

## Uno sguardo sui misteri della teoria di Tomita-Takesaki

La creazione della cosiddetta "teoria di Tomita-Takesaki" ha marcato un momento cruciale nello sviluppo della teoria delle algebre di operatori. Si tratta del maneggio di forme positive su algebre di von Neumann, chiamate pesi, che generalizzano la misura di Radon nell'ambito non commutativo.

Più precisamente, se  $M$  è una algebra di von Neumann, un *peso* su  $M$  è una funzione additiva  $\varphi : M^+ \rightarrow [0, +\infty]$  che è omogenea rispetto a scalari positivi. Il peso  $\varphi$  si chiama

*normale*, se commuta con il passaggio al supremo di una famiglia limitata, diretta crescente,

*semifinita*, se  $\{a \in M^+; \varphi(a) < +\infty\}$  è \*-debolmente denso in  $M^+$ ,

*fedele*, se si annulla solo in 0.

Per i pesi che sono *tracce*, cioè soddisfano la condizione  $\varphi(x^*x) = \varphi(xx^*)$  per ogni  $x \in M$ , molti metodi della teoria della misura possono essere adatti. Però in tante applicazioni della teoria delle algebre di von Neumann occorrono algebre su quali non esistono tracce non zeri. La teoria di Tomita-Takesaki permette di superare questa difficoltà.

Brevemente: mentre per un peso  $\varphi$  che è traccia, per ogni  $x, y \in M$  con  $\varphi(x^*x), \varphi(xx^*), \varphi(y^*y), \varphi(yy^*) < +\infty$  le quantità ben definite e finite  $\varphi(xy)$  e  $\varphi(yx)$  sono uguali, per un peso normale, semifinita, fedele qualsiasi  $\varphi$  si dimostra l'esistenza di un operatore di deformazione analitica  $x \mapsto x'$ , \*-debolmente densamente definito su  $\{x \in M; \varphi(x^*x), \varphi(xx^*) < +\infty\}$ , tale che  $\varphi(xy) = \varphi(yx')$  per ogni  $y \in M$  con  $\varphi(y^*y), \varphi(yy^*) < +\infty$ .

In questo corso vorrei tentare una spiegazione del sottofondo di questo fenomeno. Prima considero il caso di un peso normale, semifinita, fedele  $\varphi$  che è anche limitato, cioè il caso di un funzionale lineare positivo normale e fedele, collegando la loro teoria di Tomita-Takesaki con l'abbondanza dei elementi  $a \in M$  per i quali il funzionale  $M \ni x \mapsto \varphi(xa)$  è positivo, garantita dalla decomposizione polare di S. Sakai per i funzionali \*-debolmente continui. In una seconda tappa indicherò come il caso generale può essere ridotto a questo caso. Questa tappa si ispira da un lavoro di R. Longo, nel quale la teoria di Tomita-Takesaki per funzionali lineari positivi normali e fedeli su algebre di von Neumann generate da una successione crescente di sottoalgebre di von Neumann finito-dimensionali è ridotta al caso di algebre finito-dimensionali, e necessita una investigazione approfondita della struttura dei pesi normali, semifiniti, fedeli.

L'esposizione della prima parte seguirà ([1]), mentre la seconda parte è ancora in elaborazione.

All'occorrenza le esposizioni possono essere tenute in inglese.

**Programma:**

giovedì 24 marzo 2016,

giovedì 31 marzo 2016,

giovedì 7 aprile 2016,

giovedì 14 aprile 2016,

giovedì 21 aprile 2016,

giovedì 5 maggio 2016,

alle ore 16:00 nell'aula De Blasi,

giovedì 12 maggio 2016,

giovedì 19 maggio 2016,

alle ore 16:00 nell'aula D'Antoni,

giovedì 26 maggio 2016,

alle ore 16:00 nell'aula De Blasi.

## References

- [1] L. Zsidó: *On Woronowicz's approach to the Tomita-Takesaki theory*, Banach Center Publ. 98 (2012), 455-486.