SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI LEZIONI 40-41-42

Contents

[B] Dispense a cura del docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONI $40-41-42$.

ESERCIZI: Calcolare
$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \lim_{s\to 0^+}\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Soluzione.
Si ha:
$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to+\infty} 2\sqrt{x}\,\Big|_0^t = \lim_{t\to+\infty}\left(2\sqrt{t}-2\right) = +\infty,$$
$$\lim_{s\to 0^+}\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{s\to 0^+} 2\sqrt{x}\,\Big|_s^1 = \lim_{s\to 0^+}\left(2-2\sqrt{s}\right) = 2.$$

■

ESERCIZIO: Dimostrare che
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx,$$
è divergente.

Soluzione.
Si ha
$$\lim_{s\to 0^+}\int_s^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{s\to 0^+}\log(x)\,\Big|_s^1 = \lim_{s\to 0^+} -\log(s) = +\infty.$$

■

ESERCIZIO: Dimostrare che
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx,$$
è divergente se $\alpha \le 1$, convergente se $\alpha > 1$ e viceversa che
$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx,$$
è divergente se $\alpha \ge 1$, convergente se $\alpha < 1$.

Soluzione.
Si ha

$$\lim_{s\to-\infty}\int_s^{-1}\frac{1}{|x|^\alpha}\,dx=\lim_{s\to-\infty}\int_s^{-1}\frac{1}{(-x)^\alpha}\,dx=\lim_{s\to-\infty}\int_{-s}^{1}\frac{1}{(y)^\alpha}\,(-dy)=$$

$$\lim_{s\to-\infty}\int_1^{-s}\frac{1}{y^\alpha}\,dy=\lim_{t\to+\infty}\int_1^{t}\frac{1}{y^\alpha}\,dy.$$

L' ultimo limite è stato svolto a lezione e risulta convergente se $\alpha>1$, divergente se $\alpha\le 1$.
Inoltre si ha

$$\lim_{t\to0^-}\int_{-1}^{t}\frac{1}{|x|^\alpha}\,dx=\lim_{t\to0^-}\int_{-1}^{\frac{1}{t}}\frac{1}{|y^{-1}|^\alpha}\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy=\lim_{s\to-\infty}\int_s^{-1}\frac{|y|^\alpha}{y^2}\,dy=$$

$$\lim_{s\to-\infty}\int_s^{-1}\frac{1}{|y|^{2-\alpha}}\,dy,$$

e l'ultimo limite è per l'esercizio precedente convergente se $2-\alpha>1$, ovvero se $\alpha<1$ e divergente se $2-\alpha\le1$, ovvero se $\alpha\ge1$. ■

ESERCIZIO: Dato $x_0\in\mathbb{R}$, discutere, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, la convergenza dell' integrale improprio

$$\int_{x_0-1}^{x_0+1}\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\,dx.$$

Soluzione.
Per definizione di integrale improprio si ha

$$\int_{x_0-1}^{x_0+1}\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\,dx=\lim_{t\to x_0^-}\int_{x_0-1}^{t}\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\,dx+\lim_{s\to x_0^+}\int_s^{x_0+1}\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\,dx=$$

$$\lim_{t\to x_0^-}\int_{-1}^{t-x_0}\frac{1}{|y|^\alpha}\,dy+\lim_{s\to x_0^+}\int_{s-x_0}^{1}\frac{1}{|y|^\alpha}\,dx=\lim_{\tau\to0^-}\int_{-1}^{\tau}\frac{1}{|y|^\alpha}\,dy+\lim_{\sigma\to0^+}\int_\sigma^{1}\frac{1}{|y|^\alpha}\,dx.$$

Per l' esercizio precedente i limiti sono entrambe convergenti se $\alpha<1$ e entrambe divergenti se $\alpha\ge1$. ■

ESERCIZI: Discutere, la convergenza degli integrali impropri

$$\int_1^4\frac{1}{|x-2|^{\frac{1}{3}}}\,dx,\qquad\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx,$$

e calcolare il secondo.

