# SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI LEZIONI 34-35-36-37-38-39

Contents



**[B]** Dispense a cura del docente.

## 1. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONI $34 - 36$.

Ricordiamo le seguenti formule di integrazione:

$$\int (f(x))^{\alpha} D(f(x))\, dx = \frac{1}{\alpha+1}(f(x))^{\alpha+1} + c,\ \forall\, \alpha \neq -1,$$

$$\int \frac{D(f(x))}{f(x)}\, dx = \log|f(x)| + c,$$

$$\int e^{f(x)} D(f(x))\, dx = e^{f(x)} + c,$$

$$\int \sin(f(x)) D(f(x))\, dx = -\cos(f(x)) + c,$$

$$\int \cos(f(x)) D(f(x))\, dx = \sin(f(x)) + c,$$

$$\int \frac{1}{1+f^2(x)} D(f(x))\, dx = \arctan(f(x)) + c.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} D(f(x))\, dx = \arcsin(f(x)) + c.$$

**ESERCIZI:** Utilizzando la tecnica di integrazione per sostituzione, calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{e^{x^2}2x}{1+e^{x^2}}\, dx, \quad \int \frac{1}{x\log(x)}\, dx, \quad \int \tan(x)\, dx, \quad \int \tan\left(\frac{x+1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\, dx,$$

$$\int \sin(4e^x+1)e^x\, dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx, \quad \int \sin^3(x)\, dx.$$

**Soluzione.**

$$\int \frac{e^{x^2}2x}{1+e^{x^2}}\, dx.$$

Operando la sostituzione $e^{x^2} = t$, si ha $D(e^{x^2})dx = dt$, ovvero $e^{x^2}(2x)dx = dt$ e in particolare

$$\int \frac{e^{x^2}2x}{1+e^{x^2}}\, dx = \int \frac{1}{1+t}\, dt.$$

Operando ora la sostituzione $1+t=s$, si ha $D(1+t)dt = ds$, ovvero $dt = ds$ e in particolare

$$\int \frac{1}{1+t}\,dt = \int \frac{1}{s}\,ds = \log|s| + c = \log|1+t| + c = \log|1+e^{x^2}| + c = \log(1+e^{x^2}) + c.$$

Si sarebbe potuto scrivere, in modo equivalente,

$$\int \frac{e^{x^2}2x}{1+e^{x^2}}\,dx = \int \frac{D(e^{x^2})}{1+e^{x^2}}\,dx = \int \frac{D(1+e^{x^2})}{1+e^{x^2}}\,dx = \log|1+e^{x^2}| + c.$$

$$\int \frac{1}{x\log(x)}\,dx.$$

Operando la sostituzione $\log x = t$, si ha $D(\log x)dx = dt$, ovvero $\frac{1}{x}dx = dt$ e in particolare

$$\int \frac{1}{x\log(x)}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + c = \log(|\log x|) + c.$$

Si sarebbe potuto scrivere, in modo equivalente,

$$\int \frac{1}{x\log(x)}\,dx = \int \frac{D(\log x)}{\log(x)}\,dx = \log(|\log x|) + c.$$

$$\int \tan(x)\,dx.$$

Si ha

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{D(-\cos(x))}{\cos(x)}\,dx = -\log(|\cos(x)|) + c.$$

$$\int \tan\left(\frac{x+1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\,dx.$$

Osserviamo che

$$\int \tan\left(\frac{x+1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\,dx = \int \tan\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\,dx.$$

Operando la sostituzione $\frac{1}{x} = t$, si ha $D\left(\frac{1}{x}\right)dx = dt$, ovvero $-\frac{1}{x^2}dx = dt$, ovvero $\frac{1}{x^2}dx = -dt$ e in particolare

$$\int \tan\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\,dx = -\int \tan(1+t)\,dt = -\int \tan(1+t)\,D(1+t)dt =$$

$$\log(|\cos(1+t)|) + c = \log\left(\left|\cos\left(1+\frac{1}{x}\right)\right|\right) + c.$$

$$\int \sin(4e^x+1)e^x\,dx.$$

Operando la sostituzione $e^x = t$, si ha $D(e^x)dx = dt$, ovvero $e^x dx = dt$ e in particolare

$$\int \sin(4e^x+1)e^x\,dx = \int \sin(4t+1)\,dt = \frac{1}{4}\int \sin(4t+1)D(4t+1)\,dt =$$

$$-\frac{1}{4}\cos(4t+1) + c = -\frac{1}{4}\cos(4e^x+1) + c.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx.$$

