

SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI LEZIONI 43-44-45-46

CONTENTS

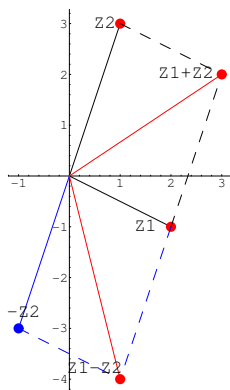
1.	SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONE 43.	1
2.	SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONE 44.	1
3.	SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONI 45 – 46.	3

[B] Dispense a cura del Docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONE 43.

ESERCIZIO. Disegnare $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + 3i$ e $z_1 \pm z_2$.

Soluzione.



ESERCIZIO. Determinare la rappresentazione trigonometrica di $\pm i$.

Soluzione.

Dato che $|\pm i| = 1$ e $\arg(\pm i) = \pm \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\pm i = e^{\pm i \frac{\pi}{2}}.$$

2. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONE 44.

ESERCIZIO CONSIGLIATO: Dimostrare la formula del rapporto tramite la rappresentazione trigonometrica.

Soluzione.

Dati $z_1 \in \mathbb{C}$ e $z_2 \in \mathbb{C}$, con $z_2 \neq 0$ e

$$z_1 = |z_1| (\cos(\arg(z_1)) + i \sin(\arg(z_1))), \quad z_2 = |z_2| (\cos(\arg(z_2)) + i \sin(\arg(z_2))),$$

si tratta di dimostrare che

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\arg(z_1) - \arg(z_2)) + i \sin(\arg(z_1) - \arg(z_2))). \quad (2.1)$$

Dato che

$$\frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{1}{|z_2|^2} \overline{|z_2| (\cos(\arg(z_2)) + i \sin(\arg(z_2)))} =$$

$$\frac{|z_2|}{|z_2|^2} \overline{(\cos(\arg(z_2)) + i \sin(\arg(z_2)))} = \frac{1}{|z_2|} (\cos(\arg(z_2)) - i \sin(\arg(z_2))),$$

si ha

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\arg(z_1)) + i \sin(\arg(z_1))) (\cos(\arg(z_2)) - i \sin(\arg(z_2))) =$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\arg(z_1)) + i \sin(\arg(z_1))) (\cos(-\arg(z_2)) + i \sin(-\arg(z_2))),$$

e la (2.1) segue dalla formula del prodotto. ■

ESERCIZIO. Calcolare e disegnare $\frac{z_1}{z_2}$, con $z_1 = 5 + 5i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$.

Soluzione.

Si ha

$$|z_1| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, \quad \arg(z_1) = \arccos\left(\frac{5}{5\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4},$$

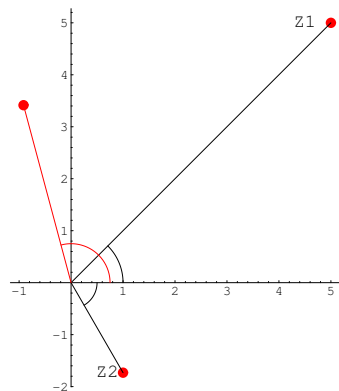
$$|z_2| = \sqrt{4} = 2, \quad \arg(z_2) = -\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Dato che

$$\arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7}{12}\pi,$$

si ha

$$\frac{z_1}{z_2} = 5 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i \frac{7}{12} \pi} = 5 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{12}\pi\right) \right).$$



ESERCIZIO: Calcolare $(1 - i\sqrt{3})^5$.

Soluzione.

Sia $z = 1 - i\sqrt{3}$. Si ha

$$|z| = \sqrt{4} = 2, \quad \arg(z) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Dalla formula di de Moivre, si ha

$$z^5 = 2^5 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)^5 = 2^5 \left(\cos\left(-5\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-5\frac{\pi}{3}\right) \right) =$$

$$2^5 \left(\cos\left(-5\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) + i \sin\left(-5\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) \right) =$$

$$2^5 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2^5 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 16(1 + i\sqrt{3}).$$

3. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONI 45 – 46.

ESERCIZIO. Determinare la rappresentazione trigonometrica e quindi disegnare le radici quarte e quinte di $z = 1$ e le radici quadrate di -1 .

Soluzione.

Dato che $|1| = 1$ e $\arg(1) = 0$, si ha $1 = e^0$, e quindi

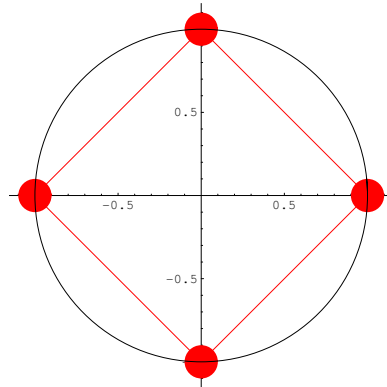
$$z^4 = 1 \iff z = \xi_k = e^{i\frac{0}{4} + i2\pi\frac{k}{4}} = e^{i\pi\frac{k}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Analogamente si ha

$$z^5 = 1 \iff z = \xi_k = e^{i2\pi\frac{k}{5}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