Soluzione.
Dato che $\frac{1}{3}<1$, procedendo come nell' esercizio precedente, si verifica facilmente che il primo integrale è convergente.
Per definizione di integrale improprio si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1}{(1+x^2)^2}+\lim_{s\to-\infty}\int_s^0\frac{1}{(1+x^2)^2}=$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x\right)\Big|_0^t+\lim_{s\to-\infty}\left(\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x\right)\Big|_s^0=$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\arctan t\right)+\lim_{s\to-\infty}\left(-\frac{s}{2(1+s^2)}-\frac{1}{2}\arctan s\right)=\frac{\pi}{2}.$$

■

ESERCIZI: Discutere, la convergenza degli integrali impropri

$$\int_1^{+\infty} \frac{2+\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int_{-1}^{0} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{|x|}}\,dx, \quad \int_{-1}^{0} \frac{2+\sin(x)}{|x|^4}\,dx.$$

Soluzione.

Si ha

$$\frac{2+\sin(x)}{\sqrt{x}} \geq \frac{2-1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \ \forall x \in [1,+\infty),$$

e quindi, per il criterio del confronto, l' integrale $\int_1^{+\infty} \frac{2+\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$, è divergente perché l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ è divergente.
Si ha

$$\frac{|\sin(x)|}{\sqrt{|x|}} \leq \frac{1}{\sqrt{|x|}}, \ \forall x \in [-1,0],$$

e quindi, per il criterio del confronto, l' integrale $\int_{-1}^{0} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{|x|}}\,dx$, è convergente perché l'integrale $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$ è convergente.
Si ha

$$\frac{2+\sin(x)}{|x|^4} \geq \frac{2-1}{|x|^4} = \frac{1}{|x|^4}, \ \forall x \in [-1,0],$$

e quindi, per il criterio del confronto, l' integrale $\int_{-1}^{0} \frac{2+\sin(x)}{|x|^4}\,dx$, è divergente perché l'integrale $\int_{-1}^{0} \frac{1}{|x|^4}\,dx$ è divergente. ■

ESERCIZIO. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere, la convergenza dell' integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{(1-\cos(x))^{\frac{1}{3}}}{|e^x - 1 - x|^\alpha}\,dx.$$

Soluzione.
La funzione integranda è positiva in $[0,1]$. Dato che $e^x - 1 - x = 0 \iff x = 0$, la funzione integranda è continua (e dunque Riemann integrabile) in $[0,1]$ se $\alpha \leq 0$. Fissato quindi $\alpha > 0$ si ha

$$\frac{(1-\cos(x))^{\frac{1}{3}}}{|e^x-1-x|^\alpha} = \frac{\left(\frac{x^2}{2}(1+o(1))\right)^{\frac{1}{3}}}{|\frac{x^2}{2}(1+o(1))|^\alpha} = \frac{2^{-\frac{1}{3}+\alpha}}{x^{2\alpha-\frac{2}{3}}}(1+o(1)), \ x \to 0^+.$$

Per il criterio del confronto asintotico l' integrale improprio è convergente se $2\alpha - \frac{2}{3} < 1$, ovvero se $\alpha < \frac{5}{6}$ e divergente se $2\alpha - \frac{2}{3} \geq 1$, ovvero se $\alpha \geq \frac{5}{6}$.

ESERCIZIO. Discutere la convergenza dell' integrale improprio

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|^2|\log|x||}\,dx.$$

Soluzione.
La funzione integranda è positiva e definita in $\mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$. Dato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{|x|^2|\log|x||}}{\frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\frac{3}{2}}}{|x|^2|\log|x||} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{|x|}|\log|x||} = +\infty,$$

si ha

$$\exists\, \delta \in (0,1)\ :\ \frac{1}{|x|^2|\log|x||} > \frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}}},\ \forall\, x \in (-\delta,\delta).$$

Dato che l' integrale $\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}}}\, dx$ è divergente, per il teorema del confronto anche l' integrale $\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|^2|\log|x||}\, dx$, è divergente.

Si sarebbe anche potuto osservare che

$$\frac{1}{|x|^2|\log|x||} = \frac{1}{|(x-1)|}(1+o(1)),\ x \to 1,$$

e dato che l' integrale $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{|x-1|}\, dx$ è divergente, anche l' integrale $\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|^2|\log|x||}\, dx$, risulta essere divergente.

