IV appello 17/9/14 — Geometria per Ingegneria Energetica, Gestionale, Meccanica
Proff. F. Bracci e E. Ciriza — A.A. 2013-14

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale finito dimensionale e siano $v_1, v_2, v_3 \in V$ tre vettori.

(a) Se $\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\} = V$ allora la dimensione di V è 3.
(b) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti allora $\dim V \geq 3$.
(c) Se ogni vettore di V si può scrivere in modo unico come combinazione lineare di $\{v_1, v_2, v_3\}$ allora $\dim V = 3$.
(d) Se $\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ ha dimensione 2 allora V ha dimensione 2.

Q2) Si consideri la seguente matrice, al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice è invertibile per ogni valore di β, purché $\alpha \neq 0$.
(b) Esistono valori di α, β per cui $A_{\alpha,\beta}$ non è diagonalizzabile.
(c) Se $\alpha \neq \pm\beta$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ è invertibile.
(d) Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la matrice $A_{\alpha,\beta}$ non ha autovalori reali.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione $\dim V = n, \dim W = m$ con $n > m$. Sia $T : V \to W$ un operatore lineare.

(a) T non è mai iniettivo.
(b) T non è mai suriettivo.
(c) $\ker T$ ha sempre dimensione $n - m$.
(d) $\mathrm{Im} T$ ha sempre dimensione $n - m$.

Q4) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione n. Sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale.

(a) Dato $w \in W$ e $v \in V \setminus W$, risulta $\langle v, w \rangle = 0$.
(b) La proiezione ortogonale di ogni vettore di W su W è il vettore nullo.
(c) Lo spazio ortogonale a W ha dimensione 0 se e solo se $V = W$.
(d) Esiste un sottospazio $U \subset V$ tale che ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = u + w$ con $u \in U$, $w \in W$ e $\langle u, w \rangle = 0$.

Q5) Siano A, B, C tre matrici quadrate $n \times n$.

(a) $\det[(A + B) \cdot C] = \det(A \cdot C) + \det(B \cdot C)$.
(b) Se $A + B = C$ e C è invertibile, allora A oppure B (o entrambe) sono invertibili.
(c) Se $det(A \cdot B) = \det C$ e C è invertibile, allora A e B sono invertibili.
(d) Se $A \cdot B = I$ (I matrice identità) e $C \cdot A = I$, allora $B = C$.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z).

(a) $2x + y = -1$ è l'equazione di una retta che contiene il punto $(0, -1, 0)$.
(b) Il piano $x = 1$ è ortogonale ad ogni retta tangente al vettore $(-2, 0, 0)$.
(c) Due rette distinte ortogonali allo stesso piano sono parallele.
(d) Sia r la retta passante per $(0, 0, 1)$ e tangente al vettore $(1, 0, 0)$. La retta r incontra il piano $z = 0$ nel punto $(1, 0, 0)$.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale $\{O; e_1, e_2\}$. Siano

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

E sia $O' = (1, 0)$. Siano (x', y') le coordinate nel sistema di riferimento affine $\{O'; u, v\}$.

(a) Le coordinate nel sistema di riferimento affine $\{O'; u, v\}$ di un punto $P \in \mathbb{A}^2$ sono $(1, 1)$ se $P = v$.
(b) Le coordinate nel sistema di riferimento affine $\{O'; u, v\}$ di un punto $P \in \mathbb{A}^2$ sono $(0, 1)$ se $P - O' = v$.
(c) La retta passante per O' e tangente a u ha equazione cartesiana $y' = 0$.
(d) Le due rette $x = 0$ e $y = 0$ si intersecano nel sistema di riferimento $\{O; e_1, e_2\}$ ma non si intersecano nel sistema di riferimento $\{O'; u, v\}$.

Q8) Nello spazio affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia r la retta passante per $(1, 1)$ e parallela al vettore $(2, -1)$.

(a) r è parallela alla retta $2x - y = 0$.
(b) Esiste una sola retta ortogonale a r e contenente il punto $(0, 0)$.
(c) Ogni retta tangente al vettore $(-2, 2)$ interseca r.
(d) Siano fissati due punti P, Q di r a distanza 1. Sia s una retta parallela ad r e distante 2 da r e sia R un qualunque punto di s. Senza ulteriori informazioni non è possibile calcolare l'area del triangolo (P, Q, R).

Soluzioni:

Q1: b, c.
Q2: c.
Q3: a.
Q4: c, d.
Q5: c, d.
Q6: b, c.
Q7: b, c.
Q8: b, c.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Sia V lo spazio vettoriale dato dai polinomi di grado ≤ 2. Ovvero, $p(x) \in V$ se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ con $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Sia $T : V \to V$ l'applicazione data da

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) + (a_0 - a_1)x.$$

(1) Provare che T è una applicazione lineare.
(2) Data la base $\{1, x, x^2\}$ di V, determinare la matrice associata a T in tale base (sia in partenza che in arrivo).
(3) Determinare una base di $\ker T$ e di $\mathrm{Im}T$.
(4) Trovare autovalori e autovettori di T e dire se T è diagonalizzabile.

Soluzione:

(1) Siano $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, allora
$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$ quindi

$$\begin{aligned} T(p(x) + q(x)) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + [(a_0 + b_0 - (a_1 + b_1)]x \\ &= (a_0 + a_1) + (b_0 + b_1) + (a_0 - a_1 + b_0 - b_1)x \\ &= (a_0 + a_1) + (a_0 - a_1)x + (b_0 + b_1) + (b_0 - b_1)x \\ &= T(p(x)) + T(q(x)) \end{aligned}$$

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\alpha p(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2$

$$T(\alpha p(x)) = (\alpha a_0 + \alpha a_1) + (\alpha a_0 - \alpha a_1)x = \alpha(a_0 + a_1) + \alpha(a_0 - a_1)x = \alpha T(p(x)).$$

(2) Le colonne della matrice A di T nella base data sono i coefficienti dei polinomi

$$T(1) = 1 + 1x + 0x^2,\ T(x) = 1 - 1x + 0x^2,\ T(x^2) = 0 + 0x + 0x^2.$$

quindi

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) La dimensione di $\mathrm{Im}T$ è il rango della matrice A, che è uguale a 2. Una base di $\mathrm{Im}T$ è costituita dai vettori

$$\{T(1) = 1 + x,\ T(x) = 1 - x\}$$

La dimensione di $\ker T$ è 1. Si osserva che $T(x^2) = 0$ quindi una sua base è $\{x^2\}$.

(4) Il polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda^2 - 2)$. Le sue radici sono $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$, quindi T è diagonalizzabile. I relativi autovalori sono

$$x^2,\ (1 + \sqrt{2}) + x,\ (\sqrt{2} - 1) + x$$

.