con lettere maiuscole $H_i F_j$, ed abbiamo scritto esplicitamente, con lettere e non con simboli, l'operatore di trasformata inversa IDFT.

Pertanto le varie fasi dell'algoritmo nel suo complesso si schematizzano come in Figura 17.2.

Il vantaggio di questo algoritmo di Sovrapposizione e Memorizzazione Segmentata rispetto all'analogo in cui la risposta in frequenza h , di lunghezza N , non viene segmentata, è che il metodo funziona con ritardo $K = L/2$ che possiamo scegliere piccolo, ovvero in tempo reale, mentre la lunghezza N della risposta all'impulso è determinata dall'auditorium, non si può accorciare, è lunga diversi secondi e quindi, come già osservato, ad un tasso di campionamento standard richiede molte decine di migliaia di campioni.

Ad esempio, se si considera una risposta impulsiva di 9 secondi, campionata a 44100Hz , partizionata a segmenti di $K = 4096$ campioni, l'output del-

17.2. CONVOLUZIONE A FINESTRE; EQUALIZZAZIONE IN TEMPO REALE 1129

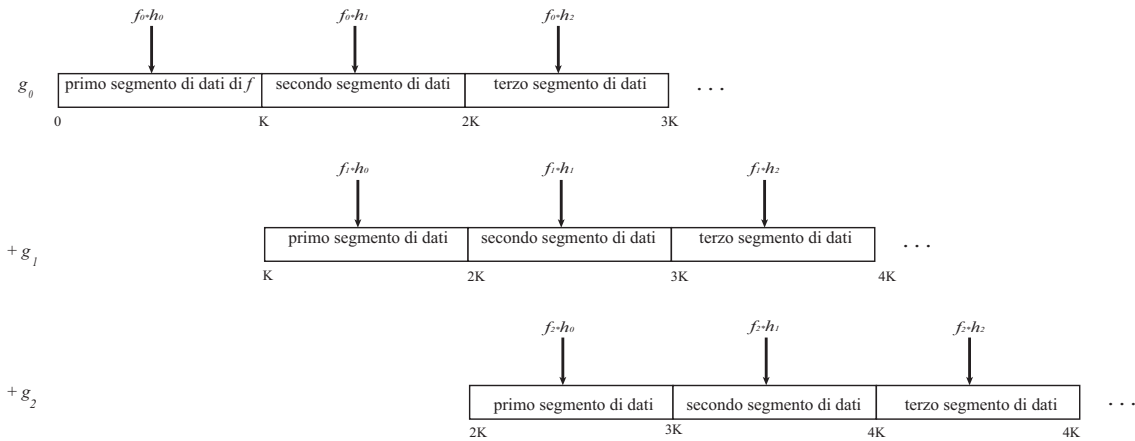


Figura 17.1: Convoluzione a finestre: sfalsamento temporale dei contributi delle singole finestre

l'algoritmo segmentato è fruibile dopo un tempo di latenza pari a 92 msec, invece dei 9 secondi dell'algoritmo non segmentato.

Un altro vantaggio, forse ancora più importante, è il notevole risparmio di memoria per il calcolo della *FFT*: l'ordine della *FFT* ora è K (quanti sono i dati per ogni finestra) invece che N (quanti sono i dati della risposta all'impulso).

Nel caso dell'algoritmo di Sovrapposizione e Memorizzazione non segmentato, a prima vista sembrerebbe che i contributi g_k da sommare siano tutti lunghi N (ossia quanto la risposta all'impulso), e quindi i diversi segmenti non si sovrappongono: per ogni intervallo $[jN, (j+1)N]$ dovrebbe esserci un unico contributo. In realtà, però, l'eliminazione degli artefatti di periodicizzazione obbliga a scartare un segmento dei dati di ogni contributo, tipicamente $N/2$ di essi, e quindi a sovrapporre ogni due contributi consecutivi di lunghezza N per metà della loro lunghezza.

Una applicazione tipica dell'algoritmo di Sovrapposizione e Memorizzazione Segmentata è l'equalizzazione in tempo reale di un segnale acustico, che consiste nell'applicazione di una funzione filtro preassegnata allo spettro di Fourier del segnale, finestra dopo finestra. Nel dominio del tempo questo equivale all'eseguire la convoluzione con l'antitrasformata di Fourier del filtro. L'uso dell'algoritmo in tempo reale permette di modificare il filtro dopo che una finestra è stata processata completamente, e quindi di modificare

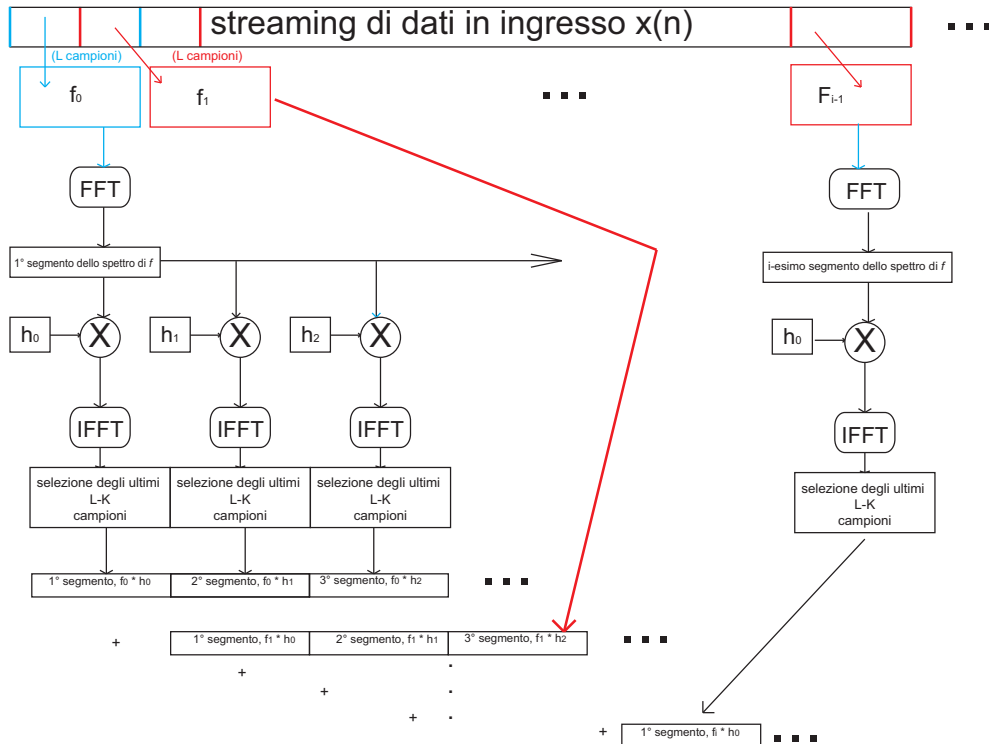


Figura 17.2: Convoluzione a finestre: algoritmo di Sovrapposizione e Memorizzazione Segmentata

l'equalizzazione del segnale, in tempo reale, solo da quella finestra temporale in poi.

17.3 Deconvoluzione a finestre: de-equalizzazione in tempo reale

All'inizio della Sezione 17.1.2 abbiamo studiato come deconvolvere *a posteriori* gli effetti di equalizzazione indotti dall'ambiente su un segnale, ossia globalmente al termine dell'ascolto. Ricapitoliamo il metodo seguito, che si basa sui quattro passi seguenti:

- si misura una volta per tutte la risposta all'impulso dell'ambiente, h , e se ne calcola numericamente la trasformata di Fourier (o più precisamente la sua DFT, che si calcola in maniera rapida tramite l'algoritmo di FFT): questo passo si esegue una volta sola per ciascun ambiente, preliminarmente all'analisi del segnale;
- si calcola numericamente la trasformata di Fourier dell'intero segnale equalizzato g (è per questo che bisogna attendere di aver ascoltato tutto il segnale);
- si divide \hat{g} per \hat{h} , per ottenere la trasformata di Fourier (o meglio, la DFT \hat{f} del segnale originale (bisogna prima troncato \hat{g} a zero in prossimità degli zeri di \hat{h} , ed in queste zone evitare di effettuare la divisione));
- si recupera il segnale originale f calcolando la FFT inversa di \hat{f} .

Per poter procedere alla divisione al terzo punto bisogna che le DFT di g e di h siano dello stesso ordine. Dei due segnali normalmente è più lungo il segnale musicale originale (la risposta all'impulso dell'ambiente dura qualche secondo). Bisogna allora allungare \hat{h} con zeri affinché diventi lungo quanto il segnale originale. Se la lunghezza del segnale originale è di J campioni, la complessità di calcolo di questo metodo basato sulla FFT seguita dalla FFT inversa è dell'ordine di $2J \log_2 J$ (come mostrato nella Sezione 15.2). Tipicamente, il segnale può essere lungo da vari secondi a più di un'ora. Tranne che per i segnali più brevi, J è quindi un numero gigantesco, e la deconvoluzione globale non è realizzabile a causa della eccessiva complessità di calcolo.

Per evitare questo problema abbiamo introdotto, nella Sezione 17.2, algoritmi di convoluzione segmentata: l'algoritmo di Sovrapposizione e Memorizzazione, che calcola DFT dell'ordine N dato dalla lunghezza della risposta all'impulso, ed il più efficiente algoritmo di Sovrapposizione e Memorizzazione Segmentata, che calcola DFT di una lunghezza K pari ad una frazione prefissata di tale lunghezza.

L'idea dell'algoritmo di Sovrapposizione e Memorizzazione è ancora valida quando si vuol ricorrere alla divisione di \hat{g} per la DFT della risposta all'impulso, \hat{h} , perché \hat{h} non viene mai segmentato, e quindi ha senso dividere per i suoi valori. In tal caso si procede a dividere per \hat{h} i segmenti

consecutivi di lunghezza N di \widehat{g} . In tal modo la deconvoluzione richiede il tempo di calcolo della FFT a N valori, dell'ordine di $N \log_2 N$.

Purtroppo, però, l'efficiente algoritmo di Sovrapposizione e Memorizzazione Segmentata non permette di procedere tramite divisione per \widehat{h} . Infatti esso esegue somme di contributi sovrapposti nel tempo e ricostruisce il segnale a partire da una somma doppia di trasformate di Fourier a finestre sfalsate come nell'identità (17.3). Nell'eseguire la convoluzione, ai singoli contributi da sommare concorrono segmenti diversi di \widehat{h} , e quindi si deve tenere traccia dei denominatori differenti da usare per ciascuno di essi. Questo è possibile, seppure faticoso; però, se si deve eseguire una deconvoluzione, i dati di cui disponiamo sono già convoluti in questo modo intrecciato, e non sappiamo più tenere traccia dei denominatori. Il modo di procedere è invece di *eseguire la deconvoluzione convolvendo per l'operatore di convoluzione inverso*.

Come sempre dalla proprietà di convoluzione per la DFT, Teorema 14.4.6, sappiamo che l'operatore di convoluzione $T : f \mapsto f * h$ ha per inverso $Q : f \mapsto f * k$, dove k è la funzione definita da $\widehat{k} = \widehat{h}^{-1}$ (ben definita grazie al Teorema di inversione di Fourier 8.4.2 se \widehat{h} non si annulla, o anche se si annulla, in base all'analogia proprietà per le distribuzioni (Proposizione 11.12.4) purché \widehat{h}^{-1} sia una distribuzione (basta che sia una funzione localmente integrabile a crescita non più che polinomiale: se \widehat{h} ha solo zeri del primo ordine nel suo supporto il suo reciproco non è localmente integrabile ma è una distribuzione, in base all'Esempio 11.5.5).

Infatti $\widehat{h * k} = \widehat{h} \widehat{k} = 1$, e quindi $h * k = \delta_0$ in base all'Esercizio 11.13.2 (i) ed alla succitata proprietà di inversione di Fourier per le distribuzioni. Pertanto, per l'associatività della convoluzione (Esercizio 6.1.13), per ogni f si ha

$$QTf = (f * h) * k = f * (h * k) = f * \delta_0 = f,$$

e quindi $Q = T^{-1}$. Ripetiamo che, a causa dell'esistenza di possibili zeri di \widehat{h} , l'ultima identità ha significato, nelle ipotesi di comodo di cui sopra, solo nel senso delle distribuzioni. Per evitare l'impiego di tecniche sofisticate basate sulle distribuzioni, la cosa più semplice è di scegliere una soglia ε inferiore alla tolleranza dell'approssimazione numerica che si intende accettare e di rimpiazzare \widehat{h}^{-1} in piccoli intorno I_j degli zeri ω_j (ossia dei punti dove $\widehat{h}(\omega_j) = 0$) con la costante $1/\varepsilon$: in tal modo, in questi intervalli critici I_j la funzione \widehat{h}^{-1} è dell'ordine di $1/\varepsilon$ anziché essere divergente, ed il prodotto $\widehat{h} \widehat{h}^{-1}$, che non è più definito ad ω_j , viene rimpiazzato con una funzione di modulo non

superiore a 1. Quanto piccoli si debbano prendere gli intervalli I_j si calcola come nella Sottosezione 17.1.2, in funzione della tolleranza prefissata.

Allora, per deconvolvere (ossia invertire) la convoluzione per h , basta convolvere con l'operatore inverso Q appena determinato. Per calcolare Q si deve calcolare prima \widehat{h} , un'operazione che richiede tempo dell'ordine di $N \log_2 N$, ma si fa una volta sola per ciascun ambiente d'ascolto. Però Q è il convolutore per \widehat{h}^{-1} , una funzione di N campioni, ed il calcolo diretto del convolutore è l'applicazione di una matrice di dimensione N , che richiede tempo N^2 . A confronto, il metodo di divisione per \widehat{h} applicabile mediante l'algoritmo di Sovrapposizione e Memorizzazione è molto più veloce (abbiamo visto che richiede tempo $N \log_2 N$). Però il calcolo del convolutore inverso, come tutte le convoluzioni, è effettuabile finestra per finestra tramite l'efficiente metodo di Sovrapposizione e Memorizzazione Segmentata, che richiede tempo K^2 dove K è la semilunghezza di una finestra (si veda la precedente Sezione 17.2). Allora, questo metodo è più veloce del metodo basato su divisione e trasformazione inversa esattamente quando $K^2 < N \log_2 N$. I due procedimenti sono dello stesso ordine di complessità di calcolo quando $K^2 = N$. Ora, N è la durata dell'equalizzazione (ossia della risposta all'impulso dell'ambiente, tipicamente dell'ordine di uno o più secondi per ampie sale da concerto, mentre K è metà della lunghezza della finestra temporale, tipicamente dell'ordine dei millisecondi. Quindi il metodo di deconvoluzione basato sulla convoluzione inversa segmentata è il più veloce. Chiamiamo questo procedimento *deconvoluzione a finestre*.

La deconvoluzione a finestre ha varie applicazioni interessanti. Una di esse, come visto, è l'eliminazione in tempo reale dell'equalizzazione indotta dalla sala d'ascolto. Un'altra è la de-equalizzazione di un segnale equalizzato. Supponiamo che un segnale sia stato equalizzato, ossia ne sia stata modificata la trasformata di Fourier tramite un moltiplicatore, ad esempio utilizzando un equalizzatore grafico o parametrico. Questo di solito si fa per adattare il segnale all'acustica dell'ambiente in cui verrà ascoltato, e rinforzarne l'ampiezza in vicinanza delle frequenze che l'ambiente smorza di più (le sue frequenze di risonanza). Ad esempio, se il segnale è destinato ad essere ascoltato in una stanza di assorbimento normale e di dimensioni tipiche di sei metri di lato per un'altezza di tre metri, dal valore della velocità del suono ricaviamo, come nella Sezione 8.1, l'esistenza di due frequenze di risonanza a 27 ed a 54 Hertz circa. In pratica, nessuna frequenza sotto i 54 Hertz viene riprodotta in maniera non distorta, e quelle a 54 Hertz o poco superiori

vengono fortemente smorzate. In prossimità di queste frequenze gli ingegneri del suono, in fase di registrazione, amplificano il segnale tramite equalizzatori, per compensare l'assorbimento previsto. ma se invece il brano musicale viene poi ascoltato in un'automobile, molto più piccola di una stanza, le frequenze smorzate sono molto superiori, ed occorre cambiare equalizzazione. Il metodo corretto non consiste nell'aggiungere una successiva equalizzazione alla precedente, moltiplicando gli errori, ma nell'eliminare la precedente equalizzazione ed applicarne una nuova più adatta. Questo si fa in tempo reale tramite l'algoritmo di cui sopra.

17.3.1 Esempi numerici di de-equalizzazione

Concludiamo questa Sezione presentando alcuni esempi numerici elaborati dal Dr. Raffaele Presciutti nella sua tesi di Laurea in "Scienza dei Media e della Comunicazione" presso l'Università di Roma "Tor Vergata" nel luglio 2006. Tutte le figure sono tratte da questa tesi. Il codice di trattamento numerico è stato elaborato dal Dr. Presciutti nel corso di uno stage di laurea presso la ditta *i3 s.r.l* e sviluppato nell'ambiente di sviluppo *Matlab*.

Il primo esempio è la de-equalizzazione di uno *sweep*, ossia un segnal ad ampiezza variabile e a frequenza monocromatica che aumenta linearmente col tempo. È stato usato lo sweep costituito da una senoide di frequenza da circa $20Hz$ a $20Khz$ a cui si è applicata una equalizzazione che vogliamo ora sopprimere tramite deconvoluzione.

In Figura 17.3 vediamo la forma d'onda dello sweep (le oscillazioni sono troppo fitte per poterai distinguere, e quindi il grafico appare come una area a tinta piatta):

Facendo uso dell'applicativo *Spectrogram v. 5.0*, prodotto da Richard Horne, analizziamo il sonogramma del segnale, cioè un grafico a tre dimensioni in cui sull'asse x è il tempo, sull'asse y la frequenza e sull'asse z l'ampiezza del modulo della FFT espresso in decibel. Per evitare grafici tridimensionali, i valori sull'asse z sono rappresentati con colori secondo la scala in Figura 17.4

Per lo sweep otteniamo il sonogramma in Figura 17.5. L'andamento della frequenza in funzione del tempo è un incremento lineare, e quindi il sonogramma è disposto lungo una retta.

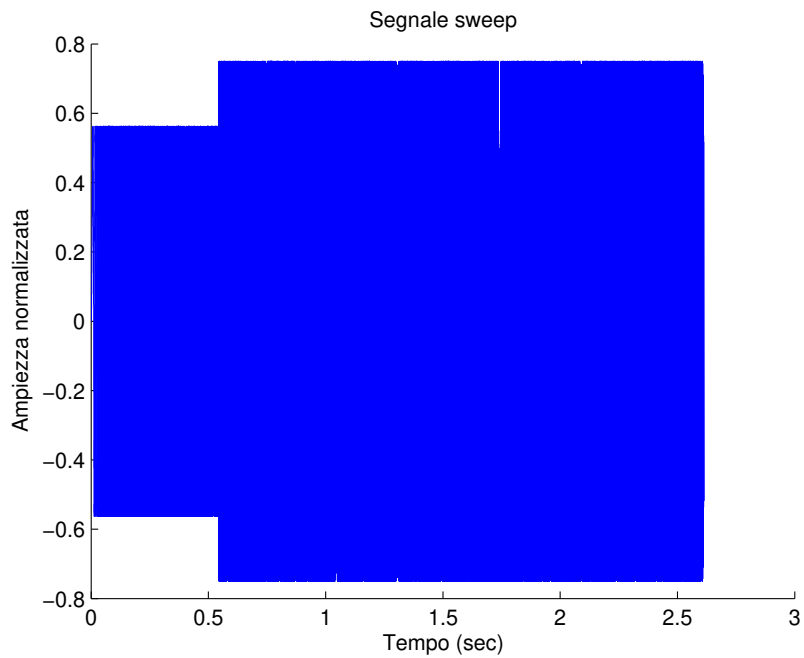


Figura 17.3: Il grafico dello sweep nel tempo

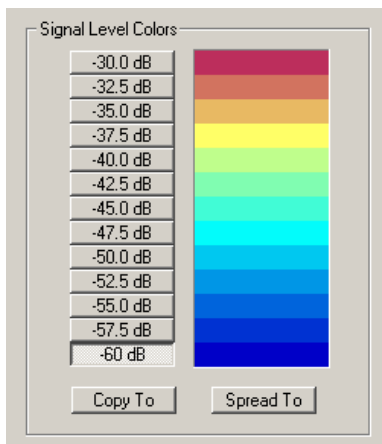


Figura 17.4: Scala cromatica delle ampiezze nei prossimi sonogrammi

Nelle Figure 17.6 e 17.7 presentiamo rispettivamente la risposta impulsiva

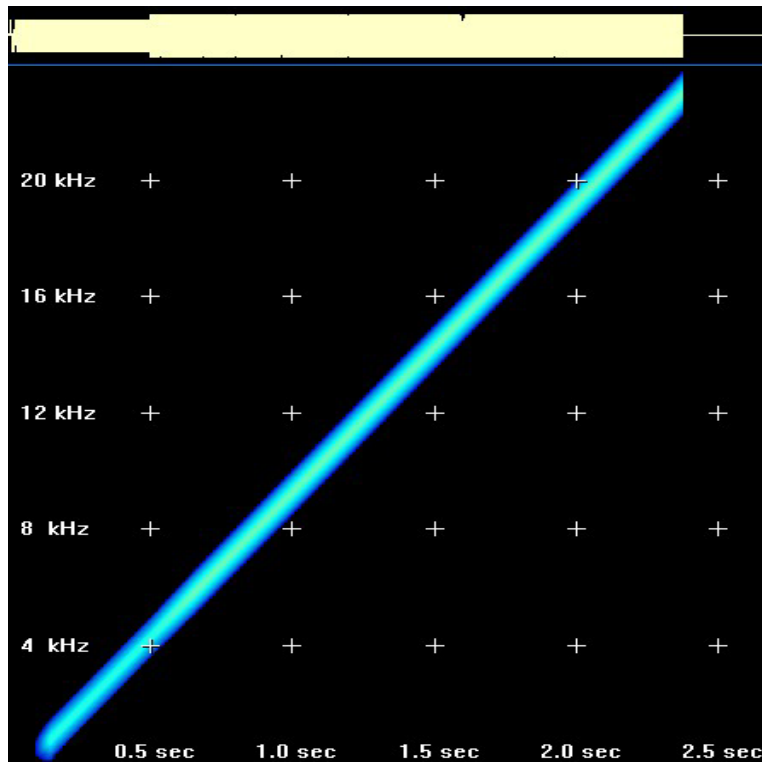


Figura 17.5: Il sonogramma dello sweep

dell'equalizzatore e la sua funzione di trasferimento (il modulo della trasformata di Fourier). In ascisse, F è la frequenza e F_c è la frequenza di campionamento.

Ora usiamo l'algoritmo di convoluzione mediante Sovrapposizione e Memorizzazione Segmentata per convolvere i due segnali. Il sonogramma del risultato è in Figura 17.8.

Come previsto, il risultato della convoluzione è uno sweep, con alcune frequenze enfatizzate e altre smorzate in ampiezza.

Ora calcoliamo il reciproco la risposta impulsiva. La risposta all'impulso ed il suo reciproco sono illustrate nella Figura 17.9.

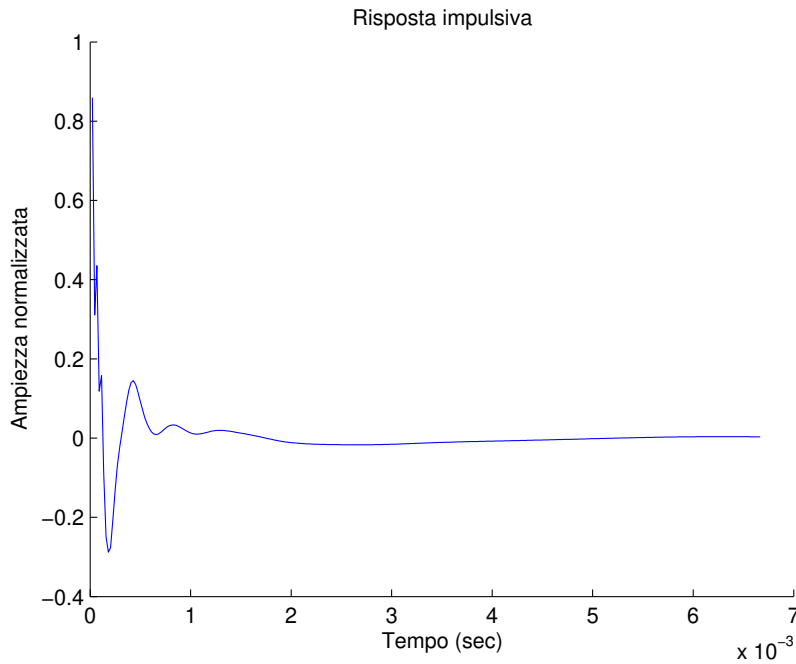


Figura 17.6: Risposta all'impulso dell'equalizzatore

Convolviendo numericamente il reciproco della risposta impulsiva con lo sweep equalizzato riotteniamo nuovamente il segnale originale, come si vede nella Figura 17.10.

Un secondo esempio è più tipico nell'ambito delle registrazioni musicali. Consiste di un brano musicale su cui è stata effettuata un'equalizzazione e poi, con il procedimento di deconvoluzione a finestre, la corrispondente de-equalizzazione.

In questo caso, nel sonogramma abbiamo usato un'altra scala per il modulo della *FFT*, come in Figura 17.11.

La Figura 17.12 mostra la forma d'onda del brano musicale.

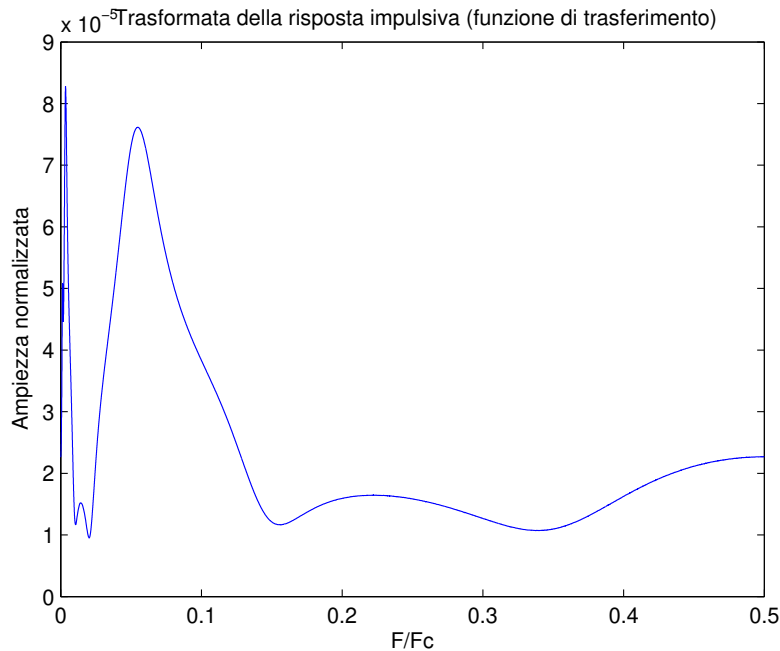


Figura 17.7: Funzione di trasferimento dell'equalizzatore

Il sonogramma è presentato in Figura 17.13.

L'equalizzazione è stata eseguita mediante il procedimento di convoluzione a finestre. Il sonogramma del brano equalizzato è in Figura 17.14.

La deconvoluzione a finestre basata sull'algoritmo di Sovrapposizione e Memorizzazione Segmentata porta alla de-equalizzazione illustrata nel sonogramma della Figura 17.15.

L'esecuzione numerica del convolutore inverso ci ha restituito esattamente il segnale iniziale. Il brano musicale originale e le sue versioni equalizzata e de-equalizzata si possono ascoltare dal seguente file:

http://scienzamedia.uniroma2.it/didattica/materiali_did/Anal.Armon./deconvoluzione_eseempio.wa

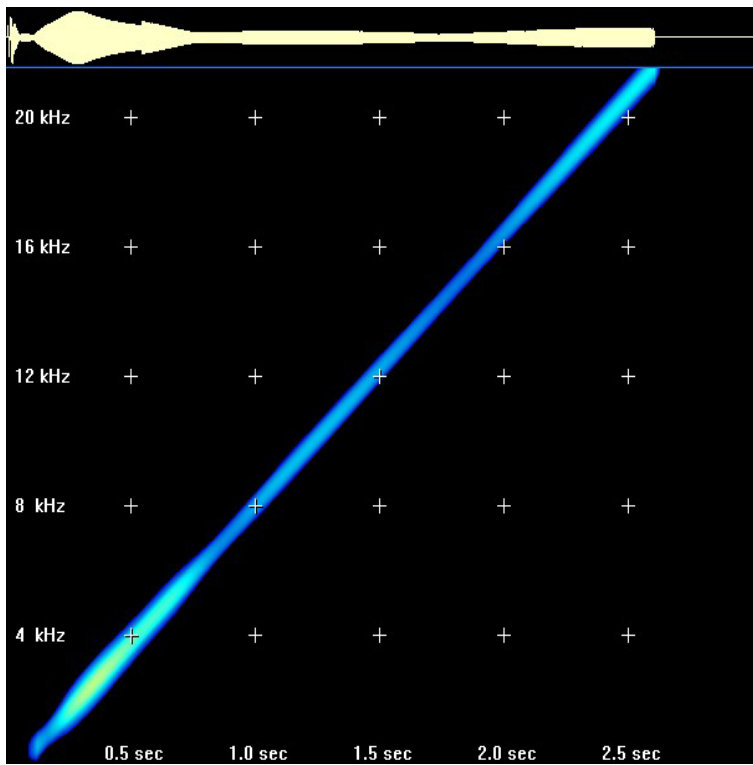


Figura 17.8: Sonogramma dello sweep dopo l'equalizzazione

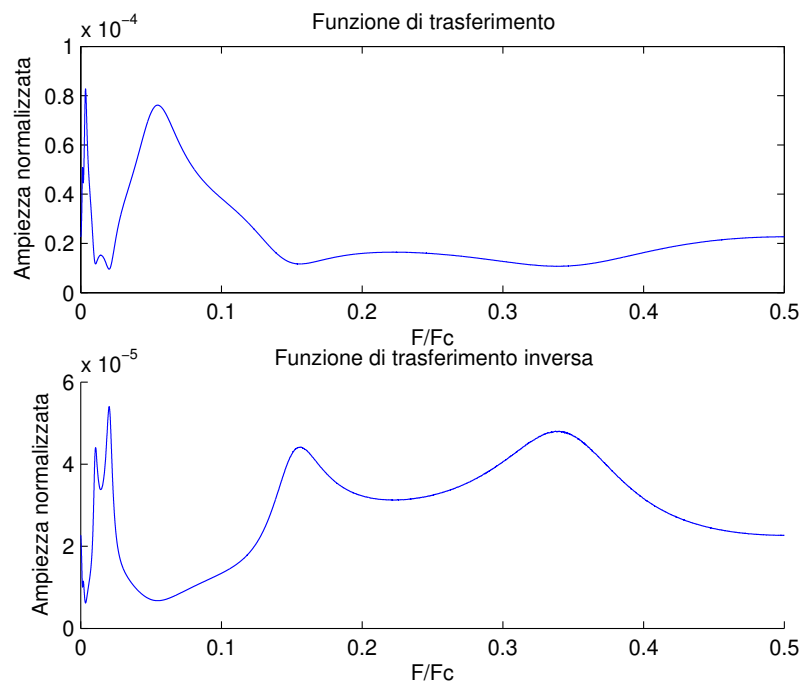


Figura 17.9: Risposta all'impulso dell'equalizzatore e suo reciproco

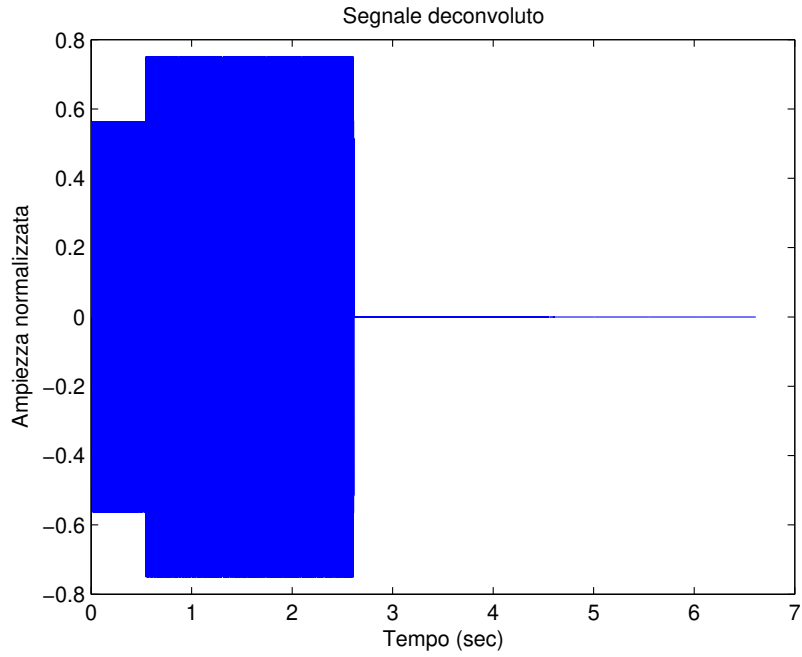


Figura 17.10: Sonogramma dello sweep dopo la deconvoluzione

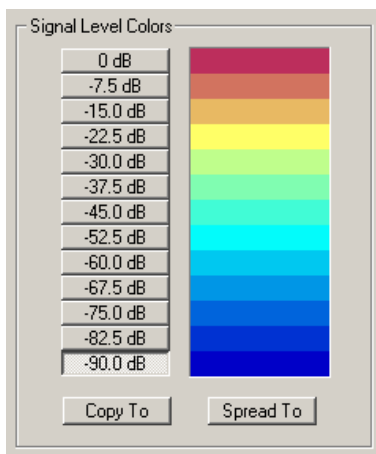


Figura 17.11: Scala cromatica delle ampiezze nei possibili sonogrammi

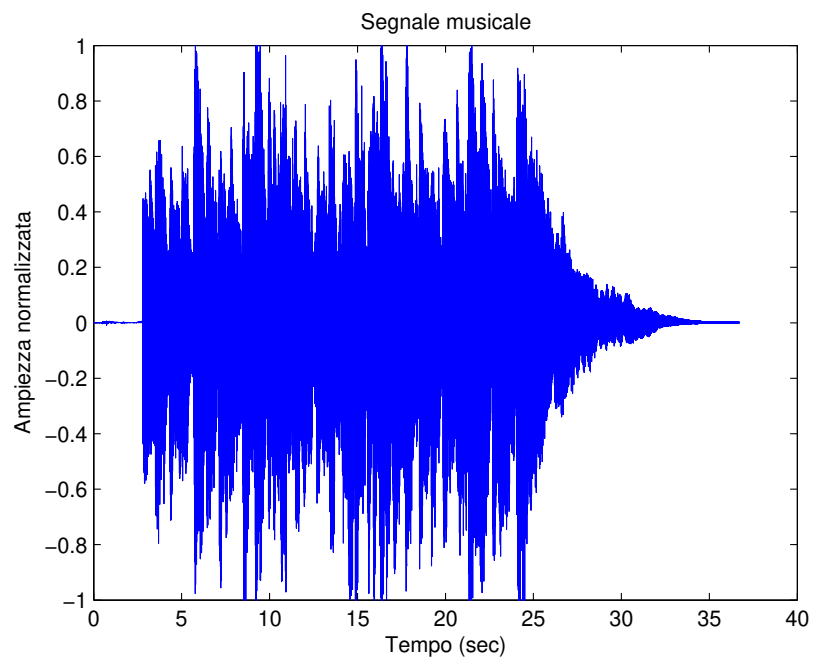


Figura 17.12: Andamento nel tempo di un brano musicale

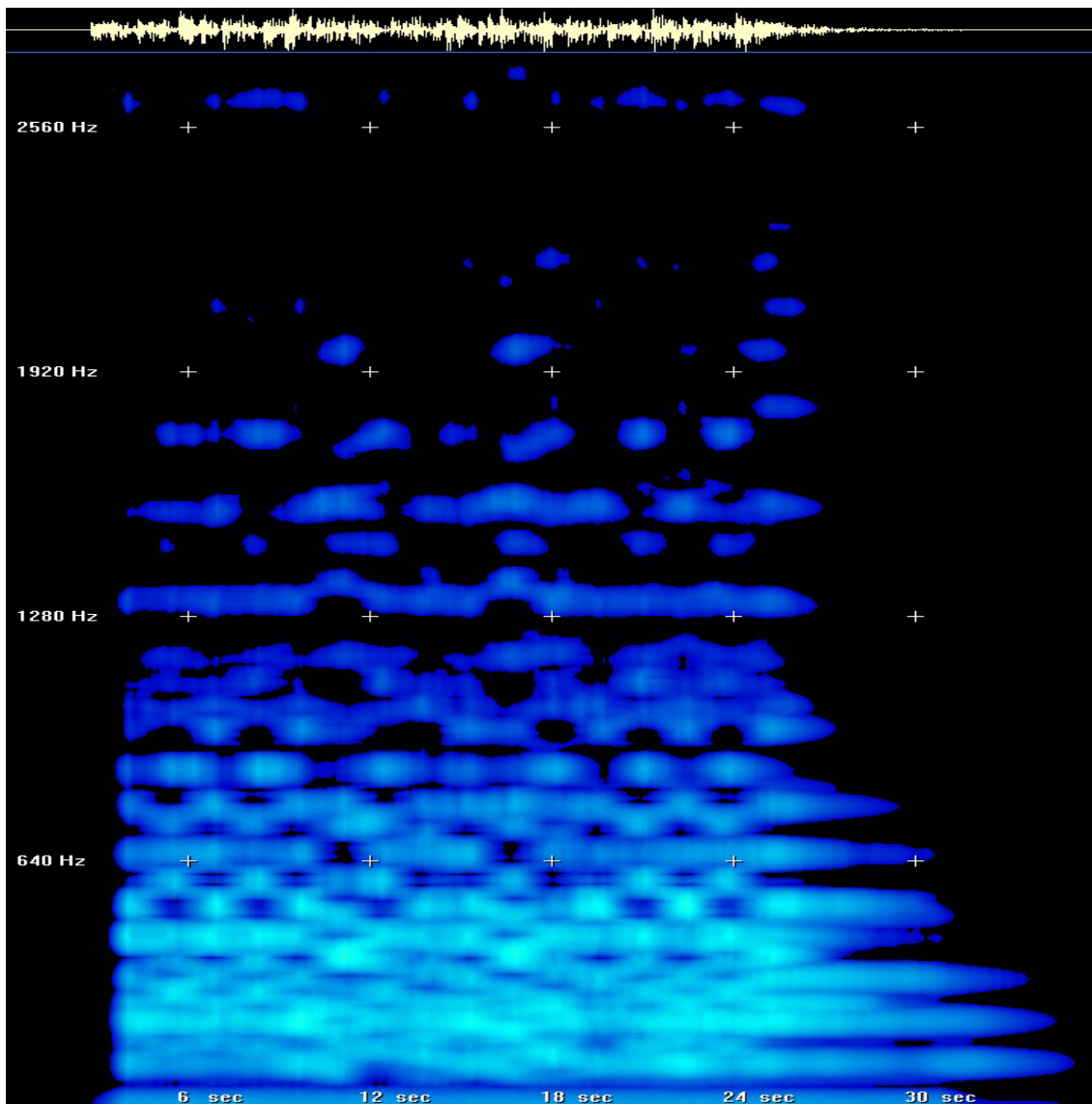


Figura 17.13: Sonorogramma del brano musicale della figura precedente

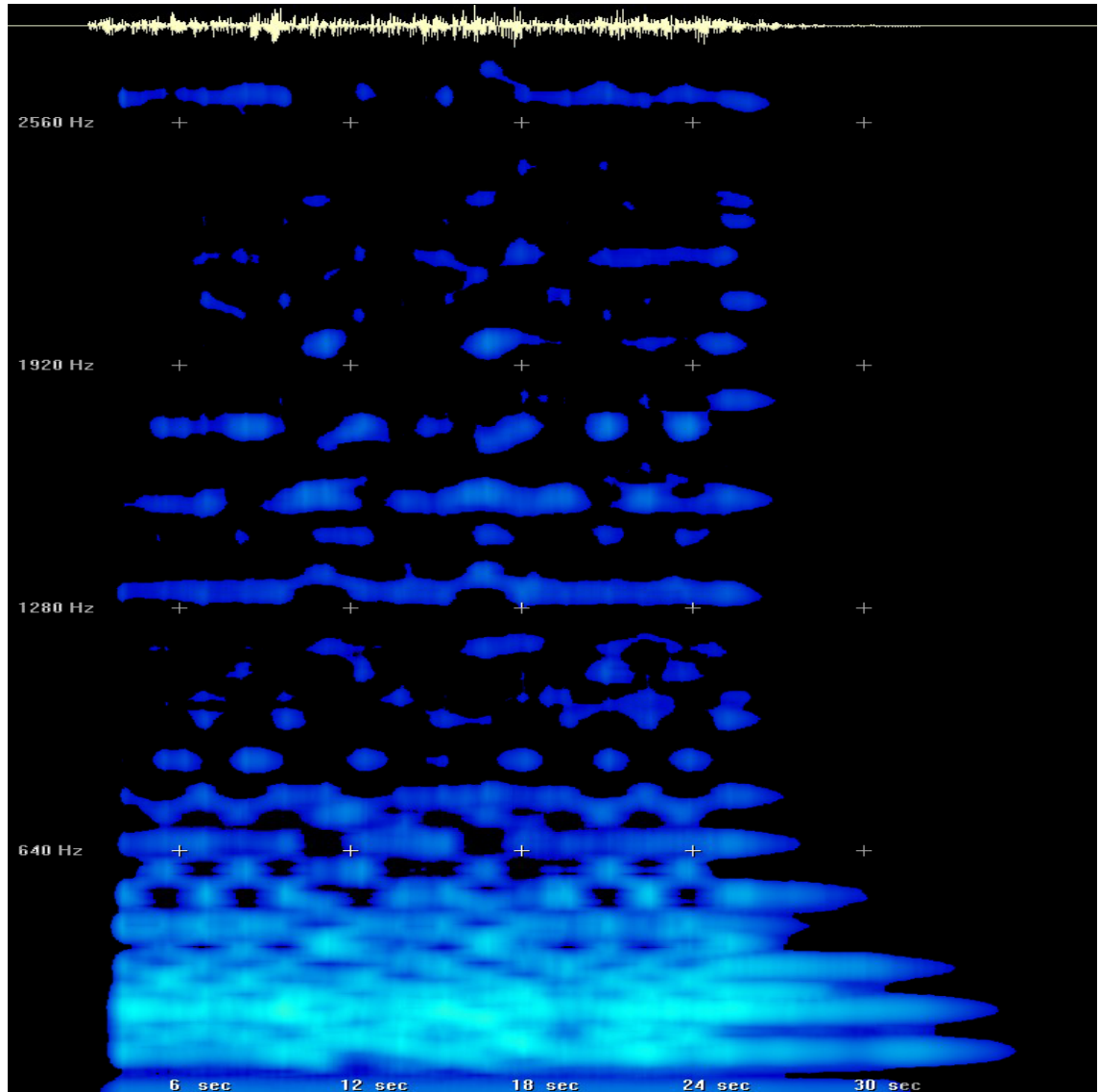


Figura 17.14: Sonorogramma del brano musicale dopo l'equalizzazione

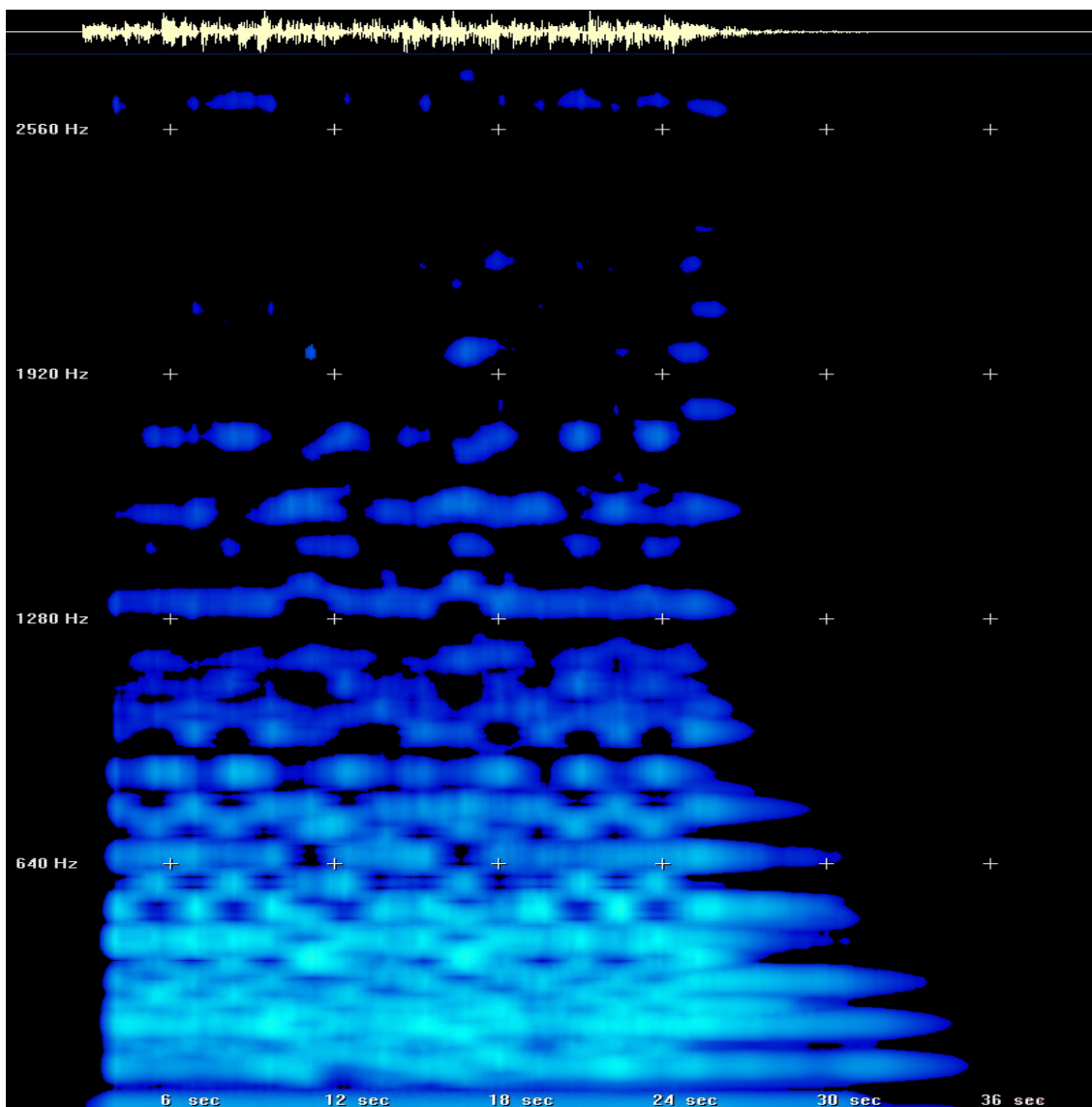


Figura 17.15: Sonorogramma del brano musicale dopo la de-equalizzazione

Parte V

Trasformata di Laplace, trasformata zeta e filtri lineari

Capitolo 18

La trasformata di Laplace

Abbiamo precedentemente studiato gli sviluppi di Fourier di funzioni di variabile reale e la trasformata di Fourier per frequenze reali. In questa parte dell'opera vogliamo estendere questi concetti a funzioni di variabile complessa. In questo e nel prossimo capitolo introduciamo due estensioni complesse rispettivamente della trasformata di Fourier (trasformata di Laplace) e della serie di Fourier (trasformata zeta). Nel presente capitolo focalizziamo l'attenzione alla trasformata di Laplace, che non verrà usata in questo libro per il trattamento di segnali, ma viene presentata per l'importanza delle sue applicazioni alla matematica e all'ingegneria (ad esempio, risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie e applicazioni all'analisi di circuiti elettrici, calcolo di integrali), e della rimeditazione che essa consente a proposito della trasformata di Fourier.

18.1 Trasformata di Laplace e formula di inversione

Definizione 18.1.1. (Ascissa di convergenza.) L'*ascissa di convergenza* di una funzione f localmente L^1 (ossia L^1 sui compatti) rispetto alla misura di Lebesgue è il numero α dato da

$$\alpha := \inf \left\{ u \in \mathbb{R} : \int_0^\infty e^{-ut} |f(t)| dt < \infty \right\}.$$

In altre parole, $\alpha := \inf \{\operatorname{Re} z\}$ tali che $t \mapsto e^{-zt} f(t) \in L^1(0, \infty)$.

Se la precedente funzione non ha integrale finito per nessun valore di $\operatorname{Re} z$, si pone $\alpha = \infty$.

Corollario 18.1.2. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z > \alpha$ l'integrale $\int_0^\infty e^{-zt} |f(t)| dt$ è finito.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che, per $\operatorname{Re} z > \alpha$, si ha $|e^{-zt}| |f(t)| = e^{-t \operatorname{Re} z} |f(t)| < |e^{-\alpha t}| |f(t)|$. \square

Esempio 18.1.3. Un esempio tipico di funzioni definite in $(0, \infty)$, localmente L^1 con ascissa di convergenza finita sono le funzioni misurabili a crescita non più che esponenziale: $|f(t)| \leq C e^{\beta t}$ per ogni $t > 0$, per qualche costante $C > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$. In tal caso è ovvio che l'ascissa di convergenza è non superiore a β . \square

Poiché le funzioni dell'Esempio 18.1.3, estese in maniera banale a tutto \mathbb{R} , sono di uso frequente in questo Capitolo, gli diamo un nome apposito:

Definizione 18.1.4. Le funzioni f misurabili su \mathbb{R} , nulle in $(-\infty, 0)$ e tali che $|f(t)| \leq C e^{\beta t}$ per ogni $t > 0$, per qualche costante $C > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ si dicono funzioni con supporto a destra (o più brevemente, *funzioni a destra*) a crescita esponenziale su \mathbb{R}^+ . Si osservi che tali funzioni sono integrabili sui compatti. Con generalità lievemente maggiore, possiamo estendere questa definizione e dire che le funzioni a destra a crescita esponenziale sono le funzioni f a supporto in \mathbb{R}^+ per cui esiste $\beta \in \mathbb{R}$ tale che $t \mapsto f(t) e^{-\beta t}$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$. Ancora più in generale possiamo assumere che queste funzioni siano supportate non nella semiretta $\{t \geq 0\}$ bensì in qualche semiretta $\{t \geq T\}$ con $T \in \mathbb{R}$ arbitrario, che dipende da f . I risultati di questo capitolo non cambierebbero in queste ipotesi lievemente più generali, ma per semplicità non le adottiamo, tranne che nella Sezione 18.5 sulla trasformata di Laplace di distribuzioni.

L'estremo inferiore delle costanti β come sopra si chiama l'esponente di crescita, o talvolta anche, in vista dell'Esempio 18.1.3, l'ascissa di convergenza di f .

Definizione 18.1.5. (Trasformata di Laplace.) Sia f una funzione a destra a crescita esponenziale nel senso della Definizione 18.1.4, con esponente di crescita α . La *trasformata di Laplace* di f è la funzione $\mathcal{L}f$ definita nel semipiano $\operatorname{Re} z > \alpha$ da

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt.$$

Corollario 18.1.6. *Se f è una funzione a destra a crescita esponenziale con esponente di crescita (ascissa di convergenza) α (nel senso della Definizione 18.1.4), allora $\mathcal{L}f$ è olomorfa nel semipiano $\{\operatorname{Re} z > \alpha\}$.*

Dimostrazione. Consideriamo la misura μ (reale o complessa) con derivata di Radon–Nykodym f rispetto alla misura di Lebesgue su \mathbb{R} (Definizione 1.9.28), ossia tale che $d\mu(t) = f(t) dt$. Questa misura è finita sui compatti perché F è localmente L^1 . Inoltre, in ogni quadrante $\{\operatorname{Re} z \geq \beta > \alpha, t > 0\}$ la funzione $h(z, t) = e^{-zt}$ verifica $|h(z, t)| = e^{-\operatorname{Re} z t} \geq e^{-\beta t} = h(\beta, t)$. Poiché β è maggiore dell'ascissa di convergenza, $\int_0^\infty |h(\beta, t)| |f(t)| dt < \infty$, e quindi $\sup_{\operatorname{Re} z \geq \beta} e^{-zt}$ è localmente $L^1(|\mu|)$. Allora $\mathcal{L}f$ è olomorfa in tutti i semipiani $\{\operatorname{Re} z \geq \beta\}$ per la parte (ii) del Lemma 2.5.8, e quindi anche in $\{\operatorname{Re} z > \alpha\}$. \square

Nota 18.1.7. (Relazione fra le trasformate di Fourier e di Laplace.)

Chiaramente, la relazione fra le trasformate di Laplace e di Fourier è la seguente: se $f(t) = 0$ per $t < 0$, scrivendo $h_x(t) = f(t)e^{-xt}$, abbiamo

$$\mathcal{L}f(z) = \mathcal{L}f(x + iy) = \mathfrak{F}[h_x](y/2\pi),$$

dove, come nella Definizione 8.2.1, \mathfrak{F} denota la trasformata di Fourier.

\square

Nota 18.1.8. Se f è una funzione a destra a crescita esponenziale con esponente di crescita α , allora

$$|\mathcal{L}f(z)| \leq M \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re} z - \alpha)t} dt \leq \frac{M}{\operatorname{Re} z - \alpha}, \quad (18.1)$$

e quindi $\mathcal{L}f$ tende a zero quando $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$, uniformemente rispetto a $\operatorname{Im} z$.

Lo stesso calcolo mostra che la funzione f nulla per $t < 0$ e data da $f(t) = e^{\alpha t}$ per $t \geq 0$ ha per trasformata di Laplace la funzione

$$\mathcal{L}f(z) = \frac{1}{z - \alpha}. \quad (18.2)$$

In particolare, la funzione di Heaviside H introdotta nella Definizione 11.10.2 (la funzione caratteristica di $(0, \infty)$), che è a crescita esponenziale con esponente 0, si ha $\mathcal{L}H(z) = \frac{1}{\operatorname{Re} z}$. Si noti che $\mathcal{L}H$ converge a zero per $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$, ma non per $|z| \rightarrow +\infty$ (è costante sulle rette verticali $\operatorname{Re} z = \text{costante}$).

D'altra parte, la disuguaglianza (18.1) mostra che $\mathcal{L}f(z)$ tende a zero uniformemente rispetto a $\arg z$ in tutti i domini nel semipiano $\{\operatorname{Re} z > \alpha\}$ nei quali $|z| \rightarrow \infty$ implica $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$, ad esempio i coni propri $|\arg(z - \alpha)| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. \square

Nota 18.1.9. La condizione di crescita esponenziale della funzione f è stata usata per mostrare che la trasformata di Laplace ha senso nel semipiano destro ed è ivi olomorfa. La condizione di appartenenza locale a L^1 non assicura che la crescita sia al più esponenziale (f potrebbe avere picchi periodici fatti come campane via via più strette ed alte, con massimi locali che crescono a velocità arbitraria).

Però vedremo in seguito, alla fine della dimostrazione del Teorema 18.6.1, che se f è una funzione in $L^2(0, \infty)$, allora la trasformata di Laplace è definita ed olomorfa nel semipiano destro. Questo fatto estende la definizione di trasformata di Laplace a tali funzioni. \square

Per uso futuro presentiamo la seguente osservazione.

Lemma 18.1.10. *Se f è a crescita esponenziale con ascissa di convergenza α , l'integrale $\int_0^b f(t) e^{-zt} dt$ è uniformemente convergente a $\int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt$ nel semipiano $D_\beta := \{\operatorname{Re} z \geq \beta\}$ per ogni $\beta > \alpha$.*

Dimostrazione. Per ogni z in D_β ,

$$\left| \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt - \int_0^b f(t) e^{-zt} dt \right| \geq \int_b^\infty |f(t) e^{-zt}| dt \geq \int_b^\infty e^{(\alpha-\beta)t} dt$$

e poiché $\beta > \alpha$ l'ultimo integrale è finito, ossia l'integrando appartiene a $L^1[b, +\infty)$, ed il risultato segue dal test di Weierstrass (Corollario 1.23.8). \square

Teorema 18.1.11. (Formula di inversione per la trasformata di Laplace.) *Sia f una funzione a crescita esponenziale con esponente di crescita α . Allora, per ogni $a > \alpha$ e per ogni punto di continuità $t \in \mathbb{R}$ di f , vale la formula di inversione*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} F(t) := \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L} f(z) e^{zt} dz \equiv \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{a-ib}^{a+ib} \mathcal{L} f(z) e^{zt} dz \quad (18.3)$$

dove la notazione v. p. \int è quella introdotta alla fine dell'Esempio 11.5.5 (valore principale).

Dimostrazione. Sfruttiamo la relazione fra le trasformate di Laplace e di Fourier (Nota 18.1.7):

$$\mathcal{L} f(a + is) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(a+is)t} dt = \int \mathcal{F}[f(\cdot)e^{-a\cdot}](s)$$

(osserviamo che $f(t)e^{at} = 0$ per $t < 0$ e appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ perché $a > \alpha$). Ora dal teorema di inversione di Fourier (Teorema 8.4.2) otteniamo

$$f(t) = e^{at} \frac{1}{2\pi} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_b^b \mathcal{L} f(a + is) e^{ist} ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{a+ib}^{a+i\infty} \mathcal{L} f(z) e^{zt} dz,$$

ossia la formula di inversione dell'enunciato. \square

Teorema 18.1.12. (Formula di inversione per la trasformata di Laplace sotto ipotesi più generali.) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e F una funzione olomorfa nel semipiano $\operatorname{Re} z > \alpha$. Supponiamo che F converga a 0 per $z \rightarrow \infty$ uniformemente rispetto ad $\arg z$ in ogni semipiano $\operatorname{Re} z \geq a > \alpha$, e che la restrizione di F all'asse $\{\operatorname{Re} z = a\}$ sia in $L^1(\mathbb{R})$ (ossia che esista il limite $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{a-ib}^{a+ib} |F(z)| dz$).

Allora, in base al Corollario 18.1.14, la formula di inversione (18.3) fornisce una funzione f continua ovunque a crescita al più esponenziale e tale che $\mathcal{L} f = F$.

Dimostrazione. Fissiamo z_0 nel semipiano $\{\operatorname{Re} z > a\}$. Allora

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-z_0 t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-z_0 t} \text{v. p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z) e^{zt} dz dt.$$

Poiché, per ipotesi, per ogni $t > 0$ la funzione $F(z) e^{zt}$ ristretta alla retta $\{\operatorname{Re} z = a\}$ è in L^1 , possiamo scambiare l'ordine di integrazione in base al Teorema di Fubini 1.20.4 (ii), ed otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t) e^{-z_0 t} dt &= \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{\{\operatorname{Re} z = a\}} F(z) \int_0^{\infty} e^{(z-z_0)t} dt dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{\{\operatorname{Re} z = a\}} \frac{F(z)}{z - z_0} dz. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Sia $C_R = \{z, |z| = R, \operatorname{Re} z > a\}$, e $M_R = \sup_{z \in C_R} |F(z)|$. Per ipotesi, $\lim_{R \rightarrow +\infty} M_R = 0$, e quindi, dato che $|z_0| < R$, si ha

$$\int_{C_R} \frac{F(z)}{z - z_0} dz \leq M_R \frac{\pi R}{R - |z_0|},$$

perché $|z - z_0| \geq ||z| - |z_0|| = R - |z_0|$. Poiché il secondo membro tende a zero quando $R \rightarrow +\infty$, da qui segue

$$-\frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{\{\text{Re } z=a\}} \frac{F(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{K_R} \frac{F(z)}{z - z_0} dz$$

dove K_R è la curva chiusa $K_R = C_R \cup \{\text{Re } z = a, |z| \leq R\}$, percorsa in senso antiorario. D'altra parte, poiché F è olomorfa dentro il contorno K_R e z_0 è all'interno di K_R , sappiamo dal teorema di Cauchy (Corollario 2.4.10) che l'integrale a secondo membro vale $F(z_0)$. Quindi la formula di inversione dell'enunciato segue ora da (18.4), a patto di dimostrare che f è trasformabile secondo Laplace. Per questo scopo basta mostrare che f è a crescita esponenziale. Infatti, dalla definizione di f e dal fatto che $|F|$ ha integrale finito sulla retta $\{\text{Re } z = a\}$, segue che $|f(t)| \leq e^{at} \frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int_{\{\text{Re } z=a\}} |F(z)| dz < M e^{at}$. \square

Nota 18.1.13. Poiché $\mathcal{L}f(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt$, non ci interessa sapere se la formula di inversione (18.3) fornisce una funzione f tale che $f(t) = 0$ per $t < 0$. È comunque interessante osservare che questa proprietà di f è vera se

$$|F(z)| < C/|z|^p \quad (18.5)$$

per qualche $p > 1$, come ora proviamo. Siano C_R il semicerchio e K_R il percorso chiuso introdotti nella dimostrazione del Teorema 18.1.12. Osserviamo che

$$\left| \int_{C_R} F(z) e^{zt} dt \right| \leq \int_{C_R} |F(z)| e^{t \text{Re } z} |dz| \leq e^{at} \int_{C_R} |F(z)| |dz|. \quad (18.6)$$

L'ultimo integrale è limitato rispetto a R in conseguenza di (18.5). Pertanto, se $t < 0$, allora l'ultimo membro della precedente disuguaglianza tende a zero se $R \rightarrow \infty$. Allora, dalla formula di inversione (18.3), abbiamo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z) e^{zt} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R} F(z) e^{zt} dz = 0$$

grazie al teorema di Cauchy (Corollario 2.4.10), perché l'integrando è olomorfo. \square

Corollario 18.1.14. (Una condizione sufficiente per l'invertibilità.)

Se F è una funzione olomorfa nel semipiano $\{\operatorname{Re} z > a\}$ per qualche $a > 0$ e soddisfa la condizione di decadimento $|F(z)| < C/|z|^p$ per qualche $p > 1$, $C > 0$ e per ogni z in tale semipiano, allora l'integrale nella formula di inversione (18.3) è convergente, e fornisce una funzione f continua ovunque, nulla a sinistra di 0, a crescita al più esponenziale e tale che $\mathcal{L} f = F$.

Dimostrazione. È ovvio che la condizione di decadimento implica la convergenza dell'integrale improprio (Sezione 1.1). La dimostrazione del fatto che f abbia crescita al più esponenziale è identica all'argomento alla fine della dimostrazione del Teorema 18.1.12: la ripetiamo qui per chiarezza. Poiché $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(a + iy) e^{a+iy} dy$, l'integrale nella formula di inversione è assolutamente convergente:

$$e^{-at}|f(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(a + iy)| |e^{iy}| dy = \int_{-\infty}^{\infty} |F(a + iy)| dy < \infty$$

(l'ultimo integrale è finito ancora per la condizione di decadimento). Quindi $|f(t)| < Ae^{at}$ per qualche costante $A > 0$.

Il fatto che $f(t) = 0$ per $t < 0$ è stato mostrato nella Nota 18.1.13. Infine, il fatto che $\mathcal{L} f = F$ si dimostra grazie alla relazione fra la trasformata di Laplace e di Fourier (Nota 18.1.7), esattamente come nella dimostrazione del Teorema 18.1.11. \square

18.2 Proprietà della trasformata di Laplace

Le proprietà elementari della trasformata di Laplace si deducono allo stesso modo che per la trasformata di Fourier (Teorema 8.2.4). Per completezza, accenniamo le dimostrazioni nel prossimo teorema.

Teorema 18.2.1. (Proprietà della trasformata di Laplace.) Sia f (rispettivamente, g) una funzione a destra a crescita esponenziale nel senso della Definizione 18.1.4, con esponente di crescita α_f , (rispettivamente α_g). La trasformata di Laplace $\mathcal{L} f$ ha le proprietà seguenti.

- (i) (linearità.) La trasformata di Laplace è lineare: per ogni coppia di numeri complessi c, d , si ha $\mathcal{L}(cf + dg) = c\mathcal{L} f + d\mathcal{L} g$, nel semipiano $\{\operatorname{Re} z > \max\{\alpha_f, \alpha_g\}\}$.