Equivalentemente, si sarebbe potuto osservare che

$$\frac{1}{|x|^2|\log|x||} = \frac{1}{|-(x+1)|}(1+o(1)),\ x \to -1,$$

e dato che l' integrale $\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{|x+1|}\, dx$ è divergente, anche l' integrale $\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|^2|\log|x||}\, dx$, risulta essere divergente. ∎

ESERCIZIO. Cosa si può concludere sulla convergenza dell' integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{(e^{\frac{1}{|x|(\log|x|)^4}}-1)^2|x|^4(\log|x|)^{16}}{|x|(\log|x|)^4(1+x^2(\log|x|)^8)}\, dx, \tag{1.1}$$

utilizzando il criterio del confronto asintotico con le funzioni $g(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$, $\alpha > 0$?

Soluzione.

La soluzione verrà discussa a ricevimento con gli studenti interessati. Per quanto riguarda la convergenza/divergenza osserviamo che la funzione integranda è positiva e ben definita in $(-\infty,-2]$. Si ha

$$\frac{(e^{\frac{1}{|x|(\log|x|)^4}}-1)^2|x|^4(\log|x|)^{16}}{|x|(\log|x|)^4(1+x^2(\log|x|)^8)} = \frac{\frac{1}{|x|^2(\log|x|)^8}(1+o(1))|x|^4(\log|x|)^{16}}{|x|(\log|x|)^4x^2(\log|x|)^8(1+o(1))} = \frac{|x|^2(\log|x|)^8(1+o(1))}{|x|^3(\log|x|)^{12}} =$$

$$\frac{1+o(1)}{|x|(\log|x|)^4}.$$

Dato che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{|x|(\log|x|)^4}\, dx$$

converge (verificare usando la definizione di integrale improprio e la sostituzione $y = \log|x|$) anche l'integrale (1.1) converge. ∎

ESERCIZI CONSIGLIATI: Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri

$$\int_{-2}^{+\infty} x^2e^{-x}\, dx, \quad \int_{-1}^{1} x^4e^{\frac{1}{\sqrt{|x|}}}\, dx, \quad \int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}}}{|x|^4}\, dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\sqrt[3]{|x|}} \arctan\left(e^{x^2}\right) \log\left(1+|x||\sin(|x|)|^2\right)}{\sqrt{|x|}\,|\arctan(x^{\frac{1}{3}})|} \right) dx.$$

Soluzione.

$$\int_{-2}^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx.$$

Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} x^{2+\alpha} e^{-x} = 0,$$

per ogni $\alpha > 0$, scegliendo per esempio $\alpha = 2$, si conclude che l' integrale converge.
In questo caso la dimostrazione del Teorema del confronto asintotico consiste essenzialmente nell' osservare che

$$\exists\, M > 1\, :\, x^2 e^{-x} < \frac{1}{x^2},\ \forall\, x \in [M, +\infty).$$

La funzione integranda è positiva e definita in $[-2, +\infty)$. Dato che l'integrale $\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ converge, per il teorema del confronto anche l'integrale $\int_{-2}^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx$ converge.

$$\int_{-1}^{1} x^4 e^{\frac{1}{\sqrt{|x|}}}\, dx.$$

La funzione integranda è positiva e non limitata in ogni intorno di $x = 0$. Dato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 e^{\frac{1}{\sqrt{|x|}}}}{\frac{1}{|x|^\alpha}} = \lim_{x\to 0} |x|^{4+\alpha} e^{\frac{1}{\sqrt{|x|}}} = +\infty,$$

per ogni $\alpha > 0$, scegliendo per esempio $\alpha = 2$, si conclude che che l' integrale diverge.
In questo caso la dimostrazione del Teorema del confronto asintotico consiste essenzialmente nell' osservare che

$$\exists\, \delta \in (0, 1)\, :\, x^4 e^{\frac{1}{\sqrt{|x|}}} > \frac{1}{x^2},\ \forall\, x \in (-\delta, \delta).$$

Dato che l'integrale $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{x^2}$ diverge, per il teorema del confronto anche l'integrale $\int_{-1}^{1} x^4 e^{\frac{1}{\sqrt{|x|}}}\, dx$ diverge.