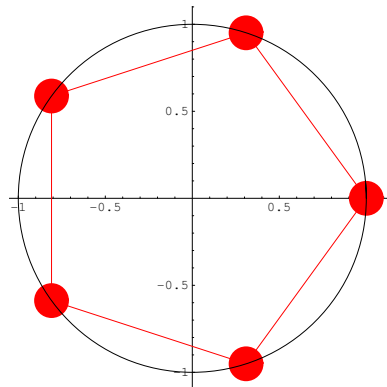
Quindi in particolare

$$z^4 = 1 \iff z = \xi_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad \text{con} \quad \xi_k = e^{i\pi\frac{k}{2}},$$



e

$$z^5 = 1 \iff z = \xi_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \quad \text{con} \quad \xi_k = e^{i\pi\frac{2k}{5}}.$$



Inoltre, dato che $|-1| = 1$ e $\arg(-1) = \pi$, si ha $-1 = e^{i\pi}$ e quindi

$$z^2 = -1 \iff z = z_k = e^{i\frac{\pi}{2} + 2i\pi\frac{k}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\pi k}, \quad k = 0, 1.$$

Quindi

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}(-1) = -i.$$

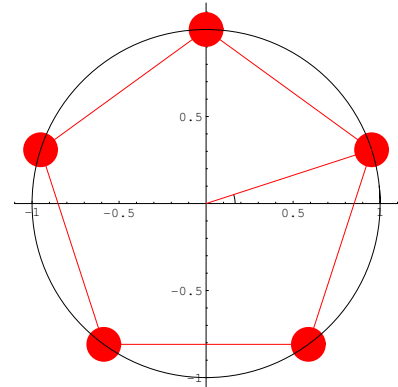
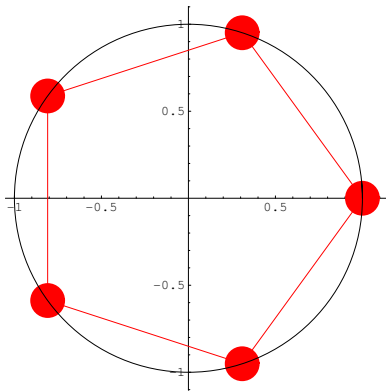
ESERCIZIO. Determinare la rappresentazione trigonometrica e quindi disegnare le radici n -esime di $z = i$ e di $-3 + i\sqrt{3}$.

Soluzione.

Dato che $|i| = 1$ e $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$, si ha

$$z^n = i \iff z = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad \text{con} \quad z_k = e^{i\frac{\pi}{2n}} e^{i\pi\frac{2k}{n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}} \xi_k,$$

dove le ξ_k , $k = 0, 1, \dots, n$ sono le radici n -esime dell'unità, $w^n = 1 \iff w = \xi_k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Dato che, per n fissato, le ξ_k sono i vertici del poligono regolare con n lati inscritto nella circonferenza unitaria con un vertice in $z = 1$, le radici n -esime di i sono, a n fissato, i vertici del poligono regolare con n lati inscritto nella circonferenza unitaria con un vertice in $z = e^{i\frac{\pi}{2n}}$, ovvero del poligono di vertici ξ_k ruotato di $\frac{\pi}{2n}$.



Dato che $|-3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ e

$$\arg(-3 + i\sqrt{3}) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right) + \pi = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6},$$

si ha $-3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$, e quindi

$$z^n = -3 + i\sqrt{3} \iff z = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad \text{con} \quad z_k = \left(2\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{5\pi}{6n}} e^{i\pi\frac{2k}{n}} = \sqrt[n]{2\sqrt{3}} e^{i\frac{5\pi}{6n}} \xi_k.$$

Come sopra, concludiamo che le radici n -esime di $-3 + i\sqrt{3}$ sono, a n fissato, i vertici del poligono regolare con n lati inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{2\sqrt{3}}$ con un vertice in $z = e^{i\frac{5\pi}{6n}}$, ovvero del poligono di vertici $\sqrt[n]{2\sqrt{3}} \xi_k$ ruotato di $e^{i\frac{5\pi}{6n}}$. ■

ESERCIZIO. Risolvere $-\frac{1}{4}z^2 - (1 + i\sqrt{3})z + (1 - i\sqrt{3})$ e disegnarne le soluzioni.

Soluzione.

Si ha

$$z_{\pm} = \frac{1 + i\sqrt{3} \pm w}{-\frac{1}{2}},$$

dove w è una delle soluzioni di $w^2 = \Delta$, dove $\Delta = (1 + i\sqrt{3})^2 + (1 - i\sqrt{3})$. Dato che

$$\Delta = (1 + i\sqrt{3})^2 + (1 - i\sqrt{3}) = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 + 1 - i\sqrt{3} = -1 + i\sqrt{3},$$

si ha $|\Delta| = 2$, $\arg(\Delta) = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = \frac{2\pi}{3}$. Quindi possiamo scegliere $w = \sqrt{2} e^{i\frac{2\pi}{6}} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})$ e concludere che

$$z_{\pm} = -2 \left(1 + i\sqrt{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3}) \right),$$

e in particolare che

$$z_+ = -\left(2 + \sqrt{2} + ih\sqrt{3}(2 + \sqrt{2})\right) = -(2 + \sqrt{2})(1 + i\sqrt{3})$$

$$z_- = -\left(2 - \sqrt{2} + i\sqrt{3}(2 - \sqrt{2})\right) = -(2 - \sqrt{2})(1 + i\sqrt{3})$$

■