- (ii) (dilatazione.) Se $h(t) = f(ct)$, con $c > 0$ allora $\mathcal{L} h(z) = \frac{1}{c} \mathcal{L} f\left(\frac{z}{c}\right)$ per ogni z con $\operatorname{Re} z > c\alpha_f$.
- (iii) (traslazione nel tempo.) Sia $h = \lambda_\tau f$ il traslato $h(t) = f(t - \tau)$, con $\tau \in \mathbb{R}$. Allora $\mathcal{L} h(z) = e^{-\tau z} \mathcal{L} f(z)$ per ogni $\operatorname{Re} z > \alpha_f$.
- (iv) (traslazione in frequenza.) Se $g(t) = e^{\tau t} f(t)$, con $\tau \in \mathbb{R}$, allora $\mathcal{L} g(z) = \mathcal{L} f(z - \tau)$ per ogni $\operatorname{Re} z > \alpha_f + \tau$.
- (v) (derivazione nel tempo.) Se f è derivabile ed anche f' è una funzione a destra a crescita esponenziale, allora, denotando con D l'operatore di derivazione, si ha $\mathcal{L} Df = z \mathcal{L} f(z) - f(0)$. Più in generale, se le prime n derivate di f sono funzioni a destra a crescita esponenziale, allora per ogni $\operatorname{Re} z > \max_{0 \leq j \leq n} \alpha_{D^j f}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D^n f)(z) &= z^n \mathcal{L} f(z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} (Df)(0) - \dots - (D^{n-1} f)(0) \\ &= z^n \mathcal{L} f(z) - \sum_j 0^{n-1} z^j D^{n-j-1} f(0). \end{aligned}$$

Più in generale lo stesso enunciato vale se la derivata destra $D_+^j f$ è una funzione a destra a crescita esponenziale per $1 \leq j \leq n$, pur di rimpiazzare tutte le derivate con le corrispondenti derivate destre.

- (vi) (derivazione in frequenza.) Per ogni $n > 0$, la funzione $t \mapsto t^n f(t)$ è una funzione a destra a crescita esponenziale con la stessa ascissa di convergenza di f , e se $g(t) = (-1)^n t^n f(t)$ si ha $D^n \mathcal{L} f(z) = \mathcal{L} g(z)$ in tutto il semipiano di convergenza.
- (vii) (integrazione nel tempo.) La primitiva $g(t) = \int_0^t f(s) ds$ ha ancora ascissa di convergenza α_f e $\mathcal{L} g(z) = \mathcal{L} f(z)/z$ per ogni z nel semipiano di convergenza.
- (viii) (integrazione in frequenza.) La funzione $g(t) = f(t)/t$ è ancora una funzione a destra a crescita esponenziale (necessariamente con la stessa ascissa di convergenza α_f di f purché $\alpha_f > 0$), allora $\mathcal{L} g(z) = \int_z^\infty \mathcal{L} f(u) du$, dove l'integrale è calcolato su un qualunque percorso dal punto z a infinito in cui $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$. Questo accade per i percorsi nel semipiano $\{\operatorname{Re} z > \alpha_f\}$ che tendono ad infinito senza restare in una banda verticale, ossia sono tali che $|z| \rightarrow \infty$ implica $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$: ad

esempio, i percorsi contenuti nei coni propri $|\arg(z - \alpha)| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. In particolare,

$$\mathcal{L}g(z) = \int_{\{\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} z, \operatorname{Re} u \geq \operatorname{Re} z\}} \mathcal{L}f(u) du.$$

Dimostrazione. La parte (i) è ovvia, e (ii), (iii) e (iv) si dimostrano allo stesso modo delle proprietà corrispondenti della trasformata di Fourier (rispettivamente le parti (iv), (v) e (vi) del Teorema 8.2.4). Bastano solo le seguenti ovvie osservazioni sulle ascisse di convergenza, che lasciamo al lettore per esercizio: per la parte (i), $\alpha_{f+g} = \max\{\alpha_f, \alpha_g\}$; per la parte (ii), $\alpha_{cf} = c\alpha_f$; per la parte (iii), $\alpha_{\lambda_r f} = \alpha_f$; per la parte (iv), $\alpha_g = \alpha_f + \tau$.

Dimostriamo la parte (v). Siano $\alpha = \max\{\alpha_f, \alpha_{f'}\}$ e $\operatorname{Re} z > \alpha$. Integrando per parti otteniamo

$$\mathcal{L}f'(z) = \int_0^\infty f'(t) e^{-zt} dt = [f(t) e^{-zt}]_0^\infty + z \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt = f(0) + z \mathcal{L}f(z),$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) e^{-zt} = 0$, che vale poiché $\operatorname{Re} z > \alpha_f$. Si osservi che nell'integrazione per parti il termine costante al bordo sinistro di integrazione è in realtà il limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$, ma questo vale $f(0)$ perché abbiamo assunto f derivabile, quindi continua.

Per il caso generale della derivata n -sima, procediamo per induzione su n . Supponiamo che la formula dell'enunciato valga per $n-1$ per qualche $n > 0$: allora l'enunciato che abbiamo appena provato nel caso $n=1$ può essere applicato alla derivata $D^{n-1}f$ invece che a f per ottenere $\mathcal{L}D^n f(z) = z \mathcal{L}D^{n-1}f(z) - D_+^{n-1}f(0)$: come prima, nell'integrazione per parti si deve utilizzare la derivata destra se la funzione f è derivabile a destra in 0 ma non a sinistra. A questo punto l'enunciato segue immediatamente dall'ipotesi di induzione.

Per dimostrare (vi), basta osservare che la trasformata di Laplace $\mathcal{L}f(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt$ è olomorfa nel semipiano di convergenza e si può portare la derivata sotto il segno di integrale perché l'integrando è di classe C^1 sui compatti e l'integrale improprio è uniformemente convergente. Grazie al Lemma 18.1.10, possiamo applicare il Corollario 1.23.7 per derivare sotto il segno di integrale: in tal modo si ottiene (vi).

Dimostriamo (vii). Se $|f(t)| < e^{\alpha_f t}$, allora la primitiva $g(t) = \int_0^t f(s) ds$ verifica $|g(t)| < t e^{\alpha_f t}$, e quindi g è a crescita esponenziale con lo stesso esponente di crescita, ossia $\alpha_g = \alpha_f$, perché l'esponenziale cresce più rapidamente

del polinomio (Sezione 1.1). Osserviamo che, per il Teorema fondamentale del Calcolo 1.27.1), si ha $g' = f$ e $g(0) = 0$. Allora, per la proprietà di derivazione nel tempo (parte (v) qui sopra) abbiamo

$$\mathcal{L} f(z) = \mathcal{L}(g')(z) = z \mathcal{L} g(z) - g(0) = z \mathcal{L} g(z)$$

per ogni $z > \alpha_f$.

Infine, dimostriamo (viii). Supponiamo $\alpha_f > 0$. la funzione $g(t) = f(t)/t$ ha la stessa ascissa di convergenza α_f per quanto osservato nella precedente parte (vii), e per ogni $\operatorname{Re} z > \alpha_f$ segue dalla parte (vi) (proprietà di derivazione in frequenza) che $D \mathcal{L} g(z) = -\mathcal{L} f(z)$. Quindi, per ogni z_0 con $\operatorname{Re} z_0 > \alpha_f$, abbiamo

$$\mathcal{L} g(z) = \mathcal{L} g(z_0) + \int_{z_0}^z \mathcal{L} f(s) ds$$

dove l'integrale è calcolato su qualsiasi percorso da z_0 a z contenuto nel semipiano di olomorfia $\{s : \operatorname{Re} s_0 > \alpha_f\}$. D'altra parte, abbiamo visto nella Nota 18.1.8 che $\mathcal{L} g(z)$ tende a zero se z tende ad infinito in modo che $\operatorname{Re} z$ tenda anch'esso ad infinito (ossia senza restare in una banda verticale). Pertanto su ogni tale percorso la precedente identità assicura che $\mathcal{L} g(z_0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{z_0}^z \mathcal{L} f(s) ds$, e quindi, nell'ipotesi dell'enunciato,

$$\mathcal{L} g(z) = \int_z^\infty \mathcal{L} f(s) ds.$$

□

Corollario 18.2.2. (*Trasformata di Laplace di funzioni a destra periodiche.*) Sia f una funzione a destra a crescita esponenziale, periodica di periodo $T > 0$ nel senso che $f(t+T) = f(t)$ per ogni $t \geq 0$. Allora, per ogni z nel semipiano di convergenza,

$$\mathcal{L} f(z) = \frac{\int_0^T f(t) e^{-zt} dt}{1 - e^{-zT}}.$$

Dimostrazione. Tronchiamo la funzione f sul periodo $[0, T)$ per ottenere $f_0 = \chi_{[0, T)} f$. Allora $\mathcal{L} f_0(z) = \int_0^T f(t) e^{-zt} dt$. Inoltre per ogni t si ha $f(t) =$

$\sum_{n \geq 0} f(t + nT)$, e dalla proprietà di traslazione nel tempo (parte (iii) del Teorema 18.2.1) segue

$$\mathcal{L} f(z) = \left(\sum_{n \geq 0} e^{-nzT} \right) \mathcal{L} f_0(z),$$

da cui la tesi. \square

18.3 Esempi di trasformate di Laplace

Nei prossimi esempi applichiamo la formula (18.2) per la trasformata di Laplace della funzione esponenziale.

Esempio 18.3.1. Dalle espressioni $\sin \omega t = (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2i$ e $\cos \omega t = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$ e da (18.2) segue

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin \omega t](z) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z - i\omega} - \frac{1}{z + i\omega} \right) = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}[\cos \omega t](z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - i\omega} + \frac{1}{z + i\omega} \right) = \frac{z}{z^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Analogamente, dalle espressioni $\sinh \omega t = (e^{\omega t} - e^{-\omega t})/2$ e $\cosh \omega t = (e^{\omega t} + e^{-\omega t})/2$ si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sinh \omega t](z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - \omega} - \frac{1}{z + \omega} \right) = \frac{\omega}{z^2 - \omega^2} \\ \mathcal{L}[\cosh \omega t](z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{z + \omega} \right) = \frac{z}{z^2 - \omega^2}. \end{aligned}$$

\square

Esempio 18.3.2. Da (18.2) sappiamo che $\mathcal{L} 1 = 1/z$, dove, come sempre, con 1 intendiamo la funzione che vale 1 per $t \geq 0$ e 0 altrove. Allora segue dalla proprietà di derivazione in frequenza (parte (vi) del Teorema 18.2.1) che $\mathcal{L}[t^n](z) = n!/z^{n+1}$. Ora dalla proprietà di traslazione nel tempo (parte (iii) del Teorema 18.2.1) segue $\mathcal{L}[t^n e^{z_0 t}](z) = n!/(z - z_0)^{n+1}$. Grazie al precedente Esempio 18.3.1 allo stesso modo si ha $\mathcal{L}[t \sin \omega t](z) = 2\omega z/(z^2 + \omega^2)^2$ e $\mathcal{L}[t \cos \omega t](z) = (z^2 + \omega^2)/(z^2 + \omega^2)^2$. Continuando a derivare rispetto a z si

ottengono le trasformate di Laplace di $t^n \sin \omega t$ e $t^n \cos \omega t$, che lasciamo per esercizio.

Veniamo ora al caso di potenze generalizzate, ossia con esponente positivo ma non intero. Tramite il cambiamento di variabili $u = t/x$ nella definizione di funzione Gamma (Sottosezione 1.23.4) si ha che, per $x > 0$ e $\alpha > -1$,

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt = x^{\alpha+1} \int_0^\infty u^\alpha e^{-xu} du.$$

Questo equivale a dire

$$\mathcal{L}[u^\alpha](x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{x^{\alpha+1}}.$$

Per prolungamento analitico (Sezione 2.14, ed in particolare Sottosezioni 2.14.1, ?? e 2.14.5), la stessa formula vale se si sostituisce $x > 0$ con $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$: qui abbiamo definito la funzione $z^{\alpha+1}$ tramite il suo ramo olomorfo determinato dalla funzione logaritmo nel modo seguente: $z^{\alpha+1} = e^{(\alpha+1)(\ln|z|+i\arg z)}$ con $|\arg z| < \pi/2$. \square

Esempio 18.3.3. Applicando la proprietà di traslazione in frequenza ai risultati visti nei precedenti Esempi 18.3.1 e 18.3.2 si ottiene, per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-z_0 t} \sin \omega t](z) &= \frac{\omega}{(z + z_0)^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}[e^{-z_0 t} \cos \omega t](z) &= \frac{z}{(z + z_0)^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}[e^{-z_0 t} \sinh \omega t](z) &= \frac{\omega}{(z + z_0)^2 - \omega^2} \\ \mathcal{L}[e^{-z_0 t} \cosh \omega t](z) &= \frac{z}{(z + z_0)^2 - \omega^2} \\ \mathcal{L}[t^n e^{-z_0 t}](z) &= n!/(z + z_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

\square

Esempio 18.3.4. Sappiamo dall'Esempio 18.3.1 che $\mathcal{L}[\sin](z) = 1/(1 + z^2)$ nel semipiano di convergenza $\operatorname{Re} z > 0$. Quindi segue dalla proprietà di integrazione in frequenza (parte (viii) del Teorema 18.2.1) che

$$\mathcal{L}[\operatorname{sinc}](z) = \int_z^\infty \frac{1}{1 + u^2} du$$

dove l'integrale è calcolato su un qualunque percorso in cui $\operatorname{Re} z$ tende a $+\infty$. Scegliendo ad esempio il percorso $\{z + is : s \geq 0\}$ otteniamo, per $z = x$ reale,

$$\mathcal{L}[\operatorname{sinc}](x) = [\arctan s]_x^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

Poiché la trasformata di Laplace è olomorfa nel semipiano di convergenza, $\mathcal{L}[\operatorname{sinc}](z)$ è il prolungamento analitico di $\frac{\pi}{2} - \arctan x$ dal semiasse reale positivo al semipiano $\{\operatorname{Re} z > 0\}$. Pertanto

$$\mathcal{L}[\operatorname{sinc}](z) = \frac{\pi}{2} - \arctan z.$$

In particolare, per $b > 0$ si trova $\mathcal{L}[\operatorname{sinc}](b) = \int_b^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-bt} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan b$, e passando al limite per $b \rightarrow 0$ abbiamo

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2},$$

perché

$$\left| \int_0^b \frac{\sin t}{t} e^{-bt} dt \right| \leq \int_0^b dt \leq b$$

dal momento che l'integrando è non superiore a 1. Questo risultato era già stato dimostrato per altra via nel Corollario 5.19.2, come conseguenza dei risultati sulla convergenza delle serie di Fourier. \square

Esempio 18.3.5. Le proprietà della funzione *seno integrale*, definita come $(x) = \int_0^x \sin t/t dt$, sono state studiate nella Sezione 5.19. Applicando la proprietà di traslazione in frequenza (parte (vi) del Teorema 18.2.1) al precedente Esempio 18.3.4 abbiamo

$$\mathcal{L}[\operatorname{sinc}](z) = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan z}{z}.$$

\square

18.4 Trasformata di Laplace della convoluzione

Teorema 18.4.1. *Siano f e g due funzioni a destra a crescita esponenziale nel senso della Definizione 18.1.4. Allora la loro convoluzione $f * g$ è anch'essa una funzione a destra a crescita esponenziale e $\mathcal{L}[f * g](z) = \mathcal{L}f(z) \mathcal{L}g(z)$ per ogni z nel suo semipiano di convergenza.*

Dimostrazione. È chiaro che la convoluzione è localmente integrabile, ed inoltre $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt = \int_0^x f(t) g(x-t) dt$, perché nel dominio di integrazione t è non negativo in base al dominio di f e $x-t$ deve anch'esso essere non negativo in base al dominio di g . Quindi $f * g(x) = 0$ per $x < 0$. Abbiamo supposto che f e g siano a crescita esponenziale, quindi esistono costanti positive C, α tali che $|f(x)| < Ce^{\alpha x}$ e la stessa stima vale per g . Allora

$$|f * g(x)| \leq \int_0^x |f(t)| |g(x-t)| dt \leq M^2 \int_0^x e^{\alpha x} dt = M^2 x e^{\alpha x} < M^2 e^{(\alpha+\varepsilon)x}$$

per ogni $\varepsilon > 0$ se x è abbastanza grande. Quindi $f * g$ è a crescita esponenziale.

La moltiplicatività della trasformata di Laplace della convoluzione segue dalla moltiplicatività dell'esponenziale come nel caso della trasformata di Fourier visto nella Sezione 8.5, ma qui dobbiamo effettuare un cambiamento di variabili facile ma non banale nell'integrale doppio. Infatti

$$\mathcal{L}[f * g](z) = \int_0^{\infty} \int_0^x f(t) g(x-t) dt e^{-zx} dx = \int_0^{\infty} f(t) \int_t^{\infty} g(x-t) e^{-zx} dx dt$$

(gli integrali si possono scambiare per il Teorema di Fubini 1.20.4 perché se $\operatorname{Re} z$ è maggiore dell'ascissa di convergenza di f e di g allora l'integrando è una funzione $L^1(dx \times dt)$ nel cono $\{(x, t) : x \leq t < \infty, 0 \leq x < \infty\}$, a causa del decadimento esponenziale all'aumentare di x). Ora, grazie alla moltiplicatività dell'esponenziale, l'ultimo membro diventa

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t) \int_t^{\infty} g(x-t) e^{-zx} dx dt &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt \int_0^{\infty} g(x) e^{-zx} dx \\ &= \mathcal{L} f(z) \mathcal{L} g(z). \end{aligned}$$

□

Ora, dalla formula di inversione del Teorema 18.1.11, abbiamo il reciproco del teorema di convoluzione:

Teorema 18.4.2. *Siano f, g funzioni a destra a crescita esponenziale con ascisse di convergenza α_f, α_g . Allora il prodotto puntuale fg è una funzione a destra a crescita esponenziale nel semipiano $D := \{\operatorname{Re} z > \alpha_f + \alpha_g\}$, e per ogni $z \in D$ e $a > \alpha_f$ si ha*

$$\mathcal{L}[fg](z) = \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{\{\operatorname{Re} w = a\}} \mathcal{L} f(w) \mathcal{L} g(z-w) dw.$$

Dimostrazione. È ovvio che il prodotto fg è ancora una funzione a destra localmente integrabile a crescita esponenziale con ascissa di convergenza $\alpha_f + \alpha_g$. Inoltre, grazie al Teorema di inversione 18.1.11, per ogni $a > \alpha_f$ si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[fg](z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-zt} \left(\text{v. p.} \int_{\{\text{Re } w=a\}} \mathcal{L} f(w) e^{wt} dw \right) g(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{\{\text{Re } w=a\}} \left(\mathcal{L} f(w) \int_0^\infty g(t) e^{-(z-w)t} dt \right) dw, \end{aligned}$$

dove l'ordine di integrazione è stato scambiato in base alla stessa applicazione del Teorema di Fubini 1.20.4 già vista nel Teorema 18.4.1 qui sopra. Poiché assumiamo $\text{Re } z > \alpha_f + \alpha_g$ ed $a > \alpha_f$ è arbitrario, possiamo assumere $\text{Re } z > a + \alpha_g$, ovvero $\text{Re}(z - w) > \alpha_g$, e quindi l'ultimo membro della precedente identità vale $\int_0^\infty g(t) e^{-(z-w)t} dt = \mathcal{L} g(z - w)$. Quindi, riassumendo,

$$\mathcal{L}[fg](z) = \frac{1}{2\pi i} \text{v. p.} \int_{\{\text{Re } w=a\}} \mathcal{L} f(w) \mathcal{L} g(z - w) dw.$$

□

18.5 Trasformata di Laplace di distribuzioni

Per una presentazione più esauriente dei concetti accennati in questa Sezione rinviamo il lettore a [38].

18.5.1 Trasformata di Laplace di distribuzioni a supporto in \mathbb{R}^+

Nella notazione dell'integrale tramite il simbolo di dualità che abbiamo introdotto nel Capitolo 11, Notazione 11.3.1, per una funzione f a destra a crescita esponenziale, con esponente di crescita α_f , possiamo scrivere

$$\mathcal{L} f(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt = \langle f, e^{-z \cdot} \rangle.$$

Analogamente, se la definizione di funzione a destra a crescita esponenziale si intende nel senso più generale dove la funzione f ha supporto a destra che comincia al punto $T \in \mathbb{R}$ e verifica $t \mapsto f(t) e^{-\beta t}$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ per

ogni $\beta > \alpha_f$ (Definizione 18.1.4), allora l'integrale diventa $\int_T^\infty f(t) e^{-zt} dt$, ma resta valida la formula

$$\mathcal{L} f(z) = \langle f, e^{-z\cdot} \rangle. \quad (18.7)$$

Questa notazione è ideale per estendere la definizione di trasformata di Laplace a distribuzioni con supporto a destra (Notazione 11.18.10), nel modo seguente.

L'identità (18.7) non può essere applicata direttamente quando invece che f abbiamo una distribuzione F con supporto a destra, diciamo nella semiretta $P_T := [T, \infty)$, perché la funzione $t \mapsto e^{-zt}$ è C^∞ ma l'intersezione del suo supporto con P_T non è compatta: è tutta la semiretta P_T . Supponiamo allora che esista $c \in \mathbb{R}$ tale che $e^{-c\cdot} F$ sia una distribuzione temperata. Allora possiamo riscrivere (18.7) come

$$\mathcal{L} F(z) = \langle e^{-c\cdot} F, e^{-(z-c)\cdot} \rangle.$$

La funzione $g(t) = e^{-(z-c)t}$ a secondo membro è a decrescenza rapida quando la variabile tende a $+\infty$ ma chiaramente non quando tende a $-\infty$. Però, in base alla definizione di supporto di una distribuzione (Sottosezione 11.18.3 e Definizione 11.11.1), nulla cambia nel risultato dell'espressione al secondo membro se la funzione g viene moltiplicata per una funzione *cut-off* h di classe C^∞ con supporto in una semiretta destra e che vale 1 in un intorno del supporto della distribuzione f . In tal modo la precedente identità diventa

$$\mathcal{L} F(z) = \langle e^{-c\cdot} F, h(\cdot) e^{-(z-c)\cdot} \rangle, \quad (18.8)$$

ed ora il secondo membro è C^∞ a decrescenza rapida, quindi nella classe di Schwartz (Definizione 9.3.1). Poiché abbiamo fatto l'ipotesi che $e^{-c\cdot} F$ sia una distribuzione temperata, l'identità (18.8) ora ha senso, e definisce la trasformata di Laplace di $F \in \mathcal{D}'$:

Definizione 18.5.1. Sia $F \in \mathcal{D}'$ una distribuzione tale che, per qualche $c \in \mathbb{R}$, si abbia $e^{-c\cdot} F \in \mathcal{S}'$. Allora la trasformata di Laplace $\mathcal{L} F$ è definita da (18.8). Spesso scriveremo, nel senso chiarito sopra,

$$\mathcal{L} F(z) = \langle F, e^{-z\cdot} \rangle.$$

L'estremo inferiore di tutte le costanti c con questa proprietà si chiama l'*ascissa di convergenza* α_F ; la trasformata di Laplace $\mathcal{L} F$ è definita nel semipiano $\operatorname{Re} z > \alpha_F$.

Questa Definizione 18.5.1 ha senso perché non dipende né dalla scelta del cut-off h (ovvio per la Definizione 11.11.1 di supporto di una distribuzione), né dalla scelta della costante c purché $c > \alpha_F$. Mostriamo l'ultima asserzione. Scegliamo $c > \alpha_F$ e prendiamo un'altra costante $a > c$. Allora, se $\operatorname{Re} z > a > c$,

$$\begin{aligned}\langle e^{-c} F, h(\cdot) e^{-(z-c)\cdot} \rangle &= \langle e^{(c-a)\cdot} e^{-c} F, e^{(a-c)\cdot} h(\cdot) e^{-(z-c)\cdot} \rangle \\ &= \langle e^{-a} F, h(\cdot) e^{-(z-a)\cdot} \rangle.\end{aligned}$$

Nota 18.5.2. Se f è una funzione a destra a crescita esponenziale con ascissa di convergenza α_f , quando la si considera come una distribuzione la sua ascissa di convergenza α_F della precedente Definizione 18.5.1 non può essere più grande di α_f , ma potrebbe essere più piccola. Per esercizio, si provi che questo è vero per la funzione $f(t) = \cos t e^t$ se $t > 0$ e $f(t) = 0$ altrimenti. \square

Nota 18.5.3. Non per tutte le distribuzioni con supporto a destra si può definire la trasformata di Laplace, perché non tutte hanno la proprietà della Definizione 18.5.1. Ad esempio, è chiaro che questa proprietà non è verificata dalla distribuzione data dalla funzione $F(t) = e^{t^2}$ per $t > 0$ e 0 per $t \leq 0$. \square

Esercizio 18.5.4. Il lettore verifichi che la relazione

$$\mathcal{L} F(z) = \mathfrak{F}[e^{-z} F].$$

stabilita per funzioni nella Nota 18.1.7, continua a valere per distribuzioni con la proprietà della Definizione 18.5.1. In caso di difficoltà, il lettore può trovare la semplice dimostrazione in [38, Chapter 8, Section 3]. \square

Lasciamo al lettore la verifica dell'enunciato seguente. Solo l'ultima parte, la derivazione sotto il segno di integrale, richiede qualche cautela (perché ora non c'è più l'integrale, rimpiazzato dal simbolo di dualità!). Una dimostrazione si trova in [38, Theorem 8-3.2].

Teorema 18.5.5. *Se due distribuzioni hanno trasformata di Laplace che coincide in una retta nel semipiano di olomorfia, o più in generale in un insieme con un punto di accumulazione, allora le due distribuzioni coincidono.*

Le proprietà e gli esempi stabiliti per la trasformata di Laplace di funzioni nelle Sezioni 18.2 e 18.3 rimangono validi per distribuzioni a destra

trasformabili secondo Laplace. In particolare, la trasformata di Laplace di una distribuzione F è olomorfa nel semipiano $\operatorname{Re} z > \alpha_F$, e si ha

$$D \mathcal{L} F(z) = \langle F, \frac{\partial}{\partial z} e^{-z \cdot} \rangle = \langle -tF, e^{-tz} \rangle.$$

Il seguente Esercizio è ovvio, ed in base ad esso la seconda parte del Teorema 18.5.5 implica il successivo Corollario.

Esercizio 18.5.6. $\mathcal{L} \delta_0 \equiv 1$. □

Corollario 18.5.7. *Se denotiamo ancora con λ_y l'operatore di traslazione a sinistra per y , per ogni z si ha*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \lambda_y \delta_0 &= e^{-yz} \\ \mathcal{L} D^k \delta_0 &= z^k \\ \mathcal{L} \lambda_y D^k \delta_0 &= z^k e^{-yz}. \end{aligned}$$

18.5.2 L'immagine di \mathcal{L} sullo spazio delle distribuzioni con supporto a destra

Lemma 18.5.8. *Se F è una funzione olomorfa nel semipiano $\operatorname{Re} z > c$ ed è a crescita polinomiale, nel senso che in questo semipiano $|F(z)| < P(|z|)$ per qualche polinomio P , allora $F = \mathcal{L} G$ per qualche $G \in \mathcal{D}'$ con supporto a destra di 0.*

Dimostrazione. A causa della disuguaglianza dell'enunciato, esiste una costante $C > 0$ ed un intero m tali che

$$|F(z)| < C|z|^m \tag{18.9}$$

per ogni z nel semipiano $D := \operatorname{Re} z \geq a > c$, per ogni $a > c$. Osserviamo che, per ogni funzione olomorfa G nel semipiano D che soddisfa $|G(z)| < C/|z|^2$ per qualche costante $C > 0$, il Teorema di inversione ?? e la Nota 18.1.13 assicurano che esiste la trasformata di Laplace inversa di G , ovvero che $G = \mathcal{L} g$ per qualche funzione g con supporto in $[0, +\infty)$ a crescita esponenziale. Allora scegliamo G tale che si abbia $F(z) = z^{m+2}G(z)$: è chiaro da 18.9) che allora $|G(z)| < C/|z|^2$ e quindi esiste la sua antitrasformata di Laplace g , nulla a sinistra di 0. Per la proprietà di derivazione nel tempo (Teorema 18.5.5) abbiamo $F = \mathcal{L} D^{m+2}g$ (derivata nel senso delle distribuzioni), e la distribuzione $D^{m+2}g$ ha supporto in $[0, +\infty)$. □

Teorema 18.5.9. *Se F è una funzione olomorfa nel semipiano $\operatorname{Re} z > c$ che per ogni z in questo semipiano verifica*

$$|F(z)| < e^{-T \operatorname{Re} z} P(|z|) \quad (18.10)$$

per qualche polinomio P , allora $F = \mathcal{L}G$ per qualche $G \in \mathcal{D}'$ con supporto in $[T, \infty)$.

Viceversa, se $G \in \mathcal{D}'$ ha supporto in $[T, \infty)$ ed è trasformabile secondo Laplace, allora $\mathcal{L}G$ è analitica in un semipiano $\operatorname{Re} z > c$ e verifica la disuguaglianza (18.10).

Dimostrazione. Se rimpiazziamo F con $e^{tz}F$ nel Lemma 18.5.8, segue dalla proprietà di traslazione nel tempo (l'analogo per le distribuzioni della parte (iii) del Teorema 18.2.1) che $\mathcal{L}[\lambda_T G](z) = e^{zT} \mathcal{L}G(z) = e^{zT} F$, e quindi la prima parte dell'enunciato.

Viceversa, supponiamo che esista $\mathcal{L}G$. La condizione perché questo accada (Definizione 18.5.1) è che, per qualche $c \in \mathbb{R}$, $H := e^{-c}G$ sia in \mathcal{S}' . Allora H è un funzionale continuo su \mathcal{S} , e quindi, per il Corollario 9.2.2),

$$|\langle G, e^{-z \cdot} \rangle| < C \sum_{i=1}^k p_{n_i}(e^{-z \cdot})$$

per qualche costante $C > 0$ e qualche famiglia finita di seminorme su \mathcal{S} , nel senso della Definizione 18.5.1. Più precisamente, questo significa che

$$|\mathcal{L}G(z)| = |\langle e^{-ct}G, h(t)e^{(c-z)t} \rangle| < C \sum_{i=1}^k \sup_t (1 + |t|^{k_i}) |D_t^{l_i}(h(t)e^{(c-z)t})|. \quad (18.11)$$

Per prima cosa sbarazziamoci della funzione cut-off h . Per semplicità poniamo $u(t) = e^{(c-z)t}$. La funzione test h e tutte le sue derivate, essendo C^∞ a supporto compatto, hanno massimo. Perciò, applicando il Teorema della derivata del prodotto (Sezione 1.1), per ogni l abbiamo

$$\begin{aligned} |D^l(h)u(t)| &= \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} |D^k h(t)| |D^{l-k} u(t)| \\ &= \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} |D^k h(t)| |z - c|^{l-k} |e^{(c-\operatorname{Re} z)t}| \leq P(|z|) |e^{(c-\operatorname{Re} z)t}| \end{aligned}$$

per qualche polinomio P .

Ora che ci siamo sbarazzati di h , l'estremo superiore rispetto a t nella disuguaglianza (18.11) è il valore al bordo sinistro del supporto di G , ossia per $t = T$, perché l'esponente $c - z$ ha parte reale negativa. Inoltre l'esponenziale è un multiplo della propria derivata, ed in particolare $Du = (c - z)u$. Quindi la disuguaglianza diventa $|G(z)| < |e^{Tz}||P(z)| \leq e^{T \operatorname{Re} z} P(|z|)$, dove P è un polinomio. Questo prova (18.10). \square

18.5.3 Continuità della trasformata di Laplace sulle distribuzioni con supporto a destra

Il seguente risultato illustra la proprietà di continuità della trasformata di Laplace sulle distribuzioni in \mathcal{D}' con supporto a destra, ovvero $\lim_n \mathcal{L} F_n \rightarrow \mathcal{L} F$ se $F_n \rightarrow F$ in \mathcal{D}' . In base al modo in cui è stata introdotta la trasformata di Laplace di distribuzioni nella Definizione 18.5.1, per poter parlare di continuità occorre che, per qualche $c > 0$, $e^{-ct} F_n$ appartengano tutte a \mathcal{S}' e $e^{-ct} F_n \rightarrow e^{-ct} F$ nel senso di \mathcal{S}' .

Teorema 18.5.10. *Siano $F_n \in \mathcal{D}'$ tali che*

- tutte le F_n hanno supporto nella stessa semiretta $[T, +\infty)$;
- per qualche $c > 0$, tutte le distribuzioni $e^{-ct} F_n$ appartengano a \mathcal{S}' e $e^{-ct} F_n \rightarrow e^{-ct} F$ in \mathcal{S}' .

Allora $\mathcal{L} F_n(z)$ converge puntualmente a $\mathcal{L} F(z)$ per ogni z tale che $\operatorname{Re} z > c$.

Dimostrazione. Poiché \mathcal{S}' è completo, anche $e^{-ct} F$ è in \mathcal{S}' . È ovvio dalla Definizione 11.11.1 di supporto che anche F ha supporto in $[T, +\infty)$. Quindi $\mathcal{L} F$ esiste in $\{\operatorname{Re} z > c\}$. Sia h una funzione C^∞ a supporto in una semiretta $[T - \varepsilon, \infty)$ che vale 1 in $[T, \infty)$. Allora $h(\cdot) e^{-(z-c)\cdot} F$ è in \mathcal{S}' e chiaramente si ha

$$\mathcal{L} F_n(z) = \langle e^{-c\cdot} F_n, h(\cdot) e^{-(z-c)\cdot} \rangle \rightarrow \langle e^{-c\cdot} F, h(\cdot) e^{-(z-c)\cdot} \rangle = \mathcal{L} F(z).$$

\square

18.5.4 Trasformata di Laplace di distribuzioni con supporto bilateralmente illimitato

Abbiamo definito la trasformata di Laplace di funzioni con supporto a destra, ossia limitato a sinistra, e di distribuzioni a destra. Ovviamente, una definizione analoga vale per distribuzioni con supporto limitato a destra, se si utilizzano funzioni cut-off con supporto limitato a destra. Questa trasformata di Laplace di distribuzioni a sinistra gode di proprietà analoghe di quella a destra, ad esempio è olomorfa nel semipiano *sinistro* $\{\operatorname{Re} z < \alpha\}$, dove α è l'ascissa di convergenza definita in modo analogo alla Definizione 18.1.1, ed è ivi derivabile sotto il segno di integrale, o meglio di dualità (in analogia al Teorema 18.5.5, è univocamente determinata dai valori su un segmento, sempre in analogia allo stesso teorema, e vale l'analogo della relazione fra le trasformate di Laplace e di Fourier (Nota 18.1.7), dei teoremi di inversione (Teoremi 18.1.11, 18.1.12, 18.5.9) e di continuità, Teorema 18.5.10).

Ora veniamo al caso generale di una distribuzione F con supporto illimitato bilateralmente. Fissiamo $T > 0$ ed una funzione C^∞ g tale che $g \equiv 1$ in $[T, +\infty)$ e $g \equiv 0$ in $(-\infty, T]$, scomponiamo F come $F = F_- + F_+$, dove $F_+ = gF$ e $F_- = (1 - g)F$. Allora F_+ e F_- sono distribuzioni a supporto in semirette. Supponiamo che siano entrambe trasformabili secondo Laplace, e consideriamo le loro ascisse di convergenza α_+ e α_- . Se e solo se $\alpha_+ < \alpha_-$ le trasformate di Laplace $\mathcal{L}F_+$ e $\mathcal{L}F_-$ sono definite in una striscia aperta comune, $D := \{z : \alpha_+ < \operatorname{Re} z < \alpha_-\}$. In tal caso diciamo che F è trasformabile secondo Laplace, con trasformata di Laplace $\mathcal{L}F = \mathcal{L}F_+ + \mathcal{L}F_-$. Si noti che α_+ e α_- non dipendono dalla scelta di T né del cut-off g (per la definizione di supporto di una distribuzione). Esse rimangono invariate anche se si sceglie una qualunque altra decomposizione $F = F_1 + F_2$ in due distribuzioni una a destra e l'altra a sinistra, perché, in base alla loro Definizione 18.1.1, le ascisse di convergenza dipendono solo dall'andamento asintotico di F (all'infinito nel caso di una distribuzione con supporto a destra e a $-\infty$ nel caso di supporto a sinistra). Quindi la trasformata di Laplace di una distribuzione a supporto bilateralmente illimitato converge in una striscia D che dipende solo da F e non dalla decomposizione scelta.

È chiaro che anche in questo contesto più generale continuano a valere l'analogo della relazione fra le trasformate di Laplace e di Fourier (Nota 18.1.7), del Teorema 18.5.5, dei teoremi di inversione (Teoremi 18.1.11, 18.1.12, 18.5.9) e di continuità (Sottosezione 18.5.3). A titolo di esempio, ci limitiamo ad enunciare gli ultimi due teoremi nel presente contesto.

Teorema 18.5.11. *Siano $F_n \in \mathcal{D}'$ con $F_n = F_{n+} + F_{n-}$ tali che*

- *tutte le F_{n+} hanno supporto nella stessa semiretta $[T_+, +\infty)$;*
- *tutte le F_{n-} hanno supporto nella stessa semiretta $(-\infty, T_-]$;*
- *per qualche $c_+ < c_-$, tutte le distribuzioni $e^{-c_-t}F_{n-}$ appartengono a \mathcal{S}' e $e^{-c_-t}F_{n-} \rightarrow e^{-c_-t}F_-$ in \mathcal{S}' , e le distribuzioni $e^{-c_+t}F_{n+}$ appartengono a \mathcal{S}' e $e^{-c_+t}F_{n+} \rightarrow e^{-c_+t}F_+$ in \mathcal{S}' .*

Allora $\mathcal{L} F_n(z)$ converge puntualmente a $\mathcal{L} F(z) = \mathcal{L} F_-(z) + \mathcal{L} F_+(z)$ per ogni z nella striscia $\{c_+ < \operatorname{Re} z < c_-\}$.

La dimostrazione del Teorema di inversione 18.5.9 porta ora al seguente risultato:

Corollario 18.5.12. *Sia F è una funzione olomorfa nella striscia $\{\alpha_+ < \operatorname{Re} z < \alpha_-\}$ decomponibile come $F = F_- + F_+$, dove F_- è olomorfa nel semipiano $\{\operatorname{Re} z < \alpha_-\}$, F_+ è olomorfa nel semipiano $\{\operatorname{Re} z > \alpha_+\}$, tali che per qualche $\alpha_+ < c_+ < c_- < \alpha_-$ valgono le disuguaglianze*

$$|F_+(z)| < e^{-T_+ \operatorname{Re} z} P_+(|z|)$$

per qualche polinomio P_+ , per qualche $T_+ \in \mathbb{R}$ e per ogni z nel semipiano $\{\operatorname{Re} z > c_+\}$ e

$$|F_-(z)| < e^{-T_- \operatorname{Re} z} P_-(|z|)$$

per qualche polinomio P_- , per qualche $T_- \in \mathbb{R}$ e per ogni z nel semipiano $\{\operatorname{Re} z < c_-\}$, allora $F = \mathcal{L} G$ per qualche $G \in \mathcal{D}'$ del tipo $G = G_+ + G_-$, dove $\mathcal{L} F_+ = G_+$ e $\mathcal{L} F_- = G_-$, G_+ è una distribuzione con supporto in $[T_+, \infty)$ e G_- è una distribuzione con supporto in $(-\infty, T_-]$.

Questo risultato dipende però dalla decomposizione scelta. In realtà vale un risultato più forte che non ne dipende [26, Proposition 6]:

Teorema 18.5.13. *Se F è una funzione olomorfa in una striscia $\{\alpha_+ < \operatorname{Re} z < \alpha_-\}$ e per ogni sottostriscia $\{\alpha_+ < c_+ \leq \operatorname{Re} z \leq c_- < \alpha_-\}$ $|F|$ è limitato da un polinomio (che può dipendere dalla sottostriscia), allora F è la trasformata di Laplace bilatera di una distribuzione $G \in \mathcal{D}'$, e viceversa.*

18.6 Trasformata di Laplace di funzioni in \mathcal{D} : teoremi di Paley–Wiener

In questa sezione presentiamo due teoremi di J.A.C. Paley e N. Wiener che provano che, sotto appropriate stime per funzioni olomorfe in un semipiano (rispettivamente, intero), queste funzioni sono trasformate di Laplace di funzioni L^2 su una semiretta o su un compatto, rispettivamente. Questi risultati si possono pensare come estensioni a frequenze complesse del teorema di Plancherel per la trasformata di Fourier (Corollario 8.5.2), che infatti viene utilizzato nella dimostrazione. Presentiamo poi alcune estensioni di questi risultati classici. Tutte le dimostrazioni sono adattate da [23, Capitolo 19] e [25, Chapter 7].

Teorema 18.6.1. (*Teorema di Paley–Wiener per funzioni olomorfe con sezioni limitate in L^2 .*) Sia F olomorfa nel semipiano destro tale che

$$\sup_{a>0} \frac{1}{2\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} |F(z)|^2 dz = C < \infty. \quad (18.12)$$

Allora $F(z) = \mathcal{L} f(-2\pi z)$ per una funzione a destra $f \in L^2(\mathbb{R})$ (ossia una funzione $f \in L^2(0, \infty)$) e $\|f\|_2^2 = C$.

Viceversa, se $f \in L^2(0, \infty)$, allora $F(z) = \mathcal{L} f(-2\pi iz) := \int_0^\infty f(t) e^{-2\pi izt} dt$ è una funzione olomorfa nel semipiano destro che verifica la stima (18.12) con $C = \|f\|_2^2$.

Si noti che l'impiego del simbolo di trasformata di Laplace nell'ultima formula è un abuso di linguaggio, perché la funzione f è sì una funzione a destra localmente L^1 (visto che è in L^2 , e sui compatti L^2 è contenuto in L^1 , ma potrebbe non essere a crescita esponenziale, e neppure una distribuzione a crescita esponenziale).

Vedremo che il fattore 2π nell'enunciato è conseguenza della scelta dell'esponente $-2\pi itx$ nella Definizione 8.2.1 di trasformata di Fourier, e quindi dell'esponente $2\pi itx$ nella antitrasformata: $\hat{h}(x) = \int_{-\infty}^\infty h(t) e^{-2\pi itx} dt$. Senza questo fattore 2π all'esponente, nell'enunciato del teorema ora avremmo più semplicemente $F(z) = \mathcal{L} f(-z)$.

Enucleiamo la parte più laboriosa della dimostrazione come lemma separato.

Lemma 18.6.2. Per $x > 0$ poniamo $J = [1, x]$ (ovviamente, intendendo di scambiare di posto fra loro 1 e x nel caso in cui sia $x < 1$). Sia $D := \{z :$

Re $z \in J$. Supponiamo che valga l'ipotesi del Teorema 18.6.1 e che inoltre si abbia

$$\int_D |F(x + iy)|^2 dx dy < \infty. \quad (18.13)$$

Poniamo $F_x(y) = F(x + iy)$ e $f(t) = e^{2\pi tx} F_x^\vee(t)$ (qui come d'abitudine F_x^\vee denota la antitrasformata di Fourier di F_x). Allora la funzione f non dipende dalla scelta di $x \in \mathbb{R}$, $f(t) = 0$ se $t < 0$ e $f \in L^1$.

Dimostrazione. Per $x > 0$ poniamo $J = [1, x]$ (dove ovviamente si intende che 1 e y si scambiano di posto nel caso in cui sia $x < 1$). Grazie all'ipotesi (18.13) esistono due successioni $\{a_j\}$ e $\{b_j\}$ con $a_j \rightarrow +\infty$ e $b_j \rightarrow -\infty$ tali che $\int_J |F(x + ia_j)|^2 dx$ e $\int_J |F(x + ib_j)|^2 dx$ tendono a 0 quando $j \rightarrow \infty$: infatti, se $\liminf_{y \rightarrow \pm\infty} \int_J |F(x + iy)|^2 dx > 0$, la disuguaglianza (18.13) non sarebbe soddisfatta.

Per ogni $t, y \in \mathbb{R}$ poniamo

$$G(y, t) = \int_J F(x + iy) e^{2\pi(x+iy)t} dx.$$

In base alla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz per $L^2(J)$ (Proposizione 4.5.1), abbiamo

$$|G(y, t)|^2 \leq \int_J |F(x + iy)|^2 dx \int_J e^{4\pi tx} dx < A \int_J |F(x + iy)|^2 dx$$

(la costante A dipende da x e t). Quindi, per ogni t ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} G(a_j, t) = \lim_{j \rightarrow \infty} G(b_j, t) = 0. \quad (18.14)$$

Per $x > 0$ poniamo allora

$$g_j(x, t) = \int_{b_j}^{a_j} F(x + iy) e^{2\pi ity} dy$$

(si osservi che g_j è una approssimazione per troncamento della *antitrasformata* di Fourier di $F_x(y) = F(x + iy)$).

Dal teorema di Cauchy (Corollario 2.4.10) segue che sul bordo C_j del rettangolo $\{x \in J, b_j \leq y \leq a_j\}$ si ha $\lim_j \int_{C_j} F(z) e^{2\pi tz} dz = 0$ per ogni t . D'altra parte, da (18.14) sappiamo che sul bordo superiore di C_j si ha che

$$\int_{C_j \cap \{y=a_j\}} F(z) e^{2\pi zt} dz = \int_J F(x + ia_j) e^{2\pi tx} e^{2\pi ita_j} dx = G(a_j, t)$$

tende a zero quando $j \rightarrow \infty$, e lo stesso capita sul bordo inferiore $\{x \in J, y = b_j\}$. Pertanto per ogni t, y e per ogni $x > 0$ abbiamo $\lim_j (e^{2\pi t x} g_j(y, t) - e^{2\pi t} g_j(1, t)) = 0$.

Ora osserviamo che la funzione $F_x(y) = F(x + iy)$ è in $L^2(\mathbb{R})$ per l'ipotesi del Teorema 18.6.1. Perciò dal teorema di Plancherel (Corollario 8.5.2) segue che $\lim_j \|F_x^\vee - g_j(y, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$. Pertanto, per il Corollario 1.16.29, esiste una sottosuccessione $\{g_{k_j}(y, t)\}$ che converge puntualmente a $F_x^\vee(t)$ per quasi ogni t . Questa sottosuccessione può ora dipendere dalla scelta di x , ma una volta fissato x esiste una stessa sottosuccessione che verifica $g_{k_j}(y, t) \rightarrow F_x^\vee(t)$ e $g_{k_j}(1, t) \rightarrow F_1^\vee(t)$ per quasi ogni t . Ne segue che

$$f(t) := e^{2\pi t x} F_x^\vee(t) = e^{2\pi t} F_1^\vee(t) \quad (18.15)$$

per quasi ogni t e per ogni $x > 0$: ossia, f non dipende dalla scelta di $x > 0$. Infine, dall'ipotesi di limitatezza L^2 del Teorema 18.6.1, da (18.15) e di nuovo dal teorema di Plancherel,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t x} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F_x^\vee(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_x(y)|^2 dy < C, \quad (18.16)$$

e da qui, facendo tendere x a $+\infty$, segue che $f(t) = 0$ per $t < 0$.

Quindi la disuguaglianza (18.16) asserisce che le funzioni $h(t) = e^{-4\pi t x} |f(t)|^2$ ($t \geq 0$) hanno norma equilimitata in L^2 per $x > 0$: $\int_0^\infty e^{-4\pi t x} |f(t)|^2 dt < C$. Se ora facciamo tendere x a zero e rammentiamo che ormai $t \geq 0$, possiamo applicare il Teorema di Convergenza Monotona 1.9.53 per portare il limite rispetto a x sotto il segno di integrale. Ne segue che $\int_0^\infty |f(t)|^2 dt < C$. Poiché da (18.15) abbiamo $F_x^\vee(t) = f(t) e^{-2\pi t x}$, dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz per $L^2(\mathbb{R})$ (Proposizione 4.5.1) segue che, per ogni $x > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_x^\vee(t)| dt \leq \left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty e^{-4\pi t x} dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Quindi F_x^\vee è una funzione L^1 per ogni $x > 0$. □

Dimostrazione del Teorema 18.6.1. Per $x > 0$ scriviamo $J = [1, x]$ nel senso chiarito nella dimostrazione del Lemma 18.6.2. Sia $m(J) = |x - 1|$ la lunghezza dell'intervallo J . Poiché l'integrando è non negativo, dal Teorema di Fubini 1.20.4 (i) e dall'ipotesi di limitatezza L^2 fatta su F segue

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_J |F(x + iy)|^2 dx dy \leq C m(J),$$

ossia è soddisfatta l'ipotesi del Lemma 18.6.2: $\int_D |F|^2 dx dy < \infty$. Pertanto, essendo $x > 0$, in base a tale Lemma sappiamo che la funzione $f(t) = e^{2\pi tx} F_x^\vee(t)$ non dipende da x , appartiene a L^1 ed ha supporto in $\{t \geq 0\}$. In base al Teorema di inversione di Fourier 8.4.2 possiamo scrivere

$$F(z) = F_x(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_x^\vee(t) e^{2\pi ity} dt = \int_0^{\infty} F_x^\vee(t) e^{2\pi ity} dt.$$

Grazie a (18.15) questa identità diventa

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-2\pi tx} e^{-2\pi ity} dt = \mathcal{L} f(-2\pi z).$$

La seconda parte dell'enunciato è elementare. Dimostriamo per prima cosa che la "trasformata di Laplace" di una funzione $f \in L^2(0, \infty)$ esiste ed è olomorfa nel semipiano destro (come avevamo preannunciato nella Nota 18.1.9). Osserviamo anzitutto che, in base alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (Proposizione 4.5.1) in L^2 , la "trasformata di Laplace" $L(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-tz} dt$ esiste nel semipiano $H := \operatorname{Re} z > 0$, perché $|\int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt|^2 \leq \int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt \int_0^{\infty} e^{-2t \operatorname{Re} z} dt$. Inoltre, z e w appartengono al semipiano destro H , sia $\delta > 0$ tale che $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Re} w$ sono maggiori di δ . In tal caso, per ogni $t > 0$ la funzione $A(z, w) := |e^{-tz} - e^{-tw}|^2$ verifica

$$\begin{aligned} A(z, w) &= e^{-tz} e^{-t\bar{z}} + e^{-tw} e^{-t\bar{w}} - e^{-tz} e^{-t\bar{w}} + e^{-tw} e^{-t\bar{z}} \\ &= e^{-2t \operatorname{Re} z} + e^{-2t \operatorname{Re} w} - e^{-t(z+\bar{w})} - e^{-t(\bar{z}+w)} \leq 4e^{-2t\delta}, \end{aligned}$$

e quindi, se $\operatorname{Re} z_n > \delta$ e $z_n \rightarrow z$, segue dal Teorema di Convergenza Dominata (Teorema 1.9.54) che

$$\lim_n A(z_n, z) = \lim_n \int_0^{\infty} |e^{-tz_n} - e^{-tz}|^2 dt = 0.$$

Quindi, di nuovo per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$|L(z_n) - L(z)|^2 = \left| \int_0^{\infty} f(t) (e^{-tz_n} - e^{-tz}) dt \right|^2 \leq \|f\|_2^2 A(z_n, z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pertanto L è continua in H . Integriamo i valori di L lungo una curva chiusa γ di classe C^1 contenuta in H . Abbiamo dimostrato che, nell'integrale doppio

$$\int_{\gamma} L(z) dz = \int_{\gamma} \int_0^{\infty} f(t) e^{-tz} dt dz$$

l'integrando è continuo: pertanto, per il Teorema di Fubini (parte (ii) del Teorema 1.20.4), possiamo scambiare l'ordine di integrazione. Poiché e^{tz} è una funzione intera per ogni t , in base al Teorema di Cauchy (Corollario 2.4.10) abbiamo $\int_{\gamma} e^{-tz} dz = 0$ e quindi

$$\int_{\gamma} L(z) dz = \int_0^{\infty} f(t) \int_{\gamma} e^{-tz} dz dt = 0. \quad (18.17)$$

Allora L è olomorfa nel semipiano H per il Teorema di Morera (Corollario 2.5.6).

Infine, per provare la disuguaglianza (18.12), basta porre $F(z) = \mathcal{L} f(-2\pi z) := \int_0^{\infty} f(t) e^{2\pi tz} dt$ ed osservare che

$$F(x + iy) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-2\pi xt} e^{-2i\pi yt} dt.$$

Infatti a questo punto, in base al Teorema di Plancherel (Corollario 8.5.2),

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x + iy)|^2 dy = \int_0^{\infty} |f(t)|^2 e^{-2tx} dt \leq \int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = C^2.$$

□

Teorema 18.6.3. (*Teorema di Paley–Wiener per funzioni intere a crescita esponenziale con una sezione in L^2 .*) Sia F una funzione intera a crescita esponenziale, ossia tale che, per qualche $A, C > 0$,

$$|F(z)| < C e^{A|z|}. \quad (18.18)$$

Se la restrizione di F all'asse immaginario, $F|_{i\mathbb{R}}$ appartiene a L^2 , allora

$$F(z) = \mathcal{L} f(2\pi z) \quad (18.19)$$

per una funzione $f \in L^2[-A/2\pi, A/2\pi]$.

Viceversa, se $f \in L^2[-A, A]$, allora la sua trasformata di Laplace $\mathcal{L} f(2\pi z)$ è intera a crescita esponenziale, e la sua restrizione all'asse immaginario è in $L^2(\mathbb{R})$.

Di nuovo, enucleiamo la parte più laboriosa della dimostrazione come lemma separato.

Lemma 18.6.4. *Sia F come nel Teorema 18.6.3, e per $\varepsilon > 0$ poniamo*

$$F_\varepsilon(y) = F(iy)e^{-\varepsilon|y|}.$$

Allora la trasformata di Fourier \widehat{F}_ε verifica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \widehat{F}_\varepsilon(t) = 0$$

per ogni $|t| \geq A/2\pi$.

Dimostrazione. Poniamo

$$\begin{aligned} \phi_+(w) &= \int_0^\infty F(iy) e^{-iwy} dy \\ \phi_-(w) &= \int_0^{-\infty} F(iy) e^{-iwy} dy \end{aligned}$$

rispettivamente nei semipiani $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ e $\{\operatorname{Im} w < 0\}$. Osserviamo che gli integrali che definiscono le funzioni ϕ_+ e ϕ_- sono convergenti, perché per l'ipotesi del teorema la funzione $y \mapsto F(iy)$ è in L^2 , e $\phi_\pm = (F(i\cdot), e^{-iw\cdot})_{L^2}$, e la funzione $y \mapsto e^{-iwy}$ è in $L^2(\mathbb{R}^+)$ se $\operatorname{Im} w > 0$ e in $L^2(\mathbb{R}^-)$ se $\operatorname{Im} w < 0$. Dallo stesso argomento basato sui teoremi di Fubini, Cauchy e Morera che abbiamo usato prima della uguaglianza (18.17) ora segue di nuovo che le funzioni ϕ_+ e ϕ_- sono olomorfe nei rispettivi semipiani di definizione, $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ e $\{\operatorname{Im} w < 0\}$. (Si osservi che dalla disuguaglianza (18.18) seguirebbe invece una condizione di convergenza più debole, perché in base ad essa gli integrandi si maggiorerebbero con $Ce^{Ay}e^{-y|\operatorname{Im} w|}$ e gli integrali risulterebbero convergenti rispettivamente in $\{\operatorname{Im} w > A\}$ e $\{\operatorname{Im} w < -A\}$). È immediato che

$$\widehat{F}_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^\infty F_\varepsilon(y) e^{-ity} dy = \int_{-\infty}^\infty F(iy) e^{-\varepsilon|y|} e^{-ity} dy = \phi_+(t+i\varepsilon) - \phi_-(t-i\varepsilon). \quad (18.20)$$

Per dimostrare l'enunciato dobbiamo mostrare che, se $|t| > A$, l'ultimo membro tende a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Per questo, mostriamo per prima cosa che le funzioni ϕ_\pm sono le restrizioni ai rispettivi semipiani di definizione della stessa funzione olomorfa. A questo scopo basta costruire una famiglia di funzioni ϕ_α , ciascuna olomorfa nel semipiano $\Sigma_\alpha = \{\operatorname{Re}(we^{i\alpha}) > A\}$, tali che $\phi_{\pm\pi/2} \equiv \phi_\pm$, e con la proprietà che le funzioni ϕ_α e ϕ_β coincidono nell'intersezione dei loro due rispettivi semipiani (questo è un esempio di *prolungamento*

analitico: si veda [23, Ch. 16]). La costruzione di queste funzioni si fa nel modo seguente.

Consideriamo le semirette $\sigma_\alpha(s) = se^{i\alpha}$, $s \geq 0$, e definiamo una famiglia di funzioni

$$\phi_\alpha(z) = \int_{\sigma_\alpha} F(z) e^{-wz} dz = e^{i\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} F(se^{i\alpha}) e^{-wse^{i\alpha}} ds. \quad (18.21)$$

Come già notato più sopra per le funzioni ϕ_\pm , la stima (18.18) implica che l'integrando di ϕ_α in (18.21) è maggiorato da $Ce^{-(\operatorname{Re}(we^{i\alpha})-A)s}$, e quindi, ancora una volta, lo stesso ragionamento basato sui teoremi di Fubini, Cauchy e Morera che abbiamo usato prima della uguaglianza (18.17) implica che ϕ_α è olomorfa nel semipiano $\Sigma_\alpha = \{w : \operatorname{Re}(we^{i\alpha}) > A\}$. Al variare di α questi semipiani si intersecano: ora asseriamo la seguente *Asserzione*: in $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ le funzioni ϕ_α e ϕ_β coincidono. Una volta provata questa asserzione, tutte queste funzioni sono restrizioni ai corrispondenti semipiani della stessa funzione olomorfa, in base al Corollario 2.6.2. Ora osserviamo che le funzioni ϕ_+ e ϕ_- sono definite rispettivamente nei semipiani superiore ed inferiore, ed in particolare la prima è definita sulla retta $\{z = t+i\varepsilon, t \in \mathbb{R}\}$ e la seconda sulla retta $\{z = t-i\varepsilon, t \in \mathbb{R}\}$. Invece la funzione ϕ_0 è definita in un traslato del semipiano destro, e precisamente in $\Sigma_0 = \{z = (t, y) : t > A\}$, mentre ϕ_π è definita nel semipiano sinistro traslato di $-A$, ossia $\Sigma_\pi = \{z = (t, y) : t < -A\}$. Allora, in (18.20) possiamo rimpiazzare per $t > A$ la funzione ϕ_+ con ϕ_0 , e per $t < -A$ rimpiazziamo la funzione ϕ_- con ϕ_π . È evidente che, per $t > A$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi_0(t+i\varepsilon) - \phi_0(t-i\varepsilon) = 0$$

semplicemente perché la funzione olomorfa ϕ_0 è continua in questo semipiano. Analogo risultato vale per la funzione ϕ_π nel semipiano $\{(t, y) : t < -A\}$, e quindi anche in tal caso il limite è zero. Ne segue che il secondo membro di (18.20) tende a zero con ε , ossia l'enunciato.

Resta dunque da provare l'asserzione, e lo facciamo ora. Il vettore normale del semipiano Σ_α è il vettore nel piano complesso dato da $e^{i\alpha}$: perché i semipiani Σ_α e Σ_β si intersechino, bisogna e basta che gli angoli α e β non siano opposti, ossia, senza perdita di generalità, $0 < \beta - \alpha < \pi$. Sia θ l'angolo dato dalla bisettrice dei due vettori normali, ovvero

$$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Consideriamo la semiretta uscente dall'origine in direzione θ , ossia $\sigma_\theta = \{w = |w|e^{i\theta}\}$. È chiaro che i punti alla stessa distanza dall'origine nelle semirette normali σ_α e σ_β hanno la stessa proiezione sulla loro bisettrice σ_θ , o equivalentemente, ruotando il piano di $-\theta$, in maniera che le semirette σ_α e σ_β abbiano per bisettrice il semiasse x positivo, per ogni w sul semiasse opposto ai semipiani,

$$\sigma_{-\theta} = \{w = |w|e^{-i\theta}\}, \quad (18.22)$$

si ha

$$\operatorname{Re}(we^{i\alpha}) = |w| \operatorname{Re} e^{i(\alpha-\theta)} = |w| \cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = \operatorname{Re}(we^{i\beta})$$

Questo significa che, per tutti i w sul semiasse in (18.22), $w \in \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$ se (e solo se)

$$|w| > A / \cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right). \quad (18.23)$$

In altre parole, il secondo membro in questa disuguaglianza è la distanza dall'origine del punto di intersezione delle rette di bordo dei due semipiani. Ora consideriamo, per $r > 0$ grande, il settore circolare con lati $B_\alpha := \{se^{i\alpha} : 0 \leq s \leq r\}$, $B_\beta := \{se^{i\beta} : 0 \leq s \leq r\}$, e l'arco di cerchio $C := \{re^{it} : \alpha < t < \beta\}$; chiamiamo T la curva di bordo di questo settore circolare. Fissiamo l'attenzione ai w nel semiasse introdotto in (18.22) ed appartenenti all'intersezione $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$, ossia che verificano la disuguaglianza (18.23)). Osserviamo che, se $z \in C$, allora

$$\operatorname{Re}(-wz) = -|w|r \cos(t-\theta) \leq -|w|r \cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \quad (18.24)$$

(dopotutto, $(\beta-\alpha)/2$ è l'ampiezza angolare del settore circolare, e θ la direzione della sua bisettrice!).

Ora riportiamo l'attenzione ad un integrale del tipo dell'enunciato, ma sul bordo T del settore circolare: esplicitamente, $\int_T F(z) e^{-wz} dz$. L'integrando è olomorfo perché w appartiene ai semipiani di olomorfia, e quindi il Teorema di Cauchy assicura che l'integrale valga zero. Consideriamo allora l'integrale sulla porzione di T data dall'arco di cerchio C , ossia $\int_C F(z) e^{-wz} dz$. In base alle disuguaglianze (18.24) e (18.18), l'integrando è maggiorato da

$$C e^{(A-|w| \cos(\frac{\beta-\alpha}{2}))r}.$$

Pertanto, a causa di (18.23), l'esponente è negativo e l'integrale tende a zero quando $r \rightarrow \infty$. Pertanto

$$\phi_\alpha(w) = \int_{B_\alpha} F(z) e^{-wz} dz = \int_{B_\beta} F(z) e^{-wz} dz = \phi_\beta(w)$$

per ogni w nel semiasse centrale dei due semipiani Σ_α e Σ_β introdotto in (18.22) e che appartiene ai due semipiani (ossia che verifica (18.23)). Allora, in base al Corollario 2.6.2, le due funzioni olomorfe ϕ_α e ϕ_β coincidono nell'intersezione dei rispettivi semipiani di definizione: questo prova l'asserzione, e quindi il Lemma. \square

Dimostrazione del Teorema 18.6.3. Consideriamo la restrizione di F all'asse immaginario, ed indichiamola con H : ossia, $H(y) = F(iy)$. Osserviamo che $H \in L^2(\mathbb{R})$ per l'ipotesi del teorema, e $(F_\varepsilon - H)(y) = H(y)(e^{-\varepsilon|y|} - 1)$: quindi $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|F_\varepsilon - H\|_2 = 0$ per il Teorema di Convergenza Dominata (Teorema 1.9.54). Per il Teorema di Plancherel (Corollario 8.5.2), $\widehat{F_\varepsilon}$ converge alla funzione $f := \widehat{H}$ nella norma di L^2 , e quindi puntualmente quasi ovunque. Ora, per il Lemma 18.6.4, la funzione f ha supporto in $[-A/2\pi, A/2\pi]$. Quindi, dalla formula di inversione di Fourier (Teorema 8.4.2),

$$F(iy) = H(y) = \int_{-\frac{A}{2\pi}}^{\frac{A}{2\pi}} f(t) e^{2\pi i y t} dt$$

per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$. Questo dimostra l'identità 18.19 per $z = iy$ puramente immaginario: ma poiché entrambi i membri sono funzioni intere, l'identità vale per ogni z complesso (di nuovo per il Corollario 2.6.2).

