Note sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier

Roma, 8 marzo 2011

Teorema 1 (Criterio di convergenza di Abel-Dirichlet). *Siano* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *successioni tali che:*

(i) esiste $M > 0$ *tale che* $|\sum_{k=1}^n a_k| \le M$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $\lim_{k\to+\infty} b_k = 0$*;*

(iii) $\sum_{k=2}^{+\infty} |b_k - b_{k-1}| < +\infty$.

Allora la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ *è convergente, e vale la maggiorazione del resto:*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k b_k\right| \le 2M \sum_{k=n+1}^{+\infty} |b_k - b_{k-1}|. \tag{1}$$

Dimostrazione. Fissato $n \in \mathbb{N}$, si ponga $\beta_k := \sum_{j=n+1}^k a_j$, $k > n$, e $\beta_n := 0$. Si ha allora, per $k > n$,

$$\begin{aligned}\beta_k b_k - \beta_{k-1} b_{k-1} &= (\beta_k - \beta_{k-1}) b_k + \beta_{k-1}(b_k - b_{k-1}) \\ &= a_k b_k + \beta_{k-1}(b_k - b_{k-1}),\end{aligned}$$

da cui, tenendo conto che $\beta_n = 0$,

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = \beta_m b_m - \sum_{k=n+1}^m \beta_{k-1}(b_k - b_{k-1}).$$

Poiché allora, per l'ipotesi (i), $|\beta_k| = |\sum_{j=1}^m a_j - \sum_{j=1}^n a_j| \le 2M$ per ogni $k \ge n$, si ha la diseguaglianza

$$\left|\sum_{k=n+1}^m a_k b_k\right| \le 2M \left(|b_m| + \sum_{k=n+1}^m |b_k - b_{k-1}|\right), \tag{2}$$

la quale, insieme con le ipotesi (ii) e (iii), implica la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ grazie al criterio di convergenza di Cauchy per le serie. Inoltre facendo il limite della (2) per $m \to +\infty$ e tenendo conto dell'ipotesi (ii), si ottiene la diseguaglianza (1). □

Osservazione 1. Il criterio di Abel-Dirichlet è una generalizzazione del criterio di Leibniz. Data infatti una serie $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k b_k$ soddisfacente le ipotesi del criterio di Leibniz, cioè tale che $b_k \searrow 0$, si ha chiaramente $|\sum_{k=1}^n (-1)^k| \le 1$ (tali somme valgono -1 per n dispari e 0 per n pari) e

$$\sum_{k=2}^{+\infty} |b_k - b_{k-1}| = \sum_{k=2}^{+\infty} (b_{k-1} - b_k) = b_1 < +\infty$$

(la serie è telescopica), per cui le ipotesi del criterio di Abel-Dirichlet sono soddisfatte prendendo $a_k = (-1)^k$.

La maggiorazione del resto (1) del criterio di Abel-Dirichlet è utile a volte per provare la convergenza uniforme di serie di funzioni che non convergono totalmente.

Esempio 1. Si consideri la serie

$$2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Si è visto che questa è la serie di Fourier della funzione 2π-periodica $f^\sharp$ tale che $f^\sharp(x) = x$ per $x \in [-\pi, \pi)$, e dunque, in base al teorema di convergenza puntuale, converge a x per $x \in (-\pi, \pi)$ e a 0 per $x = -\pi$.

Allo scopo di studiare la convergenza uniforme della (3), applichiamo il criterio di Abel-Dirichlet con $a_k = (-1)^{k+1}\sin kx$ e $b_k = 1/k$. Poiché $b_k \searrow 0$, è chiaro che le ipotesi (ii) e (iii) sono verificate (vedere osservazione 1). Si ha inoltre, in base alle formule di Eulero e alla formula di somma di una progressione geometrica (che vale, con identica dimostrazione, anche quando la ragione della progressione è un numero complesso),