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}}}{|x|^4}\, dx.$$

La funzione integranda è positiva e definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}}}{|x|^4} = 0,$$

la funzione integranda si può estendere per continuità in $x = 0$ ed è quindi Riemann integrabile in ogni intorno limitato di $x = 0$. In particolare l'integrale $\int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}}}{|x|^4}\, dx$, converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\sqrt[3]{|x|}} \arctan\left(e^{x^2}\right) \log\left(1 + |x||\sin(|x|)|^2\right)}{\sqrt{|x|}\, |\arctan(x^{\frac{1}{3}})|} \right) dx. \tag{1.2}$$

La funzione integranda è positiva e definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha

$$\frac{e^{-\sqrt[3]{|x|}} \arctan\left(e^{x^2}\right) \log\left(1 + |x||\sin(|x|)|^2\right)}{\sqrt{|x|}\, |\arctan(x^{\frac{1}{3}})|} \le \frac{\pi}{2} \left(e^{-\sqrt[3]{|x|}}\right) \frac{\left|\log\left(1 + |x||\sin(|x|)|^2\right)\right|}{\sqrt{|x|}\, |\arctan(x^{\frac{1}{3}})|} \le$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{4}{\pi}\left(e^{-\sqrt[3]{|x|}}\right)\frac{\left|\log\left(1+|x||\sin\left(|x|\right)|^2\right)\right|}{\sqrt{|x|}} \leq 2\left(e^{-\sqrt[3]{|x|}}\right)\frac{|\log\left(1+|x|\right)|}{\sqrt{|x|}},\ \forall\, |x|>1.$$

Dato che

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(e^{-\sqrt[3]{|x|}}\right)\frac{\log(1+|x|)}{\sqrt{|x|}}}{\frac{1}{|x|^\alpha}} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{-\sqrt[3]{|x|}}\right)(\log(|x|))(1+o(1))|x|^{\alpha-\frac{1}{2}} = 0,$$

per ogni $\alpha>0$, scegliendo per esempio $\alpha=2$, si conclude che gli integrali $\int_{-\infty}^{-M}\left(e^{-\sqrt[3]{|x|}}\right)\frac{\log(1+|x|)}{\sqrt{|x|}}\,dx$, e $\int_{M}^{+\infty}\left(e^{-\sqrt[3]{|x|}}\right)\frac{\log(1+|x|)}{\sqrt{|x|}}\,dx$, convergono. Usando il teorema del confronto convergono anche gli integrali

$$\int_{-\infty}^{-M}\left(\frac{e^{-\sqrt[3]{|x|}}\arctan\left(e^{x^2}\right)\log\left(1+|x||\sin\left(|x|\right)|^2\right)}{\sqrt{|x|}\,|\arctan(x^{\frac{1}{3}})|}\right)dx,$$

e

$$\int_{M}^{+\infty}\left(\frac{e^{-\sqrt[3]{|x|}}\arctan\left(e^{x^2}\right)\log\left(1+|x||\sin\left(|x|\right)|^2\right)}{\sqrt{|x|}\,|\arctan(x^{\frac{1}{3}})|}\right)dx.$$

In questo caso la dimostrazione del Teorema del confronto asintotico consiste essenzialmente nell' osservare che

$$\exists\, M>1\ :\ \left(e^{-\sqrt[3]{|x|}}\right)\frac{\log(1+|x|)}{\sqrt{|x|}} < \frac{1}{|x|^2},\ \forall\ |x|>M.$$

Dato che gli integrali $\int_{-\infty}^{-M}\frac{1}{|x|^2}\,dx$ e $\int_{M}^{+\infty}\frac{1}{|x|^2}\,dx$ convergono, per il teorema del confronto anche gli integrali $\int_{-\infty}^{-M}\left(e^{-\sqrt[3]{|x|}}\right)\frac{\log(1+|x|)}{\sqrt{|x|}}\,dx$, e $\int_{M}^{+\infty}\left(e^{-\sqrt[3]{|x|}}\right)\frac{\log(1+|x|)}{\sqrt{|x|}}\,dx$, convergono.

Si ha poi

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\sqrt[3]{|x|}}\arctan\left(e^{x^2}\right)\log\left(1+|x||\sin\left(|x|\right)|^2\right)}{\sqrt{|x|}\,|\arctan(x^{\frac{1}{3}})|} = \frac{\frac{\pi}{4}|x|^3(1+o(1))}{\sqrt{|x|}\,|x^{\frac{1}{3}}(1+o(1))|} = 0.$$

Se ne deduce che la funzione integranda si può estendere per continuità in $x=0$ ed è quindi Riemann integrabile in ogni intorno limitato di $x=0$.
Concludiamo quindi che l' integrale (1.2) è convergente. ■

ESERCIZIO CONSIGLIATO: Al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, discutere la convergenza dell' integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{2}\frac{e^{-x^2}}{|\log|x|\arctan(x^2-1)|^\alpha}.\,dx. \tag{1.3}$$