Per dimostrare il viceversa, si noti che la funzione f , essendo a supporto compatto, è a crescita esponenziale con esponente di crescita $-\infty$ (Definizione 18.1.4): pertanto la sua trasformata di Laplace è una funzione intera in base al Corollario 18.1.6. Inoltre,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}ap f(2\pi z)| &= \left| \int_{A/2\pi}^{A/2\pi} f(t) e^{-2\pi t z} dt \right| \leq \int_{A/2\pi}^{A/2\pi} |f(t)| e^{-2\pi t \operatorname{Re} z} dt \\ &\leq C e^{A|\operatorname{Re} z|} \leq C e^{A|z|} \end{aligned}$$

dove $C = \int_{A/2\pi}^{A/2\pi} |f(t)| dt < \infty$ perché $L^2[-A/2\pi, A/2\pi] \subset L^2[-A/2\pi, A/2\pi]$. Infine, la restrizione $\int_{A/2\pi}^{A/2\pi} f(t) e^{-2\pi i t \operatorname{Im} z} dt$ di $\mathcal{L} f(2\pi z)$ all'asse immaginario è in L^2 perché lo è f , in base al Teorema di Plancherel (Corollario 8.5.2). \square

Capitolo 19

La trasformata zeta

Lo sviluppo di questo capitolo si ispira a [10], [33].

Abbiamo visto nei Corollari 13.1.5 e 12.2.2 che la trasformata di Fourier di una successione discreta equispaziata di impulsi (ossia di delta di Dirac) è una funzione periodica, e viceversa. Pertanto, la trasformata di Fourier di un segnale che consiste in una successione equispaziata di impulsi è una serie di Fourier.

Rendiamo più precisa questa asserzione. Consideriamo un segnale puramente impulsivo a impulsi equispaziati, ossia una distribuzione del tipo $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_n$. In base alla parte (i) dell'Esercizio 11.13.2, la sua trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) è la serie trigonometrica

$$\varphi(\omega) := \widehat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-2\pi i n \omega} \quad (19.1)$$

(e quindi, per la invertibilità della trasformata di Fourier sullo spazio \mathcal{S}' (Proposizione 11.12.4), $\widehat{\widehat{\varphi}} = f$ nel senso delle distribuzioni, ed i coefficienti di Fourier $\{c_n\}$ della funzione periodica φ coincidono con $\widehat{f}(n)$, a conferma della Proposizione 10.2.3). In questo senso la trasformata di Fourier del segnale impulsivo f è una serie di Fourier (con coefficienti di Fourier dati dai valori del segnale).

Nel Capitolo 18 abbiamo introdotto e studiato una complessificazione della trasformata di Fourier, nel quale viene complessificata la frequenza ω , originariamente reale. Ora, nel caso di segnali impulsivi, complessifichiamo la serie di Fourier all'ultimo membro di (19.1) sostituendo al numero complesso di modulo 1 $e^{2\pi i \omega}$ un numero complesso generico z .

19.1 Trasformata zeta e sue proprietà

Più precisamente, l'estensione complessa appena annunciata è data dalla seguente definizione.

Definizione 19.1.1. (Trasformata zeta.) Per ogni successione $\{c_n, n \in \mathbb{N}\}$, poniamo

$$r = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Se $r < \infty$, diciamo che $\{c_n\}$ è zeta-ammissibile a destra ed in tal caso definiamo la *trasformata zeta (unilatera)* della successione $\{c_n\}$ come la serie di Laurent

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$$

che converge ad una funzione olomorfa nella corona circolare $\{|z| > r\}$, in base ad un ovvio adattamento (che rimpiazza z con $1/z$) dei Teoremi 1.4.2 e 1.4.9 sul dominio di convergenza e la derivabilità termine a termine delle serie di potenze.

Più in generale, per ogni successione bilatera $\{c_n, n \in \mathbb{Z}\}$, poniamo

$$R = \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow -\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

Se $r < R$, diciamo che la successione $\{c_n\}$ è zeta-ammissibile ed in tal caso definiamo la *trasformata zeta bilatera* della successione $\{c_n\}$ come la serie di Laurent $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$. Osserviamo che, per una applicazione immediata dei teoremi citati prima, questa serie converge ad una funzione olomorfa nella corona $\{r < |z| < R\}$, che chiamiamo la *corona di convergenza*. Il fatto che le serie di Laurent convergano in corone circolari era stato già mostrato nel Corollario 2.9.2.

Notazione 19.1.2. Per evitare confusione nei casi in cui si trattano successioni di segnali impulsivi, ossia successione di successioni, in questo capitolo scriviamo i segnali impulsivi come funzioni $\mathbf{c} : n \mapsto c_n$. Pertanto, nei casi in cui ci sia ambiguità, scriviamo $\mathbf{c}(n)$ invece che c_n . Ad esempio, la successione che vale 1 all'indice n e zero altrove, ovvero l'istogramma della delta di Dirac δ_n ((nel senso della Notazione 13.1.3)), viene indicato con δ_n : quindi $\delta_n(m)$ è il consueto simbolo di Kronecker $\delta_{nm} = 1$ se $n = m$ e $\delta_{nm} = 0$ altrimenti.

La trasformata zeta di \mathbf{c} viene indicata con $\mathcal{Z}(\mathbf{c})$. Laddove si voglia distinguere fra la trasformata zeta bilatera ed il suo caso particolare unilatero, la trasformata unilatera viene indicata con \mathcal{Z}^+ . Talvolta i segnali $\{a_n\}$ nulli per $n < 0$ si chiamano *causali* (in analogia alla Definizione 17.1.7 di filtro causale) e \mathcal{Z}^+ si chiama la trasformata zeta causale. Più in generale, chiamiamo segnali causali i segnali che sono non nulli solo per indici maggiori o uguali ad un primo indice m_0 , anche se $m_0 < 0$ (in tal caso, la trasformata zeta differisce solo per un addendo polinomiale di grado $-m_0$ da una trasformata causale nel senso precedente più restrittivo).

Analogamente, a volte usiamo notazioni differenti per distinguere fra una successione bilatera ed il suo troncamento unilatero. Ad esempio, denotiamo con $\mathbf{1}$ il segnale che vale costantemente 1 per $n \in \mathbb{Z}$, e con $\mathbf{1}_+$ il segnale che vale sempre 1 per $n \in \mathbb{N}$. A volte, quest'ultimo segnale si intende esteso a $n \in \mathbb{Z}$ nella maniera naturale, ossia ponendolo uguale a 0 per gli indici n negativi. Data una successione $\mathbf{a} = \{a_n\}$, indicheremo con $\mathbf{a}\mathbf{1}_+$, o talora anche con $a_n\mathbf{1}_+$, il suo troncamento agli indici positivi $\{a_n\}_{n \geq 0}$.

Nota 19.1.3. Si osservi che una trasformata zeta è la trasformata zeta di un segnale causale se e solo se essa converge in una corona illimitata $\{|z| > R\}$. \square

Nota 19.1.4. La seguente relazione fra le trasformate zeta bilatero ed unilatero è immediata: $\mathcal{Z}^+(\mathbf{c}) = \mathcal{Z}(\mathbf{c}^+)$. \square

Esempio 19.1.5. (Esempi elementari di trasformata zeta.) Con la terminologia della Notazione 19.1.2,

(i)

$$\mathcal{Z}(\delta_n) = z^{-n}$$

nella corona consistente del piano complesso bucato $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (e se $n < 0$ in tutto \mathbb{C});

(ii)

$$\mathcal{Z}(\mathbf{1}_+) = \mathcal{Z}^+(\mathbf{1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}$$

nella corona $\{|1/z| < 1\}$, ossia $\{|z| > 1\}$.

(iii) Il segnale bilatero $\mathbf{1}$ non è zeta-ammissibile, sebbene, come visto al punto (ii), sia zeta-ammissibile a destra.

□

Quasi tutte le proprietà elencate nel seguente teorema discendono da applicazioni immediate della Definizione 19.1.1 di trasformata zeta, e vengono lasciate per esercizio al lettore (la proprietà di derivazione (v) richiede il Teorema 1.4.9 di derivazione per serie, nonché l'ovvia osservazione che la funzione $z \mapsto 1/z$ è derivabile per ogni $z \neq 0$).

Teorema 19.1.6. (Proprietà elementari della trasformata zeta.) *Le trasformate zeta \mathcal{Z} e \mathcal{Z}^+ sono lineari sullo spazio delle successioni rispettivamente zeta-ammissibili e zeta-ammissibili a destra. La trasformata zeta bilatera verifica le seguenti proprietà:*

- (i) *Traslazione: per ogni segnale z -ammissibile \mathbf{c} ed ogni $k \in \mathbb{Z}$, il traslato $\mathbf{c}^{(k)} := \lambda_k \mathbf{c}$ (ossia, $\mathbf{c}^{(k)}(n) = c_{n-k}$) è zeta-ammissibile con la stessa corona di convergenza, ed in tale corona si ha*

$$\mathcal{Z}(\mathbf{c}^{(k)})(z) = z^{-k} \mathcal{Z}(\mathbf{c})(z).$$

Nel caso della trasformata zeta unilatera \mathcal{Z}^+ invece, per ogni segnale z -ammissibile a destra $\mathbf{c} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$, il traslato $\mathbf{c}^{(-k)} := \lambda_{-k} \mathbf{c}$ (ossia, $\mathbf{c}^{(-k)}(n) = c_{n+k}$) è zeta-ammissibile a destra con la stessa corona di convergenza, e per ogni $k > 0$ in tale corona si ha:

(i.a)

$$\mathcal{Z}^+(\mathbf{c}^{(-k)})(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+k} z^{-n} = z^k \mathcal{Z}(\mathbf{c})(z) - \sum_{m=0}^{k-1} c_m z^{k-m};$$

(i.b)

$$\mathcal{Z}^+(\mathbf{c}^{(k)})(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-k} z^{-n} = z^{-k} \mathcal{Z}(\mathbf{c})(z) + \sum_{m=1}^k c_{-m} z^{m-k};$$

- (i.c) *invece i segnali z -ammissibili a destra causali \mathbf{c}^+ , ossia i segnali $\mathbf{c} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ si possono identificare con segnali su \mathbb{Z} con valori nulli per gli indici negativi, ed allora l'identità (a) rimane valida, mentre nell'identità (b) si ha*

$$\mathcal{Z}^+(\mathbf{c}^{(k)})(z) := \sum_{n=k}^{+\infty} c_{n-k} z^{-n} = z^{-k} \mathcal{Z}(\mathbf{c})(z)$$

perché i termini aggiuntivi in (b) sono nulli.

- (ii) Dilatazione: per ogni segnale zeta-ammissibile \mathbf{c} con corona di convergenza $\{r < |z| < R\}$ ed ogni $a \neq 0$, il dilatato $a^n \mathbf{c}^{[a]} := \{a^n c_n\}$ è zeta-ammissibile, la sua corona di convergenza è la corona dilatata $\{r < |z/a| < R\}$ ed ivi la sua trasformata zeta vale

$$\mathcal{Z}(\mathbf{c}^{[a]})(z) = \mathcal{Z}(\mathbf{c})(z/a).$$

- (iii) Parità: per ogni segnale z-ammissibile \mathbf{c} con corona di convergenza $\{r < |z| < R\}$, il segnale speculare \mathbf{c}^\dagger dato da $c_n^\dagger := c_{-n}$ è zeta-ammissibile con corona di convergenza $\{1/R < |z| < 1/r\}$, ed ivi la sua trasformata zeta vale

$$\mathcal{Z}(\mathbf{c}^-)(z) = \mathcal{Z}(\mathbf{c})(1/z).$$

- (iv) Coniugazione: per ogni segnale z-ammissibile \mathbf{c} con corona di convergenza $\{r < |z| < R\}$, il segnale complesso coniugato $\bar{\mathbf{c}}$ definito da $\bar{\mathbf{c}}(n) = \overline{\mathbf{c}(n)}$ è zeta-ammissibile con la stessa corona di convergenza, ed in tale corona si ha

$$\mathcal{Z}(\bar{\mathbf{c}})(z) = \overline{\mathcal{Z}(\mathbf{c})(\bar{z})}.$$

- (v) Derivazione nella variabile zeta: per ogni segnale z-ammissibile \mathbf{c} con corona di convergenza $\{r < |z| < R\}$, il segnale $\mathbf{d}(n) = n \mathbf{c}(n)$ è zeta-ammissibile con la stessa corona di convergenza, ed in tale corona la sua trasformata zeta vale

$$\mathcal{Z}(\mathbf{d})(z) = -z D_z \mathcal{Z}(\mathbf{c})(z).$$

- (vi) Parte reale ed immaginaria: per ogni segnale zeta-ammissibile \mathbf{c} con corona di convergenza $\{r < |z| < R\}$, i segnali $\text{Re } \mathbf{c}$ e $\text{Im } \mathbf{c}$ sono zeta-ammissibili, le loro trasformate zeta convergono nella stessa corona di convergenza, e si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\text{Re } \mathbf{c}) &= \frac{\mathcal{Z}(\mathbf{c})(z) + \overline{\mathcal{Z}(\mathbf{c})(\bar{z})}}{2} \\ \mathcal{Z}(\text{Im } \mathbf{c}) &= \frac{\mathcal{Z}(\mathbf{c})(z) - \overline{\mathcal{Z}(\mathbf{c})(\bar{z})}}{2i}. \end{aligned}$$

- (vii) Valore finale: sia $f = \mathcal{Z}(\mathbf{c})$ una trasformata zeta convergente nella corona $C = \{z : r < |z| < R\}$. Se $r < 1$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$.

(viii) Valore iniziale: sia f la trasformata zeta di un segnale causale \mathbf{c} (non solo strettamente causale: un segnale con solo un numero finito di termini non nulli con indici negativi), quindi convergente nella corona C data dall'esterno di un disco, $C = \{|z| > r\}$. Allora esiste un solo $m \in \mathbb{Z}$ tale che $a := \lim_{z \rightarrow \infty} z^m f(z)$ esiste finito e non nullo: questo m è il primo (ossia più piccolo) indice tale che $c_n \neq 0$, e si ha $c_m = a$.

Tutte le precedenti proprietà valgono anche per la trasformata zeta unilatera \mathcal{Z}^+ (con le modifiche (i.a), (i.b) e (i.c) sopra elencate per la proprietà di traslazione). Si osservi però che, per la traslazione, le formule nel caso unilatero (e nel caso unilatero e causale) coinvolgono un certo numero di dati iniziali.

Dimostrazione. Le uniche due proprietà non ovvie sono la (vii) (valore finale) e la (viii) (valore iniziale). Per dimostrare la (vii), basta rammentare che $r = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{1/n}$. Per ipotesi, $r < 1$. Scegliamo $\varepsilon > 0$ così piccolo che si abbia $r + \varepsilon < 1$. Per le proprietà del massimo limite (Sezione 1.1) abbiamo allora $|c_n|^{1/n} < r + \varepsilon$ definitivamente, ossia $|c_n| < (r + \varepsilon)^n \rightarrow 0$. Per la (viii), basta osservare che f è una serie di Laurent $f(z) = \sum_{n \geq N} c_n z^{-n}$ convergente in C : pertanto $\lim_{z \rightarrow \infty} z^N f(z) = c_N$, mentre $\lim_{z \rightarrow \infty} z^k f(z) = 0$ per ogni $k < N$. \square

Definizione 19.1.7. Data una successione $\mathbf{c} = \{c_n\}$ (qui $n \in \mathbb{Z}$ oppure anche solo $n \in \mathbb{N}$), introduciamo l'operatore di differenza (più precisamente l'operatore di differenza in avanti, l'analogo discreto della derivata destra):

$$D^{(1)}(\mathbf{c}) = \{c_{n+1} - c_n\}$$

Iterando, introduciamo per ricorrenza l'operatore di differenza di ordine n :

$$D^{(n)}\mathbf{c} = \{D^{(n-1)}D^{(1)}(\mathbf{c}) = D^{(n-1)}\{c_{n+1}\} - D^{(n-1)}\{c_n\} = D^{(n-1)}\lambda_{-1}\mathbf{c} - D^{(n-1)}\mathbf{c}\}.$$

Ad esempio, $D^{(2)}\{c_n\} = \{(c_{n+2} - c_{n+1}) - (c_{n+1} - c_n)\} = \{c_{n+2} - 2c_{n+1} - c_n\}$ è la discretizzazione della derivata seconda.

L'azione della trasformata zeta sull'operatore di differenza del primo ordine segue immediatamente dalla proprietà di traslazione (parte (i) del precedente Teorema 19.1.6). Il caso delle differenze di ordine n si ricava da questo per induzione. Formule simili, ma dipendenti dai dati iniziali, valgono per la trasformata unilatera ed i segnali causali (grazie alla Nota

19.1.4, il fatto di aver limitato l'attenzione a differenze in avanti implica $\mathcal{Z}^+ D^{(1)}\mathbf{c} = \mathcal{Z} D^{(1)}\mathbf{c}_+$, dove, come sempre, \mathbf{c}_+ è il troncamento di \mathbf{c} agli indici non negativi). I dettagli, enunciati nel prossimo corollario, sono lasciati al lettore per esercizio.

Corollario 19.1.8.

$$\mathcal{Z}(D^{(1)}\mathbf{c})(z) = (z-1) \mathcal{Z}(\mathbf{c})(z)$$

$$\mathcal{Z}(D^{(n)}\mathbf{c})(z) = (z-1)^n \mathcal{Z}(\mathbf{c})(z)$$

$$\mathcal{Z}^+(D^{(1)}\mathbf{c})(z) = \mathcal{Z}(D^{(1)}\mathbf{c}_+) = (z-1) \mathcal{Z}(\mathbf{c})(z) - z c_0$$

$$\mathcal{Z}^+(D^{(n)}\mathbf{c})(z) = \mathcal{Z}(D^{(n)}\mathbf{c}_+) = (z-1)^n \mathcal{Z}(\mathbf{c})(z) - z \sum_{m=0}^{n-1} (z-1)^{n-m-1} D^{(m)}\mathbf{c}(0),$$

dove $D^{(m)}\mathbf{c}(0)$ è il valore iniziale (ossia all'indice 0) della differenza di ordine m della successione \mathbf{c} , e $D^{(0)}\mathbf{c}(0) = c_0$.

Esempio 19.1.9. Scriviamo nuovamente $\mathbf{1}_+$ la successione che vale 1 per ogni $n \geq 0$ e zero altrimenti. Allora il riflesso speculare $\mathbf{1}_+^\dagger$ è la successione che vale 1 per ogni $n \leq 0$ e zero altrove, e poniamo $\mathbf{1}_- = \lambda_{-1}\mathbf{1}_+^\dagger$, ossia $\mathbf{1}_-(n) = \mathbf{1}_+(-n-1)$, la successione che vale 1 se $n < 0$ e 0 altrimenti. Allora, in base alle parti (iii) e (i) del Teorema 19.1.6 ed alla parte (iii) e (iii) dell'Esempio 19.1.5,

$$\mathcal{Z}(\mathbf{1}_+^\dagger)(z) = \mathcal{Z}(\mathbf{1}_+)(1/z) = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1} = \frac{1}{1-z} \quad \text{in } \{|z| > 1\} \quad (19.2)$$

$$(19.3)$$

$$\mathcal{Z}(\mathbf{1}_-)(z) = \frac{z}{1-z} \quad \text{in } \{|z| < 1\}.$$

Pertanto $\mathcal{Z}(-\mathbf{1}_-)(z) = \frac{z}{z-1} = \mathcal{Z}(\mathbf{1}_+)$: le trasformate zeta di queste due successioni hanno sì la stessa espressione meromorfa, ma in due corone diverse (e complementari), la prima in $\{|z| < 1\}$ e la seconda in $\{|z| > 1\}$.

Naturalmente, il calcolo di $\mathcal{Z}(\mathbf{1}_-)$ poteva essere fatto direttamente:

$$\mathcal{Z}(\mathbf{1}_-)(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z},$$

e la serie converge in $\{|z| < 1\}$. □

Nota 19.1.10. (L'inversa di \mathcal{Z} dipende anche dalla scelta della corona di convergenza.) Questo esempio mostra che qualunque enunciato che miri a formulare l'inversione della trasformata zeta deve considerare la trasformata non solo come una espressione meromorfa, bensì come la coppia costituita da tale espressione e dalla sua corona di convergenza, anche quando l'espressione ha senso in un dominio più ampio (la funzione meromorfa $\frac{z}{z-1}$ di questo esempio è definibile in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$). Risulta ora chiaro che la trasformata zeta ha un'unica inversa solo una volta fissata la regione di convergenza: l'unicità verrà dimostrata nel Teorema 19.2.2. \square

Esempio 19.1.11. (Trasformata zeta di esponenziale.) Più in generale rispetto a (19.2), per ogni $a \in \mathbb{R}$, la trasformata zeta della successione $\{a^n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ è $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = z/(z-a) = 1/(1-az^{-1})$, convergente in $\{|z| > a\}$, in coerenza con la parte (ii) del Teorema 19.1.6 (con la notazione ivi stabilita, si tratta della trasformata della successione $a^n \mathbf{1}^+$). Lo stesso risultato vale per ogni $a \in \mathbb{C}$ nella corona $\{|z| > |a|\}$. \square

Esempio 19.1.12. (Derivata di trasformata zeta di esponenziale.) Derivando m volte l'espressione nel precedente Esempio 19.1.11, ed applicando la proprietà di derivazione (parte (v) del Teorema 19.1.6), ricaviamo la trasformata zeta della successione $h_n : n \mapsto \binom{n}{m} a^{n-m} \mathbf{1}^+(n)$, che vale

$$h(z) = \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \quad (19.4)$$

nella corona $|z| > |a|$. Ad esempio, la trasformata zeta della successione $c_n = 0$ per $n \leq 0$, $c_n = na^{n-1}$ per $n \geq 1$ è la funzione $z/(z-a)^2$ nella corona $|z| > a$.

In effetti, questo risultato si può verificare con un calcolo diretto, anche senza ricorrere alla proprietà di derivazione. Ad esempio, per $m = 1$, consideriamo le successioni

$$\begin{aligned} c_n &= a^n & (n \geq 0) \\ d_n &= na^n & (n \geq 0) \\ h_n &= na^{n-1} & (n \geq 0). \end{aligned}$$

Allora, nella corona $\{|z| > |a|\}$, tra le trasformate zeta $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^{-n}$, $g(z) = \sum_{n \geq 0} d_n z^{-n}$ e $h(z) = \sum_{n \geq 0} h_n z^{-n}$ valgono le relazioni

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{z-a} \\ g(z) &= \sum_{n \geq 0} n a^n z^{-n} = a \sum_{n \geq 0} n a^{n-1} z^{-n} = a D_a \sum_{n \geq 0} a^n z^{-n} \\ &= a D_a \frac{z}{z-a} = \frac{az}{(z-a)^2} = -az f'(z) \\ h(z) &= \frac{1}{a} g(z) = \frac{z}{(z-a)^2} = -z f'(z) \end{aligned}$$

e quindi sono verificate sia la proprietà di derivazione $g(z) = -z f'(z)$ della parte (v) del Teorema 19.1.6, sia la relazione $h(z) = z/(z-a)^2$ annunciata in (19.4).

Nella linea dell'Esempio 19.1.11, da questo calcolo si ricava anche la trasformata zeta di $n \mapsto -\binom{n}{m} a^{n-m} \mathbf{1}^+(-n-1)$, che vale ancora $z/(z-a)^{m+1}$, ma adesso nel disco $\{|z| < |a|\}$. \square

Osserviamo anche il seguente fatto ovvio:

Corollario 19.1.13. *La serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge se e solo se tutti i poli della sua trasformata zeta (unilatera) hanno modulo strettamente minore di 1.*

Dimostrazione. Scriviamo, come sempre, $\mathbf{c} := \{\mathbf{c}_n\}$. La trasformata zeta $\mathcal{Z}(\mathbf{c})$ è una serie di potenze nella variabile $1/z$, e quindi converge in un disco con centro l'origine in questa variabile, il cui raggio è esattamente il valore $1/\rho$ del modulo del polo più vicino all'origine. Passando ai reciproci, ossia alla variabile z , vediamo che $\mathcal{Z}(\mathbf{c})$ converge per tutti gli z tali che $|z|$ è maggiore del modulo ρ del polo più lontano dall'origine. Pertanto, se la trasformata zeta converge a $z = 1$ (ossia se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge) deve essere $\rho < 1$. Viceversa, se $\rho < 1$, allora la trasformata zeta converge al punto $z = 1$, e quindi la serie nell'enunciato converge. \square

19.2 Inversione della trasformata zeta

Poiché la trasformata zeta di una successione $\mathbf{c} = \{c_n\}$ è lo sviluppo di Laurent i cui coefficienti sono i c_n , per varie funzioni olomorfe in una corona

conosciamo la antitraformata zeta senza bisogno di una formula di inversione, ma semplicemente grazie alla conoscenza di sviluppi di Laurent tipici.

Esempio 19.2.1. Sia $f(z) = e^{1/z}$, olomorfa nel dominio $\{|z| > 0\}$. La trasformata zeta inversa di f è la successione $\{c_n = 1/n!, n \in \mathbb{N}\}$, dal momento che lo sviluppo di Taylor della funzione esponenziale assicura che

$$\mathcal{Z}(\mathbf{c})(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = e^{\frac{1}{z}}.$$

□

L'unicità dello sviluppo di Laurent di una funzione olomorfa in una corona (Teorema 2.9.3), ed in particolare l'espressione (2.27) dei coefficienti di Laurent, portano immediatamente ad una formula di inversione della trasformata zeta bilatera, enunciata nel prossimo teorema.

Teorema 19.2.2. (Formula di inversione per la trasformata zeta.)

Sia f una funzione olomorfa in una corona circolare $C \subset \mathbb{C}$ con centro l'origine, e \mathbf{r} una curva semplice chiusa con immagine in C , percorsa in senso antiorario, con indice di avvolgimento 1 intorno all'origine. Allora $f = \mathcal{Z}(\mathbf{c})$, dove, per ogni $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{r}} f(z) z^{n-1} dz. \quad (19.5)$$

In particolare, se f ha solo singolarità polari $\{z_i\}$, dal Teorema dei Residui 2.10.5 segue

$$c_n = \sum_{z_i \text{ interni a } \mathbf{r}} \text{Res}_{z=z_i}(f(z) z^{n-1}). \quad (19.6)$$

Quindi, nella suddetta corona circolare, la trasformata zeta ha un'unica inversa (cambiando regione di convergenza però cambia l'inversa, come visto nella Nota 19.1.10).

Esempio 19.2.3. Siano a, b, c tre numeri complessi diversi fra loro e diversi da 0, e

$$f(z) = \frac{z(z-a)}{(z-b)(z-c)}.$$

La funzione f è una funzione razionale (rapporto fra due polinomi, $f = p/q$), ed è olomorfa nella corona $C = \{|z| > \max\{|b|, |c|\}\}$; ha poli semplici nei

punti $z_1 = b$ e $z_2 = c$. Il residuo in questi due punti di f , e più in generale di $f(z) z^{n-1}$ per $n \geq 0$, si ottiene quindi dalla formula nella Nota 2.10.2:

$$\operatorname{Res}_{z=z_i} f(z) z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) f(z) z^{n-1} = \frac{p(z_i)}{q'(z_i)} z_i^{n-1}. \quad (19.7)$$

Da questa identità e da (19.6) si ottiene, per $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} c_n &= \operatorname{Res}_{z=b} \frac{(z-a)z^n}{(z-b)(z-c)} + \operatorname{Res}_{z=c} \frac{(z-a)z^n}{(z-b)(z-c)} \\ &= \frac{b-a}{b-c} b^n + \frac{c-a}{c-b} c^n. \end{aligned}$$

Visto che $n \geq 0$, o, equivalentemente, che la corona di convergenza è l'esterno di un disco, da questo calcolo si ottiene precisamente l'inversione della trasformata zeta unilatera \mathcal{Z}^+ , ossia l'inversione causale.

Invece, per $n < 0$, la funzione $f(z) z^{n-1} = \frac{(z-a)z^n}{(z-b)(z-c)}$ ha un ulteriore polo al punto $z_0 = 0$, di ordine $|n|$ (quindi semplice solo per $n = -1$). In questo caso i residui si calcolano mediante la formula della Proposizione 2.10.4, che riportiamo qui per comodità del lettore: per un polo di molteplicità k al punto z_0 si ha

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) z^{n-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} D^{(k-1)} ((z-z_0)^k f(z) z^{n-1}).$$

Visto che qui $z_0 = 0$ e $k = |n|$ otteniamo

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) z^{n-1} = \frac{1}{(|n|-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} D^{(|n|-1)} (f(z)/z).$$

Qui $f(z)/z = (z-a)/((z-c)(z-d))$: il calcolo può essere svolto tramite valutazioni successive della derivata, e viene lasciato al lettore per esercizio. \square

Esercizio 19.2.4. Applicando il metodo illustrato nell'Esempio 19.2.3, si mostri che l'inversione della trasformata zeta *causale* della funzione

(i)

$$g(z) = \frac{z-1}{(z+1)(z-1/2)}$$

nella corona $\{|z| > 1\}$ è data dalla successione $c_0 = 0$ e, per $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{4}{3}(-1)^{n-1} - \frac{1}{3}(1/2)^{n-1},$$

mentre quello della funzione

(ii)

$$h(z) = \frac{(z-1)^3}{z(z+1)(z-1/2)}$$

nella stessa corona è dato da $c_0 = 1$, $c_1 = -7/2$ e, per $n \geq 2$,

$$c_n = \frac{16}{3}(-1)^{n-2} - \frac{1}{12}(1/2)^{n-2}.$$

□

Esempio 19.2.5. (Inversione della trasformata zeta tramite sviluppo in serie di Laurent.) In questo esempio mostriamo come trovare la trasformata zeta inversa di una funzione f sviluppando f in serie di Laurent. L'inverso, naturalmente, dipende dalla corona in cui si viene sviluppata f in serie convergente.

Siano $m \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{C}$, e

$$f(z) = \frac{z^m}{z-a}.$$

La funzione f ha una singolarità polare a $z = a$: sviluppiamola in serie di Laurent nelle due regioni anulari $C_- := \{|z| < |a|\}$ e $C_+ := \{|z| > |a|\}$. Grazie alla formula di somma geometrica, nella regione C_+ si ha

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}$$

e quindi, in C_+ vale lo sviluppo in serie

$$\frac{z^m}{z-a} = z^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}. \quad (19.8)$$

Invece, in C_- possiamo utilizzare l'analogo sviluppo convergente

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^n}$$

da cui, in C_- ,

$$\frac{z^m}{z-a} = -\frac{z^m}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^n}.$$

Esaminando questi due sviluppi di Laurent (nelle rispettive corone), si vede che, in C_- , abbiamo $f|_{C_-} = \mathcal{Z}(\mathbf{c})$ con $c_n = a^{n+m-1}$ per $n \geq -m+1$ e $c_n = 0$ per $n < -m+1$. Invece, in C_+ si trova $f|_{C_+} = \mathcal{Z}(\mathbf{c})$ con $c_n = -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{a}\right)^{-n-m} = -a^{n+m-1}$ per $n \leq -m$ e $c_n = 0$ per $n > -m$. Si osservi che, a parte il segno, l'espressione dei coefficienti di Laurent non nulli è la stessa per le due regioni, ma viene scambiata nei due casi la semiretta di indici con coefficienti nulli. \square

Nota 19.2.6. Il risultato del precedente Esempio 19.2.5 si può ricavare anche applicando direttamente la formula di inversione come nell'Esercizio 19.2.4 e negli esempi che lo precedono (Esempio 19.2.3). Inoltre, lo si può ottenere in modo ancora più facile senza impiegare la formula di somma geometrica per sviluppare la funzione f in serie di Laurent: infatti la trasformata zeta inversa si ricava, in ciascuna regione, dal risultato dell'Esempio 19.1.11 e dalla proprietà di traslazione della parte (i) del Teorema 19.1.6.

Questa osservazione illustra il metodo di calcolo più abituale della trasformata zeta inversa: si decompone la funzione f come somma di termini la cui trasformata zeta è già conosciuta. Vediamo qui di seguito qualche esempio tipico. \square

Esempio 19.2.7. (Inversione della trasformata zeta con frazioni parziali, caso di poli semplici.) Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{z(z-1)}{(z+1)(z-1/2)},$$

olomorfa nella corona $\{|z| > 1\}$, e scriviamola come $zg(z)$, dove g è la funzione la cui antitrasformata zeta è stata studiata nell'Esercizio 19.2.4. Procediamo a spezzare g come somma di due funzioni razionali più semplici la cui antitrasformata zeta è già nota, procedendo come nella consueta tecnica di integrazione per frazioni parziali. Scriviamo

$$\frac{z-1}{(z+1)(z-1/2)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-1/2}$$

e da questa identità ricaviamo $a + b = 1$, $b - a/2 = -1$, da cui $a = 4/3$, $b = -1/3$. Pertanto

$$f(z) = \frac{4}{3} \frac{z}{z+1} - \frac{1}{3} \frac{z}{z-1/2}.$$

Consideriamo i termini $\frac{4}{3} \frac{z}{z+1}$, olomorfo nella corona $\{|z| > 1\}$, e $-\frac{1}{3} \frac{z}{z-1/2}$, olomorfo nella corona $\{|z| > \frac{1}{2}\}$. Dal calcolo dell'Esempio 19.1.11 sappiamo che $\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z+1}\right) = \{(-1)^n \text{ per } n \geq 0 \text{ e } 0 \text{ per } n < 0\}$, e $\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z-1/2}\right) = \{(\frac{1}{2})^n \text{ per } n \geq 0 \text{ e } 0 \text{ per } n < 0\}$. Quindi, nell'intersezione delle due corone, ossia in $(\{|z| > 1\})$, la antitrasformata zeta della funzione f è $c_n = \frac{4}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}(1/2)^n$. (Per $n = 0$, il valore di c_0 si ricava anche dalla proprietà del valore finale (parte (viii) del Teorema 19.1.6), che implica $c_0 = 1$). \square

Nota 19.2.8. Si osservi che, al fine di poter utilizzare l'Esempio 19.1.11, abbiamo sviluppato tramite frazioni parziali la funzione $f(z)/z$ invece che $f(z)$. Questo approccio è tipico per le funzioni razionali. Lo applichiamo al prossimo esercizio. \square

Esercizio 19.2.9. Sia

$$f(z) = \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-1/2}$$

con $0 < |z_1| < |z_2|$. Si calcoli la trasformata zeta inversa di f nelle corone $C_- = \{|z| < |z_1|\}$, $C_0 = \{|z_1| < |z| < |z_2|\}$ e $C_+ = \{|z| > |z_2|\}$.

Svolgimento. Come suggerito dalla Nota 19.2.8, decomponiamo in frazioni parziali il quoziente $f(z)/z$,

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{a}{z-z_1} + \frac{b}{z-z_2},$$

e ricaviamo

$$a = \frac{1}{z_1 - z_2} = -b$$

e quindi

$$f(z) = \frac{1}{z_1 - z_2} \left(\frac{z}{z-z_1} - \frac{z}{z-z_2} \right). \quad (19.9)$$

Dall'Esempio 19.1.11 (o anche dall'Esempio 19.2.5) ora segue che la antitrasformata zeta causale di f , nella corona $C_+ = \{|z| > |z_2|\}$, è 0 per $n < 0$ e

$$f_n = \frac{1}{z_1 - z_2} (z_1^n - z_2^n)$$

per $n \geq 0$.

Consideriamo invece la corona circolare C_0 . Per trovare i coefficienti f_n qui riscriviamo (19.9) come somma di due serie geometriche convergenti in questa corona:

$$\begin{aligned} (z_1 - z_2) f(z) &= \frac{z}{z - z_1} - \frac{z}{z - z_2} = \frac{1}{1 - \frac{z_1}{z}} + \frac{\frac{z}{z_2}}{1 - \frac{z}{z_2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_1}{z}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{z^n} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{z_2^n}{z^n}. \end{aligned}$$

Pertanto i coefficienti della trasformata zeta inversa (ora necessariamente bilaterale!) relativa a C_0 sono

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{z_1^n}{z_1 - z_2} && \text{se } n \geq 0 \\ f_n &= \frac{z_2^n}{z_1 - z_2} && \text{se } n < 0. \end{aligned}$$

Infine, nel disco C_- dobbiamo di nuovo decomporre f come somma di serie geometriche qui convergenti nel modo seguente:

$$\begin{aligned} (z_1 - z_2) f(z) &= \frac{z}{z - z_1} - \frac{z}{z - z_2} = -\frac{\frac{z}{z_1}}{1 - \frac{z}{z_1}} + \frac{\frac{z}{z_2}}{1 - \frac{z}{z_2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z_2^n} - \frac{1}{z_1^n}\right) z^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} (z_2^n - z_1^n) \frac{1}{z^n}. \end{aligned}$$

Quindi, in C_- , la trasformata zeta inversa è 0 per $n \geq 0$ e

$$f_n = \frac{z_2^n - z_1^n}{z_1 - z_2}$$

per $n < 0$. □

Esercizio 19.2.10. Nell'Esercizio 19.2.9 precedente, avremmo potuto invertire la trasformata zeta tramite la formula di inversione del Teorema 19.2.2 con integrazione su curve semplici chiuse intorno all'origine in verso antiorario. Lasciamo al lettore svolgere il calcolo, osservando solo che ogni curva semplice chiusa con indice di avvolgimento 1 nella regione C_+ contiene al suo interno entrambi i poli z_1 e z_2 , mentre nella corona C_0 le curve di questo tipo contengono al loro interno solo il polo z_1 , ed all'interno delle curve in C_- non c'è nessuno di questi due poli. Ma non dimentichiamo che, per $n \leq 0$ la funzione $f(z) z^{n-1}$ che compare nella formula di inversione (19.6) ha un altro polo (di ordine $1 - n$) al punto $z = 0$, che è interno a tutte queste curve. \square

Esempio 19.2.11. (**Inversione della trasformata zeta con frazioni parziali, caso di poli multipli.**) In questo esempio applichiamo il metodo di decomposizioni in frazioni parziali, introdotto nel precedente Esempio 19.2.7, all'inversione della trasformata zeta (limitando l'attenzione al caso causale) di una funzione razionale in cui il polinomio al denominatore ha zeri ripetuti. Utilizziamo quasi la stessa funzione dell'Esempio precedente, ma aumentando la molteplicità della radice -1 al denominatore, ad esempio così:

$$h(z) = \frac{z(z-1)}{(z+1)^2(z-1/2)}.$$

In analogia a quanto abbiamo fatto alla fine del precedente Esempio 19.2.7, poniamo $u(z) = h(z)/z$ e decomponiamo u nel modo seguente:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{z-1}{(z+1)^2(z-1/2)} = \frac{a}{z-1/2} + \frac{b}{z+1} + \frac{c}{(z+1)^2} \\ &= -2a \frac{1}{1-2z} + b \frac{1}{1+z} + c \frac{1}{(1+z)^2}. \end{aligned}$$

Quando trasformiamo l'ultimo membro ad una unica frazione, il suo numeratore diventa $a(z+1)^2 + b(z-1/2)(z+1) + c(z-1/2)$, mentre il denominatore di u è $z-1$. Uguagliando questi due numeratori otteniamo $a+b=0$, $2a+c+b/2=1$, $a-(b+c)/2=-1$. Da qui si ricava $a=-2/11$, $b=2/11$, $c=16/11$. Pertanto

$$h(z) = -\frac{2}{11} \frac{2z}{2z-1} + \frac{2}{11} \frac{z}{1+z} + \frac{16}{11} \frac{z}{(1+z)^2}.$$

Consultando l'elenco delle trasformate zeta calcolate negli Esempi 19.1.11 e 19.1.12, ed applicando la proprietà di dilatazione (parte (ii) del Teorema 19.1.6), vediamo adesso che nella corona $\{|z| > 1\}$ la trasformata inversa $Z^{-1}(h) = (Z^+)^{-1}(h)$ è $c_n = 0$ per $n < 0$ e

$$c_n = -\frac{2}{11} \frac{1}{2^n} + \frac{2}{11} (-1)^n + \frac{16}{11} n(-1)^{n-1}$$

per $n \geq 0$. □

19.2.1 Metodo iterativo di inversione per funzioni razionali

Consideriamo, più in generale rispetto agli ultimi esempi, una funzione razionale data dal rapporto fra due polinomi di grado m . Senza perdita di generalità possiamo supporre di normalizzare il denominatore in maniera che il suo termine di grado massimo valga 1:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}.$$

Raccogliendo un fattore z^m dal denominatore ed applicando la formula di somma geometrica $1/(1-t) = 1-t+t^2-\dots$ con $t = b_1/z - b_2/z^2 - \dots - b_m/z^m$ troviamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{q(z)} &= \frac{1}{z^m} \frac{1}{1 + b_1/z + \dots + b_m/z^m} \\ &= \frac{1}{z^m} (1 - (b_1/z - b_2/z^2 - \dots - b_m/z^m) \\ &\quad + (b_1/z - b_2/z^2 - \dots - b_m/z^m)^2 + \dots). \end{aligned}$$

Ora trasferiamo il fattore $1/z^m$ al numeratore, che diventa $p(z)/z^m = a_0 + a_1/z + \dots + a_m/z^m$ e sviluppiamo il prodotto di $p(z)/z^m$ e $1/q(z)$:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = a_0 + (a_1 - b_1 a_0)/z + \dots$$

In questo modo otteniamo per ricorrenza i successivi coefficienti di Laurent di f :

$$\begin{aligned}c_0 &= a_0 \\c_1 &= a_1 - b_1 c_0 \\c_2 &= a_2 - b_1 c_1 - b_2 c_0 \\&\dots\end{aligned}$$

In altre parole, la successione c_n è costruita dalla regola iterativa $c_0 = a_0$, e $c_n = a_n - \sum_{i=1}^n b_i c_{n-i}$ per $n \geq 1$, che lasciamo dimostrare al lettore per ricorrenza.

Esercizio 19.2.12. Si applichi il metodo ricorsivo appena illustrato alla verifica del calcolo della antitrasformata zeta della funzione $g(z) = \frac{z-1}{(z+1)(z-1/2)}$ già considerata nell'Esercizio 19.2.4 e nell'Esempio 19.2.7. \square

Si noti che lo stesso metodo numerico ricorsivo si applica anche quando il numeratore ed il denominatore, anziché essere polinomi, sono sviluppi di Laurent infiniti: in tal caso, il fatto che la successione $\{c_n\}$ dia luogo ad una serie di Laurent convergente nella corona data dall'intersezione delle corone di convergenza degli sviluppi di Laurent del numeratore e del denominatore segue dall'unicità dello sviluppo di Laurent, ed è lasciato come esercizio al lettore (un argomento del tutto analogo verrà comunque presentato più sotto, alla fine della dimostrazione del Teorema 19.3.2).

19.3 Trasformata zeta e convoluzione

Nota 19.3.1. (Commutatività della convoluzione di successioni.) Consideriamo due successioni $\mathbf{c} = \{c_n, n \in \mathbb{Z}\}$ e $\mathbf{d} = \{d_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Rammentiamo che, in analogia alla Definizione 6.1.2, la convoluzione $\mathbf{c} * \mathbf{d}$ è la successione (a valori finiti od infiniti)

$$\mathbf{c} * \mathbf{d}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k}.$$

Si osservi che la successione così ottenuta potrebbe non essere in ℓ^1 , ed anche se lo è non è detto che si possa scambiare l'ordine di somma nella serie doppia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k}$. Abbiamo visto nell'Esercizio 6.1.13 (basato

sulla Nota 6.1.3) che una condizione sufficiente affinché si abbia $\mathbf{c} * \mathbf{d} \in \ell^1$ è che $\mathbf{c} \in \ell^1$ e $\mathbf{d} \in \ell^1$ (si veda l'identità (6.7); qui stiamo applicando questi riferimenti al caso di una misura discreta, la counting measure, e quindi gli integrali ora sono serie).

Lo stesso riferimento ci dice anche che in tale ipotesi la convoluzione è commutativa. Per comodità del lettore, ricapitoliamo questo argomento. Sotto l'ipotesi di appartenenza a ℓ^1 delle due successioni, segue dalla disuguaglianza di Hölder (Teorema 1.16.6 che la serie doppia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k}$ è assolutamente convergente, nel senso che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| |d_{n-k}| < \infty.$$

Pertanto, in base alla proprietà di riordinamento delle serie numeriche (Sezione 1.1), l'ordine con cui sommiamo i termini è irrilevante, e quindi si può scambiare l'ordine delle due somme:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k}.$$

Quest'ultima identità equivale a dire che vale la proprietà commutativa $\mathbf{c} * \mathbf{d} = \mathbf{c} * \mathbf{d}$. \square

Teorema 19.3.2. (Trasformata zeta della convoluzione di due segnali.) Se $\mathbf{c} = \{c_n, n \in \mathbb{Z}\}$ e $\mathbf{d} = \{d_n, n \in \mathbb{Z}\}$ sono due successioni in ℓ^1 , e le loro trasformate zeta convergono rispettivamente nelle corone C_c e C_d , allora

$$\mathcal{Z}(\mathbf{c} * \mathbf{d}) = \mathcal{Z}(\mathbf{c}) \mathcal{Z}(\mathbf{d})$$

e questa trasformata zeta converge nell'intersezione $C_c \cap C_d$.

Dimostrazione. Nel calcolare la trasformata zeta della convoluzione, scambiamo l'ordine di somma come giustificato nella precedente Nota 19.3.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathbf{c} * \mathbf{d})(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k} \right) z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{n-k} z^{-n} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{n-k} z^{-(n-k)} \\ &= \mathcal{Z}(\mathbf{c})(z) \mathcal{Z}(\mathbf{d})(z). \end{aligned}$$

L'ultimo membro di questa identità è uno sviluppo di Laurent con centro 0, olomorfo in una corona circolare. Il primo membro è il prodotto di due sviluppi di Laurent con centro 0, ciascuno olomorfo nella propria corona circolare, rispettivamente C_c e C_d : il prodotto è olomorfo nell'intersezione $C_c \cap C_d$. Poiché il prodotto puntuale di due sviluppi di Laurent è ancora uno sviluppo di Laurent, per l'unicità di tale sviluppo (assicurata dall'identità (2.27)), il membro di destra deve essere anch'esso olomorfo in $C_c \cap C_d$.

□

Ora che abbiamo mostrato che la trasformata zeta manda convoluzioni in prodotti puntuali, vorremmo mostrare il viceversa, in analogia con la trasformata di Fourier. Per questo, però, dobbiamo considerare opportune convoluzioni per funzioni olomorfe, rispetto ad una misura diversa dalla misura di Lebesgue sulla retta: ci serve una misura invariante per dilatazione invece che per traslazione. La introduciamo nella seguente Nota.

Lemma 19.3.3. *Sia m la misura di Lebesgue su \mathbb{R} o su una circonferenza $C \subset \mathbb{C}$ con centro l'origine, e consideriamo la misura μ definita da*

$$\int f(t) d\mu(t) = \int f(t) \frac{dm(t)}{t},$$

dove f è una generica funzione integrabile su \mathbb{R} o su C . Osserviamo che le costanti $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ agiscono su \mathbb{R} e su C , mandandoli in sé, tramite la moltiplicazione $x \mapsto \alpha x$ nel caso di \mathbb{R} e $re^{i\theta} \mapsto re^{i\alpha\theta}$ nel caso di C . Questa azione si chiama dilatazione (se $\alpha = 1$ la dilatazione è l'azione banale, se $\alpha < 0$ la dilatazione rovescia il verso di percorrenza). La misura μ è invariante per questa azione di dilatazione: per ogni costante $\alpha > 0$

$$\int f(\alpha t) d\mu(t) = \int f(t) d\mu(t),$$

e più in generale, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ (inclusi gli α negativi), si ha

$$\int f(\alpha t) d\mu(t) = \operatorname{sgn}(\alpha) \int f(t) d\mu(t),$$

Dimostrazione. È più comodo spezzare il calcolo per $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$. Basta considerare separatamente il caso di $\alpha > 0$ e quello di $\alpha = -1$: il caso generale segue applicando questi due in successione. Svolgiamo il calcolo per

\mathbb{R} : i dettagli per il cerchio C sono identici.

Sia $\alpha > 0$. Allora, con la trasformazione di variabili $x = \alpha t$, otteniamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) \frac{dt}{t} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\mu(x).$$

Invece, nel caso $\alpha = -1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(-t) d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) \frac{dt}{t} = \int_{\infty}^{-\infty} f(x) \frac{dx}{x} = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\mu(x).$$

□

Definizione 19.3.4. In questo capitolo chiamiamo *convoluzione moltiplicativa* la convoluzione rispetto alla misura moltiplicativa μ , e la indichiamo con $*_{\mu}$. Ossia, se f e g sono due funzioni olomorfe in un aperto connesso $A \subset \mathbb{C}$,

$$f *_{\mu} g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f\left(\frac{x}{w}\right) g(w) \frac{dw}{w},$$

dove C è l'immagine di una curva semplice chiusa orientata positivamente in A (come al solito, il risultato dipende solo dalla classe di omotopia della curva e dal suo verso di percorrenza, grazie al per il Teorema di invarianza omotopica 2.4.7).

Nota 19.3.5. La disuguaglianza di Hölder (Teorema 1.16.6 vale per qualsiasi misura di Borel, non solo per la misura di Lebesgue, con dimostrazione identica. Applicandolo alla misura moltiplicativa μ otteniamo che, in maniera del tutto identica a quanto osservato per la convoluzione ordinaria (diciamo, additiva), se $f, g \in L^1(\mu)$ allora $f *_{\mu} g \in L^1(\mu)$, e più in generale se $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$ con p e q indici coniugati, allora $f *_{\mu} g \in L^1(\mu)$. In tal caso, esattamente come nella Nota 6.1.3, vale la proprietà commutativa $f *_{\mu} g = g *_{\mu} f$, ossia

$$\int_C f\left(\frac{x}{w}\right) g(w) dw = \int_C f(w) g\left(\frac{x}{w}\right) \frac{dw}{w}.$$

Lasciamo al lettore la verifica, che richiede solo un ovvio cambiamento di variabili.

Osserviamo infine che, nel caso di un cerchio $C = \{re^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, la convoluzione moltiplicativa, considerata nella variabile angolare θ invece

che nella variabile complessa $e^{i\theta}$, diventa la convoluzione additiva ordinaria (rispetto alla misura d'arco): se $z = re^{i\phi}$, scrivendo $\tilde{f}(\phi) := f(re^{i\theta})$ ed analogamente per g , abbiamo

$$\begin{aligned} f *_{\mu} g(re^{i\phi}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f\left(\frac{z}{w}\right) g(w) \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(re^{i(\phi-\theta)}) g(re^{i\theta}) \frac{ire^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i(\phi-\theta)}) g(re^{i\theta}) d\theta = \tilde{f} * \tilde{g}(\phi). \end{aligned} \quad (19.10)$$

□

Teorema 19.3.6. (Trasformata zeta del prodotto puntuale di due segnali.) Siano \mathbf{c} e \mathbf{d} due successioni zeta-ammissibili, ed indichiamo le loro corone di convergenza rispettivamente con $C_c = \{r_c < |z| < R_c\}$ e $C_d = \{r_d < |z| < R_d\}$. La trasformata zeta manda il prodotto puntuale di \mathbf{c} e \mathbf{d} nella convoluzione moltiplicativa delle trasformate individuali, $\mathcal{Z}(\mathbf{c}) *_{\mu} \mathcal{Z}(\mathbf{d})$. Ovvero, ponendo $\{b_n = c_n d_n\}$, $f = \mathcal{Z}(\mathbf{c})$, $g = \mathcal{Z}(\mathbf{d})$ e $h = \mathcal{Z}(\mathbf{b})$, per qualunque percorso semplice chiuso orientato positivamente $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ con immagine contenuta in $C_c \cap C_d$ si ha

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{r}} f\left(\frac{z}{w}\right) g(w) \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{r}} g\left(\frac{z}{w}\right) f(w) \frac{dw}{w}.$$

La corona di convergenza di $\mathcal{Z}(\mathbf{b})$ contiene la corona $\{r_c r_d < |z| < R_c R_d\}$.

Dimostrazione. Sia \mathbf{r} un percorso semplice chiuso orientato positivamente contenuto in C_d . Dalla formula di inversione (19.5) segue

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{r}} g(w) w^{n-1} dw.$$

D'altra parte, per la Definizione 19.1.1 di trasformata zeta,

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n z^{-n}.$$

Nella corona in cui h è olomorfa, questa serie di Laurent (quindi di potenze nella variabile z^{-1}) converge uniformemente. Pertanto, dopo aver combinato

le due identità precedenti, possiamo scambiare la serie con l'integrale ed otteniamo

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{r}} g(w) w^{n-1} dw z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{r}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{w}{z}\right)^n \right) g(w) w^{-1} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{r}} f\left(\frac{z}{w}\right) g(w) \frac{dw}{w}. \end{aligned} \quad (19.11)$$

Affinché si possa passare dal secondo al terzo membro, però, occorre che su tutti i punti dell'immagine della curva \mathbf{r} la trasformata zeta $f(z/w)$ converga: quindi l'identità vale per i numeri complessi z tali che, per ogni w nell'immagine di \mathbf{r} (contenuta in C_d), il numero complesso z/w appartenga alla corona di convergenza C_d . Ossia, deve essere $r_d < |w| < R_d$ e $r_c < |z/w| < R_c$. Queste disuguaglianze implicano $r_c r_d < |z| < R_c R_d$: questa è quindi una corona contenuta nella corona di convergenza di $f = \mathcal{Z}(\mathbf{b})$.

Le restrizioni all'immagine della curva \mathbf{r} delle trasformate zeta f e g sono continue (restrizioni di funzioni olomorfe!) e quindi in L^1 : pertanto sappiamo dalla Nota 19.3.5 che $\int_{\mathbf{r}} f\left(\frac{x}{w}\right) g(w) \frac{dw}{w} = \int_{\mathbf{r}} g\left(\frac{x}{w}\right) f(w) \frac{dw}{w}$. \square

Corollario 19.3.7. (Identità di Parseval per la trasformata zeta.)

Siano \mathbf{c} e \mathbf{d} due successioni zeta-trasformabili, ed indichiamo le loro corone di convergenza rispettivamente con $C_c = \{r_c < |z| < R_c\}$ e $C_d = \{r_d < |z| < R_d\}$, e con f, g le loro trasformate zeta in queste corone. Poniamo anche $D = \{1/R < |z| < 1/r\}$.

Sia \mathbf{r} una qualsiasi curva semplice chiusa orientata positivamente la cui immagine giace in $C_c \cap D$, ossia nella intersezione delle corone di $f(z)$ e $g(1/z)$. Supponiamo che questa corona contenga il punto 1. Allora

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bar{d}_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{r}} f(w) \bar{g}\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) \frac{dw}{w}.$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, poniamo $b_n = c_n \bar{d}_n$, e sia h la trasformata zeta della successione $\{b_n\}$. Come nell'identità (19.11), ma ora utilizzando anche la proprietà di coniugazione (parte (iv) del Teorema 19.1.6), abbiamo

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{r}} f(w) \bar{g}\left(\frac{\bar{z}}{\bar{w}}\right) \frac{dw}{w}.$$

Ponendo $z = 1$ otteniamo la formula di Plancherel dell'enunciato; la serie converge grazie all'ipotesi $1 \in C_c \cap D$, e l'integrale converge perché la curva di integrazione giace in $C_c \cap D$ (e quindi l'integrando ha senso ed è la restrizione di una funzione olomorfa, quindi è continuo). \square

Nota 19.3.8. Si noti che, se si esprime la variabile complessa w in coordinate polari, $w = re^{i\theta}$ e si fissa r , la convoluzione, nella variabile θ , diventa la convoluzione ordinaria, come mostrato in (19.10), ed allora il Corollario 19.3.7 diventa l'identità di Parseval ordinaria della Nota 4.3.3:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bar{d}_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \bar{g}(re^{i\theta}) d\theta.$$

Ad esempio, se $c_n \equiv d_n$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta. \quad (19.12)$$

\square

Capitolo 20

Applicazioni della trasformata zeta ai sistemi a tempo discreto (filtri digitali lineari di ordine finito)

Lo sviluppo di questo capitolo si ispira a [33], [17, Ch. 2]; la Sezione 20.1 si ispira anche a [10, Cap.17, Sez.5].

20.1 Equazioni alle differenze

Consideriamo gli operatori alle differenze sulle successioni, introdotti nella Definizione 19.1.7. Una *equazione lineare alle differenze di ordine m* è una famiglia di relazioni lineari (una per ogni $n \in \mathbb{Z}$) del tipo

$$\beta_m D^{(m)} g_n + \beta_{m-1} D^{(m-1)} g_n + \dots + \beta_0 g_n = \alpha_m D^{(m)} f_n + \alpha_{m-1} D^{(m-1)} f_n + \dots + \alpha_0 f_n,$$

dove i numeri $\alpha_0, \dots, \alpha_m, \beta_0, \dots, \beta_m$ sono costanti complesse, $\beta_m \neq 0$, $\{f_n, n \in \mathbb{Z}\}$ è una successione nota (*dati in input*), e $\{g_n\}$ è una successione incognita (*output*). Qui per praticità nella relazione lineare abbiamo scritto g_n, f_n anziché $\{g_n\}, \{f_n\}$. Non è detto che il numero di termini ai due membri debba essere uguale: ad esempio, se a destra ci sono $r < m$ termini, poniamo uguali a zero i restanti $m - r$ coefficienti.

Dalla succitata definizione ricorsiva degli operatori $D^{(m)}$ segue l'esistenza di

costanti complesse $a_0, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ tali che la precedente formulazione si riscrive così:

$$b_0 g_n + b_1 g_{n-1} + \dots + b_m g_{n-m} = a_0 f_n + a_1 f_{n-1} + \dots + a_m f_{n-m}.$$

Però $b_0 \neq 0$ perché stiamo considerando equazioni alle differenze di ordine m , e quindi, senza perdita di generalità, dividiamo per il coefficiente b_0 , normalizzando quindi a 1 il coefficiente del termine di ordine massimo nell'incognita (di nuovo, il numero di termini non nulli a sinistra e a destra potrebbe essere diverso). Quindi scriviamo

$$g_n + b_1 g_{n-1} + \dots + b_m g_{n-m} = a_0 f_n + a_1 f_{n-1} + \dots + a_m f_{n-m}. \quad (20.1)$$

Il problema consiste nel ricavare la successione incognita in termini della successione dei dati.

In questo libro trattiamo le equazioni alle differenze in questa seconda formulazione.

Un problema di questo tipo in generale non ha un'unica soluzione. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 20.1.1. Sia

$$g_n - g_{n-1} = 1.$$

Fissiamo arbitrariamente un valore dell'output, ad esempio $g_0 = t$. Allora, per ricorrenza, $g_1 = 1 + g_0 = 1 + t$, $g_2 = 1 + g_1 = 2 + t$, $g_n = n + 1 + t$ per $n > 0$, e $g_{-1} = t - 1$, $g_{-2} = t - 2$, $g_{-n} = t - n$. In questo caso le soluzioni dipendono solo dal parametro t . Esse quindi costituiscono l'insieme di tutte le successioni $\{h_n = t + n : t \in \mathbb{C}\}$. Si tratta delle successioni aritmetiche (ossia lineari, o più precisamente affini), che risolvono il problema $D^{(1)}\mathbf{g} = 0$. Osserviamo che, come per tutti i problemi lineari, la soluzione generale di $g_n - g_{n-1} = 1$ è data dalla somma di una soluzione particolare (una qualsiasi di quelle che abbiamo trovato) più la soluzione generale del problema omogeneo associato, $g_n - g_{n-1} = 0$: quest'ultima soluzione generale, evidentemente, consiste delle successioni costanti, $g_{n+1} = g_n$ per ogni n .

Se avessimo scelto

$$g_n - 2g_{n-1} + g_{n-2} = 1,$$

ossia $D^{(2)}\mathbf{g} = 1$, fissati $g_0 = t_0$ e $g_1 = t_1$ ora avremmo $g_2 = 1 + 2t_1 - t_0$, $g_3 = 1 + 2g_2 - g_1 = 3 + 3t_1 - 2t_0$, $g_4 = 1 + 2g_3 - g_2 = 6 + 4t_1 - 3t_0$, e così via. In maniera analoga si determinano i coefficienti con n negativo a partire dai parametri t_0 e t_1 . Pertanto la soluzione è un insieme a due parametri.

Analogamente, per una equazione alle differenze di ordine m la soluzione è uno insieme a m parametri. Questo resta vero qualunque sia la successione di input. \square

Nota 20.1.2. Esattamente lo stesso metodo ricorsivo mostra che, in tutti i problemi lineari alle differenze il cui input è *causale* (ovvero dove non c'è perturbazione del sistema per tempi negativi, o in generale minori di qualche istante n_0), ed anche l'output è *causale*, ovvero il sistema è a riposo per tempi negativi (o in generale minori di qualche indice n_1), allora la soluzione è unica. In tale caso, la soluzione non richiede la specificazione di dati iniziali. Il metodo di calcolo ricorsivo che abbiamo appena illustrato porta sempre alla soluzione, ma non fornisce una formula chiusa: per ricavare in questo modo l'output al tempo n non abbiamo una formula, dobbiamo iterativamente ricavarlo un dato alla volta da n_1 a n . \square

L'impiego della trasformata zeta porta invece a ricavare la soluzione come un'espressione diretta, non ricorsiva, dei dati in input (almeno nei casi in cui la formula di inversione (19.5) della trasformata zeta risulti esplicitamente calcolabile). Vediamo come.

Sia $f = \mathcal{Z}(\mathbf{f})$ la trasformata zeta della successione dei dati in input, e $g = \mathcal{Z}(\mathbf{g})$ quella dell'incognita. Stiamo supponendo che \mathbf{f} e \mathbf{g} siano segnali causali, pertanto le loro trasformate zeta convergono in due corone illimitate, le quali quindi hanno intersezione non vuota. Limitiamo l'attenzione ai valori della variabile z in questa intersezione. Applicando alla definizione (20.1) la linearità e la proprietà di traslazione della trasformata zeta (parte (i) del Teorema 19.1.6), otteniamo $(1 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m})g(z) = (a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_mz^{-m})f(z)$, ossia $g(z) = h(z)f(z)$ con

$$h(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_mz^{-m}}{1 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}} = \frac{a_0z^m + a_1z^{m-1} + \dots + a_m}{z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_m}. \quad (20.2)$$

La funzione h è quindi una funzione nota esplicitamente; per le ragioni che illustreremo in seguito, essa si chiama la *funzione di trasferimento*. Nel nostro caso, h è una funzione razionale di grado m . Questo conduce al seguente procedimento risolutivo.

Nota 20.1.3. (Procedimento risolutivo per le equazioni lineari alle differenze di ordine finito.) Segue da quanto abbiamo appena visto che il procedimento risolutivo, nell'ipotesi di input ed output causali, consiste nel

calcolare esplicitamente $f = \mathcal{Z}(\mathbf{f})$ a partire dalla successione nota \mathbf{f} dei dati in input, e ricavare

$$\mathbf{g} = (\mathcal{Z}^+)^{-1}(hf) \quad (20.3)$$

dalla formula di inversione (19.6). Il calcolo dell'inversa dipende quindi solo dai residui ai poli di hf , ovvero dai poli di $f = \mathcal{Z}(\mathbf{f})$ e dagli zeri del denominatore $1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}$ di h .

Notiamo anche che dal Teorema 19.3.2 sulla trasformata zeta di convoluzioni segue

$$(\mathcal{Z}^+)^{-1}(hf) = (\mathcal{Z}^+)^{-1}(h) * (\mathcal{Z}^+)^{-1}(f) = (\mathcal{Z}^+)^{-1}(h) * \mathbf{f}, \quad (20.4)$$

e quindi possiamo ricavare direttamente la successione incognita convolvendo la successione in input con la successione dei coefficienti di Laurent della funzione di trasferimento.