Operando la sostituzione $\sqrt{x} = t$, si ha $D(\sqrt{x})dx = dt$, ovvero $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$, ovvero $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dt$ e in particolare

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \sqrt{1+t}\,2\,dt = 2\int (1+t)^{\frac{1}{2}}\,D(1+t)dt = \frac{4}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} + c.$$

$$\int \sin^3(x)\,dx.$$

Osserviamo che

$$\int \sin^3(x)\,dx = \int \sin^2(x)(\sin(x))\,dx = \int (1-\cos^2(x))(\sin(x))\,dx = \int (1-\cos^2(x))(\sin(x))\,dx =$$

$$\int (1-\cos^2(x))D(-\cos(x))\,dx = -\int (1-\cos^2(x))D(\cos(x))\,dx =$$

$$-\int (1-t^2)\,dt = -t + \frac{1}{3}t^3 + c = -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x) + c.$$

■

**ESERCIZIO.** Fissato $n \in \mathbb{N}$, utilizzando la tecnica di integrazione per sostituzione, calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int (\sin(x))^{2n+1}\,dx, \qquad \int (\cos(x))^{2n+1}\,dx.$$

**Soluzione.**

$$\int (\sin(x))^{2n+1}\,dx.$$

Osserviamo che

$$\int (\sin(x))^{2n+1}\,dx = \int \sin^{2n}(x)(\sin(x))\,dx = \int (1-\cos^2(x))^n(\sin(x))\,dx = \int (1-\cos^2(x))^n D(-\cos(x))\,dx =$$

$$-\int (1-t^2)^n\,dt = -\int \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t^2)^k\,dt = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}\int t^{2k}\,dt =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k+1}t^{2k+1} + c = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k+1}(\cos(x))^{2k+1} + c.$$

$$\int (\cos(x))^{2n+1}\,dx.$$

Osserviamo che

$$\int (\cos(x))^{2n+1}\,dx = \int \cos^{2n}(x)(\cos(x))\,dx = \int (1-\sin^2(x))^n(\cos(x))\,dx = \int (1-\sin^2(x))^n D(\sin(x))\,dx =$$

$$\int (1-t^2)^n\,dt = \int \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t^2)^k\,dt = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\int t^{2k}\,dt =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{1}{2k+1}t^{2k+1} + c = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{1}{2k+1}(\sin(x))^{2k+1} + c.$$

$\blacksquare$

**ESERCIZI:** Utilizzando la tecnica di integrazione per parti, calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int x^2 e^x \, dx, \quad \int \log(x) \, dx, \quad \int \arctan(x) \, dx, \quad \int x^2 \sin x \, dx, \quad \int x(\log x)^2 \, dx.$$

**Soluzione.**

$$\int x^2 e^x \, dx.$$

Si ha

$$\int x^2 e^x \, dx = \int x^2 D(e^x) \, dx = x^2 e^x - \int D(x^2) e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx =$$
$$x^2 e^x - 2 \int x D(e^x) \, dx = x^2 e^x - 2 \left( x e^x - \int D(x) e^x \, dx \right) =$$
$$x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c.$$

$$\int \log(x) \, dx.$$

Si ha

$$\int \log(x) \, dx = \int \log(x) D(x) \, dx = x \log(x) - \int D(\log(x)) \, x \, dx = x \log(x) - \int 1 \, dx = x \log(x) - x + c.$$

$$\int \arctan(x) \, dx.$$

Si ha

$$\int \arctan(x) \, dx = \int \arctan(x) D(x) \, dx = x \arctan(x) - \int D(\arctan(x)) \, x \, dx = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx =$$
$$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{D(1+x^2)}{1+x^2} \, dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c.$$

