III appello 3/7/13 — Geometria per Ingegneria Medica
Prof. F. Bracci — A.A. 2012-13

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________

Corso di Laurea: (se diverso da Ing. Medica) ______________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Eventuali correzioni devono essere segnalate con un "NO"*. Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3.

(a) Dati due vettori $v, w \in V$ linearmente indipendenti, allora per ogni $\lambda, \mu \neq 0$ i vettori $\lambda v, \mu w$ sono linearmente indipendenti.
(b) Ogni insieme di 3 vettori di V forma una base di V.
(c) Se 4 vettori generano V allora 3 di loro sono linearmente indipendenti.
(d) Dati $v, w \in V$, se $\mathrm{span}\langle v, w\rangle$ ha dimensione almeno 1 allora v, w sono linearmente indipendenti.

Q2) Sia A_α la matrice data da:

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice A_α è sempre invertibile.
(b) La matrice A_α è diagonalizzabile solo per $\alpha \neq 0$.
(c) La molteplicità geometrica di 1 è 1.
(d) Se $\alpha = 1$, la molteplicità algebrica di 1 è 3.

Q3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare.

(a) T è invertibile se e solo se T è iniettivo.
(b) Il nucleo di T ha sempre dimensione maggiore alla dimensione dell'immagine di T.
(c) Se 0 è un autovalore di T allora T non è suriettivo.
(d) Se l'immagine di T ha dimensione uguale alla dimensione di V allora T non è iniettivo.

Q4) Sia $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dotato del prodotto scalare standard e siano $v, w, u \in V$ tre vettori non nulli.

(a) Se $v \wedge w = 0$ allora v, w sono linearmente dipendenti.
(b) Se $\langle v + w, u \rangle = 0$ allora u, v, w sono linearmente dipendenti.
(c) Se v, w, u formano una base di $\mathbb{R}^3$ allora $\langle u, v \rangle = 0$, $\langle u, w \rangle = 0$, $\langle v, w \rangle = 0$.
(d) Siano u, v linearmente indipendenti. La proiezione ortogonale di w sullo spazio generato da $u \wedge v$ è pari a 0 se e solo se w è sia ortogonale a u che ortogonale a v.

Q5) Siano A, B, C matrici 4×4.

(a) $\det(A \cdot^t B) = \det B \cdot \det A$
(b) $\det[(A + C) \cdot B] = (\det A + \det C) \cdot \det B$.
(c) Il rango di $A \cdot B \cdot C$ è 4 se e solo se A, B, C sono invertibili.
(d) Se $\det A \neq 0$ e il rango di B, C è 3, allora il rango di $A \cdot B \cdot C$ è 3.

Q6) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione n e sia $L : V \to V$ un operatore lineare non nullo (ovvero tale che $L(v) \neq 0$ per qualche $v \in V$).

(a) Se L ha n autovalori distinti allora L è auto-aggiunto.
(b) Se L è auto-aggiunto e $\ker L \neq \{0\}$ allora esiste un sottospazio $W \subset V$ di dimensione $< n$ tale che $L(W) = W$.
(c) Se L è è auto-aggiunto allora L è iniettivo.
(d) Se L è auto-aggiunto e ha un solo autovalore allora L è un multiplo dell'identità.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C} := \{(x, y) : x^2 - \alpha y^2 - 2x + 2 = 0\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Se $\alpha < 0$ allora $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente ad una ellisse.
(b) Se $\alpha = 0$ allora $\mathcal{C}$ è l'insieme vuoto.
(c) Se $\alpha > 0$ allora $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente ad una iperbole.
(d) Se $\alpha = 1$ allora $\mathcal{C}$ è una circonferenza.

Q8) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia r la retta parallela alla retta $x = z, y = x$ e passante per $(0, 0, 1)$.