Se input ed output non sono causali, occorre invece invertire la trasformata bilatera, ossia calcolare $\mathcal{Z}^{-1}(hf)$, e ci sono più soluzioni, una per ogni corona di convergenza. \square

Esempio 20.1.4. Riconsideriamo il problema

$$g_n - g_{n-1} = f_n. \quad (20.5)$$

un cui caso particolare è stato studiato nella prima parte dell'Esempio 20.1.1. Qui la funzione di trasferimento in (20.2) è

$$h(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1},$$

e dalla parte (ii) dell'Esempio 19.1.5 vediamo che $h = \mathcal{Z}^+(\mathbf{1})$ è la trasformata zeta unilatera della successione identicamente 1, o, se si preferisce, la trasformata zeta bilatera della successione $h_n = 1$ per $n \geq 0$ e 0 per $n < 0$.

Risolviamo quindi il problema (20.5) in qualche caso concreto. Sia $f_n = h_n$. Allora $g(z) = h(z)f(z) = z^2/(z - 1)^2$. Procediamo dapprima seguendo l'approccio di (20.3). Come nell'Esempio 19.2.11, riduciamo ad una somma di frazioni parziali la funzione razionale $u(z) = g(z)/z$. Poniamo

$$u(z) = \frac{g(z)}{z} = \frac{z}{(z - 1)^2} = \frac{a}{z - 1} + \frac{b}{(z - 1)^2}$$

da cui ricaviamo $a = b = 1$. Pertanto

$$g(z) = \frac{z}{z - 1} + \frac{z}{(z - 1)^2},$$

e pertanto, in base agli Esempi 19.1.9 (parte (ii)) e 19.1.12, troviamo che la antitrasformata zeta di g nella corona $\{|z| > 1\}$ è $g_n = 1 + n$ per $n \geq 0$ e $g_n = 0$ per $n < 0$.

Alternativamente, avremmo potuto ricavare questo risultato con il metodo di (20.4), come convoluzione delle antitrasformate di h e f , ossia come la convoluzione $\mathbf{h} * \mathbf{h} = \{h_n\} * \{h_n\}$. In questo modo ci si riduce alla ovvia identità $\mathbf{h} * \mathbf{h}(n) := \sum_{m=0}^n 1 \cdot 1 = n + 1$. \square

Esercizio 20.1.5. Seguendo i due metodi illustrati nel precedente Esempio 20.1.4, si consideri il problema

$$g_n + 2g_{n-1} = f_n$$

e si mostri che:

- se $f_n = 1$ per $n \geq 0$ e 0 altrimenti, allora la soluzione causale (corrispondente alla corona $\{|z| > 2\}$) è $g_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^n$;
- se $\mathbf{f} = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2$, ossia $f_n = \delta_{n0} + \delta_{n1} + \delta_{n2}$ (terminologia della Notazione 19.1.2), allora la soluzione causale è $g_0 = 1$, $g_1 = -1$ e $g_n = \frac{3}{4}(-2)^n$ per $n > 2$. (Si riverifichi anche il valore di g_0 mediante la proprietà del valore iniziale, parte (viii) del Teorema 19.1.6.)

\square

20.2 Sistemi a tempo discreto: filtri digitali lineari di ordine finito

Una parte rilevante del contenuto di questa Sezione è stata già esaminata nella Sezione 17.1.1, nel contesto più generale di segnali anche a tempo continuo: incoraggiamo il lettore a rivedere quella presentazione, che utilizza esplicitamente l'ipotesi di invarianza per traslazione temporale, che qui è implicitamente verificata (si veda oltre, dopo la definizione (20.6)).

Definizione 20.2.1. (Filtri digitali lineari di ordine finito.) Un *sistema a tempo discreto invariante per traslazione temporale*, detto anche *filtro digitale lineare*, è una relazione lineare che lega una successione generica in input con una successione incognita in output, e quindi è una equazione alle differenze di ordine finito che trasforma un segnale in input discreto nel

tempo in un segnale discreto in output. Riscriviamo questa equazione alle differenze in forma più esplicita rispetto a (20.1), in maniera da evidenziare l'eventualità che il numero di termini in input ed in output sia diverso: per un fissato $m > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}$,

$$g_n + b_1 g_{n-1} + \cdots + b_m g_{n-m} = a_0 f_n + a_1 f_{n-1} + \cdots + a_r f_{n-r}, \quad (20.6)$$

ossia

$$\mathbf{b} * \mathbf{g} = \mathbf{a} * \mathbf{f},$$

dove $\mathbf{b} = \{1, b_1, \dots, b_m, 0, 0, \dots\}$ e $\mathbf{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_r, 0, 0, \dots\}$. Il massimo fra i gradi m e n si chiama l'*ordine* del fitro. Si osservi che un filtro digitale lineare è *di ordine* n se la sua funzione di trasferimento è la funzione razionale data dal quoziente di due polinomi di grado n e m (e quindi il filtro ha n zeri e m poli complessi: i poli sono gli zeri del denominatore). Più precisamente, ci sono n zeri e m poli tranne che nel caso in cui uno zero al numeratore sia cancellato dallo stesso zero al denominatore (nel qual caso la funzione di trasferimento è una funzione razionale in cui il fattore comune si semplifica, dando così luogo a numeratore e denominatore di grado inferiore a n e m). Per questo motivo, un filtro zeta-ammissibile di ordine finito si chiama talvolta *filtro (con funzione di trasferimento) razionale*.

Questa formulazione chiarisce che il sistema è invariante per traslazione temporale: i coefficienti \mathbf{a} e \mathbf{b} non dipendono da n .

Assumiamo d'ora in poi di limitare l'attenzione ad input di ordine finito, zeta-ammissibili: allora, in base al Teorema di convoluzione 19.3.2, le trasformate zeta g , f delle successioni $\{g_n\}$ e $\{f_n\}$ soddisfano

$$q(z)g(z) = p(z)f(z) \quad (20.7)$$

dove

$$p(z) = \sum_{i=0}^m a_i z^{-i} \quad q(z) = 1 + \sum_{i=1}^r b_i z^{-i}. \quad (20.8)$$

A questo punto, da (20.2) otteniamo

$$g(z) = h(z)f(z), \quad (20.9)$$

dove h è la funzione di trasferimento

$$h(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^r b_i z^{-i}} = z^{r-m} \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{m-i}}{z^r + \sum_{i=1}^r b_i z^{r-i}} \quad (20.10)$$

(si vedano anche la definizione dopo l'identità (20.2) e la Definizione 17.1.2). L'identità (20.9) finalmente spiega il nome *funzione di trasferimento*. Infatti, consideriamo il caso dell'input dato da un impulso iniziale, ovvero un segnale dato da un unico impulso al tempo zero: δ_0 nella Notazione 19.1.2. In tal caso, segue da (20.9) che $g(z) \equiv h(z)$, ossia che la risposta all'impulso $\{g_n\}$ è esattamente la successione $\{h_n\}$ la cui trasformata zeta è la funzione di trasferimento h . Quindi, in termini di trasformate zeta, la funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto descrive la sua risposta all'impulso, ossia a quale output il sistema discreto trasferisce l'input dato dall'impulso iniziale.

Nota 20.2.2. Nel caso di un input generico zeta-ammissibile \mathbf{f} , segue dall'identità (20.9) e dal Teorema di convoluzione 19.3.2 che l'output \mathbf{g} del sistema discreto è la convoluzione dell'input con la risposta impulsiva:

$$\mathbf{g} = \mathbf{h} * \mathbf{f}, \quad (20.11)$$

ossia

$$g_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j h_{n-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{n-j} h_j \quad (20.12)$$

(si veda la Proposizione 17.1.4). \square

Da (20.7) e (20.8) (o equivalentemente, da (20.9) e (20.10)) segue

$$z^r g(z) = f(z) z^{r-m} \sum_{i=0}^m a_i z^{m-i} - g(z) \sum_{i=1}^r b_i z^{r-i}$$

ossia

$$g(z) = f(z) z^{-m} \sum_{i=0}^m a_i z^{m-i} - g(z) \sum_{i=1}^r b_i z^{-i} = f(z) \sum_{i=0}^m a_i z^{-i} - g(z) \sum_{i=1}^r b_i z^{-i} \quad (20.13)$$

Ora, applicando la trasformata zeta inversa ed il Teorema di convoluzione 19.3.2, da (20.13) otteniamo:

Proposizione 20.2.3. (*Espressione iterativa dell'output di un sistema discreto.*)

$$g_n = \sum_{i=0}^m a_i f_{n-i} - \sum_{i=1}^r b_i g_{n-i}. \quad (20.14)$$

Fattorizzando i polinomi p e q al numeratore ed al denominatore dell'ultimo membro di (20.10) rispetto alle loro rispettive radici $\{z_\mu\}$ e $\{z_\nu\}$, possiamo riscrivere l'espressione razionale all'ultimo membro di (20.10) come

$$h(z) = a_0 z^{r-m} \frac{\prod_{\mu=1}^m (z - z_\mu)}{\prod_{\nu=1}^r (z - z_\nu)} = a_0 \frac{\prod_{\mu=1}^m (1 - \frac{z_\mu}{z})}{\prod_{\nu=1}^r (1 - \frac{z_\nu}{z})}. \quad (20.15)$$

Nota 20.2.4. Ogni fattore $1 - \frac{z_\mu}{z}$ nell'ultimo membro di (20.15) produce (se $z_\mu \neq 0$) uno zero a $z = z_\mu$ ed un polo a $z = 0$; se il fattore si trova al denominatore, questo porta rispettivamente ad un polo ed ad uno zero della funzione di trasferimento $h(z)$. Quindi il numero complessivo di poli e zeri è identico. Osserviamo invece che, nel caso in cui la radice z_μ sia nell'origine (ossia $z_\mu = 0$), il fattore $1 - \frac{z_\mu}{z}$ vale identicamente 1, e quindi il contributo è inessenziale. In generale, per evitare banalità, restringiamo l'attenzione a poli e zeri non ubicati a 0 o infinito: allora i poli possono non essere tanti quanti gli zeri, ed ha senso la seguente notazione 20.2.5. \square

Notazione 20.2.5. (*Filtri AP e filtri AZ.*) Un filtro con soli zeri (nel senso della precedente Nota 20.2.4, ossia con fattori polinomiali solo al numeratore dell'ultima frazione dell'identità 20.15) si denota come *filtro AZ*. Un filtro con soli poli si denota come *filtro AP*. Un filtro la cui funzione di trasferimento ha sia poli sia zeri non banali (ossia al finito e non nulli) si indica con *filtro PZ*.

20.2.1 Filtri digitali causali e stabili

In analogia ai filtri causali a tempo continuo precedentemente introdotti nella Definizione 17.1.7, ora consideriamo filtri (discreti) causali, ossia filtri che mandano segnali (discreti) causali in segnali (discreti) causali:

Definizione 20.2.6. Un filtro si dice *causale* se per ogni istante n_0 l'output $\{g_n\}$ dipende solo dai valori dell'input $\{f_n\}$ per tempi passati, $n \leq n_0$. Un filtro si dice *anticausale*, o *puramente predittivo*, se $\{g_n\}$ dipende solo dai valori dell'input $\{f_n\}$ per tempi futuri, $n \geq n_0$.

Nota 20.2.7. Un filtro non causale non ha significato fisico se il filtro deve modellare la risposta di un sistema fisico interattivo in tempo reale, ma ce l'ha se il filtro deve agire dopo che l'intero segnale in input è stato ricevuto ed immagazzinato: ad esempio, sono di questo tipo i filtri che agiscono

sul contrasto di un'immagine (*unsharp mask*, *compressione JPEG*, *sfocatura Gaussiana* e tutti i filtri per le immagini nel linguaggio Java che impiegano la classe *BufferedImage*). \square

Corollario 20.2.8. *Un filtro è causale se e solo se la sua risposta all'impulso $\{h_n\}$ è un segnale causale: $h_n = 0$ per $n < 0$.*

Dimostrazione. Questo fatto segue direttamente dall'identità (20.12).

\square

Nota 20.2.9. Segue da (20.12) e dal precedente Corollario 20.2.8 che un filtro digitale (ovvero sistema a tempo discreto invariante per traslazione) è causale se e solo se la sua risposta $\{g_n\}$ all'input generico $\{f_n\}$ è

$$g_n = \sum_{j=-\infty}^n f_j h_{n-j} = \sum_{j=-\infty}^n f_{n-j} h_j.$$

Se anche l'input è causale, ossia $f_n = 0$ per $n < 0$ (ovvero, se il sistema discreto è imperturbato ed a riposo per tempi $n < 0$, allora la risposta si può riscrivere così:

$$g_n = \sum_{j=0}^n f_j h_{n-j} = \sum_{j=0}^n f_{n-j} h_j.$$

Quest'ultimo caso è quello abituale nelle applicazioni ai filtri interattivi in tempo reale, ossia quelli che non agiscono solo dopo che tutti i dati in input sono stati memorizzati, bensì agiscono direttamente man mano che arrivano i dati (si veda la Nota 20.2.7). \square

Corollario 20.2.10. *Un filtro razionale (ossia di ordine finito) è causale se e soltanto se come regione di convergenza della sua funzione di trasferimento h si sceglie una corona $\{|z| > d\}$ (dove h non ha singolarità, e quindi tutti i poli di h hanno modulo inferiore a d), e*

$$h(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^i}{\sum_{i=0}^r b_i z^i}$$

è tale che i gradi m e r di numeratore e denominatore verificano la disuguaglianza $m \leq r$ (o equivalentemente, se e soltanto se, nella formulazione di (20.15),

$$h(z) = h(z) = z^{r-m} \frac{1}{z^r} \sum_{i=0}^m a_i z^{m-i} = a_0 \frac{\prod_{\mu=1}^m (1 - \frac{z_{\mu}}{z})}{\prod_{\nu=1}^r (1 - \frac{z_{\nu}}{z})},$$

si ha $m \leq r$).

Dimostrazione. La funzione di trasferimento è la trasformata zeta della risposta all'impulso $\{h_n\}$. Dal precedente Corollario 20.2.8 segue che il filtro è causale se e solo se la risposta all'impulso è un segnale causale. Allora, dalla Nota 19.1.3, questo equivale a dire che la funzione di trasferimento h converge all'esterno di un disco di raggio finito, e quindi non ha singolarità all'infinito. A sua volta, questo equivale alla condizione che il grado del numeratore sia non superiore a quello del denominatore, altrimenti h divergerebbe all'infinito. \square

Definizione 20.2.11. Se un filtro non è causale, sappiamo dal precedente Corollario 20.2.8 che la sua risposta all'impulso $\{h_n\}$ non è causale, ossia $h_n \neq 0$ per qualche $n < 0$. In tal caso poniamo

$$\begin{aligned} h_n^+ &= h_n & \text{se } n \geq 0, & & h_n^+ &= 0 & \text{se } n < 0 \\ h_n^\dagger &= h_n & \text{se } n \leq 0, & & h_n^\dagger &= 0 & \text{se } n > 0, \end{aligned}$$

e $h^+ = \mathcal{Z}(h^+)$, $h^\dagger = \mathcal{Z}(h^\dagger)$. In tal modo, per la linearità della trasformata zeta (Teorema 19.1.6), la funzione di trasferimento h si spezza come $h = h^+ + h^\dagger$. Il termine h^+ si chiama la parte causale, ed il termine h^\dagger si chiama la parte anticausale, o predittiva: la prima dà luogo ad un filtro la cui risposta dipende solo dall'input nel passato, la seconda invece implica una risposta che dipende dai dati nel futuro (si veda la Nota 20.2.7).

Definizione 20.2.12. La nozione di sistema stabile è già stata introdotta nella Definizione 17.1.5: il sistema a tempo discreto (ossia filtro) si dice stabile se manda input limitati in output limitati.

Abbiamo visto nella Proposizione 17.1.6 che questa definizione equivale a richiedere che la risposta all'impulso del filtro sia una successione ℓ^1 (lo spazio ℓ^1 è stato introdotto e studiato nella Sezione 1.7; rammentiamo che la dimostrazione della Proposizione 17.1.6 si basa sulla dualità (Sezione 11.3) e la disuguaglianza di Hölder (Teorema 1.16.6). Per comodità del lettore, ridimostriamo qui questo fatto:

Lemma 20.2.13. *Sia $g = h * f$. Allora $g \in \ell^\infty$ per ogni $f \in \ell^\infty$ se e solo se $h \in \ell^1$.*

Dimostrazione. Rammentiamo per prima cosa la ragione per cui $\|\mathbf{h}\|_1 < \infty$ implica $\|\mathbf{h} * \mathbf{f}\|_\infty < \infty$. Si tratta della disuguaglianza di Hölder appena citata, che si enuncia così: $\|\mathbf{h} * \mathbf{f}\|_\infty \leq \|\mathbf{h}\|_1 \|\mathbf{f}\|_\infty$. Per il lettore non si rammenta l'enunciato preciso della disuguaglianza di Hölder, nel caso presente stiamo solo dicendo che, per ogni n ,

$$\begin{aligned} |g_n| &= \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m f_{n-m} \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_m| |f_{n-m}| \leq (\max_j |f_j|) \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_m| \\ &= \|\mathbf{f}\|_\infty \|\mathbf{h}\|_1. \end{aligned}$$

Viceversa, supponiamo che si abbia $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_m| = \infty$, e mostriamo che in questo caso in generale $\mathbf{h} * \mathbf{f}$ non è limitato, anzi addirittura può non essere definito (può assumere valori infiniti). Basta scegliere f_n tale che $|f_n| = 1$ e $h_n f_{-n} = |h_n|$ (in altre parole, se $h_n = r e^{i\theta}$, poniamo $f_{-n} = e^{-i\theta}$). Allora $\|\mathbf{f}\|_\infty = 1$ ma $g_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m f_{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_m| = \infty$. \square

Corollario 20.2.14. *Un filtro lineare digitale causale (quindi con funzione di trasferimento convergente in una corona illimitata, Corollario 20.2.10) è stabile se e solo se tutti i poli z_ν della funzione di trasferimento verificano $|z_\nu| < 1$ (e si sceglie come regione di convergenza il complemento di un disco con centro l'origine e raggio minore di 1: si può scegliere come raggio il massimo degli $|z_\nu|$). Un filtro anticausale (ossia puramente predittivo: con funzione di trasferimento convergente in un disco con centro l'origine) è stabile se e solo se tutti i poli z_ν della funzione di trasferimento verificano $|z_\nu| > 1$ (e la regione di convergenza viene scelta come un disco con centro l'origine che non contiene questi poli).*

Dimostrazione. Abbiamo visto che un sistema è stabile esattamente se la sua risposta all'impulso $\mathbf{h} = \{h_n\}$ è sommabile: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_n| < \infty$. Supponiamo che un filtro stabile sia causale. Allora la sua funzione di trasferimento, ossia la trasformata zeta $h = \mathcal{Z}(\mathbf{h}) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n}$, è convergente nel dominio $|z| \geq 1$, e quindi tutti i suoi poli hanno modulo minore di 1. Viceversa, supponiamo che il filtro stabile sia anticausale: allora $h = \mathcal{Z}(\mathbf{h}) = \sum_{n=-1}^{-\infty} h_n z^{-n}$, è convergente nel dominio $|z| \geq 1$, e quindi tutti i suoi poli hanno modulo maggiore di 1. \square

Esempio 20.2.15. Abbiamo già visto che la causalità di un filtro non dipende solo dalla sua funzione di trasferimento e dalla ubicazione dei suoi poli, ma

anche dalla scelta della corona di convergenza di tale funzione. Questo lo abbiamo accennato nella Nota 19.1.10 e nell'esempio a cui essa si riferisce, Esempio 19.1.9, ma soprattutto nell'Esempio 20.2.15 e nell'Esercizio 19.2.9, in cui abbiamo considerato la funzione

$$h(z) = \frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{a}{z - z_1} + \frac{b}{z - z_2}$$

come funzione di trasferimento di un sistema a tempo discreto. Tale sistema è

- un filtro causale nella corona circolare $C_+ = \{|z| > |z_2|\}$; in questa regione la risposta all'impulso $\{h_n\}$ è combinazione lineare dei due esponenziali $\{z_1^n\}$ e $\{z_2^n\}$ con $n \geq 0$: quindi il filtro è stabile se e solo se entrambi i poli z_1 e z_2 sono dentro il disco aperto di raggio 1 (infatti questo equivale al fatto che entrambi gli esponenziali siano in ℓ^1);
- un filtro non causale nella corona circolare $C_0 = \{|z_1| < |z| < |z_2|\}$; in questa regione la risposta all'impulso $\{h_n\}$ è combinazione lineare dei due esponenziali $\{z_1^n, n \geq 0\}$ e $\{z_2^n, n \leq 0\}$, quindi il filtro è stabile se e solo se $|z_1| < 1 < |z_2|$;
- un filtro non causale nel disco $C_- = \{|z| < |z_1|\}$; in questa regione la risposta all'impulso $\{h_n\}$ è combinazione lineare dei due esponenziali $\{z_1^n, n \leq 0\}$ e $\{z_2^n, n \leq 0\}$, quindi il filtro è stabile se e solo se z_1 e z_2 hanno modulo maggiore di 1.

Il lettore verifichi l'accordo fra questi risultati e la caratterizzazione della stabilità data nel Corollario 20.2.14. \square

Esercizio 20.2.16. Consideriamo una funzione di trasferimento razionale il cui numeratore ha grado m maggiore del grado del denominatore r . Sappiamo dal Corollario 20.2.10 che questo filtro non è mai causale. Ad esempio, si verifichino causalità e stabilità della funzione di trasferimento

$$h(z) = \frac{z^3}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

con $|z_1| < |z_2| < 1$, nella corona $\{|z| > |z_2|\}$.

Svolgimento. La divisione fra polinomi porta alla seguente espressione per h :

$$h(z) = z + \frac{z((z_1 + z_2)z - z_1z_2)}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

e da qui, decomponendo l'ultimo termine in frazioni parziali ed utilizzando come prima l'Esempio 19.1.11, otteniamo $h_n = 0$ per $n < -1$, $h_{-1} = 1$ e $h_n = (z_1^{n+2} - z_2^{n+2})/(z_1 - z_2)$ per $n \geq 0$. Ne segue che il filtro è stabile ma non causale.

Si completi l'esercizio trattando i casi $|z_1| < 1 < |z_2|$ e $1 < |z_1| < |z_2|$, ciascuno nelle corone $\{|z_1| < |z| < |z_2|\}$ e $\{|z| < |z_1|\}$. \square

20.2.2 Filtri stabili del primo e secondo ordine

È ovvio dal Corollario 20.2.14 che un filtro del primo ordine con funzione di trasferimento $h(z) = 1/(1 - az^{-1})$ è stabile se e solo se il suo polo $z = a$ è interno al disco unitario, ossia $|a| < 1$, ed analogamente per il generico filtro del primo ordine

$$h(z) = \frac{1 - \frac{b}{z}}{1 - \frac{a}{z}},$$

a meno che, naturalmente, non si abbia $a = b$, nel qual caso il filtro è banale (è l'operatore identità).

Esaminiamo allora il caso dei filtri del secondo ordine, a cui dedichiamo il seguente Esempio.

Esempio 20.2.17. (Triangolo di stabilità.) Consideriamo il filtro del secondo ordine con funzione di trasferimento

$$h(z) = \frac{b}{1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2}},$$

con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. I suoi poli sono gli zeri del denominatore, ubicati nei punti

$$z = \alpha_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-\frac{a_1}{\pm} \sqrt{a_1^2 - 4a_2} \right),$$

ed ovviamente (α_+ e α_- sono complessi coniugati, per cui $\alpha_+ + \alpha_-$ è reale e $\alpha_+\alpha_-$ è reale positivo. Si verifica immediatamente che

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\alpha_+ + \alpha_-) \\ a_2 &= \alpha_+\alpha_- . \end{aligned}$$

La condizione di stabilità, ossia che i poli siano all'interno del disco unitario (Corollario 20.2.14) diventa $|\alpha_{\pm}| < 1$. Ma allora

$$|a_2| = |\alpha_+ \alpha_-| < 1. \quad (20.16)$$

Inoltre $p(x) := (x - \alpha_+)(x - \alpha_-) = x^2 + a_1x + a_2$ ha i suoi due zeri dentro il disco unitario, e quindi è positivo al di fuori dell'intervallo $(-1, 1)$. Leggendo i valori di p ai punti ± 1 si vede che $1 \pm a_1 + a_2 > 0$, ovvero

$$1 + |a_1| + a_2 > 0. \quad (20.17)$$

Viceversa, svolgendo lo stesso calcolo a ritroso, si vede che le due condizioni (20.16) e (20.17) implicano che a_1 e a_2 abbiano valore assoluto minore di 1, e quindi equivalgono alla stabilità del filtro con funzione di trasferimento h come sopra. Queste condizioni equivalgono a richiedere che la coppia (a_1, a_2) appartenga al triangolo con vertici in $(\pm 2, 1)$ e $(0, -1)$: si verifica subito che la parte di questo triangolo che appartiene al paraboloide $a_1^2 - a_2 > 0$ corrisponde a poli α_1 e α_2 complessi coniugati ma non reali, e la parte al di sotto del paraboloide corrisponde a poli reali. \square

20.2.3 Risposta all'impulso di filtri causali razionali

Esempio 20.2.18. (Risposta all'impulso di un filtro con un solo polo o con un polo ed uno zero.)

(i) Rammentiamo che la funzione

$$h(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}$$

è la trasformata zeta della successione esponenziale $a^n \mathbf{1}_+ \equiv \{a^n\}_{n \geq 0}$ (Esempio 19.1.11), ossia la trasformata zeta causale (Notazione 19.1.2) della successione esponenziale $\{a^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Sia allora $\alpha_h = \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ il filtro che ha come funzione di trasferimento h : ovviamente la sua risposta all'impulso al tempo zero è $\alpha_0 = \alpha_h$, e quindi la sua funzione di trasferimento deve essere $h = \mathcal{Z}(\alpha_h)$. Ne segue che, se si sceglie come regione di convergenza la corona esterna a tutti i poli (ossia se si sceglie il filtro come causale, in base al Corollario 20.2.10), allora questo determina una unica trasformata zeta inversa (come visto nella Nota 19.1.10), ed in questo caso la risposta all'impulso è $\mathcal{Z}^{-1} h = a^n \mathbf{1}_+ = \{a^n\}_{n \geq 0}$.

(ii) Osservando che la funzione $g(z) = 1 - \frac{b}{z}$ è la trasformata zeta della successione $\mathbf{g} = \{1, -b\} = \delta_0 - b\delta_1$, vediamo dalla parte (i) e dal teorema di moltiplicazione e convoluzione per la trasformata zeta (Teorema 19.3.6) che la risposta all'impulso del filtro \mathbf{f} con funzione di trasferimento

$$f(z) = \frac{1 - \frac{b}{z}}{1 - \frac{a}{z}}$$

è

$$\mathbf{f} = (a^n \mathbf{1}_+) * \mathbf{g} = (a^n \mathbf{1}_+) * (\delta_0 - b\delta_1) = a^n \mathbf{1}_+ - b(a^n \mathbf{1}_+ * \delta_1).$$

Poiché, data una successione $\mathbf{a} = \{a_0, a_1, \dots\}$ (che possiamo supporre nulla per $n < 0$), si ha $\mathbf{a} * \delta_1(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k} \delta_1(k) = a_{n-1}$, da questo segue $\mathbf{f}_n = a^n \mathbf{1}_+(n) - ba^n \mathbf{1}_+(n-1)$, ossia

$$f(n) = \begin{cases} a^n - ba^{n-1} & \text{se } n > 0, \\ 1 & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

□

La parte (i) del precedente Esempio 20.2.18 si generalizza immediatamente come segue:

Proposizione 20.2.19. (Risposta all'impulso di un filtro digitale causale razionale (ossia di ordine finito.) Consideriamo il filtro α_h di ordine $n = \max\{m, r\}$ (Definizione 20.2.1) con funzione di trasferimento

$$h(z) = a_0 \frac{\prod_{\mu=1}^m (z - z_\mu)}{\prod_{\nu=1}^r (z - z_\nu)} = a_0 \frac{\prod_{\mu=1}^m (1 - \frac{z_\mu}{z})}{\prod_{\nu=1}^r (1 - \frac{z_\nu}{z})}$$

e supponiamo che i poli siano semplici (ossia che non coincidano: nel caso di poli multipli, si generalizzi quanto segue alla luce dell'Esempio 19.2.11). Come nell'Esempio 19.2.7, sviluppiamo la frazione in frazioni parziali.

(i) Se $m < r$, lo sviluppo in frazioni parziali è del tipo

$$h(z) = \sum_{\nu=1}^r \frac{A_\nu}{1 - \frac{z_\nu}{z}},$$

e, se il filtro è causale (ossia se si sceglie come regione di convergenza della sua funzione di trasferimento la corona esterna a tutti i poli: Corollario 20.2.10), la risposta all'impulso, data dall'unica inversa della funzione di trasferimento (come nel precedente Esempio 20.2.18), è

$$\alpha_n = \sum_{\nu=1}^r \{A_\nu z_\nu^n\}_{n \geq 0} = \sum_{\nu=1}^r A_\nu z_\nu^n \mathbf{1}_+$$

(qui $\mathbf{1}_+$ è la funzione caratteristica degli interi positivi della Notazione 19.1.2).

(ii) Se $m \geq r$, lo sviluppo in frazioni parziali è del tipo

$$h(z) = \sum_{\mu=0}^{m-r} \frac{B_\mu}{z-\mu} + \sum_{\nu=1}^r \frac{A_\nu}{1 - \frac{z_\nu}{z}},$$

e, scegliendo di nuovo come regione di convergenza la regione esterna a tutti i poli (così da avere un'unica inversa della trasformata zeta $\mathcal{Z}^{-1} h$), in base alla parte (i) dell'Esempio 19.1.5 la risposta all'impulso ora è

$$\alpha_n = \sum_{\mu=0}^{m-r} B_\mu \delta_{\mathbf{0}}(n - \mu) + \sum_{\nu=1}^r A_\nu z_\nu^n \mathbf{1}_+.$$

Si noti che, a causa dei termini anticausali $\delta_{\mathbf{0}}(n - \mu)$, il filtro ora non è causale, come del resto sappiamo già dal Corollario 20.2.10.

(iii) Segue in particolare dalla parte (ii) che, se $r = 0$ (ossia la funzione di trasferimento ha solo zeri ma nessun polo), allora $h(z) = \sum_{\mu=0}^m \frac{B_\mu}{z-\mu}$ e la risposta all'impulso è $\alpha_n = \sum_{\mu=0}^m B_\mu \delta_{\mathbf{0}}(n - \mu)$: ossia, la risposta all'impulso è di lunghezza temporale finita (finite impulse response, o FIR). Questi filtri sono ovviamente di grande importanza per le applicazioni, e li riconsideriamo più in dettaglio nella prossima Nota.

Nota 20.2.20. (Filtri IIR e FIR.) In vista della sua importanza applicativa, riassumiamo in questa Sottosezione quanto visto nella precedente Proposizione 20.2.19.

In base alle identità (20.12), (20.9), (20.7) ed alla formula di inversione (19.6), la risposta del filtro all'input \mathbf{f} dipende solo dai residui ai poli di hf : pertanto, al variare di f , la risposta tipica del filtro dipende solo dai residui ai poli di h , e questi poli sono esattamente gli zeri del denominatore q .

Possiamo dire di più. Decomponendo la trasformata zeta con il metodo delle frazioni parziali (Esempi 19.2.7 e 19.2.11), arriviamo a termini del tipo $1/(z - z_\nu)$ oppure $z^k/(z - z_\nu)$. Se almeno uno dei poli della funzione di trasferimento (ossia uno degli zeri z_ν) è non nullo, allora vediamo dagli Esempi 19.1.11 e 19.1.12 che la risposta all'impulso del sistema discreto ha termini esponenziali, quindi a supporto infinito (la risposta continua indefinitamente nel futuro). Un tale sistema a tempo discreto si chiama *IIR* (*acronimo di Infinite Impulse Response*).

Invece, se tutti gli zeri z_ν del denominatore sono all'origine, ossia $z_\nu = 0$ per ogni $\nu = 0, \dots, r$, allora in (20.10) si ha $b_1 = b_2 = \dots = b_r = 0$, e

$$h(z) = z^{r-m} \frac{1}{z^r} \sum_{i=0}^m a_i z^{m-i} = \frac{1}{z^m} \sum_{i=0}^m a_i z^{m-i} = \sum_{i=0}^m a_i z^{-i}.$$

Pertanto la risposta all'impulso $\{h_n\}$ è la trasformata zeta inversa

$$\mathcal{Z}^{-1} h = \sum_{i=0}^m a_i \delta_{-i},$$

in base alla parte (i) dell'Esempio 19.1.5. In questo caso, quindi, la risposta all'impulso vale zero dopo m istanti nel futuro, ed il sistema ritorna a riposo. Un tale sistema a tempo discreto si chiama *FIR* (*acronimo di Finite Impulse Response*).

È significativo osservare che, in base alla definizione (20.6) di sistema a tempo discreto, i sistemi FIR sono precisamente quelli in cui l'output g_n è una combinazione lineare degli input ai tempi $n, n-1, \dots, n-r$, senza feedback dei termini g_{n-1}, g_{n-2}, \dots . Per questa ragione, a volte i filtri FIR vengono chiamati *non ricorsivi*. \square

20.3 Analisi spettrale di filtri digitali lineari

Consideriamo un filtro con risposta all'impulso $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Sappiamo da (20.12) che la sua risposta all'input oscillatorio $\{f_n = e^{i\omega n}\}$ è

$$g_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j e^{i\omega(n-j)} = e^{i\omega n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j e^{-i\omega j} = e^{i\omega n} \mathcal{Z}(\mathbf{h})(e^{i\omega}).$$

Nota 20.3.1. Si osservi che il fattore $\mathcal{Z}(\mathbf{h})(e^{i\omega}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j e^{-i\omega j}$ coincide con la serie di Fourier della risposta all'impulso, ed al tempo stesso con la trasformata di Fourier della distribuzione discreta data dall'istogramma della risposta all'impulso (si riveda l'inizio del Capitolo 19). Questo fattore, una serie di Fourier, è la restrizione ai numeri complessi di modulo 1 della funzione di trasferimento

$$h(z) := \mathcal{Z}(\mathbf{h})(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j z^{-j}. \quad (20.18)$$

□

In particolare, in risposta all'input puramente oscillatorio considerato qui, il filtro si diagonalizza, ossia agisce così:

$$g_n = h(e^{i\omega}) f_n.$$

Definizione 20.3.2. (Spettro in frequenza di un filtro; sua ampiezza e fase; ritardo di gruppo.) La funzione $h(e^{i\omega})$ si chiama la *risposta in frequenza complessa*, o *spettro* del filtro: scriviamola in coordinate polari,

$$h(e^{i\omega}) = \operatorname{Re} h(e^{i\omega}) + i \operatorname{Im} h(e^{i\omega}) = A(\omega) e^{i\phi(\omega)},$$

ed introduciamo una funzione positiva della frequenza $A(\omega)$ che si chiama la *ampiezza della risposta in frequenza*, ed una funzione $\phi(\omega)$ a valori nell'intervallo $[-\pi, \pi)$ che si chiama *fase della risposta in frequenza*.

La funzione $\tau(\omega) = -D_\omega \phi(\omega)$ si chiama il *ritardo di gruppo* del sistema discreto, e misura il ritardo medio del sistema al variare della frequenza; è facile esprimere τ in termini di h :

$$\tau(\omega) = -\operatorname{Re} \left(z \frac{d}{dz} \ln h \right) \Big|_{z=e^{i\omega}}.$$

Esercizio 20.3.3. Si consideri il filtro con funzione di trasferimento

$$h(z) = \frac{\frac{1}{z} - \bar{a}}{1 - \frac{a}{z}}$$

dove $a \in \mathbb{C}$ è tale che $|a| < 1$: in altre parole, l'unico polo, $z = a$, è interno al disco unitario, e l'unico zero, $z = 1/\bar{a}$, è il reciproco del suo complesso coniugato e quindi è esterno al disco. Pertanto questo filtro è causale (e

stabile se si prende per regione di convergenza l'esterno del disco unitario: Corollario 20.2.14).

Si calcoli il ritardo di gruppo di questo filtro e si mostri che vale

$$\tau(\omega) = \frac{1 - |a|^2}{|1 - ae^{-i\omega}|^2}.$$

In particolare, per questa classe di filtri lineari digitali, il ritardo di gruppo è sempre positivo, e quindi la fase ϕ della risposta è sempre decrescente. Questa classe di filtri verrà analizzata nella Sezione 20.4.3, e questa proprietà di decrescenza si tradurrà nella parte (ii) della Proposizione 20.4.10.

□

Ora consideriamo la risposta in frequenza $\mathbf{h} = \{h_n\}$ del filtro, e la sua *autocorrelazione*, ossia la convoluzione $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{h} * \bar{\mathbf{h}}^\dagger$ (il simbolo \dagger , introdotto in (8.3), rappresenta la parità $h_n^\dagger = h_{-n}$):

$$\psi_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j \overline{h_{j-n}}.$$

L'autocorrelazione è una successione importante nella teoria dei segnali, perché la sua velocità di decadimento è tanto più elevata quanto più il segnale è concentrato in un piccolo intervallo temporale (lasciamo verificare questa asserzione al lettore).

Dal Teorema 19.3.2 segue che la funzione $\Psi = \mathcal{Z}(\boldsymbol{\psi})$ verifica

$$\Psi(z) = h(z) \overline{h\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

(qui h è di nuovo, come in (20.18), la trasformata zeta della risposta all'impulso \mathbf{h}). Pertanto lo *spettro in frequenza dell'autocorrelazione* è

$$\Psi(e^{i\omega}) = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j e^{-i\omega j} \right) \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{h}_j e^{i\omega j} \right) = \overline{h(e^{i\omega})} h(e^{-i\omega}).$$

È ovvio da (20.18) che $\bar{h}(z) = \overline{h(\bar{z})}$. Quindi:

$$\Psi(e^{i\omega}) = |h(e^{-i\omega})|^2.$$

Questa funzione si chiama lo *spettro di energia* del filtro.

Nota 20.3.4. Osserviamo, come nella Nota 20.3.1, che i numeri ψ_n sono i coefficienti di Fourier della funzione periodica $\omega \mapsto \Psi(e^{i\omega})$: questa osservazione talvolta, nella teoria dei circuiti, si chiama il *teorema di Wiener–Kintchin*. Come conseguenza, segue dall'identità di Parseval per le serie di Fourier (Nota 4.3.3) che

$$\psi_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(e^{i\omega})|^2 d\omega.$$

Nella nostra modellizzazione, questo numero rappresenta l'energia della risposta all'impulso del filtro. \square

20.3.1 Risposta in frequenza di filtri causali

Rammentiamo (Corollario 20.2.14) che un filtro lineare causale è stabile se e solo se tutti i poli z_ν della funzione di trasferimento verificano $|z_\nu| < 1$ (e se, per rispettare la causalità, si sceglie come regione di convergenza il complemento di un disco con centro l'origine e raggio minore di 1). Il fatto che tutti i poli di h siano strettamente contenuti nel disco unitario porta ad un approccio geometrico al calcolo della risposta in frequenza del filtro. Consideriamo ad esempio il caso particolare di un solo polo e nessuno zero (rammentiamo, dal Corollario 20.2.10, che un filtro causale deve avere più poli che zeri). Allora

$$h(z) = \frac{1}{1 - \frac{z_0}{z}} = \frac{z}{z - z_0}. \quad (20.19)$$

Se facciamo variare $z = e^{i\omega}$ sul cerchio unitario otteniamo la risposta in frequenza

$$h(e^{i\omega}) = \frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega} - |z_0| e^{i\omega_0}}, \quad (20.20)$$

dove abbiamo scritto $z_0 = |z_0| e^{i\omega_0}$.

Nota 20.3.5. (Visualizzazione geometrica del modulo della risposta in frequenza: caso di un unico polo.) Nella precedente espressione (20.19), il numeratore ha ovviamente modulo 1. Quindi il modulo $|h(e^{i\omega})|$ è massimo dove il modulo del denominatore è minimo, ossia all'angolo ω_0 dato dalla fase ω_0 del polo z_0 , come si vede anche nella Figura 20.1, nella quale il modulo della risposta in frequenza è il rapporto delle lunghezze dei segmenti

che congiungono rispettivamente l'origine ed il polo z_0 al punto $z = e^{i\omega}$ che varia sul cerchio unitario: chiaramente questo rapporto è massimo quando i due segmenti sono allineati. Il valore minimo è esattamente $1/(1 - |z_0|)$. Si

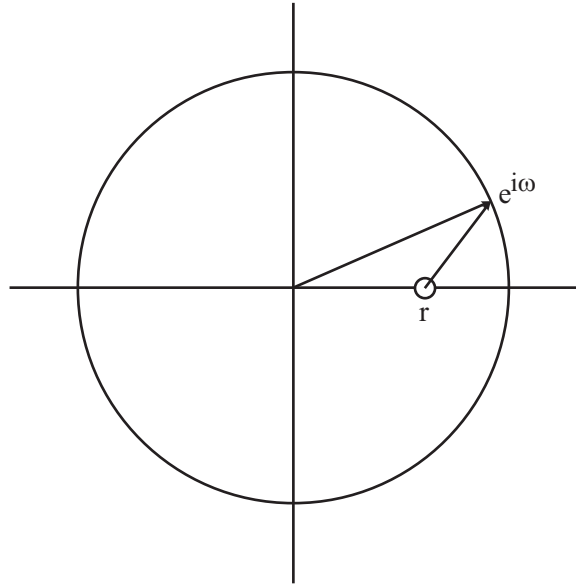


Figura 20.1: Il modulo della risposta in frequenza al punto $e^{i\omega}$ di un filtro con un solo polo z_0 (senza perdita di generalità disegnato sul semiasse reale positivo, al punto $r = |z_0|$) è il rapporto fra la lunghezza dei due segmenti che congiungono $e^{i\omega}$ con l'origine e con z_0 , la fase è la somma (algebrica) delle fasi dei numeri complessi rappresentati da questi segmenti. Ovviamente, il primo dei due segmenti ha lunghezza 1, quindi il modulo della risposta in frequenza all'angolo ω è semplicemente la lunghezza del segmento dal polo a $e^{i\omega}$

noti che il minimo modulo si ottiene per l'angolo *opposto* all'angolo di fase ω_0 , ossia quando i due segmenti di cui sopra sono di nuovo allineati ma il punto $e^{i\omega}$ sulla circonferenza è opposto al polo z_0 (il segmento che li congiunge passa per l'origine). Il valore del minimo è $1/(1 + |z_0|)$: qui si ottiene un avvallamento del grafico invece che un picco. Però, man mano che il polo si avvicina alla circonferenza unitaria, il corrispondente avvallamento è meno stretto del picco opposto, come illustrato nella prossima Nota. \square

Nota 20.3.6. (Larghezza di picchi frontali e valli opposte nel modulo della risposta in frequenza.) Il picco generato da un polo z_0 della funzione di trasferimento h in corrispondenza dell'angolo di fase $\omega_0 = \arg(z_0)$

è più stretto dell'avvallamento in corrispondenza dell'angolo opposto.

In effetti, esaminiamo la percentuale di caduta di $h(e^{i\omega})$ rispetto ai valori estremi agli angoli ω_0 e $-\omega_0$, in un identico intervallo angolare centrato a tali angoli. Indichiamo questi due settori angolari con $(\omega_0 - \omega_+, \omega_0 + \omega_+)$ e $(-\omega_0 - \omega_+, -\omega_0 + \omega_+)$, rispettivamente. La percentuale di diminuzione dei valori di $h(e^{i\omega})$ dal punto di massimo ω_0 all'estremo del settore $\omega_0 + \omega_+$ è

$$\Delta_+ := |h(e^{i(\omega_0 + \omega_+)})/h(e^{i\omega_0})|, \quad (20.21)$$

e la percentuale di aumento dal punto di minimo $-\omega_0$ a $-\omega_0$ è

$$\Delta_- := |h(e^{i(-\omega_0 + \omega_+)})/h(e^{-i\omega_0})|.$$

Vogliamo dimostrare che la caduta dei valori per deviazioni angolari in prossimità del picco è più marcata dell'aumento alla stessa deviazione angolare in prossimità della valle, ossia che $\Delta_+/(1/\Delta_-) = \Delta_+ \Delta_-$ è inferiore a 1.

Per semplicità, limitiamo l'attenzione ad una deviazione angolare che, vista da z_0 in direzione ω_0 , è pari a $\pi/2$: questa scelta semplifica i calcoli, perché, se senza perdita di generalità trasportiamo z_0 sul semiasse reale positivo ruotando il disco, allora il segmento da z_0 a $e^{i\omega_+}$ diventa verticale (ossia parallelo all'asse y : si veda la Figura 20.2). D'ora in avanti, senza perdita di generalità, assumiamo $\omega_0 = 0$ e $-\omega_0 = \pi$.

Scriviamo $r = |z_0|$ e chiamiamo $d(\omega)$ la lunghezza del segmento da z_0 a $e^{i\omega}$: dal teorema di Pitagora $d(\omega_+)$ è esattamente $\sqrt{1 - r^2}$, e quindi, in base a (20.19), $\Delta_+ = |h(e^{i\omega_+})| = 1/d(\omega_+) = 1/\sqrt{1 - r^2}$.

Invece, se consideriamo un settore angolare di identica ampiezza intorno a π e chiamiamo $\omega_- = \pi - \omega_+$ il suo angolo terminale, l'altezza del punto $e^{i\omega_-}$ rispetto alla sua proiezione $-r$ sull'asse x rimane uguale, ossia $\sqrt{1 - r^2}$. Questa altezza è il cateto verticale di un triangolo rettangolo che ha come terzo vertice $z_0 = r$, e, di nuovo per il teorema di Pitagora, abbiamo $d(\omega_-)^2 = 1 - r^2 + (2r)^2 = 1 + 3r^2$. Quindi $\Delta_- = |h(e^{i\omega_-})| = (1 + r)/d(\omega_-) = (1 + r)/\sqrt{1 + 3r^2}$.

Pertanto,

$$\Delta_+ \Delta_- = \sqrt{\frac{1 - r}{1 + r}} \frac{\sqrt{1 + 3r^2}}{1 + r} = \sqrt{\frac{1 - r^2}{1 + 3r^2}} < 1. \quad (20.22)$$

Il fatto che i picchi indotti da ciascun polo siano più stretti delle valli ad essi opposte ci induce a limitare l'attenzione solo ai primi, perché quando si

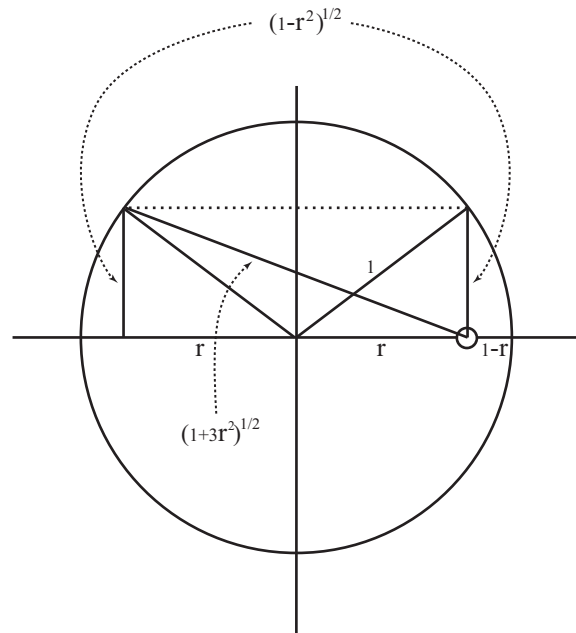


Figura 20.2: La caduta dei valori rispetto ai valori estremi della risposta in frequenza di un filtro dovuti ad un unico polo si calcola in termini delle lunghezze dei segmenti in questa figura: si veda (20.22)

sommano i contributi di parecchi poli, i picchi stretti rimangono abbastanza netti, mentre le valli larghe tendono a sommarsi e diventare meno percettibili. Come stiamo per vedere, la stessa cosa capita con gli zeri invece dei poli, i quali generano valli strette di fronte a sé e picchi larghi, poco interessanti, in direzione opposta: ma in questo caso, dal momento che i contributi degli zeri sono

$$h(z) = 1 - \frac{z_0}{z} = \frac{z - z_0}{z},$$

il fattore che diventa piccolo per $|z_0| \rightarrow 1$ è al numeratore e non al denominatore, e quindi i picchi sono comunque meno stretti di quelli prodotti dai poli, ed a maggior ragione le valli. Pertanto, l'andamento del modulo della risposta di fase di un filtro causale stabile è caratterizzato tipicamente dai picchi indotti dai poli della sua funzione di trasferimento, almeno se questi poli sono vicini alla circonferenza unitaria. Si noti infatti che, se i poli o gli zeri z non sono vicini alla frontiera del disco unitario, ossia se il loro modulo $r = |z|$ non è vicino a 1, i picchi e le valli si addolciscono (perché il massi-

mo $1/(1-r)$ diminuisce per r via via più piccolo: l'andamento esatto della larghezza del picco o della valle è data dall'identità (20.21)). \square

Nota 20.3.7. (Visualizzazione geometrica del modulo della risposta in frequenza: caso di più poli o zeri.) Più in generale, se al denominatore c'è più di un polo z_0, \dots, z_r , allora il modulo della risposta in frequenza è il prodotto dei rapporti di cui sopra che ciascun fattore contribuisce, e quindi ha un picco in prossimità di ciascuno degli angoli di fase $\omega_0, \dots, \omega_r$ dei rispettivi poli z_0, \dots, z_r (in prossimità e non esattamente a questi angoli, a causa dell'interferenza data dalla somma degli altri fattori). Si noti che quindi i massimi di $|h(e^{i\omega})|$ sono ubicati in vicinanza dei punti della circonferenza unitaria a distanza minima dai poli.

Ora veniamo al caso opposto in cui, invece di un fattore al denominatore di (20.19), abbiamo un fattore al numeratore, ossia uno zero z_0 . In tal caso il rapporto si rovescia e diventa

$$h(z) = 1 - \frac{z_0}{z} = \frac{z - z_0}{z}, \quad (20.23)$$

ed otteniamo un *minimo* di $|h(e^{i\omega})|$ in prossimità dell'angolo di fase di ciascuno zero. Quindi in tutti i casi la risposta in frequenza ha modulo con andamento ondulatorio, ma con picchi in prossimità delle fasi dei poli e valli vicino alle fasi degli zeri, o equivalentemente con picchi approssimativamente ai punti della circonferenza più vicini ai poli e valli nei punti più vicini agli zeri.

Si noti però che il contributo al modulo prodotto da uno zero ha contributo massimo molto minore di quello prodotto da un polo, almeno quando entrambi sono situati vicino alla circonferenza unitaria. Infatti, in questi due casi, vediamo da (20.20) e (20.23) che il massimo ed il minimo del modulo della risposta in frequenza valgono rispettivamente $1/(1-r)$ e $1/(1+r)$ per un polo, e $1+r$ e $1-r$ per uno zero: quindi l'escursione totale del modulo vale $(1+r)/(1-r)$ in entrambi i casi, ma per $r \sim 1$ il massimo modulo è molto maggiore per un polo che non per uno zero.

Si osservi che i poli devono essere contenuti nel disco unitario perchè stiamo limitando l'attenzione a filtri stabili, ma gli zeri no: però il ragionamento geometrico appena sviluppato per determinare l'ubicazione delle valli rimane valido: il punto estremo è comunque dato dall'allineamento dei due segmenti nella Figura 20.1, anche quando i due segmenti allineati sono da parti opposte rispetto alla circonferenza unitaria. \square

Nota 20.3.8. (Visualizzazione geometrica della fase della risposta in frequenza.) Invece, la fase della risposta in frequenza di $h(e^{i\omega})$ dovuta ad un solo polo è la differenza delle fasi fra numeratore e denominatore in (20.20), ossia degli angoli formati riapetto al semiasse x positivo dai due segmenti disegnati nella Figura 20.1. Nel caso di un solo zero si ha la stessa visualizzazione geometrica, ma cambia il segno del risultato a causa dello scambo fra numeratore e denominatore. Si noti quindi che, in valore assoluto, ciascun polo e zero dà luogo a fase nulla alla frequenza data dal punto $e^{i\omega_0}$ antistante sulla circonferenza unitaria, ed a fase massima (ossia π) nel punto antipodale $e^{-i\omega_0}$. Se vogliamo considerare anche filtri non stabili, con un polo od uno zero al di fuori del disco unitario, vale la stessa regola, come si può arguire da un disegno analogo a quello della Figura 20.1, ma il segno della fase diventa quello opposto: quindi al punto più vicino sulla circonferenza unitaria il polo dà luogo ad una fase di π , ed al punto antipodale fase 0.

Analogamente a quanto visto nella Nota 20.3.6, anche in questo caso la variazione di fase dovuta ad un polo o ad uno zero interno alla circonferenza unitaria ed ad essa vicino è molto più rapida della variazione di fase prodotta al punto antipodale (perché archi di uguale lunghezza al punto antistante ed al punto antipodale sottendono settori angolari diversi quando visti dal polo o zero, dal momento che il primo è vicino ed il secondo è lontano). Pertanto, come in quella Nota, le variazioni di fase ai punti antipodali sono più blande e trascurabili, e tendono maggiormente a compensarsi quando ci sono parecchi poli o zeri: noi le trascureremo sistematicamente.

Naturalmente, nel caso di più poli e zeri, la fase di $h(e^{i\omega})$ è sempre la somma delle fasi di tutti questi contributi (dei poli e degli zeri). Poiché ciascun polo o zero produce un contributo nullo alla fase nel punto antistante, è frequente che, con molti poli o zeri equidistribuiti interni al disco unitario, la fase abbia variazioni piccole. Questo fenomeno è in effetti evidenziato nella Figura ?? più sotto.

Viceversa, abbiamo visto che poli e zeri esterni al disco unitario producono una fase grande (π) al punto più vicino della circonferenza, ed una piccola (0) al punto antipodale, che come prima è a variazione lenta e trascurabile. Quindi, nel caso di molti poli o zeri equidistribuiti esterni al disco unitario, ci aspettiamo che la fase abbia variazioni grandi, da $-\pi$ a π per ogni polo e zero. Questo fenomeno è in effetti evidenziato nella Figura 20.14 più sotto.

□

Le seguenti figure illustrano vari esempi di modulo e fase della risposta in frequenza di filtri stabili.

Esempio 20.3.9. Consideriamo il filtro con funzione di trasferimento con un solo polo, al punto reale r , con $0 < r < 1$. Il diagramma di zeri e poli è illustrato in Figura 20.3.

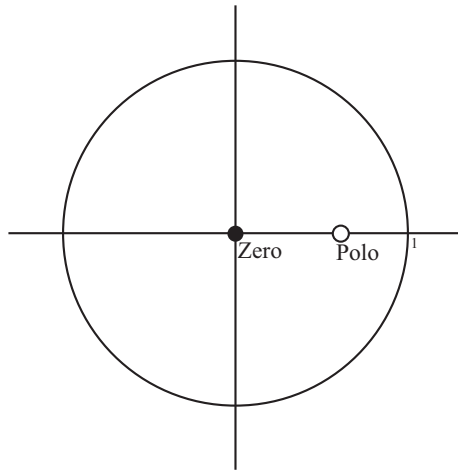


Figura 20.3: Diagramma di zeri e poli del filtro dell'Esempio 20.3.9: c'è un solo zero all'origine ed un solo polo al punto reale r , con $0 < r < 1$. In questi diagrammi gli zeri sono indicati con un pallino nero, i poli con un pallino vuoto; il contributo di zeri o poli all'origine è inessenziale (consiste del fattore 1)

La funzione di trasferimento di questo filtro, calcolata in (20.19), è

$$h(z) = \frac{1}{1 - rz^{-1}}.$$

Come visto nella parte (i) della Proposizione 20.2.19, ed anche nella Nota 20.2.20, la risposta all'impulso è a durata infinita: essa vale r^n per ogni $n \geq 0$ (Esempi 19.1.11 e 20.2.18). Si tratta quindi di un filtro IIR. Il modulo e la fase della risposta in frequenza si calcolano banalmente, e sono illustrati nelle Figure 20.4 e 20.5, rispettivamente.

Esaminiamo cosa succede se, invece che un solo polo al punto r , abbiamo un filtro la cui funzione di trasferimento ha un solo zero allo stesso punto.

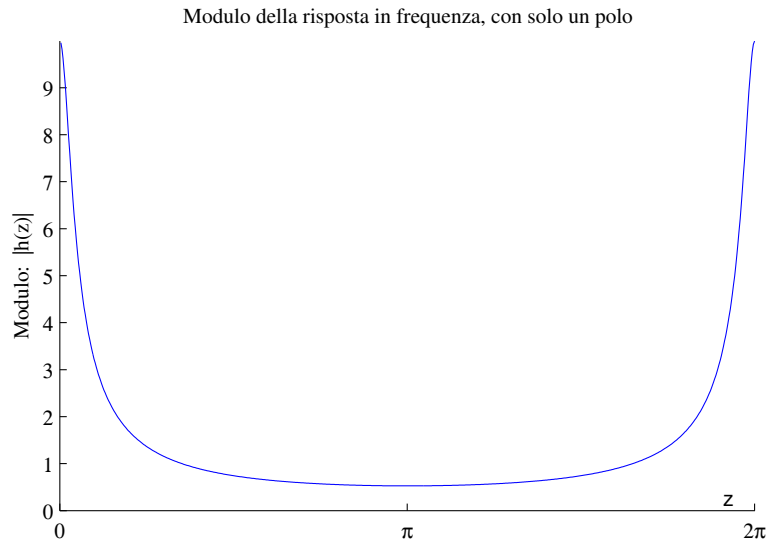


Figura 20.4: Modulo della funzione di trasferimento del filtro dell'Esempio 20.3.9, con un solo polo al punto r

I grafici della risposta in frequenza sono presentati nelle Figure 20.6 e 20.7, rispettivamente.

Notiamo che, come visto all'inizio di questa Sezione, la presenza di uno zero invece di un polo produce una valle antistante allo zero invece che un picco, ed anche che, come previsto nella Nota 20.3.6, nel caso di un polo il picco è più stretto della valle, nel caso di uno zero la valle è più stretta del picco ma ambedue sono meno strette che per il caso del polo, ed inoltre il massimo del modulo della risposta in frequenza prodotta dal polo è molto maggiore di quella prodotta dallo zero (circa 20 volte, che è appunto il valore di $(1+r)/(1-r)$ nel nostro caso, $r = 0.9$: è il rapporto dei massimi dei contributi in (20.19) e (20.23), calcolati subito dopo quest'ultima identità. \square

Esempio 20.3.10. Consideriamo il filtro causale (quindi con risposta nulla per $n < 0$, e di tipo FIR, con risposta all'impulso finita data da r^n per $0 \leq n \leq m$ (per un qualche $0 < r < 1$) e zero per $n > m$. La sua funzione di

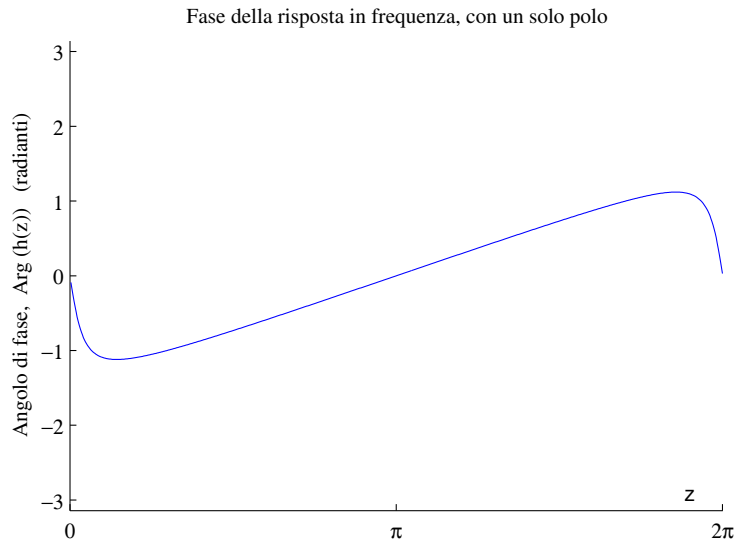


Figura 20.5: Fase della risposta in frequenza del filtro dell'Esempio 20.3.9, con un solo polo al punto r

trasferimento è

$$h(z) = \sum_{n=0}^{m-1} r^n z^{-n} = \frac{1 - r^m z^{-m}}{1 - r z^{-1}}.$$

Il numeratore di questa funzione di trasferimento ha m poli nel disco unitario, dello stesso modulo $r < 1$ ed angularmente equispaziati (quindi le loro fasi sono le radici m -sime dell'unità), ed ha $m - 1$ zeri inessenziali all'origine ed uno zero al punto reale r . Il diagramma di zeri e poli è illustrato in Figura 20.3 nel caso $m = 8$.

Però lo zero al denominatore al punto reale r bilancia il polo allo stesso punto, e ne cancella quindi il contributo alla risposta in frequenza (si tratta del contributo che era stato introdotto in (20.20)). Possiamo supporre che la funzione di trasferimento abbia altri $m - 1$ zeri nell'origine, il cui contributo è ininfluenza (è la costante 1). La funzione di trasferimento si riscrive così:

$$h(z) = \frac{1 - r^m z^{-m}}{1 - r z^{-1}} = \frac{z^m - r^m}{z^{m-1}(z - r)}.$$

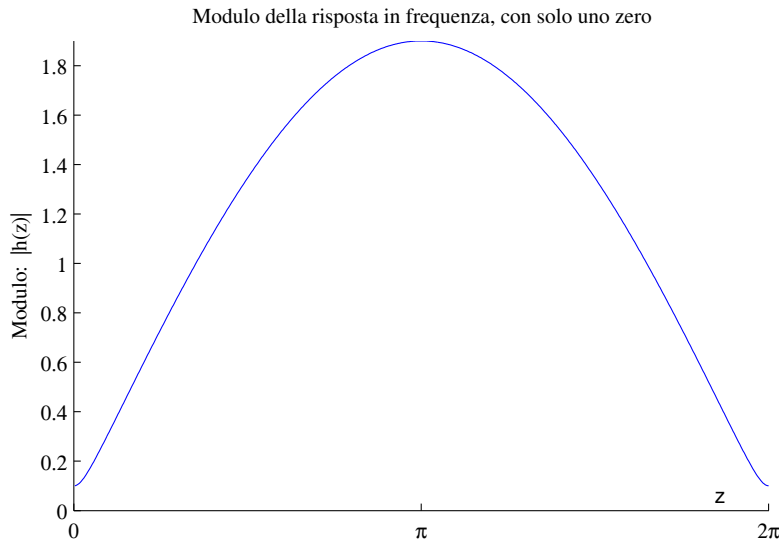


Figura 20.6: Modulo della funzione di trasferimento del filtro dell'Esempio 20.3.9, con un solo zero al punto r

I grafici del modulo e della fase di questa funzione di trasferimento sono presentati nelle Figure 20.9 e 20.10, rispettivamente, dove si è scelto $M = 8$ e $r = 0.9$ (per valori di r via via minori, l'ampiezza dei picchi si allarga e quindi i picchi interferiscono sommandosi fra loro e non si notano più). Si può verificare che le valli sono più larghe dei picchi, a conferma di quanto osservato nella Nota 20.3.6.

Si noti che la cancellazione del polo al punto reale r grazie ad uno zero ubicato allo stesso punto squilibra l'andamento della funzione di trasferimento: si perde il contributo del polo più vicino al punto 1, ossia alla fase 0, e quindi il grafico del modulo della funzione di trasferimento ha un minimo in zero (Figura 20.10). \square

Esempio 20.3.11. Modifichiamo il precedente Esempio 20.3.10 spostando all'origine il polo che prima era al punto reale r . La funzione di trasferimento allora diventa

$$h(z) = \frac{z^m - r^m}{z^m}.$$

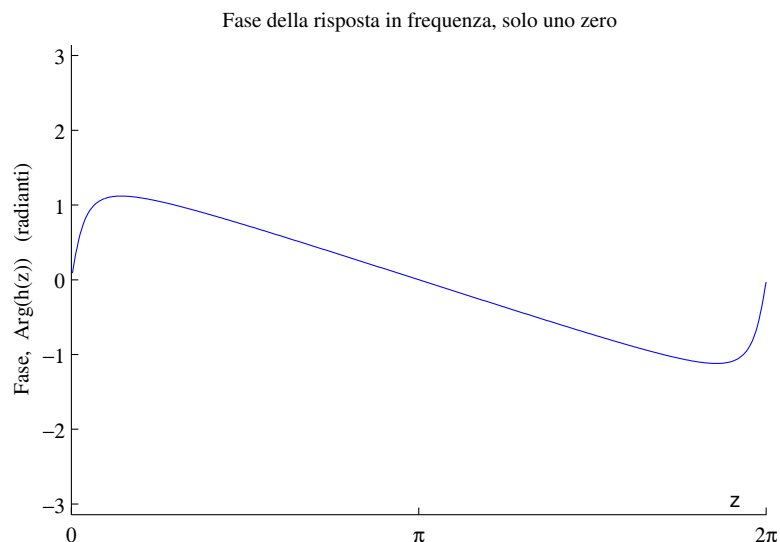


Figura 20.7: Fase della risposta in frequenza del filtro dell'Esempio 20.3.9, con un solo zero al punto r

L'andamento della funzione di trasferimento è ora simmetrico da un polo al successivo (ovvero periodica con periodo $2\pi/8$), come confermano i grafici nelle Figure 20.11 e 20.12.