Soluzione.
La funzione integranda è positiva e definita in $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$. Sia

$$f(x)=\frac{e^{-x^2}}{|\log|x|\arctan(x^2-1)|^\alpha}.$$

Si ha

$$\frac{e^{-x^2}}{|\log|x|\arctan(x^2-1)|^\alpha} = \frac{e^{-1}(1+o(1))}{|(x-1)2(x-1)(1+o(1))|^\alpha} = \frac{1+o(1)}{2|(x-1)|^{2\alpha}},\ x\to 1,$$

$$\frac{e^{-x^2}}{|\log|x|\arctan(x^2-1)|^\alpha} = \frac{e^{-1}(1+o(1))}{|-(x+1)2(x+1)(1+o(1))|^\alpha} = \frac{1+o(1)}{2|(x+1)|^{2\alpha}},\ x\to -1,$$

$$\frac{e^{-x^2}}{|\log|x|\arctan(x^2-1)|^\alpha} = \frac{1+o(1)}{|\log|x|\frac{\pi}{4}(1+o(1))|^\alpha} = \frac{4^\alpha+o(1)}{\pi^\alpha|\log|x||^\alpha},\ x\to 0.$$

Concludiamo che gli integrale impropri $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,dx$ e $\int\limits_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ convergono se $2\alpha < 1$, ovvero se $\alpha < \frac{1}{2}$.
Inoltre, dato che per ogni $\alpha < 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\alpha} \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{|\log|x||^{\alpha}} = 0,$$

l'integrale $\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx$ converge per ogni $\alpha < 0$.
In questo caso la dimostrazione del Teorema del confronto asintotico consiste essenzialmente nell' osservare che

$$\exists\, \delta \in (0,1)\ :\ f(x) < \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}},\ \forall\, x \in (-\delta, \delta).$$

Per il Teorema del confronto l'integrale $\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx$ converge per ogni $\alpha < 0$.
Per $\alpha \geq 0$ $f(x) \to 0$, $x \to 0$ e la funzione integranda si può estendere per continuità in $x = 0$ ed è quindi Riemann integrabile in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Si ha poi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x|^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|^2 e^{-x^2}}{|\log|x| \arctan(x^2-1)|^{\alpha}} = 0,$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Concludiamo che gli integrale impropri $\int\limits_{M}^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int\limits_{-\infty}^{-M} f(x)\,dx$ convergono per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Se ne deduce che l' integrale improprio (1.3) converge per $\alpha < \frac{1}{2}$. ■

ESERCIZIO.[FACOLTATIVO] Discutere la convergenza dell' integrale improprio

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{|\sin(x-3)|}{|x-3|^{\frac{2}{3}}}\,dx.$$

Soluzione.

La funzione integranda è definita in $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ e positiva. Si ha

$$\frac{|\sin(x-3)|}{|x-3|^{\frac{2}{3}}} = \frac{|(x-3)(1+o(1))|}{|x-3|^{\frac{2}{3}}} = |x-3|^{\frac{1}{3}}(1+o(1)),\ x \to 3.$$

se ne deduce che la funzione integranda si può estendere per continuità in $x = 3$ e quindi è una funzione Riemann integrabile in $[2, t]$, per ogni $t > 0$. D' altra parte, posto $x - 3 = y \in [0, +\infty)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e per ogni $t \geq n\pi$, si ha

$$\int_{2}^{t} \frac{|\sin(x-3)|}{|x-3|^{\frac{2}{3}}}\,dx = \int_{-1}^{t-3} \frac{|\sin(y)|}{|y|^{\frac{2}{3}}}\,dy \geq \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(y)|}{|y|^{\frac{2}{3}}}\,dy =$$

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(y)|}{y^{\frac{2}{3}}}\,dy = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(y)|}{y^{\frac{2}{3}}}\,dy \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(((k+1)\pi)^{\frac{2}{3}}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(y)|\,dy =$$

$$\frac{2}{\pi^{\frac{2}{3}}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{\frac{2}{3}}} \to +\infty,\ n \to +\infty,$$

dato che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}$ è divergente. Questo fatto si deduce immediatamente dal seguente risultato da dimostrare per esercizio (difficile!): $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}$ converge se e solo se converge $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$.
Se ne deduce che l' integrale improprio è divergente. ■