(a) r è contentuta nel piano $y - z + 1 = 0$.
(b) r è ortogonale al piano $y - x = 0$.
(c) r interseca il piano $x = 2$ nel punto $(2, 2, 2)$.
(d) lo spazio tangente ad r è generato dal vettore $(1, 1, 1)$.

Q9) Nello spazio affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine $\mathcal{R}$ ortonormale con coordinate affini (x, y). Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia $P = (0, 1)$. Si consideri il sistema di riferimento affine $\mathcal{R}' := \{P; v_1, v_2\}$, con coordinate (x', y').

(a) Le equazioni di cambiamento di coordinate sono $x = y'$, $y = -x' + y' + 1$.
(b) l'equazione cartesiana della retta $x + y = 0$ nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$ è $2y' + x' - 1 = 0$.
(c) Il sistema di riferimento affine $\mathcal{R}'$ è ortogonale ma non ortonormale.
(d) Le coordinate del punto $(0, 1)$ nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$ sono $(0, 0)$.

Q10) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 10 e siano $U, W \subset V$ due sottospazi vettoriali, con $\dim U = \dim W = 5$ tali che $U \neq W$.

(a) $\dim(U \cap W) \leq 1$.
(b) $\dim(U + W) \geq 6$.
(c) Se $U \cap W$ ha dimensione 3 allora $U + W$ contiene 7 vettori linearmente indipendenti.
(d) Se $U + W = V$ allora $\dim(U \cap W) = 0$.

Soluzioni:

Q1) a), c)
Q2) c), d)
Q3) a), c)
Q4) a)
Q5) a), c)
Q6) b), d)
Q7) b), c)
Q8) a), d)
Q9) a), d)
Q10) b), c), d)

PARTE II: Risolvere i seguenti problemi, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

P1) V lo spazio dei polinomi di gradi ≤ 3 con coefficienti reali. Su V sia definito il prodotto scalare dato da $\langle a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Si consideri l'applicazione lineare $T : V \to \mathbb{R}^3$ definita tramite

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_0 - a_1 \\ 0 \\ a_1 - a_3 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare la dimensione del nucleo di T e trovarne una base ortonormale.
(2) Determinare la dimensione dell'immagine di T e trovarne una base.
(3) Determinare un sottospazio $W \subset V$ tale che $W + \ker T = V$ e che W sia ortogonale a $\ker T$. Trovare una base ortonormale di W.
(4) Sia $\mathcal{V}$ la base di V determinata prendendo la base ortonormale di $\ker T$ dal punto (1) e la base ortonormale di W dal punto (3). Determinare la matrice associata a T nella base $\mathcal{V}$ di V e nella base canonica di $\mathbb{R}^3$.

P2) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate (x, y, z). Sia r la retta ortogonale al piano $x - y = 1$ e passante per $(0, 0, 1)$.

(1) Determinare l'equazione cartesiana e parametrica della retta r.
(2) Determinare la posizione del punto di coordinate $(0, 0, 0)$ dopo la rotazione in senso antiorario di $\pi/2$ attorno alla retta r.

Soluzioni:

P1) (1) Per trovare il nucleo di T, si deve risolvere l'equazione

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dalla quale si ottiene subito $a_0 - a_1 = 0, a_1 - a_3 = 0$, ovvero $a_0 = a_1 = a_3$. Pertanto un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ appartiene al nucleo di T se e solo se $p(x) = \alpha + \alpha x + \beta x^2 + \alpha x^3$, al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pertanto ci sono due parametri liberi, α, β e dunque il nucleo ha dimensione 2 e una base è data da $\{1 + x + x^3, x^2\}$. Si verifica che tali vettori sono ortogonali e che x^2 ha norma 1. Pertanto una base ortonormale è data da $p_1(x) = \frac{1+x+x^3}{\|1+x+x^3\|}$ e $p_2(x) = x^2$. Per calcolare $\|1 + x + x^3\|^2 = 1 + 1 + 1 = 3$, dunque $p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + x + x^3)$.