Se rinominiamo h_1 la funzione di trasferimento del precedente Esempio 20.3.10, la funzione di trasferimento del presente Esempio si ottiene eliminando lo zero al denominatore di h_1 , e quindi è $h(z) = h_1(z)(1 - rz^{-1})$. La risposta all'impulso è quindi data dalla convoluzione della risposta all'impulso del filtro FIR dell'Esempio precedente e quella del filtro ad un solo polo dell'Esempio 20.3.9. Quest'ultima risposta all'impulso è infinita: r^n per $n \geq 0$. Quindi la convoluzione non è a supporto finito, ed il presente filtro è di tipo IIR.

Si noti anche che, rispetto alla nuova funzione di trasferimento h_1 dell'Esempio precedente, la nuova funzione di trasferimento h simmetrica (ossia periodica di periodo $\pi/4$) introdotta in questo Esempio, $h(z) = h_1(z)(1 - rz^{-1}) = h_1(z)(z - r)/z$ è moltiplicata per il fattore $(z - r)/z$, che sul cerchio unitario ha modulo $|z - r|$: quindi diminuisce fortemente vicino a questo zero, ossia

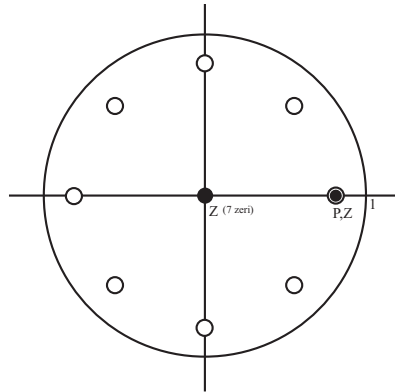


Figura 20.8: Diagramma di zeri e poli del filtro dell'Esempio 20.3.10: ci sono otto poli a distanza r dall'origine ed un solo zero al punto reale r , con $0 < r < 1$; possiamo introdurre 7 zeri inessenziali all'origine.



Figura 20.9: Modulo della funzione di trasferimento del filtro dell'Esempio 20.3.10

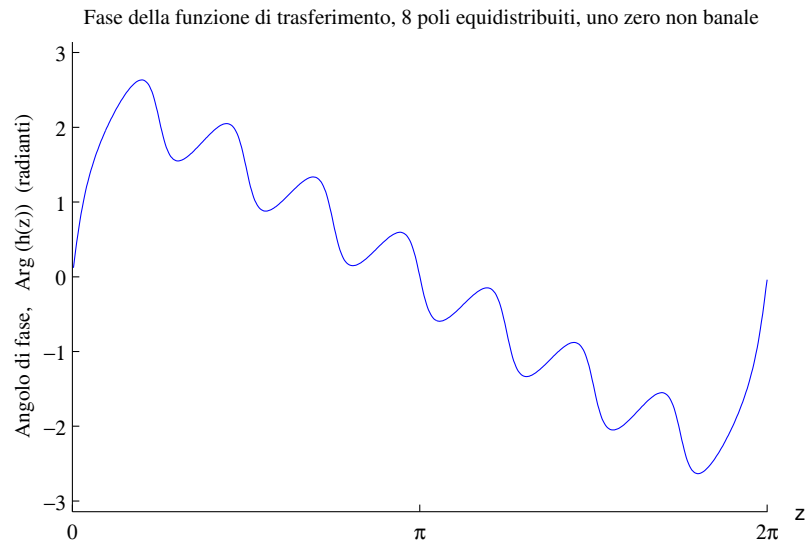


Figura 20.10: Fase della risposta in frequenza del filtro dell'Esempio 20.3.10

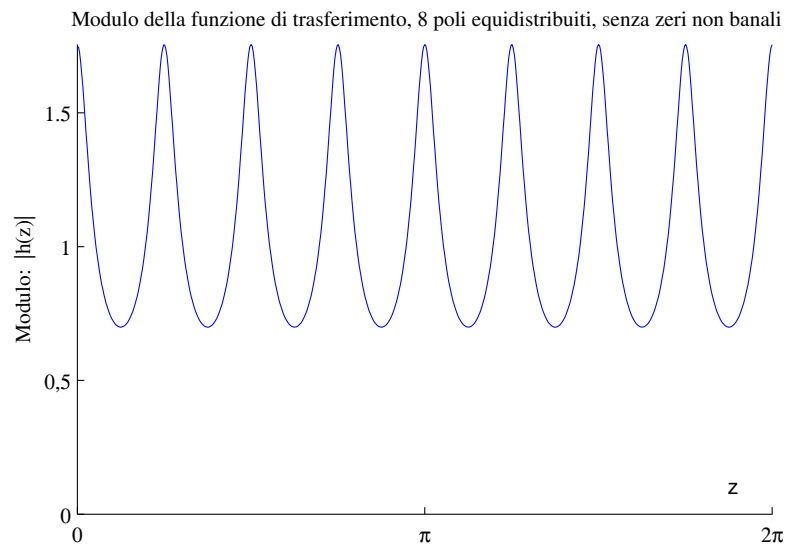


Figura 20.11: Modulo della funzione di trasferimento del filtro dell'Esempio 20.3.11

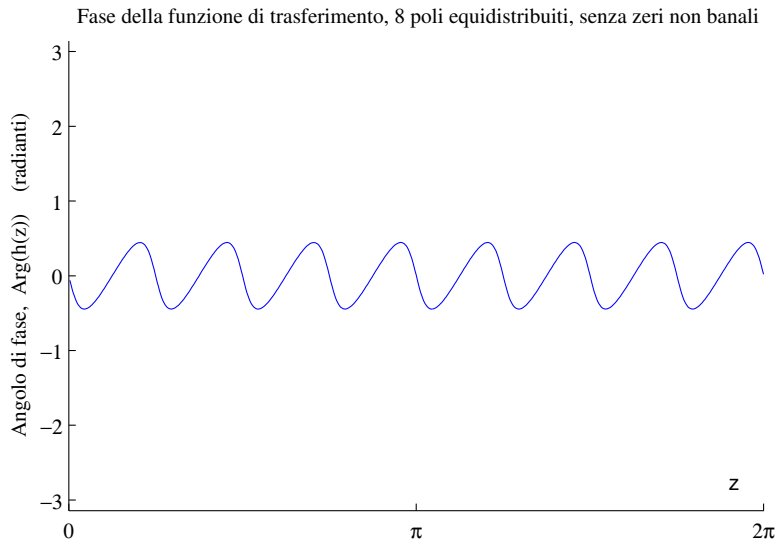


Figura 20.12: Fase della risposta in frequenza del filtro dell'Esempio 20.3.11

alla fase 0, ma aumenta alla fase opposta π (questo è un esempio del fenomeno di valle frontale e picco opposto indotto da uno zero, accennato nella Nota 20.3.6). \square

20.4 Sistemi invertibili, filtri a fase minima e passa-tutto, fattorizzazione

20.4.1 Invertibilità e filtri a fase minima; filtri a fase massima o mista

Un sistema si dice *invertibile* se la corrispondenza fra i segnali in input e in output è biunivoca. È ovvio che ogni filtro digitale lineare invertibile \mathbf{h} ha per inverso un altro filtro lineare \mathbf{h}_{inv} , e la composizione dei due è l'identità. Poiché questa composizione è data dalla convoluzione $\mathbf{h} * \mathbf{h}_{\text{inv}}$, segue dal Teorema di convoluzione 19.3.2 per la trasformata zeta che la funzione di trasferimento h_{inv} del filtro \mathbf{h}_{inv} è il reciproco della funzione di trasferimento h di \mathbf{h} , naturalmente subordinatamente al fatto che siano state scelte per queste

due funzioni di trasferimento regioni di convergenza con intersezione non vuota. La condizione di invertibilità, espressa in termini delle due funzioni di trasferimento, diventa quindi $h h_{\text{inv}} \equiv 1$, ed è valida solo nell'intersezione delle rispettive regioni di convergenza (che è l'intersezione di due corone circolari, e quindi una corona circolare essa stessa).

Riassumendo:

Corollario 20.4.1. *Se il fitro inverso di un fitro lineare esiste, esso si ottiene scambiando gli zeri dell'originale con i poli (ossia scambiando numeratore e denominatore della funzione di trasferimento $h(z)$), ed è definito su una regione di convergenza che interseca quella del fitro originale.*

Esempio 20.4.2. (L'inverso di un fitro non è unico.) Si consideri il fitro causale e FIR la cui risposta all'impulso al tempo zero, δ_0 , è $\mathbf{h}_n = \delta_0 - r\delta_1$, dove $0 < r < 1$. La sua funzione di trasferimento è la trasformata zeta di questa risposta, ossia $h(z) = 1 - r/z$, e quindi il fitro inverso ha la funzione di trasferimento

$$h_{\text{inv}}(z) = \frac{1}{1 - \frac{r}{z}},$$

con un polo al punto $z = r$: si tratta quindi di un fitro causale se si assume come regione di convergenza la corona $\{|z| > r\}$, ed in tal caso anche stabile (Corollari 20.2.10 e 20.2.14). Con questa scelta, la risposta all'impulso è data da

$$\mathbf{h}_{\text{inv}}(\mathbf{n}) = \mathbf{r}^{-\mathbf{n}}$$

per $n \geq 0$, e 0 per $n < 0$, come visto nell'Esempio 19.1.11, e poi di nuovo nell'Esempio 20.2.18 e nella Proposizione 20.2.19. Però, se si sceglie come regione di convergenza $\{|z| < r\}$, allora, con lo stesso argomento dell'Esempio 20.2.15, si vede che la risposta all'impulso è

$$\mathbf{h}_{\text{inv}}(\mathbf{n}) = -\mathbf{r}^{-\mathbf{n}}$$

per $n \leq 0$, e 0 per $n > 0$: quindi con questa scelta il fitro inverso è anti-causale. In tal modo abbiamo costruito due inversi differenti per lo stesso fitro, caratterizzati da differenti regioni di convergenza per la funzione di trasferimento. \square

Esercizio 20.4.3. Sia h la funzione di trasferimento

$$h(z) = \frac{1 - \frac{1}{4z}}{1 - \frac{1}{2z}} = \frac{z - \frac{1}{4}}{z - \frac{1}{2}}$$

considerata nella regione di convergenza $D = \{|z| > 1/2\}$. Allora la funzione di trasferimento del filtro inverso \mathbf{h}_{inv} è il reciproco,

$$h_{\text{inv}}(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{4}}$$

il quale ammette due regioni di convergenza: $D_- = \{|z| < 1/4\}$ e $D_+ = \{|z| > 1/4\}$. Solo la seconda interseca D , e quindi il filtro inverso deve essere considerato nella regione $D_+ \cap D = D_+$. In questa regione, come visto nella parte (ii) dell'Esempio 20.2.18, la risposta in frequenza del filtro inverso \mathbf{h}_{inv} è

$$\mathbf{h}_{\text{inv}}(n) = \frac{1}{4^n} \mathbf{1}_+(n) - \frac{1}{2} \frac{1}{4^n} \mathbf{1}_+(n-1),$$

ossia $\mathbf{h}_{\text{inv}}(n) = 1/2^{2n+1}$ per $n > 1$, $\mathbf{h}_{\text{inv}}(1) = 1/4$ e $\mathbf{h}_{\text{inv}}(n) = 0$ se $n \leq 0$. \square

20.4.2 Filtri a fase minima

Definizione 20.4.4. (Filtri a fase minima.) Un filtro lineare si dice a fase minima se è causale, stabile ed invertibile con inverso causale e stabile.

Corollario 20.4.5. *Un filtro è a fase minima se e solo se le regioni di convergenza del filtro e del suo inverso sono scelte in modo da contenere strettamente l'esterno del disco unitario e tutti gli zeri ed i poli sono contenuti nel disco unitario, o equivalentemente, se le risposte all'impulso $\{\mathbf{h}_n\}$ e $\{\mathbf{h}_{\text{inv}n}\}$ sono entrambi in ℓ^1 .*

Dimostrazione. Un filtro a fase minima è stabile, quindi tutti i suoi poli sono contenuti nel disco unitario aperto, ed anche il suo inverso è stabile, quindi la stessa asserzione vale per i poli dell'inverso, che sono gli zeri del filtro originale in base al Corollario 20.4.1. La causalità del filtro e del suo inverso si traducono nell'asserzione circa le loro corone di convergenza e circa il numero di zeri e poli grazie al Corollario 20.2.10. Infine, le condizioni $\sum_{n=0}^{\infty} |\mathbf{h}_n| < \infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |(\mathbf{h}_{\text{inv}})_n| < \infty$ equivalgono alla stabilità in base al Corollario 19.1.13 ed al fatto che i poli del filtro e del suo inverso devono essere di modulo minore di 1. \square

Esempio 20.4.6. (Riduzione della variazione di fase all'infittirsi di poli e zeri nel disco unitario.) Questo Esempio lascia capire la ragione

del nome *filtri a fase massima* per i filtri con zeri e poli angolarmente ben distribuiti interni al disco unitario. In effetti, come prefigurato nella Nota 20.3.8, ci aspettiamo che, con zeri e poli equidistribuiti nel disco unitario e vicini alla sua circonferenza, la fase abbia variazioni via via più piccole all'aumentare del numero di zeri e poli. La Figura 20.13 illustra il caso del filtro stabile con 2^2 poli e 2^n zeri inframmezzati, tutti di modulo $r = 0.9$, angolarmente equispaziati, per $n = 3, 4, 5$: l'escursione della fase diminuisce al crescere di n , come previsto.

□

Esempio 20.4.7. (Filtri a fase massima.) Sempre in base alla Nota 20.3.8, ci aspettiamo che, nel caso di k zeri e poli equidistribuiti esterni al disco, la fase abbia variazioni che si mantengono sempre massime (ossia con escursione fra $-\pi$ e π) e via via più ripide all'aumentare del loro numero k . In effetti, le Figure ??, ?? e ?? illustrano l'andamento della fase dei filtri (stabili anticausali, come vedremo nelle prossime righe) con gli stessi poli e zeri angolarmente equidistribuiti ed inframmezzati del precedente Esempio 20.4.6, ma ora spostati radialmente fuori del disco (abbiamo aumentato il valore di r a 1.1). Nelle tre figure abbiamo considerato i casi $k = 2^n$ per $n = 2, 3, 4$: si vede che, per ogni tale k , l'escursione della fase supera l'intero giro da $-\pi$ a π . Un filtro con tutti gli zeri ed i poli al di fuori del disco unitario è causale se la sua funzione di trasferimento è considerata in una corona illimitata, ma in tal caso ovviamente è instabile (Corollario 20.2.14), e se è invertibile neppure il suo inverso è stabile (in base al Corollario 20.4.1). Invece, se la funzione di trasferimento è considerata in un disco con centro l'origine, ogni filtro con tutti gli zeri ed i poli al di fuori del disco unitario è anticausale ma stabile, sempre per il medesimo Corollario, ed in tal caso, se è invertibile, anche il filtro inverso, se scelto anticausale, è stabile. Un filtro anticausale e stabile con inverso anticausale e stabile si dice *a fase massima*.

□

Esempio 20.4.8. (Filtri a fase mista.) Se alcuni zeri e poli sono interni al disco unitario ed altri sono esterni, il filtro si dice *a fase mista*. Nel caso che i poli siano in parte interni ed in parte esterni al disco unitario, un tale filtro non è stabile qualunque sia la regione di convergenza scelta (Corollario 20.2.14), e se è invertibile neppure il suo inverso è stabile (in base al Corollario 20.4.1). Questi filtri quindi sono meno frequenti nelle applicazioni numeriche, ma sono interessanti per l'analisi.

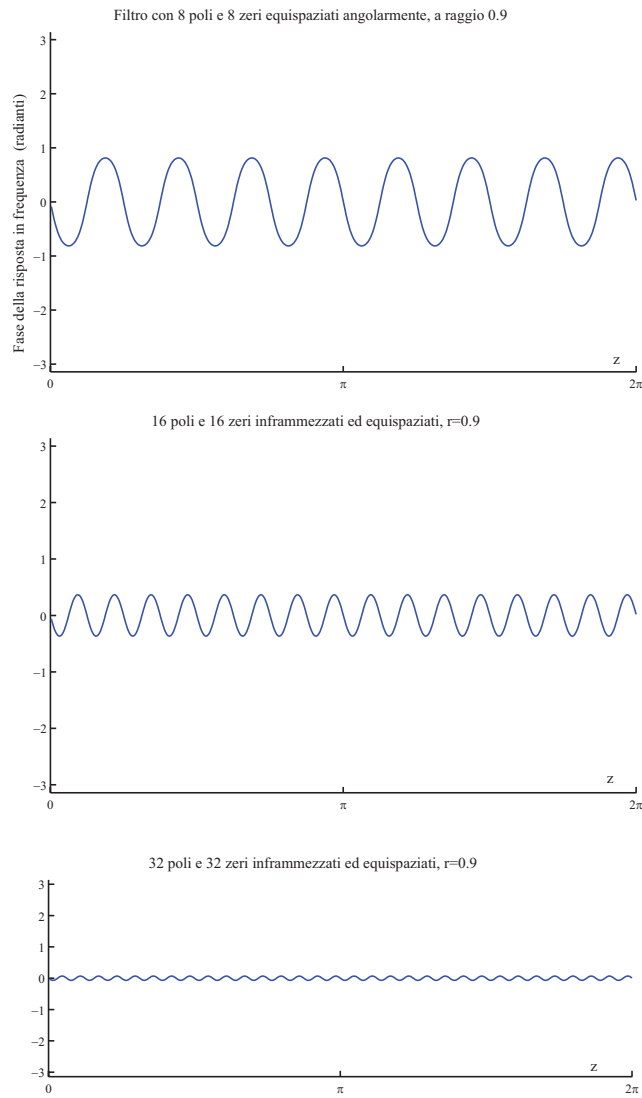


Figura 20.13: Fase della risposta in frequenza del filtro con 8, 16 e 32 poli angolarmente equispaziati ed altrettanti zeri inframmezzati, tutti interni al disco unitario, di modulo 0.9: la variazione di fase decresce al crescere del numero di poli

Modifichiamo i filtri dei due precedenti Esempi 20.4.6 e 20.4.7 in maniera che alcuni zeri e poli cadano fuori dal disco. Facciamo questo in maniera aleatoria, in modo da eliminare anche gli effetti di simmetrizzazione dovuti

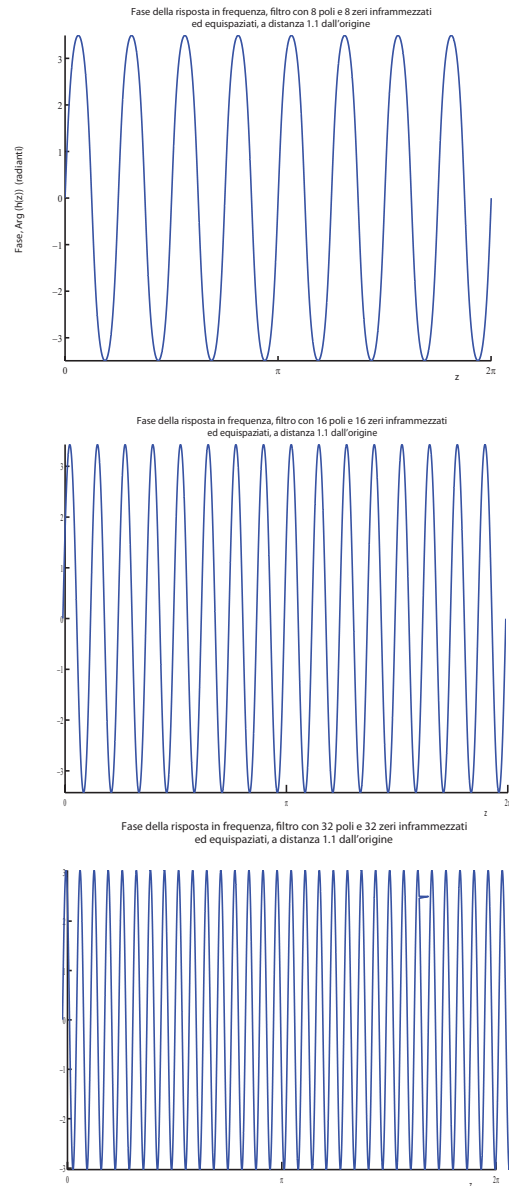


Figura 20.14: Fase della risposta in frequenza del filtro con 2^n poli angolarmente equispaziati ed altrettanti zeri inframmezzati, tutti esterni al disco unitario, di modulo $r = 1.1$ (qui $n = 3, 4, 5$): l'escursione della fase si mantiene sempre elevata

alla equidistribuzione angolare di poli e zeri. A questo scopo, perturbiamo la distanza dall'origine r di ciascuno zero e polo in tre modi, sempre aggiungendogli una variabile aleatoria δ di modulo inferiore a 0.05: il primo è mantenendo $r = 0.9$; il secondo è prendendo $r = 1$; il terzo è prendendo $r = 1.1$. Nel primo caso tutti gli zeri e poli cadono internamente al disco; nel secondo caso cadono statisticamente a metà fra dentro e fuori il disco, e potrebbe succedere che qualcuno cada sulla frontiera (nel qual caso si otterrebbe una singolarità del modulo della risposta in frequenza e la fase non sarebbe ivi definita, ma per fortuna questo accade con probabilità zero); nel terzo caso zeri e poli sono tutti fuori. Perturbiamo anche la distribuzione angolare: invece che equispaziati ed inframmezzati, ossia al centro di $2n$ archi contigui sulla circonferenza di uguale lunghezza, ora zeri e poli hanno la ubicazione angolare libera di variare in questi intervalli, e quindi uno zero ed un polo consecutivo potrebbero essere angolarmente coincidenti, o quasi: questo dissimmetrizza i grafici di modulo e fase della risposta in frequenza, che riportiamo entrambi nelle Figure 20.15, 20.16, 20.17, nel caso di 8 zeri e 8 poli. I picchi più elevati del modulo della risposta in frequenza sono dati da poli in prossimità della circonferenza unitaria. Si nota come zeri e poli tutti interni al disco unitario mantengano piccole le variazioni di fase, che invece si mantengono uniformemente grandi se zeri e poli sono tutti esterni. Il caso misto porta ad ampie fluttuazioni di fase e di modulo, con punti molto ripidi laddove uno zero o un polo cadono vicino alla circonferenza unitaria. Filtri a fase mista o massima di questo tipo sono quindi difficili da usare nella pratica, a causa delle distorsioni di fase che producono. Queste figure confermano che le elevate variazioni di fase non dipende dalla equidistribuzione di zeri e poli o dal loro numero, ma dalla loro localizzazione dentro o fuori il disco unitario: solo nel caso di zeri e poli tutti interni (fase minima), la variazione di fase viene ridotta dall'infittirsi di zeri e poli in maniera equidistribuita.

□

20.4.3 Filtri passa-tutto

Nella precedente Sottosezione 20.4.1 abbiamo studiato filtri a fase minima, nei quali le variazioni di fase sono contenute, ma naturalmente il modulo della risposta in frequenza fluttua, particolarmente nel caso di poli vicino alla circonferenza unitaria: quindi questi filtri amplificano e smorzano il segnale a seconda della frequenza delle sue armoniche: esempi particolari sono i filtri

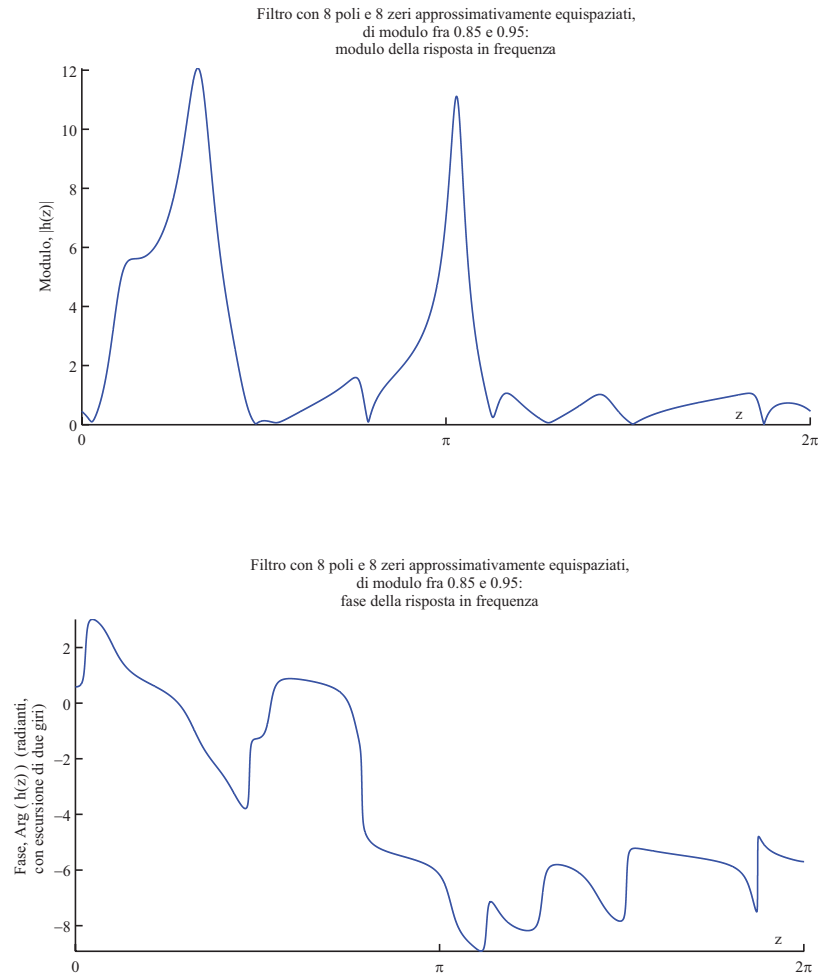


Figura 20.15: Modulo e fase della risposta in frequenza del filtro con 8 poli angolarmente quasi equispaziati ed altrettanti zeri inframmezzati, tutti interni al disco unitario, a distanze dal centro scelte a caso fra 0.85 e 0.95: il modulo non è elevato, la fase varia poco

passa-basso, passa-alto e passa-banda. Il caso antitetico è quello dei filtri che lasciano invariata l'ampiezza dei segnali e ne modificano solo la fase: questi filtri si chiamano *passa-tutto* (la loro funzione di trasferimento spesso si indica con h_{pa} , dall'inglese *pass-all*).

Un caso particolare è il filtro con risposta all'impulso δ_k , che vale 1 se

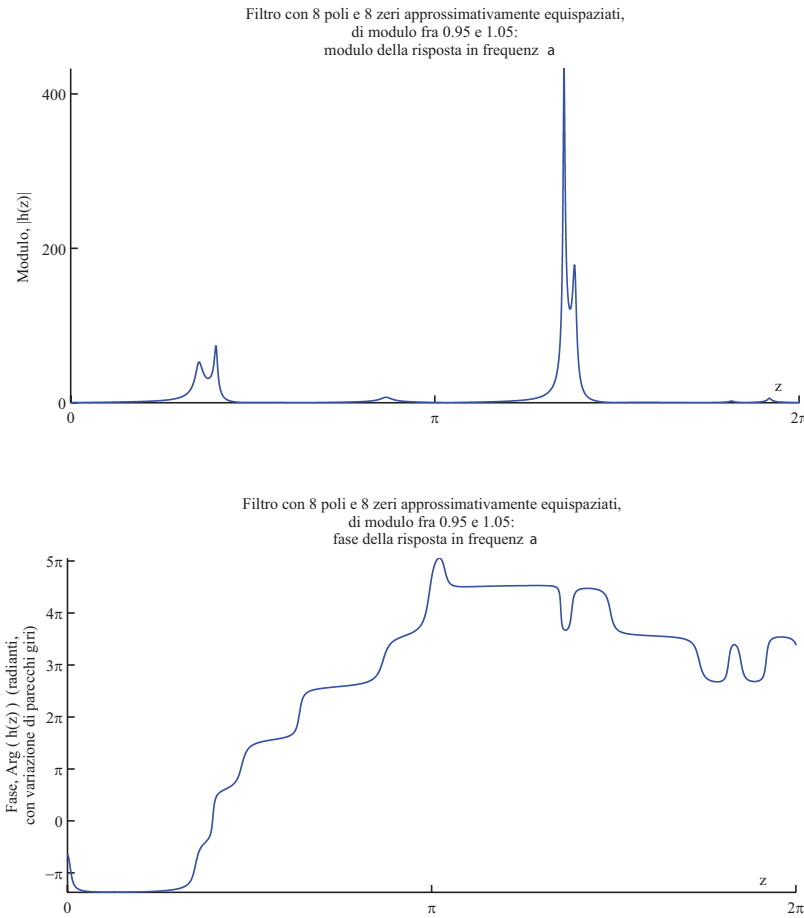


Figura 20.16: Modulo e fase della risposta in frequenza del filtro con 8 poli angolarmente quasi equispaziati ed altrettanti zeri inframmezzati, circa metà ei quali interni al disco unitario e l'altra metà esterni, a distanze dal centro scelte a caso fra 0.95 e 1.05: il modulo è elevato, la fase varia molto

$n = k$ e zero altrimenti: in base a (20.11), l'output di questo filtro è il ritardo di k campioni sul segnale originale, se $k \geq 0$, e l'anticipo di $|k|$ campioni se $k < 0$ (in questo caso il filtro è predittivo, non causale). La sua funzione di trasferimento è la trasformata zeta di δ_k , ossia $h(z) = z^{-k}$.

Esempio 20.4.9. (Filtri PA.) Un caso assai più generale è il seguente (filtriPA), a cui limiteremo la nostra analisi dei filtri passa-tutto:

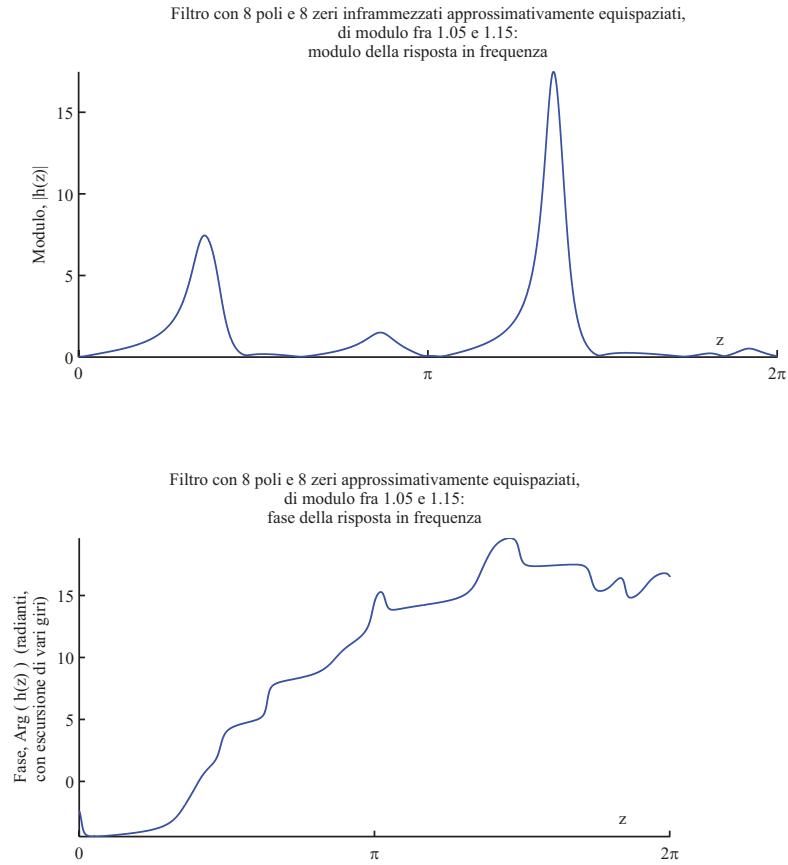


Figura 20.17: Modulo e fase della risposta in frequenza del filtro con 8 poli angolarmente quasi equispaziati ed altrettanti zeri inframezzati, tutti esterni al disco unitario, a distanze dal centro scelte a caso fra 1.05 e 1.15: il modulo non è elevato, ma la fase varia molto

$$h_{pa}(z) = \frac{\overline{a_m} + \overline{a_{m-1}}z^{-1} + \dots + z^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_mz^{-m}} = \frac{\sum_{k=0}^m \overline{a_{m-k}}z^{-k}}{\sum_{k=0}^m a_kz^{-k}}$$

(si noti che, dividendo numeratore e denominatore per a_0 , possiamo supporre $a_0 = 1$, e così abbiamo fatto nel termine centrale).

In effetti, mostriamo che questa funzione di trasferimento ha sempre modulo 1. Scriviamo il suo numeratore $N(z) = \sum_{k=0}^m \overline{a_{m-k}} z^{-k}$ ed il suo denominatore $D(z) = \sum_{k=0}^m \overline{a_{m-k}} z^{-k}$. Allora

$$\overline{D(1/\bar{z})} = \sum_{k=0}^m \overline{a_k z^k},$$

e quindi, se $|z| = 1$, ossia $\bar{z} = z^{-1}$,

$$N(z) = z^{-m} \overline{D(1/\bar{z})}.$$

Poiché $1/\bar{z} = z$, da qui segue $N(z) = z^{-m}$ e pertanto $|h_{\text{pa}}(z)| = 1$.

Si osservi che, se z è uno zero di D , allora $1/\bar{z}$ è uno zero di $z \mapsto \overline{D(1/\bar{z})}$. Quindi, dalle precedenti identità segue che, se z è uno zero (rispettivamente, un polo) di h_{pa} , allora $1/\bar{z}$ è un polo (rispettivamente, uno zero). In altre parole, gli zeri si ottengono dai poli prendendo i reciproci e coniugando, ossia prendendo il reciproco del modulo e lasciando invariato l'angolo di fase: si tratta di una riflessione intorno alla circonferenza unitaria. Quindi l'insieme di zeri e poli è invariante sotto tale riflessione, come illustrato in Figura 20.18.

Naturalmente, se tutti i coefficienti a_k del sistema sono reali, allora gli zeri sono o reali o a coppie di numeri complessi coniugati, e quindi lo stesso succede ai poli, come illustrato in Figura 20.19.

Rammentiamo (Corollario 20.2.14) che un filtro PA è causale se e solo se tutti i poli sono interni al disco unitario (e si sceglie come regione di convergenza una corona infinita esterna a tutti i poli, ad esempio il complemento del disco unitario). \square

Proposizione 20.4.10. (Proprietà dei filtri PA .)

- (i) Se \mathbf{h} è (la risposta all'impulso di) un filtro passa-tutto, allora questo filtro preserva l'energia del segnale in input, nel senso che, applicato ad un segnale di input \mathbf{x} , restituisce un segnale di output $\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{x}$ tale che $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |y|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x|^2$.
- (ii) La fase della risposta in frequenza di un filtro PA causale e stabile è sempre decrescente, ossia il ritardo di gruppo (Definizione 20.3.2) è sempre positivo.

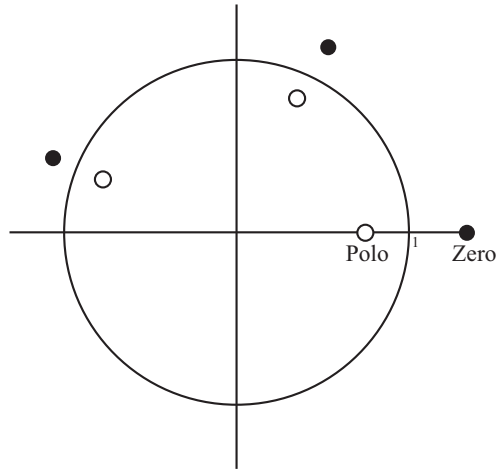


Figura 20.18: Diagramma di zeri e poli di un filtro passa-tutto: i poli sono interni al disco unitario, gli zeri sono i loro riflessi sferici rispetto alla circonferenza unitaria (ovvero, i reciproci dei loro coniugati)

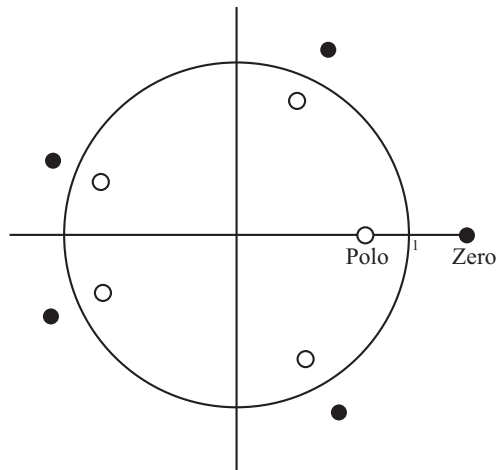


Figura 20.19: Nel caso di un filtro passa-tutto a coefficienti reali, gli zeri ed i poli formano anche un insieme invariante per coniugazione

(iii) Il filtro PA con un solo polo $z = a$ ed un solo zero $z = 1/\bar{a}$ con $|a| < 1$,

ossia con funzione di trasferimento

$$h_{\text{pa}}(z) = \frac{\frac{1}{z} - \bar{a}}{1 - \frac{a}{z}}, \quad (20.24)$$

verifica $|h_{\text{pa}}(z)| = 1$ se $|z| = 1$ (come già sappiamo), ma anche $|h_{\text{pa}}(z)| > 1$ se $|z| < 1$ e $|h_{\text{pa}}(z)| < 1$ se $|z| > 1$.

Dimostrazione. La parte (i) segue direttamente dall'identità di Parseval 19.12 e dal teorema di convoluzione 19.3.2, dal momento che la funzione di trasferimento $h_{\text{pa}} = \mathcal{Z}(\{\mathbf{h}\})$ verifica $|h_{\text{pa}}(e^{i\omega})| = 1$ per definizione di filtro passa-tutto, e quindi $|\mathcal{Z}(\mathbf{y})(e^{i\omega})| = |\mathcal{Z}(\mathbf{h} * \mathbf{x})(e^{i\omega})| = |\mathcal{Z}(\mathbf{x})(e^{i\omega})|$.

La parte (ii) segue dal fatto che i filtri PA causali e stabili hanno tutti i poli all'interno del disco unitario (Corollario 20.2.14) e tutti gli zeri al suo esterno, dati dai reciproci dei complessi coniugati dei poli. Quindi la funzione di trasferimento di questi filtri è data dal prodotto di fattori come quelli considerati nell'Esercizio 20.3.3, ed in tale Esercizio vedemmo che la fase di questi fattori è decrescente.

La parte (iii) è ovvia per $|z| = 1$, per definizione di filtro PA, ed è una immediata conseguenza del principio del massimo (Corollario 2.8.3) per $|z| > 1$. Infatti, osserviamo da (20.24) che h_{pa} ha limite all'infinito; allora, poiché il solo polo di h_{pa} è $z = a$ con $|a| < 1$, ossia interno al disco unitario, la funzione $g(z) = h_{\text{pa}}(1/z)$ è olomorfa nel disco unitario, e quindi, per il principio del massimo modulo, il suo modulo assume il proprio massimo sulla circonferenza di frontiera, dove tale modulo vale costantemente 1 perché il filtro PA verifica $h_{\text{pa}}(e^{it}) \equiv 1$ (il massimo viene assunto in senso stretto, perché h_{pa} non è costante) nel disco: si veda di nuovo il Corollario 2.8.3). Pertanto $|h_{\text{pa}}| < 1$ per $|z| > 1$.

Naturalmente, però, questo ragionamento non dice nulla circa il massimo modulo di h_{pa} dentro il disco unitario. Ma possiamo risolvere l'intera questione in un colpo solo dentro e fuori il disco con il seguente ragionamento. Dobbiamo determinare per quali z $|h_{\text{pa}}(z)|$, o equivalentemente $|h_{\text{pa}}(z)|^2$, è maggiore o minore di 1. Scriviamo $z = re^{it}$. Da (20.24)

$$\begin{aligned} |h_{\text{pa}}(z)|^2 &= \frac{|\frac{1}{z}\bar{a}|^2}{|z - \frac{a}{z}|^2} = \frac{(1 - \bar{a}re^{it})(1 - are^{-it})}{(re^{it} - a)(re^{-it} - \bar{a})} \\ &= \frac{1 + r^2|a|^2 - 2r \operatorname{Re}(ae^{-it})}{r^2 + |a|^2 - 2r \operatorname{Re}(ae^{-it})}. \end{aligned}$$

Pertanto $|h_{\text{pa}}(z)| > 1$ se e solo se $1 + r^2|a|^2 - 2r \operatorname{Re}(ae^{-it}) > r^2 + |a|^2 - 2r \operatorname{Re}(ae^{-it})$, ovvero se e solo se $1 + r^2|a|^2 > r^2 + |a|^2$. Questa disuguaglianza equivale a $r^2(1 - |a|^2) < 1 - |a|^2$, ovvero $r < 1$. \square

20.4.4 Fattorizzazione fase minima + passa-tutto

Questa Sottosezione è dedicata a provare la seguente fattorizzazione:

Proposizione 20.4.11. *Sia h la funzione di trasferimento di un filtro digitale lineare senza poli o zeri sulla circonferenza unitaria. Allora h si fattorizza come prodotto*

$$h = h_{\min}h_{\text{pa}} \quad (20.25)$$

di un filtro a fase minima ed un filtro PA. In particolare, la risposta di fase del fattore a fase minima ha lo stesso modulo, ovvero la stessa risposta in ampiezza (ma non in fase!), del filtro originale (perché ovviamente il fattore PA ha modulo 1. Se il filtro ha ordine n , nel senso della precedente Definizione 20.2.1, allora ci sono esattamente 2^{2n} filtri con lo stesso modulo della risposta in frequenza; se inoltre il filtro è stabile, allora ci sono esattamente 2^n filtri stabili la cui risposta in frequenza ha lo stesso modulo del filtro originale.

Dimostrazione. In base al Corollario 20.4.5, un filtro a fase minima ha tutti i suoi zeri e poli all'interno del disco unitario. Procediamo per iterazione a spostare gli zeri ed i poli di h all'interno di tale disco, come segue. Se h ha uno zero esterno al disco unitario, diciamo in $z = 1/a$ con $|a| < 1$, e tutti i poli e gli altri zeri all'interno, allora fattorizziamo $h(z) = h_1(z)(a - z^{-1})$ ed osserviamo che h_1 è a fase minima, perché ha tutti i poli e gli zeri dentro il disco (naturalmente, scegliendo come regione di convergenza l'esterno del disco). Ora osserviamo che

$$h(z) = h_1(z)(1 - \bar{a}z^{-1})\frac{a - z^{-1}}{1 - \bar{a}z^{-1}},$$

ed il fattore $h(z) = h_1(z)(1 - \bar{a}z^{-1})$ ha gli zeri ed i poli di h_1 più uno zero in $z = \bar{a}$ (il riflesso sferico del punto a), che è anch'esso dentro il disco unitario: quindi tale fattore è a fase minima, ed è esattamente quanto si ottiene riflettendo all'interno del disco unitario quello zero che prima era fuori (in $z = a$). Invece l'altro fattore, $(a - z^{-1})(1 - \bar{a}z^{-1})$, è la funzione di trasferimento di un filtro PA, in base alla forma della funzione di trasferimento come in (20.24):

su tratta del filtro con un unico zero in $z = 1/a$ ed un unico polo in $z = \bar{a}$. Osserviamo che la componente di tipo *PA* ha modulo della risposta in frequenza costantemente uguale a 1, e quindi la componente a fase minima ha lo stesso modulo della risposta in frequenza del filtro originale. Iterando questo procedimento possiamo riflettere sfericamente ciascuno zero e ciascun polo di h dentro il disco, generando ogni volta un fattore compensativo come visto sopra: questi fattori producono un filtro di tipo *PA*, che non altera il modulo della risposta in frequenza complessiva. Poiché un filtro di ordine n ha n zeri e n poli, ci sono esattamente $2n$ tali riflessioni sferiche che li scambiano dall'esterno all'interno del disco o viceversa; se il filtro è stabile, in base al Corollario 20.2.14 i suoi n poli sono già tutti dentro il disco, e quindi ci sono esattamente n riflessioni sferiche (reciproco della coniugazione) che riflettono gli zeri fra interno ed esterno del disco. \square

La Figura 20.20 mostra la fase della risposta in frequenza ed il ritardo di gruppo di un filtro *PA* ottenuto scegliendo a caso 16 poli dentro il disco unitario (ed i corrispondenti zeri reciproci coniugati, ossia riflessi sferici (*flip*) fuori del disco). Si noti che la fase è decrescente. Questi filtri sono talvolta utilizzati in cascata a filtri che producono incremento di fase, per compensarne l'incremento.

Esercizio 20.4.12. Si trovi la decomposizione in filtro a fase minima e filtro passa-tutto del filtro con funzione di trasferimento

$$h(z) = \frac{1 - \frac{a}{z}}{1 - \frac{b}{z}}$$

con $|b| < 1 < |a|$.

Svolgimento. Fattorizziamo

$$h(z) = \frac{\frac{1}{z} - \bar{a}}{1 - \frac{b}{z}} \frac{1 - \frac{a}{z}}{\frac{1}{z} - \bar{a}}.$$

Segue dalla parte (*iii*) della Proposizione 20.4.10 che la componente

$$h_{\text{pa}}(z) = \frac{1 - \frac{a}{z}}{\frac{1}{z} - \bar{a}}$$

è di tipo *PA*; d'altra parte, la componente

$$h_{\text{min}}(z) = \frac{\frac{1}{z} - \bar{a}}{1 - \frac{b}{z}}$$

ha lo stesso polo di prima, in $z = b$, interno al disco, ma ora il suo unico zero è in $z = 1/a$, anch'esso interno al disco, e quindi è la funzione di trasferimento di un filtro a fase minima (Corollario 20.4.5). \square

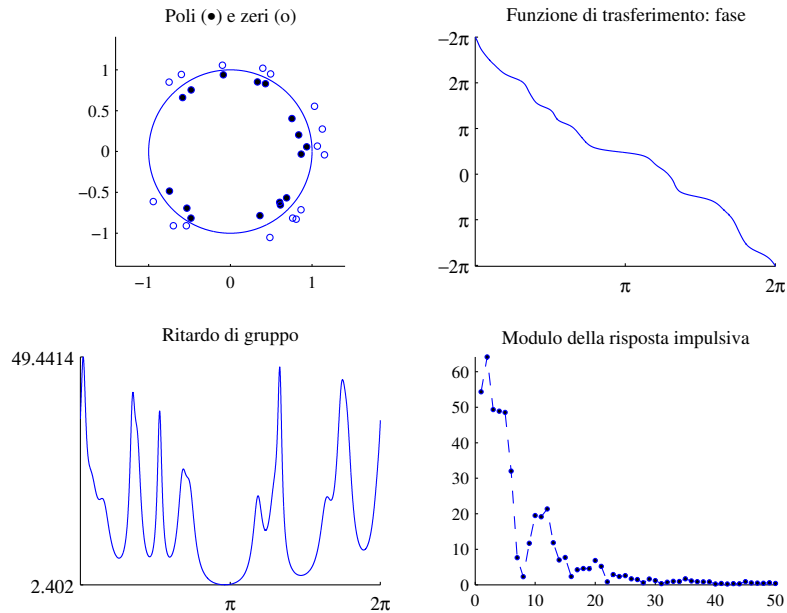


Figura 20.20: Diagramma zeri–poli, fase della risposta in frequenza, ritardo di gruppo e modulo della risposta all’impulso di un filtro passa-tutto con 16 poli scelti a caso dentro il disco unitario in prossimità della sua frontiera, ed ovviamente altrettanti zeri (riflessi sferici dei poli) fuori del disco

Corollario 20.4.13. *Fra tutti i filtri che hanno la stessa ampiezza della risposta in frequenza, il filtro a fase minima ha il minimo ritardo di gruppo.*

Dimostrazione. Questo segue immediatamente dalla fattorizzazione (20.25), perché il ritardo di gruppo $\tau(\omega) = -\operatorname{Re} \left(z \frac{d}{dz} \ln h \right) \Big|_{z=e^{i\omega}}$ (Definizione 20.3.2) è espresso da un logaritmo, e quindi si spezza in maniera additiva: $\tau(\omega) = \tau_{\min}(\omega) + \tau_{\text{ap}}(\omega)$. Poiché il ritardo di gruppo della componente PA è positivo (in base alla parte (ii) della Proposizione 20.4.10), da questo segue che il ritardo di gruppo minimo si ottiene per il filtro a fase minima. \square

Nota 20.4.14. Se una coppia costituita da un polo z_0 ed uno zero p_0 di una funzione di trasferimento h viene scambiata, ossia se scambiamo z_0 con p_0 , il fattore di h dato da

$$q(z) := \frac{1 - \frac{z_0}{z}}{1 - \frac{p_0}{z}}$$

diventa il reciproco:

$$q_{\text{swap}}(z) := \frac{1 - \frac{p_0}{z}}{1 - \frac{z_0}{z}} = \frac{1}{q(z)},$$

e quindi la fase della risposta in frequenza diventa l'opposto. Se invece la coppia è costituita da due poli o da due zeri, la funzione di trasferimento non cambia in seguito al loro scambio, e quindi neppure la sua fase.

Se invece si esegue il *flip*, ossia la riflessione sferica, di *entrambi* il polo e lo zero, questo corrisponde a scambiarli e poi a rifletterli attraverso la retta uscente dall'origine nella direzione della media aritmetica delle fasi φ_z di z_0 e φ_p di p_0 , ossia nella direzione di $\varphi_m := (\varphi_z + \varphi_p)/2$. Se $\varphi_m = 0$ o π , questa riflessione è semplicemente la coniugazione complessa; in generale, essa è ottenuta prima ruotando il piano complesso di un angolo $-\varphi_m$ in modo da riportare la suddetta retta all'asse reale, poi applicando la coniugazione complessa e poi ruotando all'indietro di $-\varphi_m$. Pertanto, sotto questa operazione di *swap* di polo e zero, la risposta in frequenza cambia nel modo seguente:

$$\varphi = \varphi_m + (\varphi - \varphi_m) \rightarrow \varphi_m - (\varphi - \varphi_m) = 2\varphi_m - \varphi$$

$$z = \rho e^{i\varphi} \rightarrow \rho e^{i(2\varphi_m - \varphi)} = \rho e^{2i\varphi_m} e^{-i\varphi}$$

$$h(z) = h(\rho e^{i\varphi}) \rightarrow \frac{1}{h(\rho e^{2i\varphi_m} e^{-i\varphi})} := h_{\text{swap}}$$

$$\text{Fase}[h](\varphi) \rightarrow -\text{Fase}[h](2\varphi_m - \varphi) = \text{Fase}[h_{\text{swap}}](\varphi).$$

Se invece si scambiano due zeri, o due poli, il corrispondente fattore della funzione di trasferimento non viene trasformato nel proprio reciproco, e quindi le ultime due trasformazioni diventano

$$h(z) = h(\rho e^{i\varphi}) \rightarrow h(\rho e^{2i\varphi_m} e^{i\varphi}) := h_{\text{swap}}$$

$$\text{Fase}[h](\varphi) \rightarrow \text{Fase}[h](2\varphi_m - \varphi) = \text{Fase}[h_{\text{swap}}](\varphi)$$

□

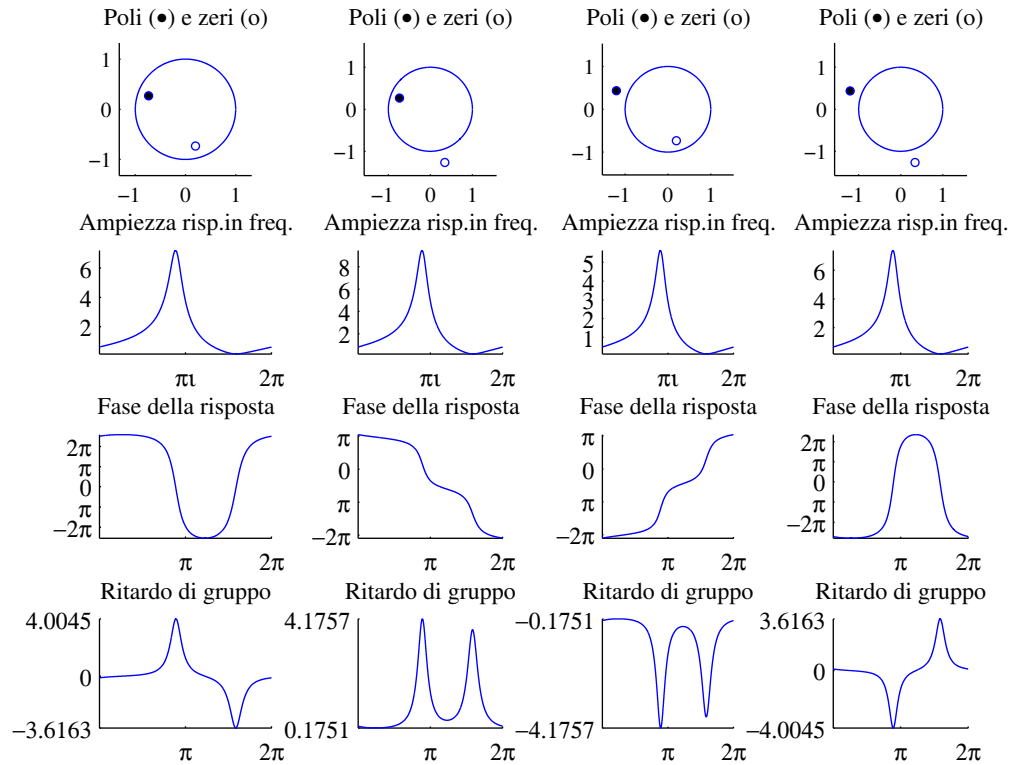


Figura 20.21: Modulo e fase della risposta in frequenza e ritardo di gruppo dei quattro filtri di ordine 2 con uno zero ed un polo, ottenuti dalla riflessione sferica dall'interno all'esterno della circonferenza unitaria dello zero o del polo o di entrambi: il modulo della risposta in frequenza è lo stesso nei quattro casi. Nella prima colonna in cui sia lo zero sia il polo sono interni al disco unitario: si tratta quindi del filtro a fase minima. Si verifica immediatamente quanto dimostrato nel Corollario 20.4.13: per ogni frequenza, in valore assoluto il ritardo di gruppo $-\text{Re}(z \ln h(z))$ del filtro a fase minima è il più piccolo di tutti (in questo caso è identico, ma con il segno opposto, a quello del filtro instabile ottenuto dal flip simultaneo sia del polo sia dello zero).

20.4.5 Filtri a retroazione (*feedback*)

Una *retroazione*, o *feedback*, per un filtro H è il filtro F ottenuto dalla disposizione a cascata (detto anche a *circuito chiuso*) del filtro H seguito da un filtro G che rinvia all'ingresso da H il negativo dell'azione di G sul segnale in uscita. Pertanto, indicando con **in** il segnale in ingresso al filtro H e con **out** il segnale in uscita da questo filtro, il segnale in uscita verifica

$$\mathbf{out} = H \cdot [\mathbf{in} - G \cdot \mathbf{out}]$$

e quindi la funzione di trasferimento del filtro a circuito chiuso risultante è

$$f(z) = \frac{\mathcal{Z}(\mathbf{out})}{\mathcal{Z}(\mathbf{in})} = \frac{h(z)}{1 + g(z)h(z)} = \frac{1}{\frac{1}{h(z)} + g(z)}. \quad (20.26)$$

Quando H e G sono filtri causali razionali (ossia di ordine finito), ossia $h(z) = n_h(z)/d_h(z)$ e $g(z) = n_g(z)/d_g(z)$, con n_h , d_h , n_g , d_g polinomi nella variabile $1/z$, da questo si ottiene

$$f(z) = \frac{n_h(z) d_g(z)}{d_h(z) d_g(z) + n_h(z) n_g(z)}. \quad (20.27)$$

Quindi i poli del filtro a retroazione sono gli zeri dell'equazione polinomiale (nella variabile $1/z$)

$$d_h(z) d_g(z) + n_h(z) n_g(z) = 0. \quad (20.28)$$

Scegliendo fattori polinomiali di grado sufficientemente elevato si hanno sufficienti gradi di libertà per ubicare i poli ovunque nel piano complesso, e quindi, ad esempio, all'interno del disco unitario: quando questo succede, il feedback rende stabile il filtro risultante (Corollario 20.2.14).

Esempio 20.4.15. Consideriamo un filtro AP (ossia con soli poli, Notazione 20.2.5) con un solo polo al punto $z = a$ esterno al disco unitario, e senza zeri (naturalmente, questo vuol dire senza zeri al finito, come spiegato nella Nota 20.2.4). Ovvero, la funzione di trasferimento è

$$h(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}$$

con $|a| > 1$. Questo filtro è instabile (Corollario 20.2.14). Proviamo a renderlo stabile con un feedback di ordine più basso possibile: proviamo con

ordine 0, ossia con un filtro di feedback con funzione di trasferimento costante, $g(z) = k$, ossia un controllo sul *guadagno* del sistema. In base all'identità (20.26), dopo il feedback si ottiene una nuova funzione di trasferimento

$$f(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z} + k} = \frac{\frac{1}{1+k}}{1 - \frac{a}{1+k} \frac{1}{z}}$$

con un unico polo in $z = a/(1+k)$. Se $k > a$ il polo ha modulo minore di 1, e quindi il filtro diventa stabile. \square

Esempio 20.4.16. Proviamo lo stesso procedimento per stabilizzare un filtro del secondo ordine, con funzione di trasferimento

$$h(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2}};$$

scegliamo $b \in \mathbb{R}$, ed assumiamo il filtro causale (ossia scegliamo per h una corona di convergenza esterna ai due poli, Corollario 20.2.10). Sappiamo dall'Esempio 20.2.17 che questo filtro è stabile se e solo se $|b| < 1$ e $|a| < 1+b$. Assumiamo che questo filtro sia instabile, considerando separatamente i due casi possibili:

- (1) $|b| \geq 1$;
- (2) $|b| < 1$ e $|a| \geq 1+b$.

Ora procediamo a stabilizzare questo filtro instabile con filtri di feedback di vari ordini.

- (i) Proviamo di nuovo ad usare un feedback di ordine 0, con funzione di trasferimento $g(z) = k$. La costante k misura il guadagno del feedback: per semplicità, scegliamo k reale positivo. Da (20.26) otteniamo la funzione di trasferimento modificata

$$f(z) = \frac{1}{1 + k - \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2}} = \frac{\frac{1}{1+k}}{1 - \frac{a}{1+k} \frac{1}{z} + \frac{b}{1+k} \frac{1}{z^2}}.$$

Questo nuovo filtro è stabile se e solo se $|b|/(1+k) < 1$ (ossia $k > |b|-1$) e $|a|/(1+k) < 1 + (b/(1+k))$, ossia $|a| < 1+k+b$.

Nel primo caso, ossia $|b| \geq 1$, il filtro risulta stabile se e solo se $k > |b|-1$ e $k > |a| - b - 1$. Nel secondo caso, ossia $|b| < 1$ e $|a| \geq 1+b$, la

condizione $k > |b| - 1$ è sempre verificata perché $k > 0$, e quindi il filtro risulta stabile se e solo se $|a| < 1 + k + b$, ossia $k > |a| - b - 1$: la seconda condizione impone una limitazione su k perché ora $|a| - b - 1 > 0$.

- (ii) Proviamo ad usare un filtro di feedback del primo ordine, con funzione di trasferimento $g(z) = k/z$. Da (20.26) otteniamo ora la seguente funzione di trasferimento modificata:

$$f(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2}\right) + \frac{k}{z}} = \frac{1}{1 + \frac{k-a}{z} + \frac{b}{z^2}}.$$

In base all'Esempio 20.2.17 questo nuovo filtro è stabile se e solo se $|b| < 1$ e $|k - a| < 1 + b$; la seconda condizione equivale a $a - b - 1 < k < a + b + 1$.

Allora, partiamo con un filtro h instabile e cerchiamo di stabilizzarlo con un feedback del primo ordine. Nel caso in cui h sia instabile a causa della condizione (1) ciò non è possibile ed il filtro rimane instabile per qualunque scelta del guadagno di feedback k ; nel caso (2) (ossia $|a| > 1 + b$) si ha $a - b - 1 > 0$, e la condizione di stabilità $a - b - 1 < k < a + b + 1$ impone quindi una restrizione non solo superiore ma anche inferiore ai valori del guadagno k .

- (iii) Proviamo infine ad usare un feedback del secondo ordine, con funzione di trasferimento $g(z) = k/z^2$. Da (20.26) ora si ottiene

$$f(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2}\right) + \frac{k}{z^2}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z} + \frac{b+k}{z^2}}.$$

Sempre per l'Esempio 20.2.17 questo filtro f è stabile se e solo se $|b + k| < 1$ e $|a| < 1 + b + k$. La prima condizione equivale a $-1 - b < k < 1 - b$, e la seconda a $k > \pm a - b - 1$, ossia $k > |a| - b - 1$. Quest'ultima condizione è più forte di una delle disuguaglianze ottenute dalla prima condizione, e precisamente $k > -b - 1$: quindi l'intervallo di stabilità è

$$|a| - b - 1 < k < 1 - b.$$

Se si parte con un filtro instabile h , nel caso (2) di instabilità di h questo intervallo di stabilità di f non è ulteriormente ristretto dalla condizione $|a| > 1 + b$ perché essa equivale a $|a| - b - 1 > 0$, ed abbiamo

assunto $k > 0$. Invece nel caso (1) (ossia $|b| \geq 1$), se $b > 0$ si ottiene $1 - b < 0$ e quindi non ci sono guadagni k positivi che stabilizzano il filtro h : ma ce ne sono negativi, e lasciamo al lettore il compito di ripetere i calcoli per $k < 0$.

□

Esercizio 20.4.17. Si deduca dal precedente Esempio che non ci sono valori del guadagno di feedback k che permettono di stabilizzare il filtro con funzione di trasferimento

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2z} + \frac{3}{z^2}}$$

tramite un feedback del primo ordine $g(z) = k/z$ o del secondo ordine $g(z) = k/z^2$, ma, se si usa un feedback di ordine zero $g(z) = k$, allora i valori che rendono stabile il filtro sono $k > 2$.

Nelle prossime Figure 20.22, 20.23, 20.24, 20.25, 20.26 illustriamo la risposta in frequenza di questo filtro instabile del secondo ordine e delle sue tre stabilizzazioni di ordine 0, 1 e 2, con guadagno, rispettivamente, $k = 3, 2.5, 2.1, 2$ e 1.9. Con feedback di ordine 1 e 2 non si ottiene mai stabilizzazione. Il feedback di ordine zero stabilizza il filtro per i primi tre valori del guadagno, ma via via più lentamente all'avvicinarsi alla soglia $k = 2$: per il valore di soglia $k = 2$, la risposta all'impulso del filtro con feedback si mantiene limitata ma oscilla, invece di tendere a zero. Il feedback di ordine 0 ma guadagno $k = 1.9$ non dà luogo a stabilizzazione.

□

Esercizio 20.4.18. Consideriamo il filtro con funzione di trasferimento

$$h(z) = \frac{1 + \frac{a}{z}}{1 + \frac{b}{z}}.$$

Applichiamo in cascata a questo filtro un feedback del primo ordine, con funzione di trasferimento

$$g(z) = \frac{1 + \frac{c}{z}}{1 + \frac{d}{z}}.$$

Si trovino i valori di c e d per cui il filtro risultante ha funzione di trasferimento f con un polo doppio (ossia del secondo ordine) a $z = 1$.