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sin kx\right| &= \left|\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}e^{ikx}\right)\right| = \left|-\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}(-e^{ix})^k\right)\right| \\ &= \left|\operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix} + (-1)^{n+1}e^{i(n+1)x}}{1+e^{ix}}\right)\right| \le \frac{2}{|1+e^{ix}|},\end{aligned}$$

avendo usato, nell'ultimo passaggio, la diseguaglianza $|\operatorname{Im} z| \le |z|$ ed il fatto che $|e^{i\alpha}| = 1$ per $\alpha \in \mathbb{R}$. Pertanto anche l'ipotesi (i) è soddisfatta nel punto $x \in (-\pi, \pi)$ con $M = M_x = 2/|1+e^{ix}|$. Dalla (1) segue allora, posto $I := [-\pi+\delta, \pi-\delta]$, $\delta > 0$,

$$\sup_{x\in I}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k}\right| \le \sup_{x\in I}\frac{4}{|1+e^{ix}|}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left|\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right| = \frac{2}{\sqrt{1+\cos(\pi-\delta)}}\frac{1}{n},$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è usato il fatto che $|1+e^{ix}| = \sqrt{2(1+\cos x)} \ge \sqrt{2(1+\cos(\pi-\delta))}$ per ogni $x \in I$. Poiché allora l'ultimo membro dell'equazione di sopra è infinitesimo per $n \to +\infty$, si deduce la convergenza uniforme della serie (3) in $I = [-\pi+\delta, \pi-\delta]$.

È interessante osservare che la serie data non converge totalmente in alcun intervallo $[a, b] \subset (-\pi, \pi)$, poiché, come subito si verifica,

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k}\right| = \frac{1}{k}$$

per k sufficientemente grande.

Teorema 2 (Convergenza uniforme delle serie di Fourier)**.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica e regolare a tratti. La serie di Fourier di f converge ad f uniformemente in ogni intervallo $[a, b]$ in cui f è continua.*

Dimostrazione. Siano $x_1, \dots, x_n$ i punti di discontinuità di f in $[-\pi, \pi)$, e si ponga $\delta_k := f(x_k^+) - f(x_k^-)$ per $k = 1, \dots, n$. Si consideri allora la funzione

$$F(x) := f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k}{2\pi} f^\sharp(x + \pi - x_k), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si ha che F è continua su tutto $\mathbb{R}$. Infatti la funzione $x \mapsto f^\sharp(x+\pi-x_k)$ è discontinua solo per $x = x_k$ in $[-\pi, \pi)$ e dunque F è continua in $x \neq x_k$, $k = 1, \dots, n$, in quanto combinazione lineare di funzioni continue in x. Per dimostrare la continuità di F in x_k osserviamo che si ha

$$\lim_{x \to x_k^-} f^\sharp(x + \pi - x_k) = \pi, \qquad \lim_{x \to x_k^+} f^\sharp(x + \pi - x_k) = -\pi,$$

e di conseguenza

$$\lim_{x \to x_k^-} F(x) = f(x_k^-) + \sum_{j \neq k}^{1,n} \frac{\delta_j}{2\pi} f^\sharp(x_k + \pi - x_j) + \frac{\delta_k}{2},$$
$$\lim_{x \to x_k^+} F(x) = f(x_k^+) + \sum_{j \neq k}^{1,n} \frac{\delta_j}{2\pi} f^\sharp(x_k + \pi - x_j) - \frac{\delta_k}{2}.$$

Ne segue $F(x_k^+) - F(x_k^-) = f(x_k^+) - f(x_k^-) - \delta_k = 0$ per $k = 1, \dots, n$, e quindi la continuità di F su $\mathbb{R}$. Inoltre F, in quanto combinazione lineare di funzioni regolari a tratti, è ovviamente regolare a tratti in $\mathbb{R}$, e peranto la sua serie di Fourier converge a F stessa totalmente su $\mathbb{R}$. Indicando allora con $s_n(\cdot; g)$ la somma parziale n-esima della serie di Fourier della generica funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si avrà (esercizio):

$$s_n(x; f) = s_n(x; F) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k}{2\pi} s_n(x + \pi - x_k; f^\sharp), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Se allora $[a, b] \subset [\pi, -\pi)$ è un intervallo che non contiene alcuno dei punti $x_1, \dots, x_n$, in base a quanto visto nell'esempio precedente la successione di funzioni $\{x \mapsto s_n(x + \pi - x_k; f^\sharp) : n \in \mathbb{N}\}$ convergerà uniformemente a $x \mapsto f^\sharp(x + \pi - x_k)$ in $[a, b]$, e dunque, grazie alla (4), la serie di Fourier di f convergerà a f uniformemente in $[a, b]$. $\square$