Alternativamente, si può notare che l'insieme $\{1, x, x^2, x^3\}$ è una base ortonormale di V. In tale base e nella base standard di $\mathbb{R}^3$, la matrice associata a T è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si risolve dunque il sistema $AX = O$ e si trovano le soluzioni.

(2) Dalla formula della dimensione segue subito che $\dim \operatorname{Im} T = \dim V - \dim \ker T = 4 - 2 = 2$. Dalla matrice A precedentemente scritta, o calcolando $T(1), T(x^3)$ si vede subito che una base ortonormale di $\operatorname{Im} T$ è data dai vettori canonici $\{e_1, e_3\}$.

(3) Per prima cosa si completa la base $\{p_1(x), p_2(x)\}$ (base ortonormale del nucleo di T) ad una base di V. Ad esempio si può prendere $q_3(x) = 1, q_4(x) = x$. Si noti che $p_2(x)$ è ortogonale a $q_3(x), q_4(x)$. Si applica poi il procedimento di Gram-Schmidt. Si definisce

$$\tilde{p}_3(x) = q_3(x) - \langle q_3, p_1(x)\rangle p_1(x) = 1 - \frac{1}{3}(1 + x + x^2) = \frac{1}{3}(2 - x - x^2)$$

e normalizzando si ottiene $p_3(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 - x - x^2)$. Si definisce poi $\tilde{p}_4(x) = q_4(x) - \langle q_4(x), p_1(x)\rangle p_1(x) - \langle q_4(x), p_3(x)\rangle p_3(x)$. E svolgendo il calcolo si ottiene $\tilde{p}_4(x) = \frac{1}{2}(x - x^2)$. Normalizzando si ha $p_4(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - x^2)$.

Per costruzione lo spazio $W = \operatorname{span}\{p_3(x), p_4(x)\}$ è ortogonale a $\ker T$ e una sua base ortonormale è data da $\{p_3(x), p_4(x)\}$.

(4) Sappiamo già che $T(p_1(x)) = T(p_2(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pertanto basta trovare l'immagine di $p_3(x)$ e $p_4(x)$. Si ha $T(p_3(x)) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ e $T(p_4(x)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. la matrice cercata è dunque

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

P2) (1) lo spazio ortogonale al piano $x - y = 1$ è generato dal vettore $(1, -1, 0)$. Pertanto tale vettore è tangente alla retta r. L'equazione parametrica di tale retta è dunque

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Da cui, l'equazione cartesiana di tale retta risulta essere $x + y = 0, z = 1$.

(2) Facciamo un cambio ortonormale di coordinate che preservi l'orientazione dello spazio. Vogliamo che nelle nuove coordinate $\{x', y', z'\}$ la retta r sia data da $x' = y' = 0$. Pertanto, se $\{u, v, w\}$ è la base ortonormale che stiamo cercando, occorre che w sia tangente ad r, dunque possiamo porre $w = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$. Utilizzando Gram-Schmidt, o in questo caso direttamente, si vede che ponendo $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ e $v = (0, 0, 1)$, la base $\{u, v, w\}$ è ortonormale. Si verifica che il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante 1, quindi la base scelta è positiva e preserva l'orientazione. Facciamo il seguente cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ z = y' + 1 \end{cases}$$

il cambio opposto è dato da

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' = z - 1 \\ z' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases}$$

Dunque, il punto di coordinate $(0, 0, 0)$ nel sistema di riferimento iniziale, diventa il punto di coordinate $(0, -1, 0)$ nel nuovo sistema di riferimento.

La rotazione di $\pi/2$ in senso antiorario attorno alla retta $x' = y' = 0$ è data da

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y' \\ x' \\ z' \end{pmatrix}$$

Quindi il punto $(0, -1, 0)$ viene ruotato nel punto $(1, 0, 0)$. Nel sistema di riferimento iniziale, utilizzando le formule precedenti si ha che tale punto ha coordinate $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$.