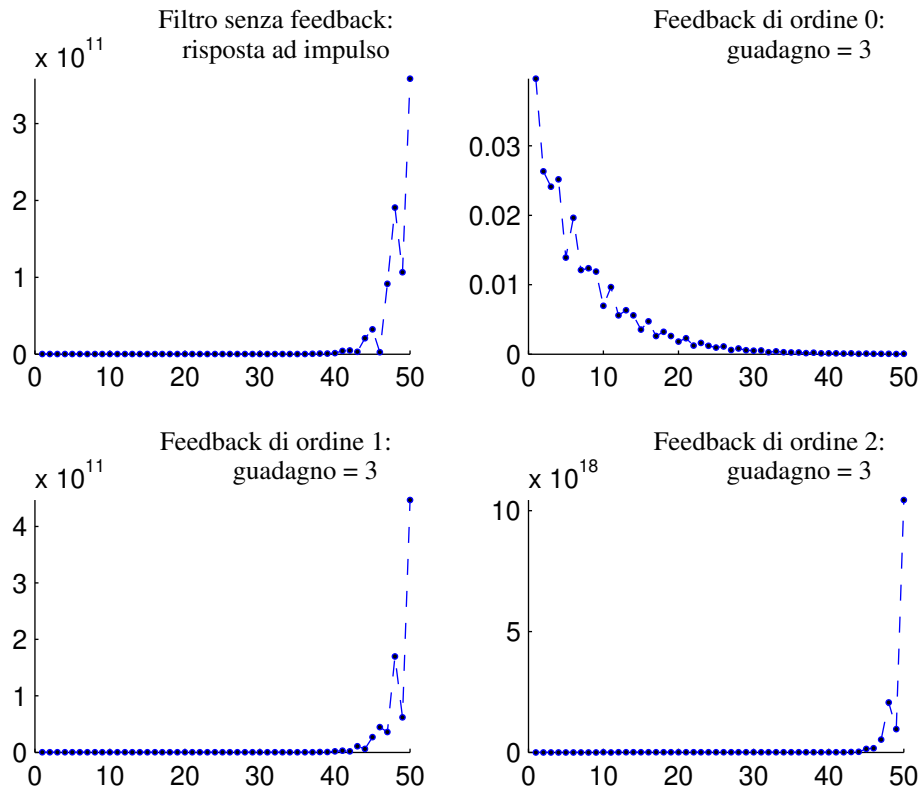


Figura 20.22: Modulo della risposta all'impulso del filtro instabile $\frac{1}{1-\frac{1}{2z}+\frac{3}{z^2}}$ dell'Esercizio 20.4.17, corretto con feedback di guadagno 3 e di ordine 0 oppure 1 oppure 2: solo il feedback di ordine 0 stabilizza il filtro

Svolgimento. Da (20.27) si ottiene

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{h(z)}{1+g(z)h(z)} = \frac{(1+\frac{a}{z})(1+\frac{d}{z})}{(1+\frac{b}{z})(1+\frac{d}{z})+(1+\frac{a}{z})(1+\frac{c}{z})} \\
 &= \frac{(1+\frac{a}{z})(1+\frac{d}{z})}{2+\frac{a+b+c+d}{z}+\frac{ac+bd}{z^2}}.
 \end{aligned}$$

Richiedere che f abbia un polo del secondo ordine equivale a richiedere che il suo denominatore abbia uno zero del secondo ordine non bilanciato da zeri al numeratore. Gli zeri del denominatore sono ai punti a e d : quindi fissiamo

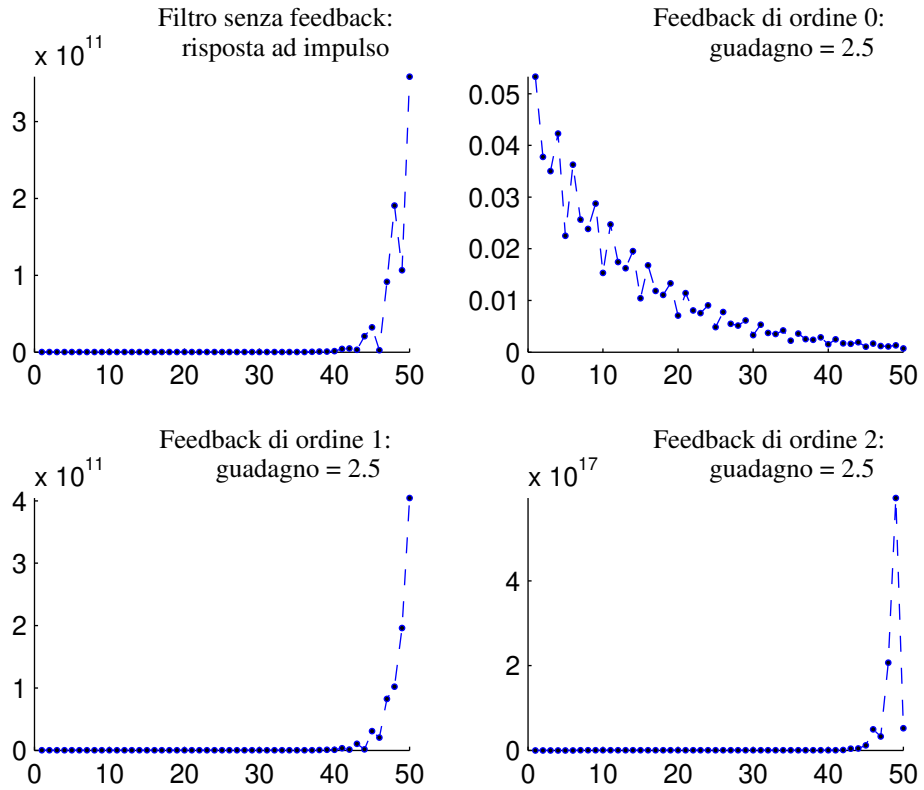


Figura 20.23: Modulo della risposta all'impulso del filtro instabile della Figura 20.22 corretto con feedback di guadagno 2.5 : la stabilizzazione si ha per lo stesso ordine zero come prima

$a \neq 1$ e limitiamo l'attenzione a $d \neq 1$. Osserviamo che il denominatore è un polinomio quadratico nella variabile $1/z$, del tipo $p(1/z) = 2 + \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z^2}$ con $\alpha := a + b + c + d$ e $\beta := ac + bd$. Vogliamo trovare per quali valori di c e d (in funzione dei parametri a e b) si ha

$$p\left(\frac{1}{z}\right) = C\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2 = C\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}\right)$$

per qualche costante $C \neq 0$. Uguagliando i limiti all'infinito si vede subito che deve essere $C = 2$. Da questo segue $\alpha = -4$ e $\beta = 2$, ossia $c + d = -4 - a - b$ e $ad + bc = 2$. Si hanno soluzioni solo se $a \neq b$ (caso in cui il determinante di

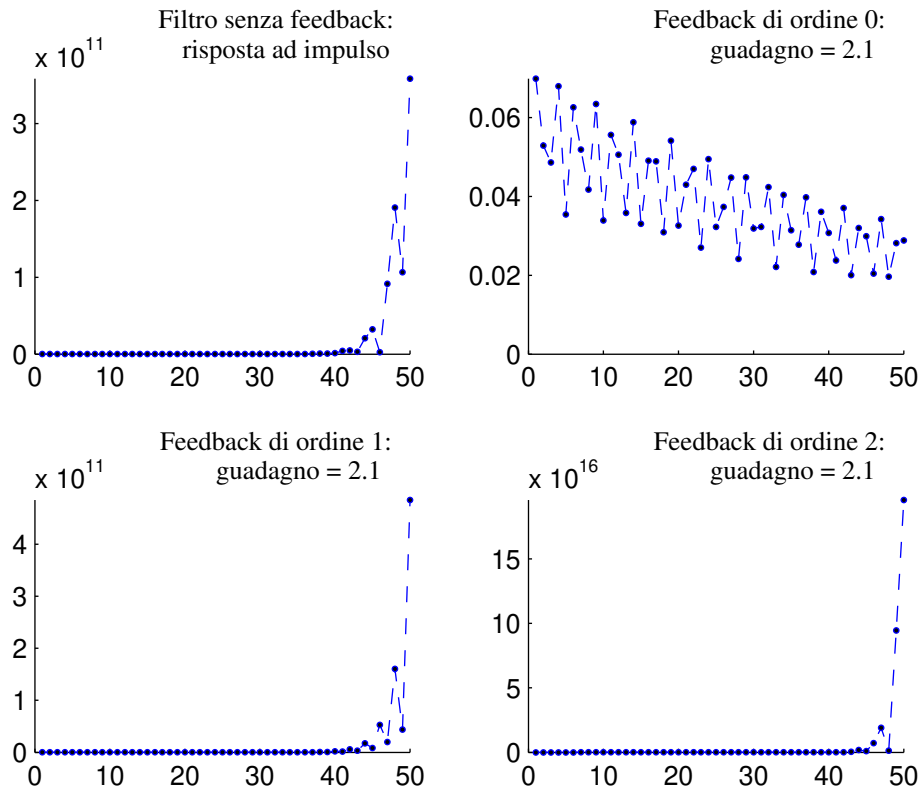


Figura 20.24: Modulo della risposta all'impulso del filtro instabile della Figura 20.22 corretto con feedback di guadagno 2.1 : la stabilizzazione si ha ancora per ordine zero, ma è più lenta

questo sistema lineare è zero) oppure se $a = b$ ma $4 + a + b = -2/a$, nel qual caso il sistema è ridondante e dà luogo ad una famiglia nadnun parametro di soluzioni, $c = -d - 2/a$. Nel caso generale di determinante non nullo ($a \neq b$), l'unica soluzione è

$$d = \frac{2 + (5 + a)b}{a - b}$$

$$c = -\frac{2 + (5 + a)b}{a - b} - 4 - a - b = -\frac{2 + 4a + b + a^2 - b^2 + ab}{a - b}.$$

□

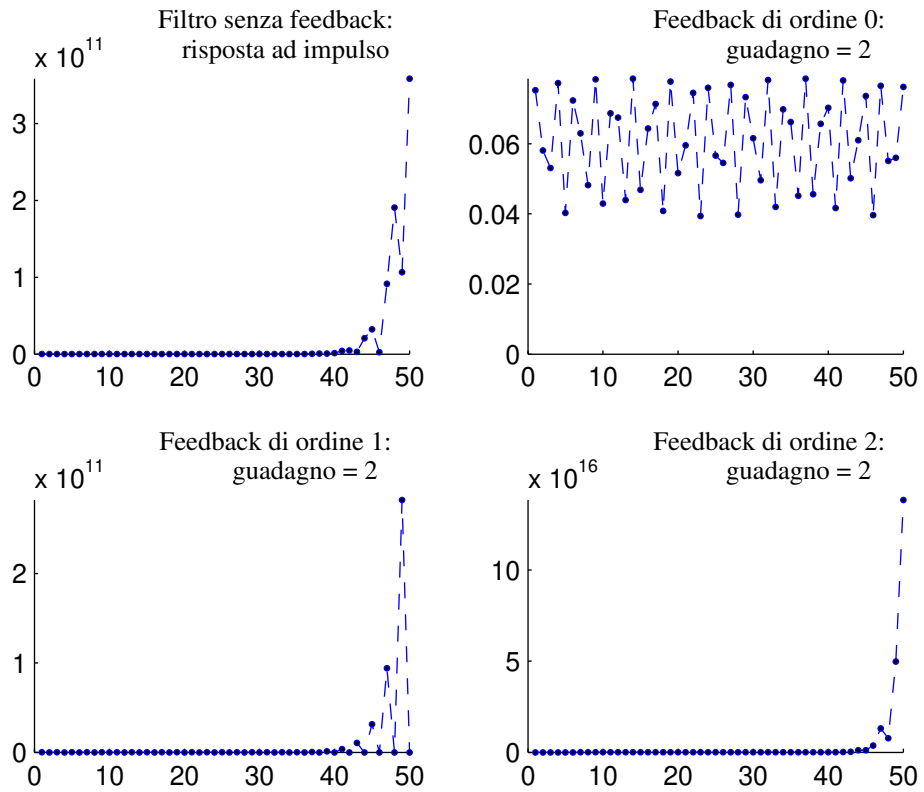


Figura 20.25: Modulo della risposta all'impulso del filtro instabile della Figura 20.22 corretto con feedback con guadagno alla soglia critica 2 : non si ha più stabilizzazione neppure per ordine zero, al quale la risposta all'impulso è oscillante ma rimane limitata.

20.5 Filtri AZ e filtri AP

20.6 Diagrammi di flusso di filtri digitali lineari

Abbiamo visto che, per un filtro digitale lineare, vale l'identità (20.15). Il filtro è stabile se e solo se tutti i suoi poli z_ν verificano $|z_\nu| < 1$ (Corollario 20.2.14).

Esercizio 20.6.1. (Funzione di trasferimento di un filtro FIR.) Verifi-

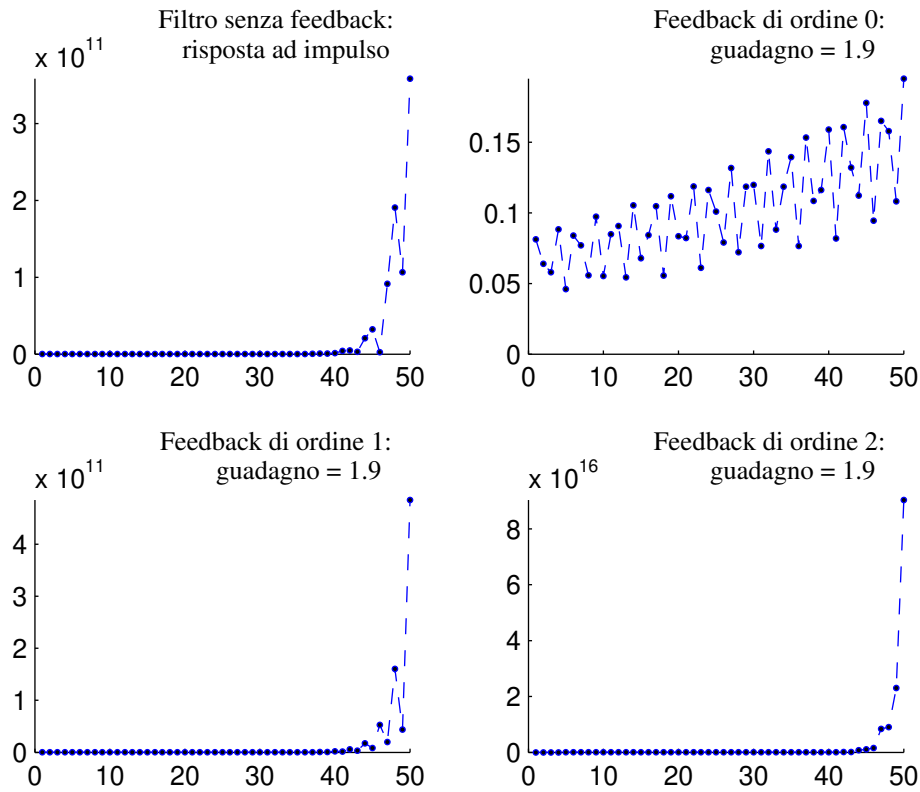


Figura 20.26: Modulo della risposta all'impulso del filtro instabile della Figura 20.22 corretto con feedback con guadagno sotto la soglia critica 2 : non si ha più stabilizzazione neppure per ordine zero, al quale la risposta all'impulso diverge

care, a partire dalla Nota 20.2.20, che il filtro è con risposta all'impulso finita (ossia di tipo FIR) se al denominatore della sua funzione di trasferimento nel terzo termine di (20.15),

$$h(z) = \frac{1}{z^m} \sum_{i=0}^m a_i z^{m-i} = \sum_{i=0}^m a_i z^{-i},$$

è non nullo solo il coefficiente del monomio di grado massimo, che, rammentiamo, vale 1 per costruzione (si vedano le identità (20.2) e (20.15)).

□

Segue dal precedente Esercizio 20.6.1 che, in un filtro FIR con la notazione di (20.15), la funzione di trasferimento è un polinomio di grado m in z^{-1} , e quindi ha m zeri (ovvero radici) $z_\mu \neq 0$ ed un polo banale di ordine m a $z = 0$ (banale perché è inevitabile che il polinomio in z^{-1} non sia definito in $z = 0$). Per questo motivo un filtro FIR si chiama anche *un sistema discreto a soli zeri*. In Figura 20.27 presentiamo il suo diagramma di flusso (i quadrati rappresentano moltiplicazioni ed i cerchi somme). Il diagramma di flusso è una rappresentazione grafica del procedimento iterativo illustrato nella Proposizione 20.2.3.

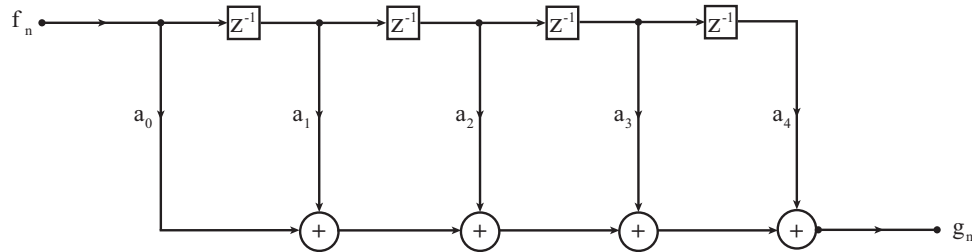


Figura 20.27: Diagramma di flusso di un filtro FIR (funzione di trasferimento con soli zeri)

Se invece la funzione di trasferimento non ha solo i poli banali a $z = 0$, sappiamo, sempre dalla Nota 20.2.20, che il filtro ha risposta all'impulso infinita (IIR). Il caso estremo di soli poli si ha quando tutti i coefficienti a_n del numeratore sono nulli tranne a_0 . Il corrispondente diagramma di flusso ricavato da (20.14) è in Figura 20.28 (si noti il segno meno davanti ai coefficienti b_1, \dots, b_r ottenuto in (20.14)).

Infine, nel caso di una funzione di trasferimento che ha sia poli sia zeri, il filtro IIR ha il diagramma di flusso come in Figura 20.29.

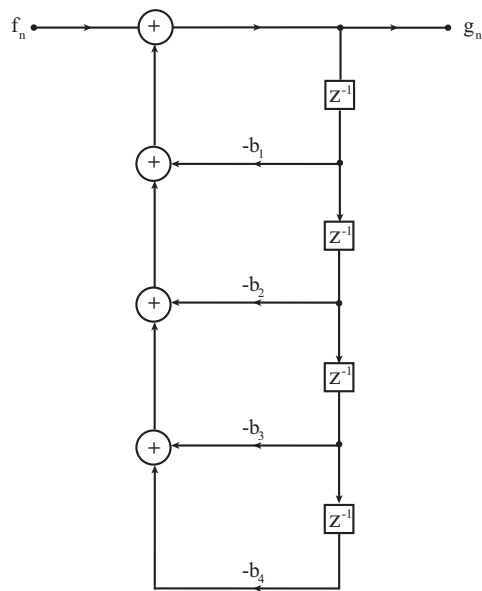


Figura 20.28: Diagramma di flusso di un filtro IIR con funzione di trasferimento con soli poli)

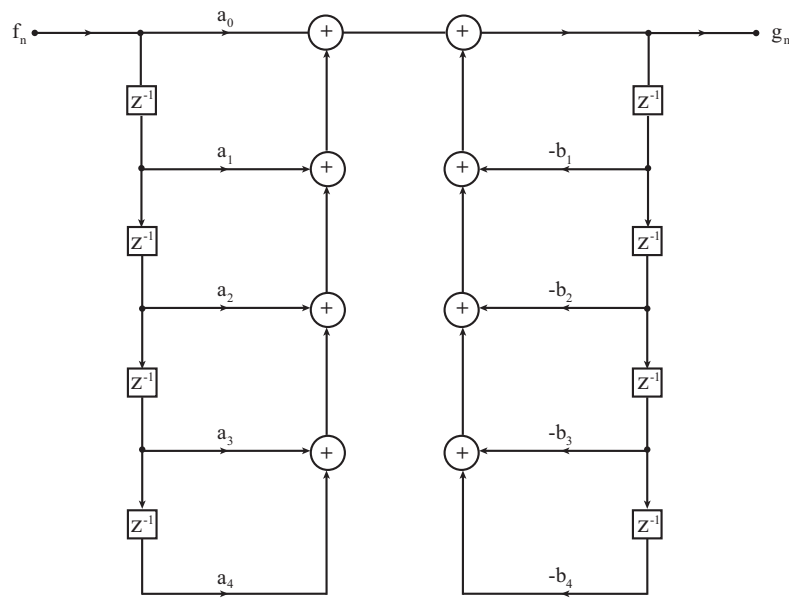


Figura 20.29: Diagramma di flusso di un filtro IIR con funzione di trasferimento con zeri e poli)

Parte VI

**Wavelets e compressione dei
segnali**

(redazione di Sandra Saliani)

Capitolo 21

Il sistema di Haar

Cominciamo adesso una parte dell'opera dedicata allo studio delle wavelts, che traduciamo in italiano come *ondicelle*, redatta in collaborazione con Sandra Saliani. Le ondicelle costituiscono famiglie di basi in L^2 particolarmente opportune per la decomposizione di segnali. La presentazione in questo e nei successivi Capitoli 22, 23 e 24 è tratta da [34].

In questo capitolo presentiamo il sistema di Haar come prototipo di base di ondicelle. Introdurremo in questo caso particolare vari concetti che verranno poi riesaminati nella costruzione di basi di ondicelle in generale e nell'analisi in multirisoluzione (MRA).

21.1 Intervalli diadici

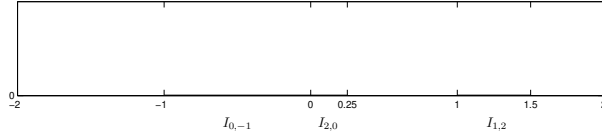
Definizione 21.1.1. Definiamo gli intervalli diadici. In \mathbb{R} gli intervalli del tipo

$$I_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right)$$

con $k, j \in \mathbb{Z}$, si chiamano intervalli diadici.

Proposizione 21.1.2. *Siano $j_0, j_1, k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$ dove o $j_0 \neq j_1$, oppure $k_0 \neq k_1$. Si ha*

- 1) $I_{j_0, k_0} \cap I_{j_1, k_1} = \emptyset$, oppure
- 2) $I_{j_0, k_0} \subset I_{j_1, k_1}$, oppure



IL SISTEMA DI HAAR

Figura 21.1: Esempi di intervalli diadici. Da sinistra $(j, k) = (0, -1), (2, 0), (1, 2)$.

$$3) I_{j_1, k_1} \subset I_{j_0, k_0}.$$

Negli ultimi due casi l'intervallo più piccolo è contenuto o nella metà destra o nella metà sinistra del più grande.

Dimostrazione. Se $j_0 = j_1$ allora, per ipotesi, $k_0 \neq k_1$, supponiamo che sia $k_0 < k_1$. Allora $\frac{k_0+1}{2^{j_0}} \leq \frac{k_1}{2^{j_0}}$ e gli intervalli sono disgiunti. Supponiamo che $j_0 \neq j_1$ e che si abbia:

$$\frac{k_0}{2^{j_0}} < \frac{k_1}{2^{j_1}} < \frac{k_0+1}{2^{j_0}} < \frac{k_1+1}{2^{j_1}}. \quad (21.1)$$

Moltiplicando per 2^{j_0}

$$k_0 < k_1 2^{j_0-j_1} < k_0+1 < (k_1+1) 2^{j_0-j_1},$$

quindi si deve avere $2^{j_0-j_1} < 1$ ossia $j_0 < j_1$.

Analogamente, moltiplicando per 2^{j_1}

$$2^{j_1-j_0} k_0 < k_1 < 2^{j_1-j_0} (k_0+1) < k_1+1,$$

quindi si deve avere $2^{j_1-j_0} < 1$ ossia $j_1 < j_0$, ed otteniamo una contraddizione. Allora in (21.1) c'è almeno un segno di uguaglianza.

Se $\frac{k_0}{2^{j_0}} = \frac{k_1}{2^{j_1}}$ non può essere $\frac{k_0+1}{2^{j_0}} = \frac{k_1+1}{2^{j_1}}$ altrimenti $j_0 = j_1$ contro l'ipotesi. Allora l'intervallo più piccolo (di lunghezza minore o uguale alla metà dell'altro) è contenuto nella metà sinistra dell'altro.

Se $\frac{k_1}{2^{j_1}} = \frac{k_0+1}{2^{j_0}}$ gli intervalli sono disgiunti.

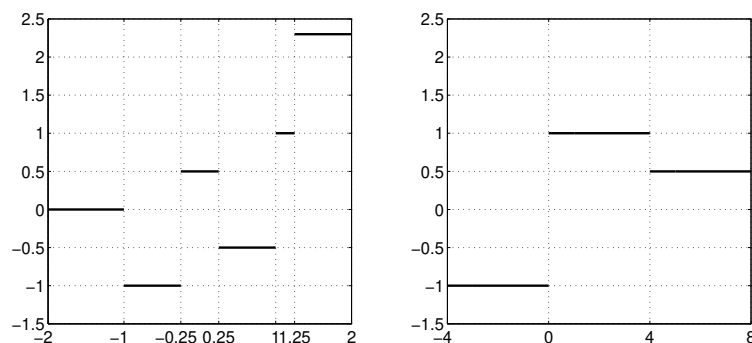


Figura 21.2: Esempi di funzioni semplici diadiche. Scala $j = 2$ a sinistra, $j = -2$ a destra.

Infine se $\frac{k_0 + 1}{2^{j_0}} = \frac{k_1 + 1}{2^{j_1}}$ non può essere $\frac{k_0}{2^{j_0}} = \frac{k_1}{2^{j_1}}$ altrimenti $j_0 = j_1$ contro l'ipotesi. Allora l'intervallo più piccolo è contenuto nella metà destra dell'altro. \square

Notazione 21.1.3. Dato un intervallo diadico $I_{j,k}$ denoteremo con $I_{j,k}^s$ la metà sinistra dell'intervallo, e con $I_{j,k}^d$ la metà destra dell'intervallo. Si noti che $I_{j,k}^s = I_{j+1,2k}$ mentre $I_{j,k}^d = I_{j+1,2k+1}$.

21.2 Funzioni semplici diadiche

Definizione 21.2.1. Una funzione semplice diadica è una funzione semplice costante su tutti gli intervalli diadici $I_{j,k}$ per $j \in \mathbb{Z}$ fissato, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. In tal caso la funzione si dice funzione semplice diadica a scala j .

Se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, una funzione semplice diadica con supporto contenuto in I si dice funzione semplice diadica su I . Il supporto di f è definito da $\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$.

Nota 21.2.2. 1. Se $j \in \mathbb{Z}$ è fissato, l'insieme delle funzioni semplici diadiche a scala j è uno spazio vettoriale reale.

2. Se $j \in \mathbb{Z}$ ed $I \subset \mathbb{R}$ sono fissati, l'insieme delle funzioni semplici diadiche a scala j su I è uno spazio vettoriale reale.

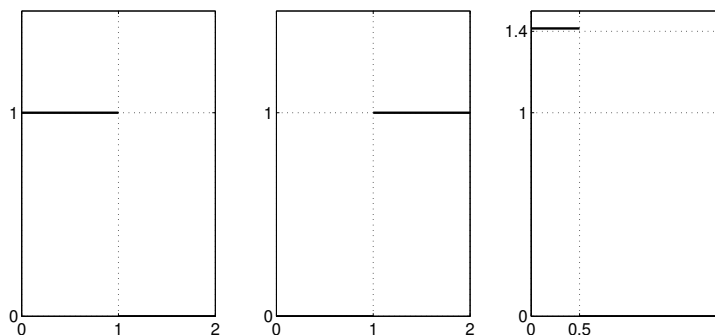


Figura 21.3: Da sinistra: $\varphi(x)$, $\varphi_{0,1}(x)$, $\varphi_{1,0}(x)$

3. Se f è una funzione semplice diadica a scala j su I , e se $j_1 \geq j$, allora f è una funzione semplice diadica a scala j_1 .

□

21.3 Il sistema di Haar su \mathbb{R}

Definizione 21.3.1. Poniamo

$$\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (21.2)$$

e, per ogni $j, k \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k) = D_{2^j}(T_k \varphi)(x)$$

(dilatazione seguita da traslazione).

La collezione $(\varphi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ si chiama sistema delle funzioni di scala di Haar su \mathbb{R} .

Si osservi che $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \chi_{I_{j,k}}(x)$ e $\varphi_{j,k}(x) \neq 0$ su $I_{j,k}$. Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{j,k}(x) dx = 2^{j/2} \int_{I_{j,k}} dx = 2^{j/2} |I_{j,k}| = \frac{2^{j/2}}{2^j} = \frac{1}{2^{j/2}}.$$

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_{j,k}(x)|^2 dx = 2^j \int_{I_{j,k}} dx = 2^j |I_{j,k}| = 1.$$

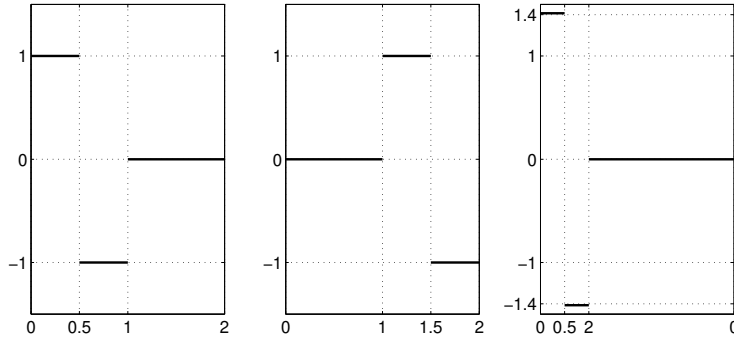


Figura 21.4: Da sinistra: $\psi(x), \psi_{0,1}(x), \psi_{1,0}(x)$

Definizione 21.3.2. Poniamo

$$\psi(x) = \chi_{[0,1/2)}(x) - \chi_{[1/2,1)}(x), \quad (21.3)$$

e, per ogni $j, k \in \mathbb{Z}$,

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) = D_{2^j}(T_k \psi)(x).$$

La collezione $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ si chiama sistema di Haar su \mathbb{R} .

Si osservi che

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \left[\chi_{I_{j,k}^s}(x) - \chi_{I_{j,k}^d}(x) \right] = 2^{j/2} \left[\chi_{I_{j+1,2k}}(x) - \chi_{I_{j+1,2k+1}}(x) \right],$$

in particolare $\psi_{j,k}(x) \neq 0$ su $I_{j,k}$. Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(x) dx = 2^{j/2} \left(\int_{I_{j+1,2k}} dx - \int_{I_{j+1,2k+1}} dx \right) = \frac{2^{j/2}}{2^{j+1}} - \frac{2^{j/2}}{2^{j+1}} = 0.$$

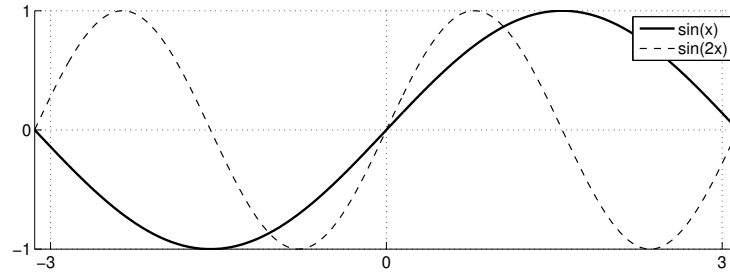
$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_{j,k}(x)|^2 dx = 2^j \left(\int_{I_{j+1,2k}} dx + \int_{I_{j+1,2k+1}} dx \right) = 1.$$

21.4 Ortogonalità del sistema di Haar

Dimostriamo che il sistema di Haar su \mathbb{R} è un sistema ortogonale in $L^2(\mathbb{R})$.

Ricordiamo che, nel caso di funzioni di

$$L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty\},$$

Figura 21.5: Il sistema $(\sin(nx))_{n \in \mathbb{N}}$

si definisce il prodotto scalare come

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Si noti che, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha

$$|\langle f, g \rangle| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} < +\infty.$$

Una collezione di funzioni in $L^2(\mathbb{R})$, $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$, si dice sistema ortogonale se

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_i(x) \overline{f_j(x)} dx = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \int_{\mathbb{R}} |f_i(x)|^2 dx & j = i. \end{cases}$$

Se poi $\int_{\mathbb{R}} |f_i(x)|^2 dx = 1$, il sistema ortogonale si dice ortonormale. Si può introdurre un'analoga definizione per funzioni definite in un intervallo.

Esempio 21.4.1. Se $I = [-\pi, \pi]$, i sistemi $(\sin(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\cos(nx))_{n \in \mathbb{N}}$, sono ortogonali in $L^2(I)$. \square

Ritorniamo ora al sistema di Haar. Osserviamo che dalle proprietà che seguono la Definizione 21.3, si ha $\psi_{j,k} \in L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 21.4.2. *Il sistema di Haar su \mathbb{R} , $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$, è un sistema ortonormale per $L^2(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Si deve provare che per ogni coppia (j_0, k_0) e (j_1, k_1) si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j_0, k_0}(x) \overline{\psi_{j_1, k_1}(x)} dx = \delta_{j_0, j_1} \delta_{k_0, k_1} = \begin{cases} 1 & j_0 = j_1, k_0 = k_1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Fissiamo dapprima una scala $j \in \mathbb{Z}$.

Siano $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$, allora

$$I_{j,k_0} \cap I_{j,k_1} = \begin{cases} I_{j,k_0} & k_0 = k_1, \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Nel caso in cui $k_0 = k_1$:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k_0}(x) \overline{\psi_{j,k_1}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} |\psi_{j,k_0}(x)|^2 dx = 1.$$

Nel caso in cui $k_0 \neq k_1$:

$\psi_{j,k_0}(x) = 2^{j/2} [\chi_{I_{j+1,2k_0}}(x) - \chi_{I_{j+1,2k_0+1}}(x)]$ ha supporto I_{j,k_0} , disgiunto dal supporto I_{j,k_1} di $\psi_{j,k_1}(x) = 2^{j/2} [\chi_{I_{j+1,2k_1}}(x) - \chi_{I_{j+1,2k_1+1}}(x)]$. Quindi si ha sempre $\psi_{j,k_0}(x) \overline{\psi_{j,k_1}(x)} = 0$, e l'asserto è dimostrato.

Prendiamo scale diverse. Siano $j_0, j_1 \in \mathbb{Z}$, $j_0 > j_1$, $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$. Ci sono tre possibilità:

1) $I_{j_0,k_0} \cap I_{j_1,k_1} = \emptyset$. Come sopra $\psi_{j_0,k_0}(x) \overline{\psi_{j_1,k_1}(x)} = 0$ in ogni punto e l'integrale si annulla.

2) $I_{j_0,k_0} \subset I_{j_1,k_1}^s$. Allora in ogni punto $\psi_{j_0,k_0}(x) \overline{\psi_{j_1,k_1}(x)} = 2^{j_1/2} \psi_{j_0,k_0}(x)$, da cui

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j_0,k_0}(x) \overline{\psi_{j_1,k_1}(x)} dx = 2^{j_1/2} \int_{\mathbb{R}} \psi_{j_0,k_0}(x) dx = 0.$$

3) $I_{j_0,k_0} \subset I_{j_1,k_1}^d$. Allora, come nel caso precedente, $\psi_{j_0,k_0}(x) \overline{\psi_{j_1,k_1}(x)} = -2^{j_1/2} \psi_{j_0,k_0}(x)$, da cui

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{j_0,k_0}(x) \overline{\psi_{j_1,k_1}(x)} dx = -2^{j_1/2} \int_{\mathbb{R}} \psi_{j_0,k_0}(x) dx = 0.$$

□

Nota 21.4.3. Dalla dimostrazione del teorema precedente si evince che, fissata una scala $J \in \mathbb{Z}$, si ha un sistema ortonormale $(\psi_{J,k})_{k \in \mathbb{Z}}$.

Per quanto riguarda il sistema $(\varphi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$, esso non è assolutamente un sistema ortonormale ma, se fissiamo una scala, lo è. □

Teorema 21.4.4. *Se si fissa una scala $J \in \mathbb{Z}$, il sistema delle funzioni a scala di Haar su \mathbb{R} , $(\varphi_{J,k})_{k \in \mathbb{Z}}$, è un sistema ortonormale per $L^2(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. (Esercizio).

Teorema 21.4.5. *Se si fissa una scala $J \in \mathbb{Z}$, il sistema*

$$\{\varphi_{J,k}, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{j,k}, j \geq J, k \in \mathbb{Z}\},$$

è un sistema ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$.

21.5 Il Lemma di divisione

Lemma 21.5.1. *Sia $j \in \mathbb{Z}$. Sia $g_j(x)$ una funzione semplice diadica a scala j . Allora esistono due funzioni $r_{j-1}(x)$ e $g_{j-1}(x)$ tali che*

$$g_j(x) = r_{j-1}(x) + g_{j-1}(x),$$

dove

$$1) \quad r_{j-1}(x) = \sum_k a_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x), \quad a_{j-1,k} \in \mathbb{R};$$

$$2) \quad g_{j-1}(x) \text{ è una funzione semplice diadica a scala } j-1.$$

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è la seguente. Assumiamo che la funzione semplice diadica g_j assuma valori $c_{j,k}$ nell'intervallo $I_{j,k}$.

Si considera la media dei due valori sulla parte destra e sinistra, ossia si definisce

$$g_{j-1}(x) = \frac{1}{2}(c_{j,2k} + c_{j,2k+1}) \quad \text{se} \quad x \in I_{j-1,k} = I_{j-1,k}^s \cup I_{j-1,k}^d = I_{j,2k} \cup I_{j,2k+1}.$$

Si chiama $r_{j-1}(x)$ la differenza $g_j(x) - g_{j-1}(x)$ e si osserva che è una funzione semplice diadica a scala j . Essa verifica la 1). Infatti, da un calcolo diretto, si deduce che il valore di r_{j-1} sulla parte sinistra di $I_{j-1,k}$ è pari all'opposto del valore sulla sua parte destra, ossia $r_{j-1}(x)$ è multiplo di $\psi_{j-1,k}(x)$ su $I_{j-1,k}$. \square

21.6 Sistemi ortonormali completi

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $L^2(I)$.

Definizione 21.6.1. L'insieme generato dalle f_n , denotato con $\langle f_n, n \in \mathbb{N} \rangle$, è l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite di elementi di $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, ossia

$$g \in \langle f_n, n \in \mathbb{N} \rangle \Leftrightarrow g = \sum_{i=1}^N c_i f_i, \text{ per } N \in \mathbb{N}, c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}.$$

$\langle f_n, n \in \mathbb{N} \rangle$, è uno spazio vettoriale complesso, la sua chiusura per la norma L^2 è denotata con $\overline{\langle f_n, n \in \mathbb{N} \rangle}$. Si ha

$$g \in \overline{\langle f_n, n \in \mathbb{N} \rangle} \Leftrightarrow \text{Per ogni } \varepsilon > 0, \text{ esiste } f \in \langle f_n, n \in \mathbb{N} \rangle \text{ tale che}$$

$$\left(\int_I |g(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \|g - f\|_2 < \varepsilon.$$

Teorema 21.6.2. Sia $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale sull'intervallo I $\left(\int_I f_n(x) \overline{f_m(x)} dx = \delta_{n,m} \right)$. Sia $g \in L^2(I)$, allora

$$g \in \overline{\langle f_n, n \in \mathbb{N} \rangle} \Leftrightarrow g = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle g, f_n \rangle f_n \quad \text{nella norma } L^2 \quad (21.4)$$

$$\Leftrightarrow \lim_n \left\| g - \sum_{h=0}^n \langle g, f_h \rangle f_h \right\|_2 = 0.$$

Se ogni funzione in $L^2(I)$ si può rappresentare come in (21.4), allora diremo che il sistema ortonormale $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, è completo.

Definizione 21.6.3. Sia $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale per $L^2(I)$. Esso si dice completo se $\overline{\langle f_n, n \in \mathbb{N} \rangle} = L^2(I)$. In tal caso $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice base ortonormale di $L^2(I)$.

Di seguito elenchiamo dei criteri equivalenti affinché un sistema ortonormale sia completo.

Teorema 21.6.4. Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormale per $L^2(I)$. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è completo;

- b) Per ogni $g \in L^2(I)$, $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle g, f_n \rangle f_n$, nella norma L^2 ;
- c) Per ogni g continua a supporto compatto su I , $g \in \overline{\langle f_n, n \in \mathbb{N} \rangle}$;
- d) Per ogni g continua a supporto compatto su I ,

$$\|g\|_2^2 = \int_I |g(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle g, f_n \rangle|^2,$$

(uguaglianza di Parseval).

21.7 Completezza del sistema di Haar su \mathbb{R}

Consideriamo le funzioni φ e ψ definite, rispettivamente, da (21.2) e (21.3). Consideriamo le funzioni $\varphi_{j,k}$ e $\psi_{j,k}$ ottenute per dilatazione e traslazione da queste. Proveremo che il sistema (ortonormale) di Haar $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ è completo in $L^2(\mathbb{R})$. A tal fine definiremo dei sottospazi di $L^2(\mathbb{R})$, (alcuni generati dalle $\varphi_{j,k}$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$, altri generati dalle $\psi_{j,k}$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$) e le proiezioni ortogonali su essi. Il procedimento che seguiremo servirà ad introdurre il metodo di multirisoluzione in questo esempio particolare, esso verrà sviluppato in generale nel Capitolo 2.

Definizione 21.7.1. Sia $j \in \mathbb{Z}$. Definiamo V_j come lo spazio generato dall'insieme $\{\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$, ossia come il più piccolo sottospazio chiuso di $L^2(\mathbb{R})$ che contenga l'insieme assegnato. Si denota con

$$V_j = \overline{\langle \varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z} \rangle}.$$

Definiamo P_j la proiezione ortogonale su V_j , ossia $P_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ associa ad ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}. \quad (21.5)$$

In base alla definizione, ogni elemento di V_j può essere approssimato, nella norma $\|\cdot\|_2$ con combinazioni lineari finite delle funzioni $\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}$.

Si ricordi che $\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \chi_{I_{j,k}}$ quindi, per $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x) = 2^j \left(\int_{I_{j,k}} f(y) dy \right) \chi_{I_{j,k}}(x).$$

Se $x \in I_{j,k}$,

$$P_j f(x) = 2^j \int_{I_{j,k}} f(y) dy$$

rappresenta il valore medio di f su $I_{j,k}$. Per tale motivo $P_j f$ fornisce una versione grossolana di f alla risoluzione $\frac{1}{2^j}$. I dettagli di f più piccoli di $\frac{1}{2^j}$ sono oscurati mentre, se maggiori di $\frac{1}{2^j}$, rimangono visibili.

P_j è ben definita, ossia la somma in (21.5) converge in $L^2(\mathbb{R})$. Infatti se $N < M$

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{|k| \leq N} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} - \sum_{|k| \leq M} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \sum_{N < |k| \leq M} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} \right\|_2^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{N < |k| \leq M} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x) \cdot \sum_{N < |h| \leq M} \langle f, \varphi_{j,h} \rangle \varphi_{j,h}(x) dx \\ &= \sum_{N < |k|, |h| \leq M} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \langle f, \varphi_{j,h} \rangle \int_{I_{j,k} \cap I_{j,h}} 2^j \delta_{k,h} dx \\ &= \sum_{N < |k| \leq M} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle|^2 \end{aligned} \quad (21.6)$$

per l'ortonormalità del sistema $\{\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$. Ora la disuguaglianza di Bessel (valida per ogni sistema ortonormale $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$), afferma che, per ogni $f \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_n \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Quindi (21.6) è la *coda* di una serie convergente e, per $N, M \rightarrow +\infty$ si ha

$$\sum_{N < |k| \leq M} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle|^2 \rightarrow 0,$$

quindi la successione delle combinazioni lineari, $\sum_{|k| \leq N} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}$, $N \in \mathbb{N}$, è di Cauchy e converge, nella norma di $L^2(\mathbb{R})$, ad un elemento di

$$\overline{\langle \varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z} \rangle} = V_j.$$

21.8 Il sistema di Haar su $[0, 1]$

Consideriamo quelle funzioni del sistema di Haar su \mathbb{R} il cui supporto è contenuto nell'intervallo $[0, 1]$. Faremo vedere che tale sistema contribuisce alla costruzione di un sistema ortonormale completo per lo spazio $L^2[0, 1]$.

Siano φ e ψ definite, rispettivamente, da (21.2) e (21.3). Se ci limitiamo all'intervallo $[0, 1]$, osserviamo che solo per le scale $j \geq 0$ e solo per alcune traslazioni k le funzioni $\varphi_{j,k}$ e $\psi_{j,k}$ hanno supporto contenuto all'interno di $[0, 1]$.

Consideriamo, per $J \geq 0$, l'insieme

$$\{\varphi_{J,k} \mid 0 \leq k \leq 2^J - 1\} \cup \{\psi_{j,k} \mid j \geq J, 0 \leq k \leq 2^j - 1\},$$

che chiameremo il *sistema di Haar su $[0, 1]$ a scala J* . Proveremo che esso forma un sistema ortonormale completo per $L^2[0, 1]$.

21.9 Ortonormalità del sistema di Haar su $[0, 1]$

Lemma 21.9.1. *Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $J > 0$ e g , funzione diadica a scala J con supporto contenuto in $[0, 1]$, tale che, per ogni $x \in [0, 1]$,*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, per l'uniforme continuità della f si può trovare $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ogni volta che $x, y \in [0, 1]$ e $|x - y| < \delta$.

Si prenda $J > 0$ grande in modo che $\frac{1}{2^J} < \delta$ e si considerino gli intervalli diadici $I_{J,k} = \left[\frac{k}{2^J}, \frac{k+1}{2^J} \right)$, $k = 0, \dots, 2^J - 1$, che partizionano l'intervallo $[0, 1]$. Si definisca

$$g(x) = f\left(\frac{k}{2^J}\right), \quad x \in I_{J,k}.$$

Se $x \in [0, 1]$ esiste una ed una sola k per cui $x \in I_{J,k}$, da cui $|x - \frac{k}{2^J}| \leq \frac{1}{2^J} < \delta$ e $|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(\frac{k}{2^J})| < \varepsilon$. \square

Teorema 21.9.2. Per ogni $N > 0$ fissato, il sistema di Haar su $[0, 1]$

$$\{\varphi_{N,k} \mid 0 \leq k \leq 2^N - 1\} \cup \{\psi_{j,k} \mid j \geq N, 0 \leq k \leq 2^j - 1\} \quad (21.7)$$

è un sistema ortonormale completo su $[0, 1]$.

Dimostrazione. Sia $N > 0$. L'ortonormalità del sistema (21.7) discende dal Teorema 21.4.5. Dimosteremo la sua completezza utilizzando la (c) del Teorema 21.6.4.

Sia f una funzione continua in $[0, 1]$ e sia $\varepsilon > 0$. Siano $J > 0$ e g come previsti dal Lemma 21.9.1. Ne segue che

$$\|f - g\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Ora g è una funzione a scala J , quindi a scala \tilde{J} per ogni $\tilde{J} > J$, ne consegue che possiamo supporre $J > N$.

La dimostrazione sarà completata se faremo vedere che g si può scrivere come combinazione lineare finita del sistema di Haar a scala N .

Per il Lemma di divisione applicato a g e J , vedi Lemma 21.5.1, si trovano due funzioni r_{J-1} e g_{J-1} tali che

$$1) \quad g = g_J = r_{J-1} + g_{J-1},$$

$$2) \quad r_{J-1} = \sum_k a_{J-1,k} \psi_{J-1,k} \text{ con } a_{J-1,k} \in \mathbb{R},$$

$$3) \quad g_{J-1} \text{ è una funzione semplice diadica a scala } J - 1.$$

Entrambe le funzioni r_{J-1} e g_{J-1} hanno supporto contenuto in $[0, 1]$.

Ripetendo questa divisione per g_{J-1} , e le altre così trovate, dopo un numero finito di passi otteniamo

$$\begin{aligned} g &= r_{J-1} + r_{J-2} + \cdots + r_{J-(J-N)} + g_{J-(J-N)} \\ &= r_{J-1} + r_{J-2} + \cdots + r_N + g_N \end{aligned}$$

dove

$$r_{J-i} = \sum_{k=0}^{2^{J-i}-1} a_{J-i,k} \psi_{J-i,k}, \quad J - i \geq N$$

e g_N è una funzione semplice a scala N con supporto in $[0, 1]$, ossia $g_N = \sum_{k=0}^{2^N-1} b_{N,k} \varphi_{N,k}$. Per l'ortonormalità del sistema allora

$$g = \sum_{k=0}^{2^N-1} \langle g, \varphi_{N,k} \rangle \varphi_{N,k} + \sum_{i=N}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^i-1} \langle g, \psi_{i,k} \rangle \psi_{i,k}.$$

Infine si dimostra facilmente che, per l'approssimazione di f con g si ha l'approssimazione di f , nella norma $\|\cdot\|_2$, con

$$\sum_{k=0}^{2^N-1} \langle f, \varphi_{N,k} \rangle \varphi_{N,k} + \sum_{i=N}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^i-1} \langle f, \psi_{i,k} \rangle \psi_{i,k}.$$

Infatti, posto f_N la somma di cui sopra, per la disuguaglianza triangolare, l'ortonormalità del sistema e la disuguaglianza di Bessel

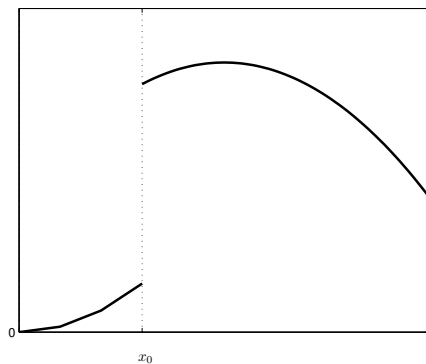
$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_2 &\leq \|f - g\|_2 + \|g - f_N\|_2 \\ &\leq \varepsilon + \left\| \sum_{k=0}^{2^N-1} \langle g - f, \varphi_{N,k} \rangle \varphi_{N,k} + \sum_{i=N}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^i-1} \langle g - f, \psi_{i,k} \rangle \psi_{i,k} \right\|_2 \\ &= \varepsilon + \left(\sum_{k=0}^{2^N-1} |\langle g - f, \varphi_{N,k} \rangle|^2 + \sum_{i=N}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^i-1} |\langle g - f, \psi_{i,k} \rangle|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon + \|f - g\|_2 \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

e il teorema è dimostrato. \square

Nota 21.9.3. Si osservi che più la scala j è grande, più è piccolo il supporto delle $\varphi_{j,k}$ e $\psi_{j,k}$. Ciò si esprime dicendo che le $\varphi_{j,k}$ e $\psi_{j,k}$ sono ben *localizzate nel tempo*.

Come conseguenza, una funzione f , nulla al di fuori di un piccolo intervallo, avrà molti coefficienti di Haar $\langle f, \varphi_{j,k} \rangle$ e $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ uguali a zero.

\square

Figura 21.6: Il salto in x_0

21.10 Localizzazione delle discontinuità

La particolarità del sistema di Haar è quella di dare un'indicazione sulla posizione delle discontinuità (non eliminabili) di una funzione dall'esame dei suoi coefficienti di Haar.

Per semplicità assumiamo che f abbia un salto in x_0 . Supponiamo che esistano i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+),$$

e che $f \in \mathcal{C}^2[0, x_0] \cup \mathcal{C}^2[x_0, 1]$ quando definita a destra e sinistra di x_0 come sopra. Fissiamo una scala j e consideriamo i due casi $x_0 \in I_{j,k}$ e $x_0 \notin I_{j,k}$.

1° caso) $x_0 \notin I_{j,k}$.

Scriviamo la formula di Taylor di f al primo ordine, nel punto medio $x_{j,k} = \frac{1}{2^j}(k + \frac{1}{2})$ di $I_{j,k}$, con il resto in forma di Lagrange

$$f(x) = f(x_{j,k}) + f'(x_{j,k})(x - x_{j,k}) + \frac{f''(\xi_{j,k})}{2}(x - x_{j,k})^2,$$

dove $\xi_{j,k} \in I_{j,k}$. Si ha

$$\begin{aligned}
 \langle f, \psi_{j,k} \rangle &= \int_{I_{j,k}} f(x) \psi_{j,k}(x) dx \\
 &= f(x_{j,k}) \int_{I_{j,k}} \psi_{j,k}(x) dx + f'(x_{j,k}) \int_{I_{j,k}} (x - x_{j,k}) \psi_{j,k}(x) dx \\
 &\quad + \int_{I_{j,k}} \frac{f''(\xi_{j,k})}{2} (x - x_{j,k})^2 \psi_{j,k}(x) dx \\
 &= f'(x_{j,k}) \int_{I_{j,k}} x \psi_{j,k}(x) dx + \int_{I_{j,k}} \frac{f''(\xi_{j,k})}{2} (x - x_{j,k})^2 \psi_{j,k}(x) dx,
 \end{aligned}$$

dove si è utilizzata la proprietà $\int_{I_{j,k}} \psi_{j,k}(x) dx = 0$. Ora, il primo integrale vale

$$\begin{aligned}
 \int_{I_{j,k}} x \psi_{j,k}(x) dx &= \int x 2^{j/2} \left(\chi_{[0, \frac{1}{2})}(2^j x - k) - \chi_{[\frac{1}{2}, 1)}(2^j x - k) \right) dx \\
 &= -\frac{2^{j/2}}{2^{2j+2}} = -\frac{2^{-3/2j}}{4},
 \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{I_{j,k}} \frac{f''(\xi_{j,k})}{2} (x - x_{j,k})^2 \psi_{j,k}(x) dx \right| &\leq \frac{1}{2} \max_{x \in I_{j,k}} |f''(x)| 2^{j/2} \int_{I_{j,k}} (x - x_{j,k})^2 dx \\
 &= \frac{1}{24} \max_{x \in I_{j,k}} |f''(x)| 2^{-5/2j}.
 \end{aligned}$$

Se j è grande, il termine $2^{-5/2j}$ è trascurabile rispetto a $2^{-3/2j}$ e otteniamo l'approssimazione

$$|\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \approx \frac{1}{4} |f'(x_{j,k})| 2^{-3/2j}.$$

2° caso) $x_0 \in I_{j,k}$.

Con un ragionamento simile al precedente, fatto sia dalla parte destra che dalla parte sinistra dell'intervallo, si ottiene

$$|\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \approx |x_0 - 2^{-j}k| |f(x_0^-) - f(x_0^+)| 2^{j/2}.$$

Se j è grande, possiamo assumere che x_0 sia all'incirca nel punto medio di $I_{j,k}$, ossia $|x_0 - 2^{-j}k| \approx \frac{2^{-j}}{4}$. In definitiva

$$|\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \approx \frac{|f(x_0^-) - f(x_0^+)|}{4} 2^{-j/2},$$

ed il decadimento dei coefficienti, per $j \rightarrow +\infty$, è più lento del 1° caso.

Capitolo 22

L'Analisi in Multirisoluzione

In questo capitolo introdurremo una struttura su $L^2(\mathbb{R})$, l'analisi in multirisoluzione, a partire dalla quale si otterrà una funzione in $L^2(\mathbb{R})$ le cui dilatazioni e traslate costituiscono una base ortonormale per $L^2(\mathbb{R})$. Premettiamo alcuni richiami di analisi di Fourier.

22.1 Richiami di analisi di Fourier

22.1.1 Serie di Fourier

Consideriamo le funzioni $e^{2\pi ikx} = \cos(2\pi kx) + i \sin(2\pi kx)$, periodiche di periodo 1. Il sistema $\{e^{2\pi ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$ è un sistema ortonormale per $L^2(\mathbb{T})$.

Definizione 22.1.1. Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$. Si definisce k -esimo coefficiente di Fourier di f il numero

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx} dx.$$

La serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx} \tag{22.1}$$

prende il nome di *serie di Fourier* di f ed, in generale, non è detto che f coincida con la sua serie di Fourier.

Vale la proprietà di unicità dei coefficienti di Fourier ossia, se $f \in L^1(\mathbb{T})$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha $\hat{f}(k) = 0$, allora $f \equiv 0$.

Se $f \in L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, si ha $\hat{f}(k) = \langle f, e^{2\pi i k x} \rangle$; la successione $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ e la serie (22.1) converge in $L^2(\mathbb{T})$ per la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, e^{2\pi i k x} \rangle|^2 \leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2.$$

Inoltre, per la completezza in $L^2(\mathbb{T})$ del sistema $\{e^{2\pi i k x}, k \in \mathbb{Z}\}$, l'uguaglianza $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$ vale nel senso di $L^2(\mathbb{T})$.

Infine, richiamiamo il teorema di Riesz-Fischer.

Teorema 22.1.2. *Se $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, allora esiste una funzione misurabile $m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tale che*

1. $m(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi i k x}$ in $L^2(\mathbb{T})$;

2. $\int_0^1 |m(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2$.

22.1.2 Trasformata di Fourier

Definizione 22.1.3. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ si definisce trasformata di Fourier di f la funzione \hat{f}

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \gamma} dx, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad (22.2)$$

La definizione è ben posta in quanto $f \in L^1(\mathbb{R})$. L'operazione che associa ad ogni funzione in $L^1(\mathbb{R})$ la sua trasformata di Fourier è un'operazione lineare.

Esempio 22.1.4. 1. Per $f(x) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x)$, $\hat{f}(\gamma) = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi\gamma}$;

2. Per $f(x) = (1 - |x|)\chi_{[-1, 1]}(x)$, $\hat{f}(\gamma) = \frac{\sin^2(\pi\gamma)}{(\pi\gamma)^2}$;

3. Per $f(x) = e^{-2\pi|x|}$, $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi(1 + \gamma^2)}$;

4. Per $f(x) = e^{-\pi x^2}$, $\hat{f}(\gamma) = e^{-\pi\gamma^2}$.

(Si veda la fig.22.1). □

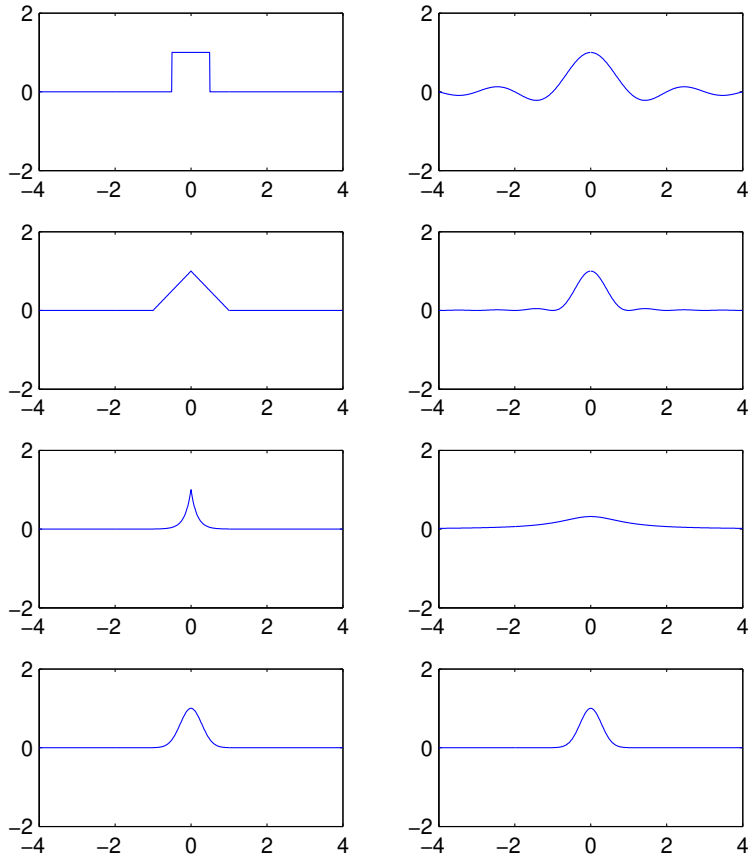


Figura 22.1: Alcune funzioni (a sinistra) e le loro trasformate di Fourier (a destra).
 Dall'alto in basso: $\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x)$, $(1 - |x|)\chi_{[-1, 1]}(x)$, $e^{-2\pi|x|}$, $e^{-\pi x^2}$.

Proprietà 22.1.5. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. \hat{f} è una funzione uniformemente continua;
2. Se anche $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$ allora \hat{f} ammette derivata continua e

$$\widehat{xf}(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} (\hat{f})'(\xi);$$

3. Se anche $x^N f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\hat{f} \in \mathcal{C}^N$ e

$$\widehat{x^j f}(\xi) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^j (\hat{f})^{(j)}(\xi), \quad \text{per } j = 0, \dots, N;$$

4. (Riemann-Lebesgue) $\lim_{|\gamma| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\gamma) = 0$;

5. Posto $T_a f(x) = f(x - a)$ per $a \in \mathbb{R}$, si ha $\widehat{T_a f}(\gamma) = e^{-2\pi i \gamma a} \hat{f}(\gamma)$;

6. Posto $D_a f(x) = a^{1/2} f(ax)$ per $a > 0$, si ha $\widehat{D_a f}(\gamma) = D_{a^{-1/2}} \hat{f}(\gamma)$.

In generale non è detto che \hat{f} appartenga ad $L^1(\mathbb{R})$ ma, sotto alcune condizioni, la trasformata di Fourier si può invertire.

Teorema 22.1.6. Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ e $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\gamma) e^{2\pi i \gamma x} d\gamma.$$

Di seguito enunciamo alcune importanti proprietà.

Teorema 22.1.7. (Formula di Plancherel)

Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ allora $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2.$$

Teorema 22.1.8. (Formula di Parseval)

Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ allora

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\gamma) \overline{\hat{g}(\gamma)} d\gamma = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \langle f, g \rangle.$$

Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ si può definire un'operazione lineare, chiamata ancora trasformata di Fourier e denotata ancora con \hat{f} che coincida con (22.2) per $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ e per cui valgano tutte le proprietà già enunciate.

Definizione 22.1.9. Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ e si definisca la successione

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & |x| < n \\ 0 & |x| \geq n. \end{cases}$$

Si ha $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ e $\|f_n - f\|_{2, \vec{n}} \rightarrow 0$. Si può dimostrare che \hat{f}_n converge in $L^2(\mathbb{R})$ e si può definire

$$\hat{f}(\gamma) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{f}_n(\gamma)$$

nel senso di $L^2(\mathbb{R})$.

Nota 22.1.10. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ allora $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Si può anche dimostrare che, nel senso di $L^2(\mathbb{R})$,

$$\hat{f}(\gamma) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\pi r^2 x^2} e^{-2\pi i \gamma x} dx,$$

e vale la formula di inversione

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\gamma) e^{-\pi r^2 \gamma^2} e^{-2\pi i \gamma x} d\gamma.$$

□

22.2 Sistemi ortonormali di traslate

Analizziamo il comportamento di funzioni ottenute per traslazioni intere di una sola funzione $g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\{g(x - k), k \in \mathbb{Z}\}. \quad (22.3)$$

Abbiamo già visto che per $g(x) = \chi_{[0,1]}(x)$, il sistema (22.3) è ortonormale. Vediamo di seguito alcune proprietà comuni per tali sistemi.

Nota 22.2.1. Se il sistema (22.3) è ortonormale, esso risulta essere una base ortonormale per lo spazio da esse generato

$$V = \overline{\langle g(x - k), k \in \mathbb{Z} \rangle}.$$

(Si veda il paragrafo 21.6). \square

Notazione 22.2.2. La funzione traslazione per $a \in \mathbb{R}$ si denota con $T_a g(x) = g(x - a)$.

Lemma 22.2.3. Sia $g \in L^2(\mathbb{R})$. Sono equivalenti

- a) $\{g(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ è un sistema ortonormale di traslate per $L^2(\mathbb{R})$;
 b) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\gamma + k)|^2 \equiv 1$, q.o. $\gamma \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Per la formula di Parseval

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{g(x - k)} dx &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\gamma) \overline{e^{-2\pi i \gamma k} \hat{g}(\gamma)} d\gamma = \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\gamma)|^2 e^{2\pi i \gamma k} d\gamma \\ &= \sum_{h \in \mathbb{Z}} \int_h^{h+1} |\hat{g}(\gamma)|^2 e^{2\pi i \gamma k} d\gamma = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |\hat{g}(\gamma + h)|^2 e^{2\pi i \gamma k} d\gamma. \end{aligned} \quad (22.4)$$

Ora $g \in L^2(\mathbb{R})$ implica che la serie $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\gamma + h)|^2$ converge ad una funzione, diciamo F , 1-periodica e in $L^1(\mathbb{T})$. Infatti, posto

$$F_n(\gamma) = \sum_{|h| \leq n} |\hat{g}(\gamma + h)|^2,$$

si ha che la successione $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ è di Cauchy,

$$\begin{aligned} \|F_n - F_m\|_1 &= \|\sum_{n < |h| \leq m} |\hat{g}(\gamma + h)|^2\|_1 = \sum_{n < |h| \leq m} \int_0^1 |\hat{g}(\gamma + h)|^2 d\gamma \\ &= \int_{-m}^{-n} |\hat{g}(\gamma)|^2 d\gamma + \int_n^m |\hat{g}(\gamma)|^2 d\gamma, \end{aligned}$$

e, per $n, m \rightarrow +\infty$, gli ultimi due integrali convergono a zero.

Allora in (22.4) si può invertire la somma con l'integrale e si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{g(x - k)} dx = \int_0^1 \sum_{h \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\gamma + h)|^2 e^{2\pi i \gamma k} d\gamma = \hat{F}(-k).$$

Quindi l'ortonormalità delle traslate equivale al fatto che tutti i coefficienti di Fourier di F sono nulli tranne quello per $k = 0$, e $\hat{F}(0) = 1$. Per l'unicità dei coefficienti di Fourier segue l'asserto. \square

Lemma 22.2.4. *Sia $g \in L^2(\mathbb{R})$ e Sia $\{g(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ un sistema ortonormale per $L^2(\mathbb{R})$. Allora $f \in \langle g(x - k), k \in \mathbb{Z} \rangle$ se e solo se esiste una successione $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tale che $\hat{f}(\gamma) = \hat{g}(\gamma) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i k \gamma} \right)$.*

Dimostrazione. \Rightarrow

$f \in \langle g(x - k), k \in \mathbb{Z} \rangle$ implica che possiamo scrivere, in $L^2(\mathbb{R})$, $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, g(\bullet - k) \rangle g(x - k)$ e, passando alla trasformata di Fourier, $\hat{f}(\gamma) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, g(\bullet - k) \rangle e^{-2\pi i k \gamma} \hat{g}(\gamma)$. Presa la successione $c_k = \langle f, g(\bullet - k) \rangle$, per la disuguaglianza di Bessel, si ha $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, g(\bullet - k) \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2$, e l'asserto.

\Leftarrow

Poniamo $f_N(x) = \sum_{|k| \leq N} c_k g(x - k) \in \langle g(x - k), k \in \mathbb{Z} \rangle$, da cui

$$\hat{f}_N(\gamma) = \hat{g}(\gamma) \left(\sum_{|k| \leq N} c_k e^{-2\pi i k \gamma} \right).$$

Ora, per l'ipotesi su \hat{f} , applicando la periodizzazione, i cambi di variabile $\xi = \gamma - n$ ed utilizzando l'ipotesi che $\{g(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ è un sistema ortonormale per $L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_2^2 &= \|\hat{f} - \hat{f}_N\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{|k| > N} c_k e^{-2\pi i k \gamma} \right|^2 |\hat{g}(\gamma)|^2 d\gamma \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \left| \sum_{|k| > N} c_k e^{-2\pi i k \gamma} \right|^2 |\hat{g}(\gamma)|^2 d\gamma \\ &= \int_0^1 \left| \sum_{|k| > N} c_k e^{-2\pi i k \xi} \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + n)|^2 d\xi \\ &= \int_0^1 \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i k \xi} - \sum_{|k| \leq N} c_k e^{-2\pi i k \xi} \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Passando al limite per $N \rightarrow +\infty$, applicando il teorema di Riesz-Fischer e la completezza del sistema $(e^{-2\pi i k x})_{k \in \mathbb{Z}}$ in $L^2(\mathbb{T})$, si ottiene

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - f_N\|_2^2 = 0$$

e quindi $f \in \overline{\langle g(x - k), k \in \mathbb{Z} \rangle}$. □

22.3 Analisi di Multirisoluzione

Definizione 22.3.1. Un'analisi in multirisoluzione (MRA) è una successione di sottospazi chiusi $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, verificanti le seguenti proprietà

1. Per ogni $j \in \mathbb{Z}$ $V_j \subset V_{j+1}$;
2. $f(x) \in V_0 \iff f(2x) \in V_1$;
3. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;
4. $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$, ossia per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $j \in \mathbb{Z}$, $g \in V_j$ tale che $\|f - g\|_2 < \varepsilon$;
5. Esiste $\varphi \in V_0$ tale che il sistema $\{\varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale per V_0 .

Nota 22.3.2. La funzione φ prevista nella condizione 5. si chiama funzione di scala.

La condizione 3. discende dalle altre condizioni.

Spesso, per costruire una MRA, si parte da un sistema ortonormale di traslate e si definisce lo spazio V_0 tramite $V_0 = \overline{\langle \varphi(x - k), k \in \mathbb{Z} \rangle}$. Gli altri spazi V_j si definiscono tramite la condizione 2.

Ogni elemento $f \in V_0$ è del tipo $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, T_k \varphi \rangle T_k \varphi$ e

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, T_k \varphi \rangle|^2 \right)^{1/2}.$$

□

Da questo momento, in questo paragrafo, supporremo che $(V_j)_{k \in \mathbb{Z}}$ sia una MRA. Poniamo $\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$, dove φ è la funzione prevista dalla condizione 5.

Proposizione 22.3.3. *Fissata una scala $j \in \mathbb{Z}$, $(\varphi_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale per V_j .*

Dimostrazione. Ortonormalità

Dalla 2. della Definizione 22.3.1 si ha $\varphi_{jk} \in V_j$. Inoltre, per le proprietà del prodotto scalare

$$\langle \varphi_{jk}, \varphi_{jh} \rangle = \langle \varphi_{0k}, \varphi_{0h} \rangle = \delta_{kh},$$

e quindi l'ortonormalità è provata.

Completezza

Se $f(x) \in V_j$, per la 2. della Definizione di 22.3.1 si ha $f(2^{-j}x) \in V_0$. Quindi, nella norma $L^2(\mathbb{R})$

$$f(2^{-j}x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f(2^{-j}\bullet), T_k \varphi \rangle T_k \varphi(x) = 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, T_k \varphi(2^j \bullet) \rangle T_k \varphi(x).$$

Ossia, nella norma $L^2(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk}(x),$$

e ciò prova la completezza. □

In analogia con quanto fatto nel Capitolo 1, definiamo degli operatori di *approssimazione* e *dettaglio*.

Definizione 22.3.4. Definiamo l'operatore di approssimazione, per $f \in L^2(\mathbb{R})$ e per ogni $j \in \mathbb{Z}$

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk}. \quad (22.5)$$

Definiamo l'operatore di dettaglio, per $f \in L^2(\mathbb{R})$ e per ogni $j \in \mathbb{Z}$

$$Q_j f = P_{j+1} - P_j. \quad (22.6)$$

Si osservi che $P_j f$ è ben definita in quanto $(\varphi_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale per V_j , (la dimostrazione è analoga a quella del paragrafo 21.7) e di conseguenza $P_j f \in V_j$. Inoltre, per la disuguaglianza di Bessel $\|P_j f\|_2 \leq \|f\|_2$. Dimostriamo ora un risultato che sarà utilizzato in seguito.

Lemma 22.3.5. Per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$,

1. $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|P_j f - f\|_2 = 0$;
2. $\lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j f\|_2 = 0$;

Dim 1.

Sia $\varepsilon > 0$. $f \in L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$, e quindi esistono $j_0 \in \mathbb{Z}$ e una funzione $h \in V_{j_0}$ tali che $\|f - h\|_2 < \varepsilon/2$. Ora, per ogni $j \geq j_0$, $h \in V_{j_0} \subset V_j$, quindi $P_j h = h$ e

$$\begin{aligned} \|f - P_j f\|_2 &\leq \|f - h\|_2 + \|h - P_j f\|_2 = \|f - h\|_2 + \|P_j h - P_j f\|_2 \\ &\leq 2\|f - h\|_2 < \varepsilon, \end{aligned}$$

da cui l'asserto.

Dim 2.

Sia $\varepsilon > 0$, e si consideri g , funzione continua a supporto compatto che approssima f nella norma $L^2(\mathbb{R})$, ossia tale che $\|f - g\|_2 < \varepsilon/2$. Si supponga che $\text{supp } g \subset [-A, A]$, allora

$$\begin{aligned} \|P_j g\|_2^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle g, \varphi_{jk} \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-A}^A g(x) \overline{\varphi_{jk}(x)} dx \right|^2 \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-A}^A |g(x)|^2 dx \int_{-A}^A 2^j |\varphi(2^j x - k)|^2 dx, \end{aligned}$$

per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Dopo il cambio di variabile $2^j x - k = y$, si ottiene

$$\|P_j g\|_2^2 \leq \|g\|_2^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-2^j A - k}^{2^j A - k} |\varphi(y)|^2 dy. \quad (22.7)$$

Dimostriamo che per M grande

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \sum_{|k| \geq M} \int_{-2^j A - k}^{2^j A - k} |\varphi(y)|^2 dy = 0. \quad (22.8)$$

Partiamo da $\lim_{j \rightarrow -\infty} 2^j = 0$, quindi per j piccoli, $2^j A < 1/2$. Allora, per ogni k (e j piccoli),

$$\int_{-2^j A-k}^{2^j A-k} |\varphi(y)|^2 dy \leq \int_{-1/2-k}^{1/2-k} |\varphi(y)|^2 dy,$$

da cui

$$\begin{aligned} \sum_{|k| \geq M} \int_{-2^j A-k}^{2^j A-k} |\varphi(y)|^2 dy &\leq \sum_{|k| \geq M} \int_{-1/2-k}^{1/2-k} |\varphi(y)|^2 dy \\ &= \int_{-\infty}^{1/2-M} |\varphi(y)|^2 dy + \int_{-1/2+M}^{+\infty} |\varphi(y)|^2 dy, \end{aligned}$$

e gli ultimi due integrali tendono a zero, per $M \rightarrow +\infty$ in quanto $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Allora l'integrale in (22.8) può essere reso piccolo a piacere prendendo M abbastanza grande per j piccoli ed il limite è dimostrato. Inoltre, fissato questo M si ha anche

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \sum_{|k| \leq M} \int_{-2^j A-k}^{2^j A-k} |\varphi(y)|^2 dy = \sum_{|k| \leq M} \lim_{j \rightarrow -\infty} \int_{-2^j A-k}^{2^j A-k} |\varphi(y)|^2 dy = 0.$$

In definitiva, da (22.7), (22.8) e da quest'ultimo limite, si ha per $j \rightarrow -\infty$

$$\|P_j g\|_2^2 \leq \|g\|_2^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-2^j A-k}^{2^j A-k} |\varphi(y)|^2 dy = \|g\|_2^2 \left(\sum_{|k| \leq M} + \sum_{|k| \geq M} \right) \rightarrow 0,$$

e dalla disuguaglianza

$$\begin{aligned} \|P_j f\|_2 &\leq \|P_j f - P_j g\|_2 + \|P_j g\|_2 = \|f - h\|_2 + \|P_j g\|_2 \\ &\leq \varepsilon + \|P_j g\|_2, \end{aligned}$$

segue l'asserto. □

Nota 22.3.6. Deduciamo ora un'equazione fondamentale che lega la funzione φ e le sue dilatate per 2. Dalla relazione $\varphi \in V_0 \subset V_1$ e dal fatto che $(\varphi_{1k})_{k \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale per V_1 , otteniamo, in $L^2(\mathbb{R})$

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi, \varphi_{1k} \rangle \varphi(2x - k). \quad (22.9)$$

Posto $h_k = \langle \varphi, \varphi_{1k} \rangle$ si ottiene $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ e l'equazione (22.9) si riscrive

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k); \quad (22.10)$$

essa prende il nome di equazione di scala (o di raffinamento). Passando alla trasformata di Fourier si ottiene

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-2\pi i k \xi / 2} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

La funzione 1-periodica $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-2\pi i k \xi}$ appartiene allo spazio $L^2(\mathbb{T})$; essa e, per abuso di linguaggio, la successione $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, prende il nome di *filtro* associato a φ . L'equazione (22.10) si riscrive

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right). \quad (22.11)$$

□

Esempio 22.3.7. In questo esempio vedremo come il sistema di Haar su \mathbb{R} si inserisca nella definizione di MRA. Si prenda $\varphi = \chi_{[0,1]}$ e si definiscano $V_0 = \overline{\langle \varphi(x - k), k \in \mathbb{Z} \rangle}$ e gli altri spazi V_j tramite la condizione 2. della Definizione 22.3.1. Per quanto già visto nel Capitolo 1, valgono le proprietà 1., 2. e 5. della Definizione 22.3.1. Al fine di dimostrare la 3. si osservi che ogni V_j consiste di funzioni di $L^2(\mathbb{R})$ costanti sugli intervalli diadici I_{jk} . Quindi una funzione $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ risulterà costante su tutti gli I_{jk} , e l'unica

possibilità è che sia nulla.

Infine, ogni funzione in $L^2(\mathbb{R})$ può essere approssimata, in norma, da una funzione continua a supporto compatto e questa, a sua volta, può essere approssimata da una funzione diadica a scala J , sempre in norma $L^2(\mathbb{R})$, (Lemma 21.9.1). Ciò prova la 4.

Troviamo l'equazione di scala per φ

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \chi_{[0,1]}(x) = \chi_{[0,1/2)}(x) + \chi_{[1/2,1)}(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{10}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{11}(x). \end{aligned}$$

Allora i coefficienti dell'equazione di scala sono dati da

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & k = 0, 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

□

A partire da una MRA si può costruire una funzione ψ , detta *Ondicella*, tale che il sistema

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

sia una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 22.3.8. *Sia $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ una MRA con funzione di scala φ e filtro $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Si definiscano*

$$g_k = (-1)^k \overline{h_{1-k}}, \quad (22.12)$$

e

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k). \quad (22.13)$$

Allora $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ed il sistema $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$, è una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$ (ψ si chiama *ondicella*).

Dimostrazione. Dalla definizione (22.13) segue che $\psi \in V_1$. Inoltre, passando alla trasformata di Fourier si ha

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-2\pi i k \xi / 2} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

dove si è posto $m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-2\pi i k \xi}$. Si osservi che, dalla definizione dei coefficienti g_k , si ottiene la seguente relazione tra m_0 e m_1

$$\begin{aligned} m_1(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{h_{1-k}} e^{-2\pi i k \xi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{1-k} \overline{h_k} e^{-2\pi i (1-k)\xi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_k} e^{-2\pi i (1-k)(\xi+1/2)} = e^{-2\pi i (\xi+1/2)} \overline{m_0(\xi+1/2)} \quad (22.14) \end{aligned}$$

Dimostriamo che il sistema $\{\psi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$, è ortonormale facendo vedere che soddisfa la b) del Lemma 22.2.3. Intanto, per q.o. $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\gamma+k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\frac{\xi+k}{2})|^2 |\hat{\varphi}(\frac{\xi+k}{2})|^2 = \sum_{k \text{ pari}} + \sum_{k \text{ dispari}} \\
&= |m_0(\frac{\xi}{2})|^2 \sum_{k \text{ pari}} |\hat{\varphi}(\frac{\xi+k}{2})|^2 + |m_0(\frac{\xi+1}{2})|^2 \sum_{k \text{ dispari}} |\hat{\varphi}(\frac{\xi+k}{2})|^2 \\
&= |m_0(\frac{\xi}{2})|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}+k)|^2 + |m_0(\frac{\xi+1}{2})|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{\xi+1}{2}+k)|^2 \\
&= |m_0(\frac{\xi}{2})|^2 + |m_0(\frac{\xi+1}{2})|^2. \tag{22.15}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\gamma+k)|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_1(\frac{\xi+k}{2})|^2 |\hat{\varphi}(\frac{\xi+k}{2})|^2 \\
&= \sum_{k \text{ pari}} + \sum_{k \text{ dispari}} = |m_1(\frac{\xi}{2})|^2 + |m_1(\frac{\xi+1}{2})|^2 \\
&= |m_0(\frac{\xi+1}{2})|^2 + |m_0(\frac{\xi}{2})|^2 = 1.
\end{aligned}$$

In definitiva $\{\psi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$, costituisce una base ortonormale per $\langle \psi(x-k), k \in \mathbb{Z} \rangle = W_0 \subset V_1$.

Facciamo ora vedere che $W_0 \perp V_1$, cioè che per ogni $n, k \in \mathbb{Z}$

$$\langle \psi(x-k), \varphi(x-k) \rangle = 0.$$

Infatti, periodizzando,

$$\begin{aligned}
& \langle \psi(x-k), \varphi(x-k) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi(x-k) \overline{\varphi(x-k)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)} e^{2\pi i(n-k)\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)} m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) e^{-2\pi i(k-n)\xi} d\xi \\
&= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_p^{p+1} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)} m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) e^{-2\pi i(k-n)\xi} d\xi \\
&= \int_0^1 \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi+p}{2}\right) \right|^2 \overline{m_0\left(\frac{\xi+p}{2}\right)} m_1\left(\frac{\xi+p}{2}\right) e^{-2\pi i(k-n)\xi} d\xi \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{p \text{ pari}} + \sum_{p \text{ dispari}} \right) e^{-2\pi i(k-n)\xi} d\xi \\
&= \int_0^1 \left(\overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)} m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) + \overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)} m_1\left(\frac{\xi+1}{2}\right) \right) e^{-2\pi i(k-n)\xi} d\xi \\
&= \int_0^1 \left(-\overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)} m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right) + \overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)} m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right) e^{-2\pi i\xi/2} e^{-2\pi i(k-n)\xi} d\xi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dimostriamo ora l'ortonormalità del sistema $\{\psi_{jk}\}$.

Se la scala j è fissata

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{jh} \rangle = \langle \psi_{0k}, \psi_{0h} \rangle = \delta_{kh}.$$

Se le scale $j \neq j'$, assumiamo $j' < j$ e siano $k, k' \in \mathbb{Z}$.

Si osservi che $\psi \in V_1$ implica che

$$\psi_{j'k'} \in V_{j'+1} \subset V_j,$$

in quanto $j'+1 \leq j$. Se facciamo vedere che ogni elemento di V_j è ortogonale a ψ_{jk} otteniamo l'asserto. Intanto da $\langle \psi_{0k}, \varphi_{0h} \rangle = 0$ si ottiene $\langle \psi_{jk}, \varphi_{jh} \rangle = 0$. Poi, ogni elemento di V_j , si scrive, in $L^2(\mathbb{R})$, $f = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{jh} \rangle \varphi_{jh}$, quindi

$$\langle \psi_{jk}, f \rangle = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \overline{\langle f, \varphi_{jh} \rangle} \langle \psi_{jk}, \varphi_{jh} \rangle = 0.$$

Rimane da provare la completezza del sistema $\{\psi_{jk}\}$ e, quindi, basterà provare che

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - \sum_{j=-N}^{N-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}\|_2 = 0. \quad (22.16)$$

Come prima cosa proviamo che

$$Q_0 f \in \overline{\langle \psi_{0n}, n \in \mathbb{Z} \rangle} = W_0. \quad (22.17)$$

Infatti si ha, per definizione $Q_0 f = P_1 f - P_0 f$, dove

$$P_0 f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{0k} \rangle \varphi_{0k}, \quad P_1 f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{1k} \rangle \varphi_{1k}.$$

Passando alla trasformata di Fourier, per l'equazione di scala

$$\begin{aligned} \hat{P}_0 f(\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{0k} \rangle e^{-2\pi i k \xi} \hat{\varphi}(\xi) = b(\xi) m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \\ \hat{P}_1 f(\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{1k} \rangle e^{-2\pi i k \xi/2} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = a\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \end{aligned}$$

dove le funzioni $a(\xi)$ e $b(\xi)$ sono in $L^2(\mathbb{T})$, essendo

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{1k} \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2, \quad i = 0, 1.$$

Quindi

$$\hat{Q}_0 f(\xi) = \hat{P}_1 f(\xi) - \hat{P}_0 f(\xi) = \left[a\left(\frac{\xi}{2}\right) - b(\xi) m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Ora, (22.16) è vera se $\hat{Q}_0 f(\xi) = c(\xi) \hat{\psi}(\xi)$, per una certa funzione 1-periodica $c(\xi) \in L^2(\mathbb{T})$. Tenuto conto di $\hat{\psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$, ciò si traduce nel trovare $c(\xi)$ in modo che sia

$$c(\xi) m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \left[a\left(\frac{\xi}{2}\right) - b(\xi) m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Quest'ultima uguaglianza è vera se si trova $c(\xi)$ in modo che

$$c(\xi) m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) + b(\xi) m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) = a\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

ovvero

$$c(\xi)m_1\left(\frac{\xi+1}{2}\right) + b(\xi)m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right) = a\left(\frac{\xi+1}{2}\right),$$

ovvero, in forma matriciale

$$M(\xi) \begin{pmatrix} b(\xi) \\ c(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) & m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right) & m_1\left(\frac{\xi+1}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(\xi) \\ c(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ a\left(\frac{\xi+1}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Dalle uguaglianze (22.14) e (22.15) si ottiene che la matrice $M(\xi)$ è unitaria per quasi ogni ξ , quindi

$$M^*(\xi)M(\xi) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e si ottiene

$$\begin{pmatrix} b(\xi) \\ c(\xi) \end{pmatrix} = M^*(\xi) \begin{pmatrix} a\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ a\left(\frac{\xi+1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)} & \overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)} \\ \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)} & \overline{m_1\left(\frac{\xi+1}{2}\right)} \end{pmatrix},$$

portando alla scelta per q.o. $\xi \in \mathbb{R}$,

$$c(\xi) = \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)}a\left(\frac{\xi}{2}\right) + \overline{m_1\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}a\left(\frac{\xi+1}{2}\right).$$

La 1-periodicità di $c(\xi)$ è immediata. Infine da $|m_1(\xi)| \leq 1$ e $a(\xi) \in L^2(\mathbb{T})$ segue che $c(\xi) \in L^2(\mathbb{T})$ e (22.17) è dimostrata.

Proviamo ora che per ogni $j \in \mathbb{Z}$

$$Q_j f \in \overline{\langle \psi_{jn}, n \in \mathbb{Z} \rangle} = W_j. \quad (22.18)$$

Infatti si ha, per definizione di Q_j , (22.17) e le proprietà della dilatazione $D_{2^j} f(x) = 2^{j/2} f(2^j x)$,

$$\begin{aligned} Q_j f &= P_{j+1} f - P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j+1k} \rangle \varphi_{j+1k} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle D_{2^{-j}} f, \varphi_{1k} \rangle D_{2^{-j}} \varphi_{1k} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle D_{2^{-j}} f, \varphi_{0k} \rangle D_{2^{-j}} \varphi_{0k} \\ &= D_{2^{-j}} [P_1(D_{2^{-j}} f) - P_0(D_{2^{-j}} f)] = D_{2^{-j}} [Q_0(D_{2^{-j}} f)] \\ &= D_{2^{-j}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle D_{2^{-j}} f, \psi_{0k} \rangle \psi_{0k} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}, \quad (22.19) \end{aligned}$$

e (22.18) è dimostrata.

Infine, per $N \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} & \|f - \sum_{j=-N}^{N-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}\|_2 = \|f - \sum_{j=-N}^{N-1} Q_j f\|_2 \\ &= \|f - \sum_{j=-N}^{N-1} (P_{j+1}f - P_j f)\|_2 = \|f - (P_N f - P_{-N} f)\|_2 \\ &\leq \|f - P_N f\|_2 + \|P_{-N} f\|_2, \end{aligned}$$

e, per il Lemma 22.3.5 il teorema è completamente dimostrato. \square

Esempio 22.3.9. Riprendiamo l'Esempio 22.3.7. Calcoliamo i coefficienti g_k . Si ha

$$g_k = (-1)^k \overline{h_{1-k}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & k = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & k = 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi l'ondicella è

$$\psi(x) = g_0 \varphi_{10}(x) + g_1 \varphi_{11}(x) = \chi_{[0,1/2)}(x) - \chi_{[1/2,1)}(x),$$

e la base ottenuta è il sistema di Haar. \square

Nota 22.3.10. Nella dimostrazione del Teorema 22.3.8 abbiamo introdotto gli spazi

$$\overline{\langle \psi_{jn}, n \in \mathbb{Z} \rangle} = W_j.$$

Questi verificano le seguenti proprietà

1. $W_j \perp W_n, \quad j \neq n;$
2. $W_j \perp V_j, \quad \text{for all } j;$
3. $V_{j+1} = V_j \oplus W_j;$
4. $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j.$

Dimostriamo la 3. La somma $V_j \oplus W_j$ è ortogonale in quanto $W_0 \perp V_0$ e da $\langle \psi_{jk}, \varphi_{jk} \rangle = \langle \psi_{0k}, \varphi_{0k} \rangle = 0$ segue anche che $W_j \perp V_j$.

Da $V_j \subset V_{j+1}$ e $W_0 \subset V_1 \subset V_{j+1}$ si ottiene $V_j \oplus W_j \subset V_{j+1}$.

Viceversa, se $f \in V_{j+1}$ allora $f = P_{j+1}f = Q_j f + P_j f \in V_j \oplus W_j$. \square

Nota 22.3.11. Si osservi che, se ψ è l'ondicella prevista nel Teorema 22.3.8 e se $\nu(\xi)$ è una funzione 1-periodica e misurabile tale che $|\nu(\xi)| = 1$ quasi ovunque in $[0, 1)$, allora la nuova funzione definita tramite $\hat{\psi} = \nu(\xi)m_1(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2)$ risulta essere ancora un'ondicella associata alla stessa MRA di ψ . \square

22.4 Proprietà della funzione di scala e della ondicella associate ad una MRA

Enunciamo delle proprietà necessarie per una funzione di scala e un'ondicella associate ad una MRA. Assumeremo, quindi, che $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ sia una MRA, φ sia una funzione di scala e che ψ sia l'ondicella prevista nel Teorema 22.3.8. Assumiamo ancora che $\varphi\psi \in L^1(\mathbb{R})$. Ciò è sicuramente vero quando φ ha supporto compatto e, in tal caso anche la ψ è a supporto compatto.

Teorema 22.4.1.

$$|\hat{\varphi}(0)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \right| = 1.$$

Dimostrazione. Consideriamo una funzione ausiliaria f con le seguenti proprietà: $f \in L^2(\mathbb{R})$, \hat{f} continua e a supporto contenuto in $[-R, R]$, normalizzata in modo che $\|f\|_2 = 1$. Se $j \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \|P_j f\|_2^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk} \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \hat{f}, \hat{\varphi}_{jk} \rangle|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-R}^R 2^{-j/2} \hat{f}(\xi) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) e^{-2\pi i k \xi / 2^j} d\xi \right|^2 \end{aligned} \quad (22.20)$$

Ora il sistema $\{2^{-j/2} e^{-2\pi i k \xi / 2^j}, k \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale per lo spazio $L^2([-2^{j-1}, 2^{j-1}])$. Se j è abbastanza grande, allora, $R < 2^{j-1}$ e $[-R, R] \subset [-2^{j-1}, 2^{j-1}]$ e (22.20) non è altro che la norma ottenuta per molteplicità da $\hat{f} \hat{\varphi}(\frac{\cdot}{2^j})$. Quindi

$$\|P_j f\|_2^2 = \int_{-R}^R \left| \hat{f}(\xi) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right|^2 d\xi,$$

e passando al limite per $j \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$\|f\|_2^2 = \lim_{j \rightarrow +\infty} \|P_j f\|_2^2 = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \left| \hat{f}(\xi) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right|^2 d\xi. \quad (22.21)$$

Ora si può passare il limite sotto il segno di integrale in (22.21). Infatti l'ipotesi $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ implica che $\hat{\varphi}$ è uniformemente continua e quindi il limite

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = \hat{f}(\xi) \hat{\varphi}(0),$$

è uniforme in ξ . Allora

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R |\hat{f}(\xi) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)|^2 d\xi = \int_{-R}^R |\hat{f}(\xi) \hat{\varphi}(0)|^2 d\xi = \|f\|_2^2 |\hat{\varphi}(0)|^2,$$

da cui

$$\left| \int \varphi(x) dx \right| = |\hat{\varphi}(0)| = 1.$$

□

Corollario 22.4.2.

$$\hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0.$$

Dimostrazione. L'equazione di scala, valida per ogni ξ in quanto $\hat{\varphi}$ è continua, ed il teorema precedente implicano che $m_0(0) = 1$. Dall'equazione (22.15) si ottiene $m_0(\frac{1}{2}) = 0$ e dall'equazione di scala per ψ e dalla sua continuità si ottiene

$$\hat{\psi}(0) = m_1(0) \hat{\varphi}(0) = e^{-2\pi i 1/2} \overline{m_0\left(\frac{1}{2}\right)} = 0.$$

□

Corollario 22.4.3.

$$\hat{\varphi}(n) = 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z} \text{ } n \neq 0.$$

Dimostrazione. Per la continuità della $\hat{\varphi}$, l'uguaglianza $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 = 1$ vale per ogni ξ . In particolare, per $\xi = 0$ ed il Teorema 22.4.1 si ha $\sum_{k \neq 0} |\hat{\varphi}(k)|^2 = 0$, e l'asserto. □

Corollario 22.4.4.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x + k) = 1 \quad \text{per quasi ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. La funzione 1-periodica $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x+k)$ è nello spazio $L^1(\mathbb{T})$. Calcolando i suoi coefficienti di Fourier, per periodizzazione, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x+k) e^{-2\pi i k x} dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \varphi(x+k) e^{-2\pi i k x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-2\pi i k y} dy = \hat{\varphi}(k) = \delta_{k0} \end{aligned}$$

□

Il seguente teorema, che viene proposto senza dimostrazione, fornisce delle condizioni sufficienti al fine di ottenere una MRA.

Teorema 22.4.5. *Sia $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ una successione di sottospazi chiusi di $L^2(\mathbb{R})$ verificanti le seguenti proprietà*

1. Per ogni $j \in \mathbb{Z}$, $V_j \subset V_{j+1}$;
2. $f(x) \in V_0 \iff f(2x) \in V_1$;
3. Esiste $\varphi \in V_0$ tale che il sistema $\{\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale per V_0 .

Supponiamo, inoltre, che $|\hat{\varphi}|$ sia continua in zero. Allora sono equivalenti

- a) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$,
- b) $\hat{\varphi}(0) \neq 0$.

Inoltre, vera a), e quindi b), si ha $|\hat{\varphi}(0)| = 1$.

22.5 Esempi di MRA

22.5.1 Spline lineari

Forniamo un'esempio di analisi in multirisoluzione. Definiamo gli spazi:

$$V_0 = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C} \mid f \text{ lineare negli intervalli } I_{0k} = [k, k+1), k \in \mathbb{Z}\},$$

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C} \mid f \text{ lineare negli intervalli } I_{jk} = [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}), k \in \mathbb{Z}\},$$

quindi $f(x) \in V_j$ se e solo se $f(2^{-j}x) \in V_0$. Facciamo vedere che $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ è una MRA.

Ogni $f \in V_j$, è lineare in $I_{jk} = I_{j+1,2k} \cup I_{j+1,k2+1}$ quindi lineare su ognuna delle sue metà, allora $f \in V_{j+1}$, e $V_j \subset V_{j+1}$.

Dimostriamo che $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$.

A tal fine è sufficiente dimostrare che ogni funzione continua a supporto compatto è approssimabile con funzioni di V_j per qualche $j \in \mathbb{Z}$.

Sia $\varepsilon > 0$, f continua a supporto compatto contenuto in $[-A, A]$, quindi uniformemente continua. Allora esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \delta$,

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2A}},$$

e quindi la stessa vale per ogni $x, y \in I_{jk}$, con j grande tale che $2^{-j} < \delta$.

Definiamo ora $g \in V_j$ che approssimerà f nella norma $L^2(\mathbb{R})$. In ogni intervallo I_{jk} , g sarà il segmento che unisce $f(\frac{k}{2^j})$ e $f(\frac{k+1}{2^j})$. Quindi per ogni $x \in I_{jk}$,

$$g(x) = 2^j \left(\frac{k+1}{2^j} - x \right) f\left(\frac{k}{2^j}\right) + 2^j \left(x - \frac{k}{2^j} \right) f\left(\frac{k+1}{2^j}\right).$$

Si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= \left| 2^j \left(\frac{k+1}{2^j} - x \right) f(x) + 2^j \left(x - \frac{k}{2^j} \right) f(x) - g(x) \right| \\ &\leq 2^j \left(\frac{k+1}{2^j} - x \right) |f(x) - f\left(\frac{k}{2^j}\right)| + 2^j \left(x - \frac{k}{2^j} \right) |f(x) - f\left(\frac{k+1}{2^j}\right)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2A}}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\|f - g\|_2^2 = \int_{-A}^A |f(x) - g(x)|^2 dx \leq \frac{\varepsilon^2}{2A} 2A = \varepsilon^2.$$

Dimostriamo che $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

Ogni $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ è continua, in $L^2(\mathbb{R})$ e lineare negli intervalli $[0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$, quindi necessariamente nulla.

Infine bisogna trovare la funzione di scala $\varphi \in V_0$. La costruzione non sarà immediata e la φ sarà ottenuta a partire dalla funzione ausiliaria

$$\gamma(x) = (1 - |x|)\chi_{[-1,1]}(x).$$

Lemma 22.5.1. *Se $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ è lineare sugli intervalli del tipo $[k, k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, allora*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x)\gamma(x - n), \quad (22.22)$$

dove la somma converge puntualmente.

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, esiste uno ed un solo $k \in \mathbb{Z}$ tale $x \in [k, k + 1)$. Allora la quantità

$$\gamma(x - n) = (1 - |x - n|)\chi_{[-1,1]}(x - n) = (1 - |x - n|)\chi_{[n-1, n+1]}(x),$$

non si annulla solo per $n = k, k + 1$. Quindi la somma in (22.22) è uguale a

$$f(k)\gamma(x - k) + f(k + 1)\gamma(x - (k + 1)). \quad (22.23)$$

Dimostriamo che coincide con $f(x)$. Si noti che (22.23) è lineare in $[k, k + 1)$, Agli estremi k e $k + 1$ dell'intervallo vale, rispettivamente,

$$f(k)\gamma(0) + f(k + 1)\gamma(-1) = f(k), \quad f(k)\gamma(1) + f(k + 1)\gamma(0) = f(k + 1).$$

Ma anche f è lineare e continua in $[k, k + 1)$, ed otteniamo l'asserto. \square

Al fine di dimostrare che (22.22) vale anche nella norma $L^2(\mathbb{R})$, premettiamo

Lemma 22.5.2. *Se f è lineare in $[n, n + 1)$, allora*

$$\frac{1}{6} (|f(n)|^2 + |f(n + 1)|^2) \leq \int_n^{n+1} |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} (|f(n)|^2 + |f(n + 1)|^2) \quad (22.24)$$

Dimostrazione. In $[n, n + 1)$ abbiamo, per la linearità di f

$$f(x) = f(n) + (f(n + 1) - f(n))(x - n),$$

quindi

$$\int_n^{n+1} |f(x)|^2 dx = \int_n^{n+1} |f(n) + (f(n + 1) - f(n))(x - n)|^2 dx.$$

Sviluppando il quadrato e calcolando l'integrale, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} |f(x)|^2 dx &= \frac{1}{3}(|f(n+1)|^2 + |f(n)|^2 + f(n)f(n+1)) \\ &\leq \frac{1}{3}(|f(n+1)|^2 + |f(n)|^2) + \frac{1}{6}(|f(n+1)|^2 + |f(n)|^2) \\ &= \frac{1}{2}(|f(n+1)|^2 + |f(n)|^2) \end{aligned}$$

dove si è usata la disuguaglianza $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, vera per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Se si utilizza l'altra disuguaglianza $-ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} |f(x)|^2 dx &= \frac{1}{3}(|f(n+1)|^2 + |f(n)|^2 + f(n)f(n+1)) \\ &\geq \frac{1}{3}(|f(n+1)|^2 + |f(n)|^2) - \frac{1}{6}(|f(n+1)|^2 + |f(n)|^2) \\ &= \frac{1}{6}(|f(n+1)|^2 + |f(n)|^2), \end{aligned}$$

ed il Lemma è dimostrato. □

Lemma 22.5.3. *Se $f \in V_0$ allora*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x)\gamma(x-n), \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}).$$

Dimostrazione. Intanto osserviamo che dal lemma precedente deduciamo il seguente fatto: se $f \in V_0$, la serie di termine generale $\frac{1}{6}(|f(n+1)|^2 + |f(n)|^2)$ è maggiorata dalla serie di termine generale $\int_n^{n+1} |f(x)|^2 dx$, e quest'ultima è convergente in quanto

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2.$$

Allora

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (|f(n+1)|^2 + |f(n)|^2) < +\infty,$$

e quindi

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} |f(n)|^2 = 0.$$

Siano, ora, $N, M \in \mathbb{N}$ e consideriamo

$$\sum_{n=-M}^N f(n)\gamma(x-n).$$

Si ha, per il Lemma 22.5.1

$$\sum_{n=-M}^N f(n)\gamma(x-n) = \begin{cases} f(-M)(1+x+M), & \text{se } x \in [-M-1, -M), \\ f(x), & \text{se } x \in [-M, -N), \\ f(N)(1-x+N), & \text{se } x \in [N, N+1), \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{n=-M}^N f(n)\gamma(x-n)\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{-M-1} |f(x)|^2 dx \\ &+ \int_{-M-1}^{-M} |f(x) - f(-M)(1+x+M)|^2 dx \\ &+ \int_N^{N+1} |f(x) - f(N)(1-x+N)|^2 dx + \int_{N+1}^{+\infty} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Per la linearità di f negli intervalli $[-M-1, -M)$ e $[N, N+1)$, tutto ciò è uguale a

$$\int_{-\infty}^{-M-1} |f(x)|^2 dx + \frac{|f(-M-1)|^2}{3} + \frac{|f(N+1)|^2}{3} + \int_{N+1}^{+\infty} |f(x)|^2 dx,$$

e, per $N, M \rightarrow +\infty$ tutto tende a zero ed il lemma è dimostrato. \square

Facciamo ora vedere che V_0 è generato dalle traslate di γ .

Lemma 22.5.4.

$$V_0 = \overline{\langle \gamma(x-k), k \in \mathbb{Z} \rangle}.$$

Dimostrazione. Dal Lemma 22.5.3 otteniamo inclusione $V_0 \subset \overline{\langle \gamma(x-k), k \in \mathbb{Z} \rangle}$. Viceversa, sia $f \in \overline{\langle \gamma(x-k), k \in \mathbb{Z} \rangle}$, e $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la successione in $\langle \gamma(x-k), k \in \mathbb{Z} \rangle$ che approssima f nella norma $L^2(\mathbb{R})$. Fissato un intervallo del tipo $[k, k+1)$, dalla linearità delle f_n segue quella di

f ed anche la convergenza uniforme. Infatti se $f_n(x) = a_n x + b_n$, si dimostra che le successioni $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ convergono e, dette a e b il loro limite, rispettivamente, si ha $f(x) = ax + b$. Inoltre

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |a_n - a||x| + |b_n - b| \leq |a_n - a||k + 1| + |b_n - b|,$$

che converge, uniformemente in x , a zero. Allora f è continua in $[k, k + 1)$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e quindi in \mathbb{R} . \square

Si osservi che le traslate di γ non sono ortonormali. Infatti

$$\langle \gamma(\bullet - n), \gamma(\bullet - m) \rangle = \begin{cases} \frac{2}{3}, & n = m, \\ \frac{1}{6}, & |n - m| = 1, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

quindi

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\gamma}(\xi + n)|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \gamma, \gamma(\bullet - n) \rangle e^{-2\pi i n \xi} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{6} e^{-2\pi i \xi} + \frac{1}{6} e^{2\pi i \xi} = \frac{1}{3} (1 + 2 \cos^2(\pi \xi)) \neq 1. \end{aligned}$$

Si osservi, però, che

$$\frac{1}{3} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\gamma}(\xi + n)|^2 \leq 1.$$

In tale situazione si può sempre trovare una $\varphi \in V_0$ che faccia il suo dovere (ma si può perdere la compattezza del supporto).

Teorema 22.5.5. *Supponiamo che $\gamma \in L^2(\mathbb{R})$ sia a supporto compatto e tale che esistano $A, B > 0$ per cui*

$$A \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\gamma}(\xi + n)|^2 \leq B \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}.$$

Allora esiste $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tale che

1. Il sistema $\{\varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ sia ortonormale;

$$2. \overline{\langle \varphi(x-k), k \in \mathbb{Z} \rangle} = \overline{\langle \gamma(x-k), k \in \mathbb{Z} \rangle}.$$

Dimostrazione. Accenniamo alla dimostrazione. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\gamma}(\xi + n)|^2$ è un polinomio trigonometrico che, per ipotesi, non si annulla mai. Allora φ viene definita tramite la sua trasformata di Fourier da

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\hat{\gamma}(\xi)}{\sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\gamma}(\xi + n)|^2}}.$$

Si verifica immediatamente che $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + n)|^2 = 1$. □

Nel nostro caso la funzione φ è definita da

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\sqrt{3}\hat{\gamma}(\xi)}{\sqrt{1 + 2 \cos^2(\pi\xi)}}.$$

Si osservi che γ verifica l'equazione di scala

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{1}{2}\gamma(2x+1) + \gamma(2x) + \frac{1}{2}\gamma(2x-1) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma_{1-1}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{10}(x) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma_{11}(x), \end{aligned}$$

Quindi

$$\hat{\gamma}(\xi) = \cos^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \hat{\gamma}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Si ottiene, allora, l'equazione di scala per φ

$$\hat{\varphi}(\xi) = \cos^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \sqrt{\frac{1 + 2 \cos^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)}{1 + 2 \cos^2(\pi\xi)}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

e l'ondicella

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\xi) &= e^{-2\pi i(\xi+1/2)} \overline{m_0(\xi+1/2)} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &= -\sqrt{3}e^{-\pi i\xi} \sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \sqrt{\frac{1 + 2 \sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)}{(1 + 2 \cos^2\left(\frac{\pi\xi}{2}\right))(1 + 2 \cos^2(\pi\xi))}}. \end{aligned}$$

22.5.2 L'ondicella di Shannon

Si consideri l'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e la funzione $\varphi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ la cui trasformata di Fourier vale $\hat{\varphi} = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$.

Si noti che $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 = 1$, tranne che per $\xi = \pm 1/2$, quindi il sistema $\{\varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ è ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$.

Si definiscano gli spazi $V_0 = \langle \varphi(x - k), k \in \mathbb{Z} \rangle$ e $V_j = \langle \varphi_{jk}, k \in \mathbb{Z} \rangle$.

E' chiaro che la 2. del Teorema 22.4.5 è verificata. Inoltre $|\hat{\varphi}|$ è continua in $\xi = 0$ e $\hat{\varphi}(0) = 1 \neq 0$. Quindi, per ottenere una MRA in virtù del già citato teorema, basterà dimostrare che $V_0 \subset V_1$ (da cui $V_j \subset V_{j+1}$, per ogni $j \in \mathbb{Z}$). L'inclusione cercata è verificata se si prova che φ verifica un'equazione di scala, cioè se esiste una funzione m_0 in $L^2(\mathbb{T})$ tale che, quasi ovunque,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) &\Leftrightarrow \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\chi_{[-1, 1]}(\xi) \\ &\Leftrightarrow \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(2\xi) = m_0(\xi)\chi_{[-1, 1]}(2\xi) \\ &\Leftrightarrow \chi_{[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]}(\xi) = m_0(\xi)\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\xi). \end{aligned}$$

Ciò porta a definire in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$m_0(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| < \frac{1}{4}, \\ 0, & |\xi| \geq \frac{1}{4}, \end{cases}$$

con estensione periodica in \mathbb{R} . L'ondicella è, allora, definita come

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\xi) &= m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = -e^{-\pi i \xi} \chi_{(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})}\left(\frac{\xi+1}{2}\right) \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\xi) \\ &= -e^{-\pi i \xi} \chi_{[-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]}(\xi). \end{aligned}$$

ψ si chiama ondicella di Shannon. Si osservi che $\varphi \notin L^1(\mathbb{R})$ e nemmeno $\psi \notin L^1(\mathbb{R})$, in quanto $\hat{\psi}$ non è continua. Invertendo si ha

$$\psi(x) = (1 - 2 \sin(\pi x)) \frac{\sin \pi(x - 1/2)}{\pi(x - 1/2)}.$$

Si osservi che, in virtù dell'Osservazione 22.3.11, prendendo $\nu(\xi) = -1$ anche la funzione

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-\pi i \xi} \chi_{[-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]}(\xi)$$

è un'ondicella.

22.5.3 Ondicelle che non provengono da MRA

Le funzioni $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ per cui il sistema $\{\psi_{jk}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ forma una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$ si chiamano *ondicelle*. Journé ha fornito un esempio di ondicella che non proviene da una MRA. Essa è definita tramite la sua trasformata di Fourier.

$$|\hat{\psi}| = \chi_K$$

dove

$$K = [-\frac{32}{14}, -2) \cup [-\frac{1}{2}, -\frac{2}{7}) \cup (\frac{2}{7}, \frac{1}{2}] \cup (2, \frac{32}{14}].$$

Esistono delle equazioni fondamentali per determinare se una ψ è un'ondicella. In generale, se $\hat{\psi}$ ha una certa regolarità ed un decadimento dolce all'infinito, allora, necessariamente, proviene da una MRA.

Capitolo 23

La Trasformata Discreta di Ondicelle

A partire da una MRA ed assegnata una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$, svilupperemo un metodo ricorsivo per calcolare i coefficienti di f nella base di ondicelle: la trasformata discreta di ondicelle (DWT).

23.1 L'algoritmo

Sia φ la funzione di scala della MRA (V_j) , verificante l'equazione di scala

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \varphi(2x - n),$$

e sia ψ l'ondicella,

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \varphi(2x - n),$$

dove $g(n) = (-1)^n \overline{h(1-n)}$.

In molte applicazioni, volendo usare la trasformata discreta di ondicelle, bisogna determinare i coefficienti $c_0(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, di una funzione f nella base ortonormale di V_0 , ossia tali che

$$P_0 f = \sum_k c_0(k) \varphi_{0k},$$

conoscendo solo i valori di campionamento $f(k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Una pratica molto usata è quella di usare i valori di campionamento direttamente come coefficienti. Strang e Nguyen, [32], chiamano ciò un *crimine*, sebbene spesso

funzioni. In realtà sarebbe meglio effettuare prima il “preprocessamento” dei dati, cioè definire

$$t(x) = \sum_k f(k)\varphi(x-k).$$

In questo modo si ha $t \in V_0$, $f(k) = \langle t, \varphi_{0k} \rangle$, ossia i coefficienti di t nella base ortonormale di V_0 , che è quanto di più corretto si possa fare.

Quindi assumiamo che $f \in L^2(\mathbb{R})$ e poniamo, per ogni $j \in \mathbb{Z}$

$$c_j(k) = \langle f, \varphi_{-j,k} \rangle, \quad d_j(k) = \langle f, \psi_{-j,k} \rangle. \quad (23.1)$$

Ci proponiamo di calcolare i coefficienti in (23.1). A tal fine è utile il seguente calcolo.

$$\begin{aligned} \varphi_{jk}(x) &= 2^{j/2}\varphi(2^j x - k) = \sum_n h(n)2^{j+1/2}\varphi(2^{j+1}x - (2k+n)) \\ &= \sum_m h(m-2k)\varphi_{j+1,m}(x). \end{aligned}$$

Analogamente

$$\psi_{jk}(x) = \sum_m g(m-2k)\varphi_{j+1,m}(x).$$

Si possono così calcolare le successioni dei coefficienti c_1 e d_1 a partire dalla successione precedente c_0 , infatti

$$c_1(k) = \langle f, \varphi_{-1,k} \rangle = \sum_m \overline{h(m-2k)} \langle f, \varphi_{0,m} \rangle = \sum_m \overline{h(m-2k)} c_0(m),$$

e, allo stesso modo,

$$d_1(k) = \sum_m \overline{g(m-2k)} c_0(m).$$

Proseguendo si ottengono

$$c_{j+1}(k) = \sum_m \overline{h(m-2k)} c_j(m), \quad d_{j+1}(k) = \sum_m \overline{g(m-2k)} c_j(m).$$

Viceversa, se sono note le successioni di coefficienti $d_1, d_2, \dots, d_{j+1}, c_{j+1}$, si può ottenere la successione c_0 . Infatti, ricordiamo che, per (22.5), (22.6) e (22.19),

$$P_{-j}f = \sum_n \langle f, \varphi_{-j,n} \rangle \varphi_{-j,n} = \sum_n c_j(n)\varphi_{-j,n},$$

e

$$Q_{-j}f = \sum_n \langle f, \psi_{-j,n} \rangle \psi_{-j,n} = \sum_n d_j(n) \psi_{-j,n},$$

con $P_{-j}f = P_{-j-1}f + Q_{-j-1}f$. Quindi,

$$\begin{aligned} \sum_n c_j(n) \varphi_{-j,n} &= \sum_n c_{j+1}(n) \varphi_{-j+1,n} + \sum_n d_{j+1}(n) \psi_{-j+1,n} \\ &= \sum_n c_{j+1}(n) \sum_m h(m-2n) \varphi_{-j,m} + \sum_n d_{j+1}(n) \sum_m g(m-2n) \varphi_{-j,m} \\ &= \sum_m \left[\sum_n c_{j+1}(n) h(m-2n) + d_{j+1}(n) g(m-2n) \right] \varphi_{-j,m}. \end{aligned}$$

Eguagliando i coefficienti otteniamo

$$c_j(m) = \sum_n c_{j+1}(n) h(m-2n) + d_{j+1}(n) g(m-2n), \quad (23.2)$$

ed a ritroso possiamo riottenere la successione c_0 .

23.2 Proprietà dei filtri provenienti da MRA

Come si è visto, in tutta la procedura dell'algoritmo ciò che si è usato sono i filtri $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ e $(g(n))_{n \in \mathbb{Z}}$, ovvero

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h(n) e^{-2\pi i \xi n}, \quad m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g(n) e^{-2\pi i \xi n}.$$

Analizziamo, ora, delle proprietà importanti di questi filtri assumendo che $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Proposizione 23.2.1. 1. $\sum_n h(n) = \sqrt{2}$,
(condizione di normalizzazione);

2. $\sum_n g(n) = 0$;

3. $\sum_n h(2n+1) = \sum_n h(2n)$;

4. $\sum_k h(k)\overline{h(k-2n)} = \sum_k g(k)\overline{g(k-2n)} = \delta_{n,0}$, $\sum_k g(k)\overline{h(k-2n)} = 0$,
(condizioni di ortogonalità);
5. $\sum_k \overline{h(m-2k)}h(n-2k) + \overline{g(m-2k)}g(n-2k) = \delta_{m,n}$,
(condizione di ricostruzione perfetta).

Dimostrazione. Per la 1. si osservi che $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ e $\hat{\varphi}(0) = m_0(0)\hat{\varphi}(0)$ implicano $m_0(0) = 1$, ossia l'asserto.

Analogamente, per la 2., da $m_1(0)\hat{\varphi}(0) = \hat{\psi}(0) = 0$ si ha $m_1(0) = 0$, e cioè $\sum_n (-1)^n h(1-n) = 0$, da cui, passando alle somme su indici pari o dispari, si ottiene l'asserto.

La prima delle 3. si ottiene dall'equazione di scala

$$\begin{aligned} \delta_{n,0} &= \langle \varphi_{0,0}, \varphi_{0,n} \rangle = \sum_{k,m} h(k)\overline{h(m)} \langle \varphi_{1,k}, \varphi_{1,2n+m} \rangle \\ &= \sum_{k,m} h(k)\overline{h(m)} \delta_{k,2n+m} = \sum_k h(k)\overline{h(k-2n)}. \end{aligned}$$

Lo stesso argomento applicato a $\psi_{0,n}$ prova la seconda. Infine, per la terza si parte da $0 = \langle \psi_{0,n}, \varphi_{0,m} \rangle$, per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$.

La 4. si dimostra osservando che, per ogni successione c_0 , e per come sono definite c_1 e d_1 si ha

$$\begin{aligned} c_0(n) &= \sum_k c_1(k)h(n-2k) + d_1(k)g(n-2k) \\ &= \sum_k \sum_m c_0(m)\overline{h(m-2k)}h(n-2k) + \sum_m c_0(m)\overline{g(m-2k)}g(n-2k) \\ &= \sum_m c_0(m) \left[\sum_k \overline{h(m-2k)}h(n-2k) + \overline{g(m-2k)}g(n-2k) \right], \end{aligned}$$

da cui l'asserto. □

23.3 Filtri

Tutte le condizioni elencate nel paragrafo precedente si possono riformulare in modo diverso, in termini di operatori di *approssimazione* e di *dettaglio*.

Definizione 23.3.1. Sia $c = (c(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ un segnale.

L'operatore di "traslazione" (shift), t_m , è definito, per $m \in \mathbb{Z}$ fissato, come

$$(t_m c)(n) = c(n - m).$$

L'operatore di sottocampionamento (*downsampling*), \downarrow , è definito come

$$(\downarrow c)(n) = c(2n).$$

L'operatore di sovracampionamento (*upsampling*), \uparrow , è definito come

$$(\uparrow c)(n) = \begin{cases} c(n/2), & n \text{ pari,} \\ 0, & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Definizione 23.3.2. Sia $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ un filtro, cioè $\sum_n |h(n)| < +\infty$, non necessariamente proveniente da una MRA.

Si definisca $g(n) = (-1)^n \overline{h(1-n)}$. L'operatore di approssimazione H è definito, per ogni segnale $c = (c(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$(Hc)(k) = \sum_n c(n) \overline{h(n-2k)}.$$

L'operatore di dettaglio G è definito, per ogni segnale,

$$(Gc)(k) = \sum_n c(n) \overline{g(n-2k)}.$$

Gli operatori aggiunti sono

$$(H^*c)(k) = \sum_n c(n) h(k-2n), \quad (G^*c)(k) = \sum_n c(n) g(k-2n).$$

Nota 23.3.3. Si osservi che, per ogni coppia di segnali c e d ,

$$\langle Hc, d \rangle = \langle c, H^*d \rangle, \quad e \quad \langle Gc, d \rangle = \langle c, G^*d \rangle.$$

Ricordando che la convoluzione tra due successioni in $\ell^2(\mathbb{Z})$ è definita come

$$c * d(k) = \sum_n c(n) d(k-n),$$

e posto

$$\tilde{h}(n) = \overline{h(-n)}, \quad e \quad \tilde{g}(n) = \overline{g(-n)},$$

otteniamo le seguenti espressioni per gli operatori appena definiti

$$Hc = \downarrow (c * \tilde{h}), \quad H^*c = (\uparrow c) * h, \quad Gc = \downarrow (c * \tilde{g}), \quad G^*c = (\uparrow c) * g.$$

□

Alla luce delle definizioni precedenti, si ha

Teorema 23.3.4. *Sia $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ un filtro, cioè $\sum_n |h(n)| < +\infty$, non necessariamente proveniente da una MRA. Si definisca $g(n) = (-1)^n \overline{h(1-n)}$. Allora,*

$$1) \sum_k h(k) \overline{h(k-2n)} = \sum_k g(k) \overline{g(k-2n)} = \delta_{n,0} \Leftrightarrow HH^* = GG^* = I;$$

$$2) \sum_k g(k) \overline{h(k-2n)} = 0 \Leftrightarrow HG^* = GH^* = 0;$$

$$3) \sum_k \overline{h(m-2k)} h(n-2k) + \overline{g(m-2k)} g(n-2k) = \delta_{m,n} \\ \Leftrightarrow H^*H + G^*G = I.$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la 1). Le altre si provano analogamente.

$$\begin{aligned} HH^*c(k) &= \downarrow (H^*c * \tilde{h})(k) = \downarrow ((\uparrow c) * h * \tilde{h})(k) \\ &= ((\uparrow c) * h * \tilde{h})(2k) = \sum_n (\uparrow c)(n) (h * \tilde{h})(2k-n) \\ &= \sum_n c(n) (h * \tilde{h})(2k-2n) = \sum_n c(n) \delta_{k,n} = c(k), \end{aligned}$$

dove si è usata l'uguaglianza

$$h * \tilde{h}(2p) = \sum_k h(k) \overline{h(k-2p)} = \delta_{p,0}.$$

□

Possiamo anche esprimere gli operatori H e G in termini delle funzioni 1-periodiche costruite a partire dai filtri. In effetti, ad ogni successione $c = (c(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, si può associare una funzione 1-periodica $c(x) \in L^2(\mathbb{T})$ definita tramite la sua trasformata di Fourier

$$\hat{c}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) e^{-2\pi i k \xi}.$$

Così, se definiamo

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h(n) e^{-2\pi i \xi n}, \quad m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g(n) e^{-2\pi i \xi n},$$

dall'Osservazione 23.3.3 è facile dimostrare che, per quasi ogni ξ ,

$$\widehat{(Hc)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{c}\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)} + \hat{c}\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right) \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right)} \right], \quad (23.3)$$

$$\widehat{(Gc)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{c}\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)} + \hat{c}\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right) \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right)} \right],$$

e

$$\widehat{(H^*c)}(\xi) = \sqrt{2} \hat{c}(2\xi) m_0(\xi), \quad \widehat{(G^*c)}(\xi) = \sqrt{2} \hat{c}(2\xi) m_1(\xi). \quad (23.4)$$

Allo stesso modo si prova

Corollario 23.3.5. *Nelle ipotesi del Teorema 23.3.4, definiamo*

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h(n) e^{-2\pi i \xi n}, \quad m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g(n) e^{-2\pi i \xi n}.$$

Allora valgono le seguenti proprietà

$$1) m_0(\xi) \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} + m_1(\xi) \overline{m_1\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} = 0;$$

$$2) HG^* = GH^* = 0.$$

Teorema 23.3.6. *Nelle ipotesi del Corollario 23.3.5, sono equivalenti*

$$a) |m_0(\xi)|^2 + |m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)|^2 = 1 \text{ per quasi ogni } \xi \in \mathbb{R};$$

$$b) \sum_k h(k) \overline{h(k-2n)} = \delta_{0,n};$$

$$c) H^*H + G^*G = I;$$

$$d) HH^* = GG^* = I.$$

Dimostrazione. Dimostriamo $a) \Leftrightarrow b)$. Con opportuni cambi di variabile si ha l'uguaglianza

$$\begin{aligned}
\sum_k h(k) \overline{h(k-2n)} &= \int_0^1 \sum_k h(k) e^{-2\pi i \xi k} \overline{\sum_m h(m-2n) e^{-2\pi i \xi m}} d\xi \\
&= 2 \int_0^1 m_0(\xi) \overline{m_0(\xi)} e^{4\pi i \xi k} d\xi \\
&= 2 \int_0^{1/2} |m_0(\xi)|^2 e^{4\pi i \xi k} d\xi + 2 \int_{1/2}^1 |m_0(\xi)|^2 e^{4\pi i \xi k} d\xi \\
&= 2 \int_0^{1/2} \left[|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \frac{1}{2})|^2 \right] e^{4\pi i \xi k} d\xi \\
&= \int_0^1 \left[|m_0(\frac{\xi}{2})|^2 + |m_0(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2})|^2 \right] e^{2\pi i \xi k} d\xi,
\end{aligned}$$

da cui l'equivalenza.

Dimostriamo $a) \Leftrightarrow c)$.

Per $c = (c(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, e per il Corollario 23.3.5,

$$\begin{aligned}
[(H^*H + G^*G)c]^\wedge(\xi) &= (\widehat{H^*Hc})(\xi) + (\widehat{G^*Gc})(\xi) \\
&= \sqrt{2} (\widehat{Hc})(2\xi) m_0(\xi) + \sqrt{2} (\widehat{Gc})(2\xi) m_1(\xi) \\
&= \hat{c}(\xi) |m_0(\xi)|^2 + \hat{c}(\xi + \frac{1}{2}) \overline{m_0(\xi + \frac{1}{2})} m_0(\xi) \\
&\quad + \hat{c}(\xi) |m_1(\xi)|^2 + \hat{c}(\xi + \frac{1}{2}) \overline{m_1(\xi + \frac{1}{2})} m_1(\xi) \\
&= \hat{c}(\xi) [|m_0(\xi)|^2 + |m_1(\xi)|^2],
\end{aligned}$$

da cui l'equivalenza.

Analogamente si prova $a) \Leftrightarrow d)$. □

23.4 QMF

Definizione 23.4.1. Sia $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ un filtro, cioè $\sum_n |h(n)| < +\infty$. Sia $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h(n) e^{-2\pi i \xi n}$. Diremo che $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ (oppure m_0) è un "quadratic mirror filter" (QMF) se

$$1) \quad m_0(0) = 1;$$

2) $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \frac{1}{2})|^2 = 1$, per quasi ogni $\xi \in \mathbb{R}$.

In caso di filtro QMF valgono le proprietà elencate nella Proposizione 23.2.1.

Teorema 23.4.2. *Sia $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ un filtro QMF, sia $g(n) = (-1)^n \overline{h(1-n)}$. Allora valgono tutte le proprietà della Proposizione 23.2.1.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue dalla definizione di QMF e dal Teorema 23.3.6. \square

Nota 23.4.3. Ogni filtro m_0 associato ad una funzione di scala in $L^1(\mathbb{R})$ è un QMF in virtù della (22.15) e della prima parte della dimostrazione del Teorema 23.2.1. \square

Nota 23.4.4. Dalla condizione di ortogonalità della Proposizione 23.2.1 discende che, se $h(n) = 0$ per $n > N$ e $n < M$ con $h(N) \neq 0$ e $h(M) \neq 0$, allora il numero $N - M + 1$ è pari, ovvero $h(n)$ ha supporto uguale ad un numero pari di punti. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \delta_n &= \sum_k h(k) \overline{h(k-2n)} \\ &= h(M) \overline{h(M-2n)} + h(M+1) \overline{h(M+1-2n)} + \cdots + h(N) \overline{h(N-2n)}. \end{aligned}$$

Ora, se $N - M + 1$ fosse dispari, scegliendo $2n = N - M$ avremmo

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_k h(k) \overline{h(k-2n)} \\ &= h(M) \overline{h(2M-N)} + h(M+1) \overline{h(2M+1-N)} + \cdots + h(N) \overline{h(M)}, \end{aligned}$$

ed essendo $2M - N < 2M + 1 - N < \cdots, M - 1 < M$ otterremmo l'assurdo

$$0 = \sum_k h(k) \overline{h(k-2n)} = h(N) \overline{h(M)} \neq 0.$$

\square

23.5 La trasformata discreta di ondicelle

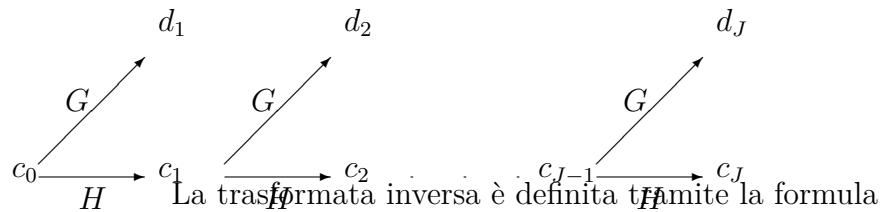
Alla luce di quanto fatto nei paragrafi precedenti, possiamo dare la definizione formale della trasformata discreta di Ondicelle.

Definizione 23.5.1. Sia $h(n)$ un filtro QMF. Siano $g(n), m_0, m_1, H$ e G definiti come nella Definizione 23.3.2. Sia $c_0 = (c_0(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. La trasformata discreta di ondicelle di c_0 al livello $J \in \mathbb{N}$ è data dalle successioni

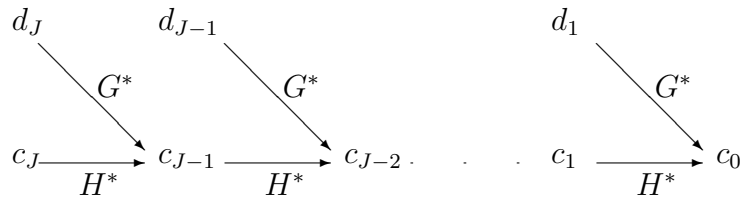
$$(d_1(n))_{n \in \mathbb{Z}}, (d_2(n))_{n \in \mathbb{Z}}, \dots, (d_J(n))_{n \in \mathbb{Z}}, (c_J(n))_{n \in \mathbb{Z}},$$

dove, per ogni $p = 1, \dots, J - 1$,

$$c_p(n) = (Hc_p)(n), \quad d_p(n) = (Gc_p)(n).$$



$$c_{p-1}(n) = (H^*c_p)(n) + (G^*d_p)(n).$$



Nelle applicazioni si è in presenza di un segnale c_0 di lunghezza finita. In questo caso si può procedere in due modi.

Primo caso. Si “riempe” di zeri il segnale e si procede con la trasformata discreta. La rappresentazione, però, non è la più efficiente: partendo da un segnale c_0 di lunghezza $L = 2^N$, (ovvero $c_0(n_0)c_0(n_0 + L - 1) \neq 0$ e $c_0(n) = 0$ per $|n| > n_0$), si verifica facilmente che, al passo j , entrambe le successioni c_j e d_j hanno lunghezza pari a $2^{N-j} + (1 - 2^{-j})(L - 2)$.

Complessivamente, allora, se ci fermiamo al passo J , la trasformata discreta richiede la memorizzazione di valori in numero pari a

$$\begin{aligned} & 2^{N-j} + (1 - 2^{-j})(L - 2) + \sum_{p=1}^J (2^{N-p} + (1 - 2^{-p})(L - 2)) \\ &= 2^{N-j} + (1 - 2^{-j})(L - 2) + 2^N \left(\sum_{p=1}^J 2^{-p} \right) + (L - 2)J - (L - 2) \left(\sum_{p=1}^J 2^{-p} \right) \\ &= 2^N + J(L - 2), \end{aligned}$$

e questo numero cresce con J .

Secondo caso. Un'alternativa è quella di rendere il segnale periodico, ovvero ripetere all'infinito i valori non nulli. Si può dimostrare che la trasformata discreta di un segnale di periodo 2^N crea, al passo successivo, successioni di periodo pari a 2^{N-1} . In questo modo, dopo $J \leq N$ passi, la trasformata memorizza esattamente 2^N valori.

Ci sono situazioni però, si pensi, ad esempio, all'andamento del prezzo di un'azione, in cui il segnale non può dirsi periodico. In tal caso si usano altre tecniche che fanno riferimento a costruzioni più raffinate, quali le ondicelle biortogonali o i frames, che vedremo in un capitolo successivo.

La DWT può essere vista come trasformazione ortogonale. Partiamo da un segnale reale c_0 di lunghezza, e quindi periodo, $L = 2^N$, La matrice che rappresenta H sarà una matrice $2^{N-1} \times 2^N$, costruita traslando, ad ogni riga, i valori del filtro di due posizioni.

Per esempio, per $N = 3$ ed un filtro reale di lunghezza 6, in cui $h(0)h(5) \neq 0$, si avrà

$$H_8 = \begin{pmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & h(3) & h(4) & h(5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h(0) & h(1) & h(2) & h(3) & h(4) & h(5) \\ h(4) & h(5) & 0 & 0 & h(0) & h(1) & h(2) & h(3) \\ h(2) & h(3) & h(4) & h(5) & 0 & 0 & h(0) & h(1) \end{pmatrix}.$$

Allo stesso modo, tenendo presente che $g(n) = (-1)^n \overline{h(1-n)}$, si avrà

$$G_8 = \begin{pmatrix} g(-4) & g(-3) & g(-2) & g(-1) & g(0) & g(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g(0) & g(-4) & g(-3) & g(-2) & g(-1) & g(0) \\ g(0) & g(1) & 0 & 0 & g(-4) & g(-3) & g(-2) & g(-1) \\ g(-2) & g(-1) & g(0) & g(1) & 0 & 0 & g(-4) & g(-3) \end{pmatrix}.$$

Si osservi che, per quanto detto precedentemente, Hc_0 e Gc_0 producono ciascuno un vettore di periodo 2^{N-1} . Definita la matrice $L \times L = 2^N \times 2^N$

$$W_L = \begin{pmatrix} H_L \\ G_L \end{pmatrix},$$

si ottiene l'uguaglianza $W_L^* W_L = H_L^* H_L + G_L^* G_L = I_L$, dove I_L è la matrice identica. Pertanto W_L è una matrice ortogonale e la trasformata discreta si ricava dal seguente procedimento:

Primo passo

$$W_L c_0 = \begin{pmatrix} d_1 \\ c_1 \end{pmatrix};$$

secondo passo

$$\begin{pmatrix} I_{L/2} & 0 \\ 0 & W_{L/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ c_2 \end{pmatrix};$$

ed in generale, al passo J

$$\begin{pmatrix} I_{(1-2^{-J})L} & 0 \\ 0 & W_{L/2^J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{J-1} \\ c_{J-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{J-1} \\ d_J \\ c_J \end{pmatrix}.$$

La trasformata discreta, W , ottenuta come prodotto di tutte queste matrici ortogonali, è ancora ortogonale

$$W c_0 = \begin{pmatrix} I_{(1-2^{-J})L} & 0 \\ 0 & W_{L/2^J} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I_{L/2} & 0 \\ 0 & W_{L/2} \end{pmatrix} W_L c_0 = \begin{pmatrix} d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{J-1} \\ d_J \\ c_J \end{pmatrix}.$$

23.6 QMF che generano MRA

Abbiamo visto che un filtro associato ad una funzione di scala proveniente da una MRA è un filtro QMF. E' naturale chiedersi se, viceversa, partendo da

un filtro QMF si può ottenere una MRA ed una funzione di scala associata ad esso. Cominciamo con l'osservare che se m_0 è un filtro associato ad una funzione di scala φ , si ha necessariamente, per l'equazione di scala

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)m_0\left(\frac{\xi}{4}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{4}\right) = \prod_{j=1}^n m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^n}\right).$$

Se possiamo dare un senso al limite

$$\lim_n \prod_{j=1}^n m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right),$$

indicato con $\prod_{j=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$, dalla relazione

$$\prod_{j=1}^n m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^n}\right)}$$

e nella ipotesi che $\hat{\varphi}$ sia continua, otteniamo un'indicazione di come debba essere scelta φ , ossia

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\hat{\varphi}(0).$$

Quindi richiamiamo i concetti che portano a definire il prodotto infinito.

23.6.1 Prodotti infiniti

Definizione 23.6.1. Sia $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi. Se esiste finito

$$\lim_N \prod_{n=1}^N z_n = \lim_N (z_1 \cdots z_n),$$

esso prende il nome di “prodotto infinito” della successione $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e si indica con

$$\prod_{n=1}^{+\infty} z_n.$$

In tal caso si dice anche che $\prod_{n=1}^{+\infty} z_n$ converge.

Nota 23.6.2. 1) Se esiste un $n \in \mathbb{N}$ per cui $z_n = 0$ allora esiste il prodotto infinito e vale 0.

2) Se $z_n \neq 0$ per ogni n , ed esiste il prodotto infinito, allora, posto $p_N =$

$$\prod_{n=1}^N z_n, \text{ si ha}$$

$$\lim_N z_N = \lim_N \frac{p_N}{p_{N-1}} = 1.$$

□

Ricordiamo che, se $z \in \mathbb{C}$ viene scritto nella forma $z = |z|e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta < 2\pi$, il numero complesso $\log z = \ln |z| + i\theta$ si chiama logaritmo principale di z .

Teorema 23.6.3. *Sia $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi. Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \log z_n$ converge, allora converge il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{+\infty} z_n$.*

Dimostrazione. Sia $s_N = \prod_{n=1}^N \log z_n \in \mathbb{C}$. Per ipotesi, esiate $\lim_N s_N = s$, quindi esiste $\lim_N e^{s_N} = e^s$. Ora $z_n = |z_n|e^{i\theta_n}$, quindi

$$e^{s_N} = \prod_{n=1}^N e^{\log z_n} = \prod_{n=1}^N |z_n| e^{i\theta_n} = \prod_{n=1}^N z_n,$$

e si ottiene l'asserto. □

Definizione 23.6.4. Diremo che il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{+\infty} z_n$ converge assolutamente, se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \log z_n$ converge assolutamente, cioè se si verifica la

convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |\log z_n|$.

Teorema 23.6.5. *Sia $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi. Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (z_n - 1)$ converge assolutamente, allora il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{+\infty} z_n$ converge assolutamente.*

Dimostrazione. Dall'ipotesi di assoluta convergenza, segue che $\lim_n |z_n - 1| = 0$. Quindi, per n grandi si ha $|z_n - 1| < 1/2$. Partendo dall'osservazione ovvia che $|\log z_n| = |\log(1 + (z_n - 1))|$, andiamo a stimare $|\log(1 + y)|$, per $y \in \mathbb{C}$, $|y| < 1/2$, per mezzo della formula di Taylor

$$\log(1 + y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{|\log(1 + y)|}{|y|} &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|y|^{n-1}}{n} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|y|^{n-1}}{n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|y|^n}{n+1} \\ &\leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2. \end{aligned}$$

Quindi, per n grandi si ha

$$|\log z_n| \leq 2|z_n - 1|,$$

e l'asserto. \square

23.6.2 QMF e funzione di scala

Ritorniamo ai QMF per dare una risposta positiva al nostro problema almeno nel caso di filtri finiti.

Teorema 23.6.6. *Sia $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ un filtro QMF finito, ovvero $h(n) = 0$ tranne, al più, per un numero finito di termini. Consideriamo il polinomio trigonometrico $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h(n) e^{-2\pi i \xi n}$. Allora il prodotto infinito*

$$\prod_{j=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

converge assolutamente ed in $L^\infty([-R, R])$ per ogni $R \in \mathbb{R}$.

Inoltre, posto $p(\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$, $\xi \in \mathbb{R}$, si ha che $p \in L^2(\mathbb{R})$ e quindi esiste

una $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tale che $\hat{\varphi} = p$. La funzione φ verifica l'equazione di scala $\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$.

Se, inoltre, si ha $m_0(\xi) \neq 0$ in $[-1/4, 1/4]$, allora il sistema $\{\varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ è ortonormale e definisce una MRA se si pone:

$$1) V_0 = \overline{\langle \varphi(x - k), k \in \mathbb{Z} \rangle};$$

$$2) f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}) \in V_0.$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima parte del Teorema. Proveremo l'assoluta convergenza con l'aiuto del Teorema 23.6.5. Si osservi che, per definizione di QMF,

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h(n) e^{-2\pi i \xi n} - m_0(0) + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h(n) (e^{-2\pi i \xi n} - 1) + 1.$$

Allora

$$\begin{aligned} |m_0(\xi) - 1| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n |h(n)| |e^{-2\pi i \xi n} - 1| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n |h(n)| |e^{-\pi i \xi n} - e^{\pi i \xi n}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n |h(n)| |2 \sin(n\pi\xi)| \\ &\leq \sqrt{2} \sum_n |h(n)| |n| \pi |\xi| = \sqrt{2} C \pi |\xi| \end{aligned}$$

Se $R > 0$ e $|\xi| \leq R$, allora il termine generale della serie

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) - 1 \right|,$$

è maggiorato dal termine generale della serie convergente

$$\sqrt{2} C \pi \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j},$$

ed otteniamo l'asserto. □

23.7 L' algoritmo a cascata

Un altro modo per ottenere la funzione di scala partendo dal filtro si ottiene con un procedimento iterativo noto come "algoritmo a cascata". L'osservazione iniziale è che la funzione di scala è un punto fisso per l'operatore

$$f \mapsto \sqrt{2} \sum_n h(n) f(2 \bullet - n).$$

Un modo per ottenere il punto fisso è il seguente. Si fissa una funzione iniziale $f_0(x)$ e si definisce

$$f_m(x) = \sqrt{2} \sum_n h(n) f_{m-1}(2x - n). \quad (23.5)$$

Se la successione $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge, passando al limite nella (23.5), si ottiene il punto fisso.

Teorema 23.7.1. *Nelle ipotesi del Teorema 23.6.6, si supponga che $m_0(\xi) \geq c > 0$ in $[-1/4, 1/4]$. Sia $f_0 = \chi_{[-1/2, 1/2]}$ e si definisca la successione f_m tramite la (23.5). Sia $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ quella prevista dal Teorema 23.6.6. Allora*

$$f_m(x) \rightarrow \varphi(x) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}).$$

Dimostrazione. Premettiamo il seguente risultato sul passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Teorema 23.7.2. *Supponiamo che, per ogni $R \in \mathbb{R}$ si abbia $f_n \rightarrow f$ nello spazio $L^2([-R, R])$ o $L^\infty([-R, R])$. Se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $R > 0$, $N \in \mathbb{N}$ tali che, per ogni $n \geq N$ risulti*

$$\int_{|x| > R} |f_n(x)| dx < \varepsilon,$$

allora

$$\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

La dimostrazione del Teorema 23.7.1 verrà fatta in tre passi.

Primo passo.

Dimostriamo che per ogni $R \in \mathbb{R}$ $\hat{f}_m \rightarrow \hat{\varphi}$ in $L^\infty([-R, R])$.

Da (23.5), passando alla trasformata di Fourier, si ha

$$\begin{aligned} \hat{f}_m(\xi) &= m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{f}_{m-1}\left(\frac{\xi}{2}\right) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) m_0\left(\frac{\xi}{4}\right) \hat{f}_{m-2}\left(\frac{\xi}{4}\right) \\ &= \prod_{j=1}^m m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \hat{f}_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = \prod_{j=1}^m m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi\xi}{2^j}\right)}{\frac{\pi\xi}{2^j}}. \end{aligned}$$

Poiché in $L^\infty([-R, R])$,

$$1 = \lim_m \frac{\sin\left(\frac{\pi\xi}{2^m}\right)}{\frac{\pi\xi}{2^m}},$$

e, per il Teorema 23.6.6,

$$\hat{\varphi}(\xi) = \lim_m \prod_{j=1}^m m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right),$$

si ha l'asserto.

Secondo passo.

Dimostriamo, per induzione su m , che il sistema $\{f_m(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ è ortonormale.

Per $m = 0$ l'asserto è vero per la definizione di f_0 .

Per un generico m , si ha, con opportuni cambi di variabile,

$$\begin{aligned} \langle f_m(x - k), f_m(x) \rangle &= 2 \sum_{n,l} h(n)\overline{h(l)} \langle f_{m-1}(2x - 2k - n), f_{m-1}(2x - l) \rangle \\ &= \sum_{n,l} h(n)\overline{h(l)} \int f_{m-1}(x) \overline{f_{m-1}(x - (l - 2k - n))} dx \\ &= \sum_{n,l} h(n)\overline{h(l)} \delta_{l-2k-n,0} = \delta_{k,0}, \end{aligned}$$

per l'ipotesi di induzione e le proprietà del QMF.

Si ha, in particolare, che $\|f_m\|_2 = 1$.

Terzo passo.

Dimostriamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $R > 0$, $N \in \mathbb{N}$ tali che, per ogni $m \geq N$ risulti

$$\int_{|x|>R} |\hat{f}_m(\xi)| d\xi < \varepsilon.$$

Per il Teorema 23.6.6, il sistema $\{\varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ è ortonormale, in particolare, $\|\hat{\varphi}\|_2 = 1$. Allora, si trova, per un $\varepsilon > 0$ fissato, un $R > 0$ tale che

$$\int_{-R}^R |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dal primo passo della dimostrazione ricaviamo, per m grandi,

$$\lim_m \int_{-R}^R |\hat{f}_m(\xi)|^2 d\xi = \int_{-R}^R |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi,$$

da cui la disuglianza

$$\int_{-R}^R \left| \hat{f}_m(\xi) \right|^2 d\xi \geq \int_{-R}^R |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi - \frac{\varepsilon}{2} \geq 1 - \varepsilon,$$

e, tenendo presente che $\|\hat{f}_m\|_2 = 1$, si ottiene l'asserto.

Applichiamo, infine, il teorema di passaggio al limite alle funzioni

$$\left| \hat{f}_m(\xi) - \hat{\varphi}(\xi) \right|^2.$$

Dal primo e terzo passo otteniamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $R > 0$, $N \in \mathbb{N}$, tali che, per ogni $m \geq N$ risulti

$$\int_{|x|>R} \left| \hat{f}_m(\xi) \right|^2 d\xi < \varepsilon/4 \quad \text{e} \quad \int_{|x|>R} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi < \varepsilon/4,$$

ed utilizzando la disuguaglianza

$$\left| \hat{f}_m(\xi) - \hat{\varphi}(\xi) \right|^2 \leq 2\left(\left| \hat{f}_m(\xi) \right|^2 + |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \right),$$

si ottiene la stima fuori dall'intervallo

$$\int_{|x|>R} \left| \hat{f}_m(\xi) - \hat{\varphi}(\xi) \right|^2 d\xi < \varepsilon.$$

La stima all'interno dell'intervallo

$$\int_{|x|\leq R} \left| \hat{f}_m(\xi) - \hat{\varphi}(\xi) \right|^2 d\xi < \varepsilon,$$

segue dal primo passo ed il teorema è completamente dimostrato. \square

Capitolo 24

Ondicelle a Supporto Compatto

Faremo vedere come la lunghezza di un filtro sia legata alla grandezza del supporto della funzione di scala. Successivamente esamineremo il rapporto tra regolarità di un ondicella e bontà dell'approssimazione. Infine costruiremo le ondicelle a supporto compatto delle Daubechies.

24.1 Rapporto tra lunghezza del filtro e supporto della funzione di scala

Ricordiamo che il supporto di φ è

$$\text{supp}\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}},$$

quindi, se limitato, esiste un intervallo $[-a, a]$ che lo contiene. Inoltre esso si dice compatto se è chiuso (e lo è per definizione) e limitato; in tal caso con *lunghezza del supporto* di φ si intende la lunghezza dell'intervallo minimo che lo contiene.

Lemma 24.1.1. *Sia (V_j) è una MRA con funzione di scala φ e filtro $(h(n))$. Se φ è a supporto compatto, allora il filtro contiene un numero finito di elementi non nulli.*

Dimostrazione. Dall'equazione di scala (22.9) e ricordando che le traslate $(\varphi(2x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ formano un sistema ortonormale, otteniamo

$$\sqrt{2}h(k) = \int \varphi(x)\varphi(2x - k) dx = \int_{-a}^a \varphi(x)\varphi(2x - k) dx, \quad (24.1)$$

se $\text{supp}\varphi \subset [-a, a]$. E' facile osservare che $2x - k \in [-a, a]$ se e solo se $x \in [\frac{-a+k}{2}, \frac{a+k}{2}]$, quindi per $|k|$ grandi gli intervalli $[-a, a]$ e $[\frac{-a+k}{2}, \frac{a+k}{2}]$, non si intersecano e si ha $h(k) = 0$ tranne, al più, un numero finito di termini.

□

Vediamo ora come l'algoritmo a cascata permetta di determinare la lunghezza del supporto di φ a partire dalla lunghezza del filtro QMF.

Teorema 24.1.2. *Supponiamo che $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ sia un filtro QMF di lunghezza $2N$, (si veda l'Osservazione 23.4.4). Siano n_0 e N_0 rispettivamente il più piccolo ed il più grande intero $n \in \mathbb{Z}$ per cui $h(n) \neq 0$, in modo che $N_0 - n_0 + 1 = 2N$.*

Supponiamo, inoltre, che siano verificate le ipotesi del Teorema 23.7.1. Allora la funzione di scala prevista dal Teorema 23.7.1 è a supporto compatto contenuto in un intervallo di lunghezza $2N - 1$.

Dimostrazione. Sia $f_0 = \chi_{[-1/2, 1/2]}$ la funzione con la quale iniziamo l'algoritmo a cascata. Indichiamo con L_0 la lunghezza del suo supporto, ovviamente $L_0 = 1$, e con L_m la lunghezza del supporto delle funzioni definite ricorsivamente tramite la (23.5)

$$f_m(x) = \sqrt{2} \sum_{n=n_0}^{N_0} h(n) f_{m-1}(2x - n).$$

Si ha

$$L_m = \frac{L_{m-1}}{2} + \frac{2N - 1}{2}.$$

Difatti basta esaminare il supporto di $f_m(x/2)$. L'estremo destro dell'intervallo minimo che contiene il supporto di f_{m-1} viene traslato di N_0 e quello sinistro di n_0 , di conseguenza

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{(N_0 - n_0 + L_{m-1})}{2} = \frac{L_{m-1}}{2} + \frac{2N - 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{L_{m-2}}{2} + \frac{2N - 1}{2} \right) + \frac{2N - 1}{2} \\ &= \dots \\ &= \frac{L_0}{2^m} + (2N - 1) \sum_{j=1}^m \frac{1}{2^j} \\ &= \frac{1}{2^m} + (2N - 1) \left(1 - \frac{1}{2^m} \right), \end{aligned}$$

e, per $m \rightarrow +\infty$ si ha $L_m \rightarrow 2N - 1$. Ora, per l'algoritmo a cascata, $f_m \rightarrow \varphi$ nella norma $L^2(\mathbb{R})$, di conseguenza, la lunghezza del supporto di φ deve essere pari a $\lim_m L_m = 2N - 1$, (basta ragionare per assurdo). \square

Nel prossimo Teorema si vede come la lunghezza del supporto di φ determina la lunghezza del filtro.

Teorema 24.1.3. *Sia φ una funzione di scala di una MRA con filtro $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$. Supponiamo che il supporto di φ sia compatto e di lunghezza $2N - 1$ (N il più piccolo intero per cui si ha ciò.) Allora il filtro ha lunghezza $2N$.*

Dimostrazione. Senza ledere la generalità possiamo supporre che $\text{supp} \varphi \subset [0, 2N - 1]$. Siano $a_0, a_1 \geq 0$ tali che φ sia supportata in $[a_0, 2N - 1 - a_1]$ e non in uno più piccolo. Proviamo che $a_0 < 2$ e $a_1 < 2$. Infatti, se così non fosse, ovvero se almeno uno di essi fosse maggiore o uguale a 2, diciamo $a_1 = 2p + \varepsilon$ con $0 < \varepsilon < 2$, e $N > p > 0$, la lunghezza di $[a_0, 2N - 1 - a_1]$ sarebbe $2N - 1 - a_1 - a_0 = 2(N - p) - 1 - \varepsilon - a_0 < 2(N - p) - 1$, contro l'ipotesi che N sia minimo.

Ora, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(2x - n)$ ha supporto contenuto in $[\frac{a_0+n}{2}, \frac{2N-1-a_1+n}{2}]$ e non in uno più piccolo. D'altra parte il supporto compatto implica, per il Lemma 24.1.1, che il filtro sia finito. Siano n_0 e N_0 rispettivamente il più piccolo ed il più grande intero $n \in \mathbb{Z}$ per cui $h(n) \neq 0$. Dall'equazione di scala

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n=n_0}^{N_0} h(n)\varphi(2x - n),$$

si ottiene

$$[a_0, 2N - 1 - a_1] = \left[\frac{a_0 + n_0}{2}, \frac{2N - 1 - a_1 + N_0}{2} \right], \quad (24.2)$$

ed uguagliando gli estremi dei due intervalli, si deduce che $a_0, a_1 \in \mathbb{N}$ per cui le uniche possibilità sono $a_0 = 0$, oppure 1 e $a_1 = 0$, oppure 1.

Se, per assurdo, $a_0 = 1$, necessariamente $a_1 = 0$, altrimenti la lunghezza dell'intervallo $[a_0, 2N - 1 - a_1]$ sarebbe $2(N - 1) - 1$ contro la minimalità di N . Ma $a_1 = 0$ implica, per (24.2), che il filtro ha lunghezza dispari $N_0 - n_0 + 1 = 2N - 1 - 1 + 1$, e ciò è assurdo. Allora $a_0 = 0$ e di nuovo le proprietà del filtro e la (24.2) impongono $a_1 = 0$ e l'asserto è completamente dimostrato. \square

24.2 Ondicelle ed approssimazione

Uno degli obiettivi di questo capitolo è quello di costruire ondicelle a supporto compatto tali che i coefficienti delle funzioni regolari (calcolati con la trasformata di ondicelle) abbiano un buon decadimento. Iniziamo a vedere come si misura la regolarità di un'ondicella e come questo strumento serva per una buona approssimazione.

Definizione 24.2.1. Sia ψ un'ondicella che proviene da una MRA. La quantità

$$\int x^k \psi(x) dx, \quad (24.3)$$

prende il nome di *momento k-simo* di ψ . Se (24.3) vale zero, diremo che ψ ha momento k-simo nullo.

Abbiamo visto che il momento zero di $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ proveniente da una MRA è sempre nullo. La stessa conclusione è vera sotto ipotesi più generali ($\psi, \hat{\psi} \in L^1(\mathbb{R})$, $(\psi_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ sistema ortogonale per $L^2(\mathbb{R})$), ma nel caso di una MRA abbiamo un risultato che mette in rapporto regolarità e numero dei momenti nulli.

Teorema 24.2.2. *Sia ψ una ondicella per una MRA. Supponiamo che, per $N \in \mathbb{N}$, si abbia $x^N \psi(x), \xi^{N+1} \hat{\psi}(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$. Allora*

$$\int x^k \psi(x) dx = 0, \quad \text{per ogni } k = 0, \dots, N.$$

Dimostrazione. Uno dei principi della trasformata di Fourier è il seguente: più una funzione è regolare (dove la regolarità si misura con il numero delle derivate continue), più la sua trasformata di Fourier decadrà velocemente all'infinito. Viceversa, la maggiore velocità di decadimento all'infinito di una funzione comporta una maggiore regolarità della sua trasformata di Fourier. Per la terza delle Proprietà 22.1.5, l'ipotesi $\xi^{N+1} \hat{\psi}(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$ si può vedere come un'ipotesi di regolarità di ψ , in particolare ci dice che l'ondicella ha $N + 1$ derivate continue.

Accenniamo alla dimostrazione. Dall'ipotesi $x^N \psi \in L^1(\mathbb{R})$ discende che $\hat{\psi}$ abbia derivate fino all'ordine N . Si prova, per induzione, che

$$\hat{\psi}^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, \dots, N.$$

Da cui, per la terza delle Proprietà 22.1.5,

$$0 = \widehat{x^j \psi}(0) = \int x^j \psi(x) dx.$$

□

Il teorema seguente mostra come un'ondicella ψ con molti momenti nulli approssimi una funzione regolare f molto bene, ovvero, nell'uguaglianza $f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}$, i coefficienti $\langle f, \psi_{jk} \rangle$ vanno a zero molto velocemente per $j \rightarrow +\infty$. Di conseguenza, saranno necessari pochi coefficienti significativi per ottenere una buona approssimazione per f .

Teorema 24.2.3. *Siano $N \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{C}^N(\mathbb{R})$, $f^{(N)} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Supponiamo che ψ sia un'ondicella a supporto compatto per una MRA, con momenti nulli fino all'ordine $N - 1$. Allora esiste una costante $C = C(N, f)$ tale che*

$$|\langle f, \psi_{jk} \rangle| \leq C 2^{-j(N+1/2)}, \quad \text{per ogni } j, k \in \mathbb{Z}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione si sviluppa in tre passi.

Primo passo Supponiamo che il supporto di ψ sia contenuto in $[0, a]$, $a > 0$. Allora ψ_{jk} ha supporto in $A_{jk} = [\frac{k}{2^j}, \frac{k+a}{2^j}]$, di lunghezza $|A_{jk}| = \frac{a}{2^j}$ e di centro $x_{jk} = \frac{2k+a}{2^{j+1}}$. L'ipotesi sui momenti nulli implica che ogni polinomio $p(x)$ di grado minore o uguale ad $N - 1$ verifica

$$\int p(x) \psi_{jk}(x) dx = 0, \quad \text{per ogni } j, k \in \mathbb{Z}.$$

Secondo passo Per via dell'ipotesi $f \in \mathcal{C}^N(\mathbb{R})$, possiamo sviluppare f nella formula di Taylor, con resto in forma di Lagrange, di centro x_{jk} ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(x_{jk})}{(n)!} (x - x_{jk})^n + \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!} (x - x_{jk})^N,$$

dove ξ è un punto tra x e x_{jk} .

Se denotiamo il resto con $R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!} (x - x_{jk})^N$, e $x \in A_{jk}$, per l'ipotesi sulla derivata N -sima di f ,

$$|R_N(x)| \leq \frac{1}{N!} \frac{a^N}{2^{N(j+1)}} \|f^{(N)}\|_\infty.$$

Terzo passo Calcoliamo il coefficiente, tenendo presente l'ipotesi sui momenti.

$$\begin{aligned}
 \langle f, \psi_{jk} \rangle &= f(x_{jk}) \int \overline{\psi_{jk}} \, dx + f'(x_{jk}) \int (x - x_{jk}) \overline{\psi_{jk}} \, dx \\
 &+ \dots \\
 &+ \frac{f^{(N-1)}(x_{jk})}{(N-1)!} \int (x - x_{jk})^{N-1} \overline{\psi_{jk}} \, dx \\
 &+ \int R_N(x) \overline{\psi_{jk}} \, dx \\
 &= \int R_N(x) \overline{\psi_{jk}} \, dx.
 \end{aligned}$$

Infine passiamo alla sua stima. Per il Secondo passo e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
 |\langle f, \psi_{jk} \rangle| &\leq \int_{A_{jk}} |R_N(x)| |\psi_{jk}| \, dx \\
 &\leq \frac{1}{N!} \frac{a^N}{2^{N(j+1)}} \|f^{(N)}\|_\infty \int_{A_{jk}} |\psi_{jk}| \, dx \\
 &\leq \frac{1}{N!} \frac{a^N}{2^{N(j+1)}} \|f^{(N)}\|_\infty |A_{jk}| \|\psi_{jk}\|_2 \\
 &= \left(\frac{a^{N+1/2}}{N! 2^N} \|f^{(N)}\|_\infty \right) a^{-j(N+1/2)}.
 \end{aligned}$$

□

Dalla precedente dimostrazione otteniamo ulteriori conclusioni qualitative sul significato dei coefficienti $\langle f, \psi_{jk} \rangle$. Partiamo dal resto $R_N(x)$. Dalla continuità di $f^{(N)}$ e dal fatto che la lunghezza dell'intervallo A_{jk} tende a zero per $j \rightarrow +\infty$, otteniamo che, al crescere di j , possiamo identificare il valore $f^{(N)}(\xi)$ con il valore nel punto medio $f^{(N)}(x_{jk})$. Quindi, con opportuni

cambi di variabile,

$$\begin{aligned}
 \langle f, \psi_{jk} \rangle &= \int R_N(x) \overline{\psi_{jk}} dx \\
 &\approx \frac{1}{N!} f^{(N)}(x_{jk}) \int_{k/2^j}^{(k+a)/2^j} (x - x_{jk})^N 2^{j/2} \overline{\psi(2^j x - k)} dx \\
 &= \frac{1}{N!} f^{(N)}(x_{jk}) \int_{-a/2^{j+1}}^{a/2^{j+1}} 2^{j/2} x^N \overline{\psi(2^j x + \frac{a}{2})} dx \\
 &= \frac{2^{-j/2}}{N!} f^{(N)}(x_{jk}) \int_{-a/2}^{a/2} 2^{-jN} x^N \overline{\psi(x + \frac{a}{2})} dx,
 \end{aligned}$$

e si ricava la stima

$$|\langle f, \psi_{jk} \rangle| \approx 2^{-j(N+1/2)} \left[\frac{1}{N!} f^{(N)}(x_{jk}) \int_{-a/2}^{a/2} x^N \overline{\psi(x + \frac{a}{2})} dx \right].$$

L'interpretazione della stima precedente è la seguente: il decadimento del coefficiente $\langle f, \psi_{jk} \rangle$ di una funzione regolare è un fenomeno locale. Ciò che è necessario conoscere è il comportamento della derivata $f^{(N)}$ in un intervallo contenente il supporto di ψ_{jk} , ed in realtà non è necessario che f sia di classe \mathcal{C}^N in tutto \mathbb{R} .

Esempio 24.2.4. Consideriamo la spline lineare

$$f = (1 - |x|) \chi_{[-1,1]}(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}).$$

Sia ψ un'ondicella con i primi due momenti nulli e supporto compatto contenuto in $[0, 3]$, (tale ondicella esiste).

E' facile verificare i valori dei seguenti coefficienti

$$\begin{aligned}
 \langle f, \psi_{jk} \rangle &= 0, & k \geq 1, & k \leq -4, & j < 0, \\
 \langle f, \psi_{0k} \rangle &= 0, & k \geq 1, & k \leq -4, \\
 \langle f, \psi_{1k} \rangle &= 0, & k \geq 2, & k \leq -5, \\
 \langle f, \psi_{2k} \rangle &= 0, & k \geq 4, & k \leq -7.
 \end{aligned}$$

In generale $\langle f, \psi_{jk} \rangle = 0$ quando il supporto di ψ_{jk} è contenuto interamente in $[0, 1]$ oppure $[-1, 0]$, dove f è lineare, mentre i coefficienti non nulli si ottengono quando il supporto di ψ_{jk} contiene punti in cui la derivata di f possiede delle discontinuità. \square

24.3 Riproducibilità dei polinomi

Faremo vedere che, se l'ondicella ha momenti nulli fino all'ordine N , allora ogni monomio x^k , $0 \leq k \leq N$, si può scrivere come combinazione lineare delle traslate della funzione di scala. Tale proprietà prende il nome di riproducibilità dei polinomi. Si deduce che ogni funzione regolare, in quanto approssimabile con funzioni polinomiali a tratti, avrà, nella trasformata di ondicelle, molti coefficienti nulli.

Si premette il seguente risultato di cui non presentiamo la dimostrazione.

Teorema 24.3.1. *Sia φ una funzione di scala a supporto compatto associata ad una MRA. Sia $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ il filtro (finito) e ψ la wavelet corrispondente. Allora sono equivalenti*

$$a) \int_{\mathbb{R}} x^k \psi(x) dx = 0, \quad \text{per ogni } 0 \leq k \leq N - 1;$$

$$b) m_0^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \text{per ogni } 0 \leq k \leq N - 1;$$

c) m_0 si fattorizza come

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi),$$

dove $\mathcal{L}(\xi)$ è un polinomio trigonometrico (1-periodico);

$$d) \sum_n h(n)(-1)^n n^k = 0, \quad \text{per ogni } 0 \leq k \leq N - 1.$$

Lemma 24.3.2. *Sia φ una funzione di scala a supporto compatto associata ad una MRA. Sia ψ la wavelet corrispondente. Se ψ ha momenti nulli fino all'ordine $N - 1$, allora $\hat{\varphi}^{(k)}(n) = 0$, per ogni $n \neq 0$ e $0 \leq k \leq N - 1$.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente, $m_0^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, per ogni $0 \leq k \leq N - 1$. Sia $n \neq 0$.

Se n è dispari, allora $n = 2m + 1$. Dall'equazione di scala e dalla formula di Leibniz per il calcolo della derivata di un prodotto di funzioni, si ha

$$\hat{\varphi}^{(k)}(\xi) = \frac{1}{2^k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} m_0^{(l)}\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}^{(k-l)}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Quindi, per la periodicità di m_0 ,

$$\hat{\varphi}^{(k)}(n) = \frac{1}{2^k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} m_0^{(l)}\left(\frac{1}{2}\right) \hat{\varphi}^{(k-l)}\left(m + \frac{\xi}{2}\right) = 0.$$

Se n è pari, allora $n = 2^p m$, dove m è dispari. Applicando più volte l'equazione di scala si ha

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^p m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^p}\right),$$

e quindi

$$\hat{\varphi}(n) = \prod_{j=1}^p m_0(2^{p-j}m) \hat{\varphi}(m) = 0.$$

□

Lemma 24.3.3. *Nelle ipotesi del Lemma precedente, per ogni $0 \leq k \leq N-1$,*

$$\sum_n (x+n)^k \varphi(x+n) = (2\pi i)^{-k} \hat{\varphi}^{(k)}(0).$$

Dimostrazione. Si osservi, innanzitutto, che, poiché φ ha supporto compatto, $(2\pi i x)^k \varphi \in L^1(\mathbb{R})$, e quindi

$$((2\pi i x)^k \varphi)^\wedge(\xi) = \hat{\varphi}^{(k)}(\xi).$$

Ora, operando un cambio di variabile,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (2\pi i)^k \sum_n (x+n)^k \varphi(x+n) e^{-2\pi i m x} dx \\ &= (2\pi i)^k \sum_n \int_0^1 (x+n)^k \varphi(x+n) e^{-2\pi i m x} dx \\ &= (2\pi i)^k \int_{\mathbb{R}} x^k \varphi(x) e^{-2\pi i m(x-n)} dx \\ &= e^{2\pi i m n} ((2\pi i x)^k \varphi)^\wedge(m) \\ &= \hat{\varphi}^{(k)}(m) = \hat{\varphi}^{(k)}(0) \delta_{0,m}, \end{aligned}$$

ma l'unica funzione 1-periodica che ha questi coefficienti di Fourier è la funzione costante di valore $\hat{\varphi}^{(k)}(0)$ in $[0, 1)$. Così si ottiene l'asserto. \square

In particolare, dal lemma precedente, per $k = 0$, si ha

$$\sum_n \varphi(x+n) = \hat{\varphi}(0) = 1.$$

Lemma 24.3.4. *Nelle ipotesi del Lemma precedente, per ogni $1 \leq k \leq N-1$, esiste un polinomio $p_{k-1}(x)$ di grado $k-1$ tale che*

$$\sum_n n^k \varphi(x+n) = (-1)^k x^k p_{k-1}(x).$$

Dimostrazione. Per induzione su k . Poniamo $a_k = (2\pi i)^{-k} \hat{\varphi}^{(k)}(0)$. Se $k = 1$, per il Lemma 24.3.3 si ha

$$a_1 = \sum_n (x+n)\varphi(x+n) = x \sum_n \varphi(x+n) + n \sum_n \varphi(x+n).$$

Di conseguenza $n \sum_n \varphi(x+n) = a_1 - x$, polinomio di primo grado. Supponiamo che l'asserto sia vero per $l \leq k-1$ e consideriamo k

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_n (x+n)^k \varphi(x+n) = \sum_n \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^{k-l} n^l \varphi(x+n) \\ &= x^k \sum_n \varphi(x+n) + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} x^{k-l} \sum_n n^l \varphi(x+n) \\ &= x^k + \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} x^{k-l} [(-1)^l x^l + p_{l-1}(x)] + \sum_n n^k \varphi(x+n) \\ &= x^k + \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} (-1)^l x^k + \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} x^{k-l} p_{l-1}(x) + \sum_n n^k \varphi(x+n), \end{aligned}$$

dove si è utilizzata l'ipotesi di induzione. Allora

$$\sum_n n^k \varphi(x+n) = - \left(1 + \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} (-1)^l \right) x^k + a_k - \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} x^{k-l} p_{l-1}(x),$$

ed essendo

$$\sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} (-1)^l = \begin{cases} -2, & k \text{ pari;} \\ 0, & k \text{ dispari;} \end{cases}$$

tutto è completamente dimostrato. \square

Teorema 24.3.5. *Nelle ipotesi del lemma precedente, per ogni $0 \leq k \leq N-1$, esistono dei coefficienti $q_{k,n} \in \mathbb{Z}$ tale che*

$$\sum_n q_{k,n} \varphi(x+n) = x^k.$$

Dimostrazione. Per induzione su k .

Se $k = 0$ sappiamo già che $1 = \sum_n \varphi(x+n)$.

Supponiamo che l'asserto sia vero per $l \leq k-1$ e consideriamo k . Dal Lemma 24.3.4

$$\begin{aligned} (-1)^k x^k &= \sum_n n^k \varphi(x+n) - p_{k-1}(x) \\ &= \sum_n n^k \varphi(x+n) - \sum_{l=0}^{k-1} b_l x^l \\ &= \sum_n n^k \varphi(x+n) - \sum_{l=0}^{k-1} b_l \sum_n q_{l,n} \varphi(x+n), \end{aligned}$$

da cui

$$x^k = \sum_n (-1)^k \left(n^k - \sum_{l=0}^{k-1} b_l q_{l,n} \right) \varphi(x+n),$$

e l'asserto. \square

24.4 Le ondicelle di Daubechies

Abbiamo visto che il numero dei momenti nulli di un'ondicella cresce al crescere della sua regolarità. Ingrid Daubechies, [9], ha costruito delle ondicelle a supporto compatto con il più grande numero di momenti nulli compatibilmente con la grandezza del supporto. Esse hanno supporto nell'intervallo $[0, 2N-1]$ ed hanno momenti nulli fino all'ordine $N-1$. Inoltre, al crescere

del supporto aumenta anche la regolarità dell'ondicella.

La costruzione parte dall'osservazione che, se si vuole costruire un'ondicella con supporto in $[0, 2N - 1]$, si deve partire da un QMF $(h(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ di lunghezza $2N$, (si veda l'Osservazione 23.4.4 e il Teorema 24.1.3).

In principio si assumerà che il filtro sia reale. Inoltre, se si vuole che l'ondicella abbia N momenti nulli, per il Teorema 24.3.1, deve essere valida la fattorizzazione

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi),$$

dove $\mathcal{L}(\xi)$ è un polinomio trigonometrico (1-periodico). Allora, necessariamente,

$$|m_0(\xi)|^2 = \left| \frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2} \right|^{2N} |\mathcal{L}(\xi)|^2 = \cos^{2N}(\pi \xi) L(\xi),$$

dove si è posto $L(\xi) = |\mathcal{L}(\xi)|^2$, polinomio trigonometrico a valori reali e coefficienti reali. Quindi $L(\xi) = \sum_n c(n) e^{-2\pi i n \xi}$ con $c(n) = c(-n)$.

Si cerca, ora, di trasformare $L(\xi)$ in modo da determinarlo facilmente.

$$\begin{aligned} L(\xi) &= c(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} [c(n) e^{-2\pi i n \xi} + c(-n) e^{+2\pi i n \xi}] \\ &= c(0) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c(n) \cos(2\pi n \xi). \end{aligned}$$

Ora $\cos(2\pi n \xi)$ si può scrivere come un polinomio di grado n in $\cos(2\pi \xi)$, a coefficienti reali e quindi anche $L(\xi)$ è un polinomio in $\cos(2\pi \xi)$ a coefficienti reali. Ancora una trasformazione: da $\cos(2\pi \xi) = 1 - \sin^2(\pi \xi)$ segue che si può vedere $L(\xi)$ come polinomio in $\sin^2(\pi \xi)$ a coefficienti reali. Si ponga $L(\xi) = P(\sin^2(\pi \xi))$.

Imponendo che m_0 sia un QMF si ha

$$\begin{aligned} 1 &= |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \frac{1}{2})|^2 \\ &= \cos^{2N}(\pi \xi) L(\xi) + \cos^{2N}(\pi \xi + \frac{\pi}{2}) L(\xi + \frac{1}{2}) \\ &= (1 - \sin^2(\pi \xi))^N P(\sin^2(\pi \xi)) + \sin^{2N}(\pi \xi) P(1 - \sin^2(\pi \xi)). \end{aligned}$$

In definitiva, posto $\sin^2(\pi \xi) = y$, si deve trovare un polinomio $P(y)$, a coefficienti reali e valori positivi, tale che, per ogni $y \in [0, 1]$,

$$1 = (1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y). \quad (24.4)$$

Uno dei modi per trovare tale polinomio è il seguente. Si parte dall'osservazione che $1 = ((1 - y) + y)^{2N-1}$. Quindi, sviluppando il binomio con la formula di Newton,

$$\begin{aligned} 1 &= ((1 - y) + y)^{2N-1} = \sum_{k=0}^{2N-1} \binom{2N-1}{k} (1 - y)^k y^{2N-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} (1 - y)^k y^{2N-1-k} + \sum_{k=N}^{2N-1} \binom{2N-1}{k} (1 - y)^k y^{2N-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} (1 - y)^k y^{2N-1-k} + \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} (1 - y)^{2N-1-k} y^k, \end{aligned}$$

dopo la sostituzione $\bar{k} = 2N - 1 - k$ e l'osservazione che $\binom{2N-1}{k} = \binom{2N-1}{2N-1-k}$, nella seconda delle due somme. Quindi basterà prendere

$$P(y) = P_{N-1}(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} (1 - y)^{N-1-k} y^k, \quad (24.5)$$

per ottenere il polinomio cercato che verifica (24.4).

Esempio 24.4.1. Di seguito si elencano i polinomi, definiti tramite la (24.5), per diversi valori di N .

N	$P_{N-1}(y)$
1	1
2	$1 + 2y$
3	$1 + 3y + 6y^2$
4	$1 + 4y + 10y^2 + 20y^3$

□

Il filtro m_0 è determinato una volta che si riesca ad ottenere $\mathcal{L}(\xi)$ dall'uguaglianza $L(\xi) = P(\sin^2(\pi\xi)) = |\mathcal{L}(\xi)|^2$.

Per alcuni valori di N la ricerca di $\mathcal{L}(\xi)$ è elementare. Nel paragrafo seguente verrà proposto un metodo valido in generale.

Esempio 24.4.2. $\mathbf{N=1}$. Poiché $P_0(y) = 1$, basta prendere $\mathcal{L}(\xi) = 1$. Ne consegue che

$$m_0(\xi) = \frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \xi} \right),$$

e si ritrova l'ondicella di Haar. $\mathbf{N=2}$. Poiché $P_1(y) = 1 + 2y$, si ottiene

$$|\mathcal{L}(\xi)|^2 = P_1(\sin^2(\pi\xi)) = 1 + 2\sin^2(\pi\xi) = 2 - \cos(2\pi\xi).$$

Imponendo che $\mathcal{L}(\xi)$ sia un polinomio trigonometrico, quindi della forma $a + be^{-2\pi i \xi}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ha

$$2 - \cos(2\pi\xi) = |\mathcal{L}(\xi)|^2 = (a + be^{-2\pi i \xi})(a + be^{2\pi i \xi}) = a^2 + b^2 + 2ab \cos(2\pi\xi),$$

a cui bisogna aggiungere la condizione $1 = m_0(0) = \mathcal{L}(0) = a + b$. Uguagliando i coefficienti si trova facilmente che la soluzione è data dalle seguenti coppie

$$(a, b) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2} \right).$$

Ad esempio, scegliendo la seconda coppia, si trova il filtro

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2} \right)^2 \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} e^{-2\pi i \xi} \right), \quad (24.6)$$

e si ricavano facilmente gli unici elementi non nulli del filtro,

$$h(0) = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h(1) = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h(2) = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h(3) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

□

Nota 24.4.3. Si noti che i filtri ottenuti nella costruzione precedente sono tutti associati ad una MRA. A tal fine basta osservare che essi verificano le ipotesi del Teorema 23.6.6. Infatti, se $|\xi| \leq 1/4$, da una parte

$$\left| \frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2} \right|^2 = \cos^2(\pi\xi) \geq \frac{1}{2}.$$

D'altra parte, essendo $\sin^2(\pi\xi) \in [0, 1/2]$,

$$|\mathcal{L}(\xi)|^2 = P_{N-1}(\sin^2(\pi\xi)) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N-1}{k} (\cos^2(\pi\xi))^{N-1-k} \sin^{2k}(\pi\xi) > \frac{1}{2}.$$

In definitiva, si trova una costante $C > 0$ per cui

$$|m_0(\xi)|^2 \geq c > 0, \quad \text{per } |\xi| \leq 1/4,$$

ed è quanto volevamo dimostrare. \square

24.5 Fattorizzazione spettrale

In questo paragrafo viene presentato un metodo per trovare il polinomio \mathcal{L} a partire dal polinomio P_{N-1} dato dalla (24.5). Esso consiste, essenzialmente, nell'estendere P_{N-1} ad un polinomio di variabile complessa e nel cercare gli zeri di questo nuovo polinomio. \mathcal{L} verrà costruito a partire da questi zeri. Si ricordi che vale l'equazione

$$1 = (1 - \sin^2(\pi\xi))^N P(\sin^2(\pi\xi)) + \sin^{2N}(\pi\xi) P(1 - \sin^2(\pi\xi)).$$

Si definisca il polinomio di grado $2N - 1$

$$\mathcal{P}_{2N-1}(x) = (1 - x)^N P_{N-1}(x),$$

da cui

$$1 = \mathcal{P}_{2N-1}(\sin^2(\pi\xi)) + \mathcal{P}_{2N-1}(1 - \sin^2(\pi\xi)). \quad (24.7)$$

Trasformando $\sin^2(\pi\xi) = \frac{1}{2} - \frac{e^{2\pi i\xi} + e^{-2\pi i\xi}}{4}$, si riscrive il polinomio appena definito ottenendo il polinomio trigonometrico

$$\mathcal{P}_{2N-1}(\sin^2(\pi\xi)) = \mathcal{P}_{2N-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{2\pi i\xi} + e^{-2\pi i\xi}}{4}\right),$$

che si estende ad una funzione di variabile complessa

$$F_{2N-1}(z) = \mathcal{P}_{2N-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{z + z^{-1}}{4}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Esempio 24.5.1. Per $N = 1$, $\mathcal{P}_1(x) = (1 - x)P_0(x) = 1 - x$. Allora

$$F_1(z) = \mathcal{P}_1\left(\frac{1}{2} - \frac{z + z^{-1}}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z^{-1}}{4}.$$

Per $N = 2$, $\mathcal{P}_3(x) = (1 - x)^2 P_1(x) = (1 - x)^2(1 + 2x)$. Allora

$$F_3(z) = \mathcal{P}_3\left(\frac{1}{2} - \frac{z + z^{-1}}{4}\right) = \frac{1}{32}[16 + 9z + 9z^{-1} - z^3 - z^{-3}].$$

□

Teorema 24.5.2. *Valgono le seguenti proprietà*

- 1) $F_{2N-1}(z) = \sum_{m=-2N+1}^{2N-1} a_m z^m$, dove $a_m \in \mathbb{R}$;
- 2) $F_{2N-1}(z) + F_{2N-1}(-z) = 1$, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$;
- 3) $F_{2N-1}(z) \geq 0$ per $|z| = 1$;
- 4) $F_{2N-1}(z) = F_{2N-1}(z^{-1})$, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$;
- 5) $a_m = a_{-m}$;
- 6) $a_m = 0$ se m è pari, $m \neq 0$, $a_0 = 1/2$.

Dimostrazione. Per la 1), basta osservare che $F_{2N-1}(z)$ è un polinomio di grado $2N - 1$ in $z + z^{-1}$, a coefficienti reali. Quindi

$$\begin{aligned} F_{2N-1}(z) &= \sum_{m=0}^{2N-1} c_m (z + z^{-1})^m = \sum_{m=0}^{2N-1} c_m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^k z^{-m+k} \\ &= \sum_{m=0}^{2N-1} c_m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^{-m+2k} = \sum_{m=0}^{2N-1} c_m \sum_{h=-m}^m b_{m,h} z^h \\ &= \sum_{h=-2N+1}^{2N-1} \left(\sum_{m=|h|}^{2N-1} c_m b_{m,h} \right) z^h. \end{aligned}$$

E' sufficiente dimostrare la 2) per $|z| = 1$, in quanto la funzione F è analitica per $z \neq 0$. In tal caso, però, è vera per la (24.7).

La 3) segue dal fatto che, se $|z| = 1$, allora, per un certo ξ , $z = e^{2\pi i\xi}$, e quindi $F_{2N-1}(z) = \mathcal{P}_{2N-1}(\sin^2(\pi\xi)) \geq 0$.

La 4) discende dalla definizione di $F_{2N-1}(z)$, mentre la 5) si ricava dalla 1) e la 4).

Infine, per la 6). Dalla 1) e 2) si ha

$$1 = \sum_{m=-2N+1}^{2N-1} a_m (z^m + (-1)^m z^m).$$

Dal confronto dei coefficienti segue l'asserto. \square

Introduciamo la seguente notazione

$$\tilde{F}_{4N-2}(z) = z^{2N-1} F_{2N-1}(z),$$

al fine di ottenere un polinomio in z di grado $4N - 2$. Il Corollario seguente ci permette di localizzare gli zeri di \tilde{F}_{4N-2} .

Corollario 24.5.3. 1) \tilde{F}_{4N-2} ha in $z = -1$ uno zero di ordine $2N$, cioè

$$\tilde{F}_{4N-2}(z) = (z + 1)^{2N} Q_{2N-2}(z),$$

dove Q_{2N-2} è un polinomio di grado $2N - 2$;

2) $\tilde{F}_{4N-2}(1) = 1$;

3) Se z_0 è uno zero di $\tilde{F}_{4N-2}(z)$ di molteplicità m , allora z_0^{-1} , \bar{z}_0 , \bar{z}_0^{-1} , sono ancora zeri di molteplicità m .

Dimostrazione. Accenniamo alla dimostrazione.

$$\begin{aligned} F_{2N-1}(z) &= \mathcal{P}_{2N-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{z + z^{-1}}{4} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{z + z^{-1}}{4} \right)^N P_{N-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{z + z^{-1}}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4^N} z^{-N} (2z + 1 + z^2)^N P_{N-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{z + z^{-1}}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4^N} z^{-N} (1 + z)^{2N} P_{N-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{z + z^{-1}}{4} \right). \end{aligned}$$

Allora

$$\tilde{F}_{4N-2}(z) = \frac{1}{4^N} (1+z)^{2N} z^{N-1} P_{N-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{z+z^{-1}}{4} \right).$$

E la 1) è dimostrata.

La 2) discende dalla definizione di \tilde{F} , dalla 1) e dalla 2) del Teorema 24.5.2. Infine, ancora dalla definizione di \tilde{F} e dal Teorema 24.5.2 segue che, se z è un suo zero, allora anche z^{-1} è un suo zero, mentre, dal fatto che sia un polinomio a coefficienti reali, segue che anche \bar{z} è un suo zero. \square

Il seguente teorema illustra il fatto che, se $|z| = 1$, $F_{2N-1}(z)$ è sempre il modulo del quadrato di un polinomio.

Teorema 24.5.4. *Esiste un polinomio C_{N-1} di grado $N-1$, a coefficienti reali, tale che, se $|z| = 1$,*

$$F_{2N-1}(z) = |(z+1)^N C_{N-1}(z)|^2. \quad (24.8)$$

Dimostrazione. Ricordiamo che, per $|z| = 1$, $F_{2N-1}(z) \geq 0$. Separiamo gli zeri reali di \tilde{F}_{4N-2} , diversi da -1 , da quelli complessi non reali, e indichiamo con $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}$ rispettivamente, l'insieme degli zeri reali interni al cerchio unitario e l'insieme degli zeri complessi, interni al cerchio unitario, che giacciono nel semipiano superiore. Per la fattorizzazione del polinomio otteniamo

$$\begin{aligned} F_{2N-1}(z) &= |F_{2N-1}(z)| = |z^{-2N+1} \tilde{F}_{4N-2}(z)| = |\tilde{F}_{4N-2}(z)| \\ &= |c(z+1)^{2N}| \prod_{z_0 \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}} |(z-z_0)(z-z_0^{-1})| \\ &\quad \cdot \prod_{w_0 \in \mathcal{Z}_{\mathbb{C}}} |(z-w_0)(z-w_0^{-1})(z-\bar{w}_0)(z-\bar{w}_0^{-1})| \\ &= |c(z+1)^{2N}| \prod_{z_0 \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}} |z_0|^{-1} |z-z_0|^2 \prod_{w_0 \in \mathcal{Z}_{\mathbb{C}}} |w_0|^{-1} |z-w_0|^2 |w_0|^{-1} |z-\bar{w}_0|^2, \end{aligned}$$

dove si è utilizzata l'uguaglianza, valida per $|z| = 1$, $|(z-r_0)(z-r_0^{-1})| = |r_0|^{-1} |z-r_0|^2$. Quindi basta prendere

$$C_{N-1}(z) = |c|^{1/2} \prod_{z_0 \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}} |z_0|^{-1/2} (z-z_0) \prod_{w_0 \in \mathcal{Z}_{\mathbb{C}}} |w_0|^{-1} (z-w_0)(z-\bar{w}_0).$$

\square

Esempio 24.5.5. In questo esempio vediamo come è possibile ricavare \mathcal{L} alla luce delle informazioni su F_{2N-1} . Supponiamo che $N = 2$. Ricapitolando

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi),$$

dove, per il teorema precedente,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\xi)|^2 &= P_{N-1}(\sin^2(\pi\xi)) = (1 - \sin^2(\pi\xi))^{-N} \mathcal{P}_{2N-1}(\sin^2(\pi\xi)) \\ &= (1 - \sin^2(\pi\xi))^{-N} F_{2N-1}(e^{2\pi i \xi}) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{2\pi i \xi} + e^{-2\pi i \xi}}{4} \right)^{-N} |(e^{2\pi i \xi} + 1)^N C_{N-1}(e^{2\pi i \xi})|^2 \\ &= \left(\frac{2 + e^{2\pi i \xi} + e^{-2\pi i \xi}}{4} \right)^{-N} [(e^{2\pi i \xi} + 1)(e^{-2\pi i \xi} + 1)]^N |C_{N-1}(e^{2\pi i \xi})|^2 \\ &= 4^N |C_{N-1}(e^{2\pi i \xi})|^2. \end{aligned}$$

Quindi basta prendere

$$\mathcal{L}(\xi) = 2^N C_{N-1}(e^{2\pi i \xi}), \quad \text{oppure} \quad \mathcal{L}(\xi) = 2^N \overline{C_{N-1}(e^{2\pi i \xi})} = 2^N C_{N-1}(e^{-2\pi i \xi}).$$

Per calcolare C_{N-1} abbiamo bisogno di trovare gli zeri di $\tilde{F}_{4N-2}(z)$. Utilizzando l'Esempio 24.5.1 e sapendo che $\tilde{F}_{4N-2}(z)$ ha in $z = -1$ uno zero di ordine $2N = 4$, si ha

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{4N-2}(z) &= \tilde{F}_6(z) = z^3 F_3(z) \\ &= z^3 \frac{1}{32} [16 + 9z + 9z^{-1} - z^3 - z^{-3}] \\ &= \frac{1}{32} [16z^3 + 9z^4 + 9z^2 - z^6 - 1] \\ &= \frac{1}{32} (z+1)^4 (-z^2 + 4z - 1) \\ &= -\frac{1}{32} (z+1)^4 (z - (2 - \sqrt{3}))(z - (2 + \sqrt{3})), \end{aligned}$$

dove solo $2 - \sqrt{3}$, giace all'interno del cerchio unitario. allora

$$\begin{aligned} C_1(e^{2\pi i\xi}) &= \frac{(2 - \sqrt{3})^{-1/2}}{4\sqrt{2}}(e^{2\pi i\xi} - (2 - \sqrt{3})) \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{8}(e^{2\pi i\xi} - (2 - \sqrt{3})), \end{aligned}$$

perchè $\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})^{1/2} = \sqrt{3} - 1$. Finalmente, si ricava il filtro

$$\begin{aligned} m_0(\xi) &= 4 \left(\frac{1 + e^{-2\pi i\xi}}{2} \right)^2 \frac{\sqrt{3} + 1}{8} (e^{-2\pi i\xi} - (2 - \sqrt{3})) \\ &= \left(\frac{1 + e^{-2\pi i\xi}}{2} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} e^{-2\pi i\xi} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right), \end{aligned}$$

che corrisponde alla scelta fatta in (24.6). □

Bibliografia

- [1] T.M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.
- [2] E. O. Brigham *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.
- [3] W. L. Briggs, V. E. Henson, *The DFT: An Owner's manual for the Discrete Fourier Transform*, SIAM, Philadelphia, 1995.
- [4] A. P. Calderón, A. Zygmund, *Contributions to Fourier Analysis*, Annals of Mathematics Studies **25**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1950
- [5] S. Campanato, *Lezioni di Analisi Matematica*, vol. 2, Giordano Pellegrini editore, Pisa, 1966.
- [6] L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. **116** (1966), 135–157.
- [7] J.W. Cooley, J.W. Tukey, *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comput. **19** (1965), 297–301.
- [8] P. Chernoff, *Pointwise convergence of Fourier series*, Amer. Math. Monthly **80** (1980), 399–400.
- [9] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure and Applied Math., **XLI** (1988), 909–996.
- [10] P. De Mottoni, *Complementi di Matematica*, voll. 1 e 2, Aracne, Roma, 1992.
- [11] H. Dym, H.P. McKean, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, New York, 1972.

- [12] A. Figà-Talamanca, E. Rogora, *Serie di Fourier e di Fourier–Walsh*, Università di Roma “La Sapienza”, 2005.
- [13] H. Helson, *Harmonic Analysis*, Addison-Wesley, Boston, 1983 (reprinted by Wadsworth & Brooks/Cole, 1991)
- [14] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Wiley, New York–Londra, 1968.
- [15] J.L. Kelley, *General Topology*, University Series in Higher Mathematics, Van Nostrand, New York, 1955 ristampato in Graduate Texts in Mathematics **23**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1975
- [16] V.A. Kotelnikov, *On the carrying capacity of the ether and wire in telecommunications*, Material for the First All-Union Conference on Questions of Communication, Izd. Red. Upr. Svyazi RKKA, Moscow, 1933 (tradotto in inglese e commentato da C.C. Bissel e V.E. Katsnelson).
- [17] D.G. Manolakis, V.K. Ingle, S.M. Kogon, *Statistic and Adaptive Signal Processing* Artech House, Boston/London, 2005.
- [18] S.M. Nikolsky, *Corso di Analisi Matematica, vol.2*, MIR, Mosca, 1975 (traduzione italiana 1981).
- [19] M. A. Picardello, L. Zsido, *Appunti di Algebra Lineare*, Università di Roma “Tor Vergata”, 2006.
- [20] R. Redheffer, *Convergence of Fourier series at a discontinuity*, Siam J. Math. Anal. **15** (1984), 1007–1009.
- [21] M. Reed, B. Simon, *Functional Analysis, vol. I*, Academic Press, New York, 1980.
- [22] H.L. Royden, *Real Analysis, 3rd ed.*, Macmillan, New York, 1988.
- [23] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw–Hill, New York, 1966.
- [24] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience, New York, 1967.
- [25] W. Rudin, *Functional Analysis, 2nd ed.*, McGraw–Hill, New York, 1991.
- [26] L. Schwartz, *Transformation de Laplace de distributions*, Sem. Math. Univ. Lund, volume supplementare dedicato a M. Riesz (1952), 196–206.

- [27] C.E Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System Techn. Journ. **1**, (1948), 379–423 e 623–656.
- [28] C.E Shannon, *Communication in the presence of noise*, Proc. Institute of Radio Engineers, **37**, no.1, 10–21 (1949) (ristampato in Proc.IEEE **86**, n.2 (1998)).
- [29] J.S. Soo, K.K. Pang, *Multidelay block frequency adaptive filter*, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process (ASSP) **38**, (1990).
- [30] E.M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Mathematica Series **32**, Princeton University Press, Princeton, 1971
- [31] T.G. Stockham Jr., *High-speed convolution and correlation*, AFIPS Proc., 1966 Spring Joint Computer Conference, **28**, 229–233, Spartan Books, 1966.
- [32] G. Strang, T. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley/Cambridge Press, Wellesley, 1996.
- [33] R. Vich, *Z Transform, Theory and Applications*, Mathematics and Its Applications Reidel Publishing Company/Kluwer, Dordrecht, 1987.
- [34] D. Walnut, *An Introduction to Wavelet Analysis*, Birkhauser, Basel, 2001.
- [35] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dutton, New York, 1931, ristampato da Dover, New York, 1950.
- [36] E.T. Whittaker, *On the Functions Which are Represented by the Expansions of the Interpolation Theory*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sec. A, **35** (1915), 181–194.
- [37] J.M. Whittaker, *Interpolatory Function Theory*, Cambridge Tracts in Mathematics and Math. Physics **33**, Cambridge University Press, Cambridge, England, and Macmillan, New York, 1935 (recensione: E. Hille, Bull. Amer. Math. Soc. **42**, n.5 (1936), 305–306).
- [38] A.H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis*, International Series in Pure and Applied Math., McGraw–Hill, New York, 1965.

- [39] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1959 (revisione 1968).