$$\int x^2 \sin x \, dx.$$

Si ha

$$\int x^2 \sin x \, dx = \int x^2 D(-\cos x) \, dx = -x^2 \cos x + \int D(x^2) \cos x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx =$$
$$-x^2 \cos x + 2 \int x D(\sin x) \, dx = -x^2 \cos x + 2 \left( x \sin x - \int D(x) \sin x \, dx \right) =$$
$$-x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c.$$

$$\int x(\log x)^2\,dx.$$

Si ha

$$\int x(\log x)^2\,dx = \int D\left(\frac{x^2}{2}\right)(\log x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int \frac{x^2}{2}D((\log x)^2)\,dx =$$

$$\frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{1}{2}\int x^2 2(\log x)\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int x\log x\,dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int D\left(\frac{x^2}{2}\right)\log x\,dx =$$

$$\frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \int \frac{x^2}{2}D(\log x)\,dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx =$$

$$\frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + c.$$

Si suggerisce di calcolare per esercizio l' integrale $\int x(\log x)^2\,dx$ operando la sostituzione $\log x = t$ e poi integrando per parti. ■

**ESERCIZI:** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \log\left(\frac{x+b}{a}\right)dx, \quad \int \arctan\left(\frac{x+b}{a}\right)dx.$$

**Soluzione.**
Dato che

$$\int \log(t)\,dt = t\log t - t + c,$$

per ogni $a \neq 0$ si ha

$$\int \log\left(\frac{x+b}{a}\right)dx = a\int \log\left(\frac{x+b}{a}\right)D\left(\frac{x+b}{a}\right)dx = (x+b)\log\left(\frac{x+b}{a}\right) - (x+b) + c.$$

Dato che

$$\int \arctan(t)\,dt = t\arctan t - \frac{1}{2}\log(1+t^2) + c,$$

per ogni $a \neq 0$ si ha

$$\int \arctan\left(\frac{x+b}{a}\right)dx = a\int \arctan\left(\frac{x+b}{a}\right)D\left(\frac{x+b}{a}\right)dx =$$

$$(x+b)\arctan\left(\frac{x+b}{a}\right) - \frac{a}{2}\log\left(1+\left(\frac{x+b}{a}\right)^2\right) + c.$$

■

**ESERCIZI:** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{2+7x^6}}\,dx, \quad \int \frac{x}{(1+4x^2)^2}\,dx, \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{2-2x^6}}\,dx, \quad \int \sqrt[5]{a+b\,x^3}\,x^2\,dx.$$

**Soluzione.**

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{2+7x^6}}\,dx.$$

Operando la sostituzione $x^6 = t$ si ha $6x^5\,dx = dt$, ovvero $x^5\,dx = \frac{1}{6}\,dt$ e in particolare

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{2+7x^6}}\,dx = \int \frac{1}{6\sqrt{2+7t}}\,dt = \frac{1}{6}\int \frac{1}{7}\frac{D(2+7t)}{\sqrt{2+7t}}\,dt =$$
$$\frac{1}{42}\frac{1}{(-\frac{1}{2}+1)}(2+7t)^{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{21}\sqrt{2+7x^6} + c.$$

$$\int \frac{x}{(1+4x^2)^2}\,dx.$$

Operando la sostituzione $x^2 = t$ si ha $2x\,dx = dt$, ovvero $x^2\,dx = \frac{1}{2}\,dt$ e in particolare

$$\int \frac{x}{(1+4x^2)^2}\,dx = \int \frac{1}{2(1+4t)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{4}\frac{D(1+4t)}{(1+4t)^2}\,dt =$$
$$\frac{1}{8}\frac{1}{(-2+1)}(1+4t)^{-2+1} + c = -\frac{1}{8(1+4x^2)} + c.$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-2x^6}}\,dx,$$

Operando la sostituzione $x^3 = t$ si ha $3x^2\,dx = dt$, ovvero $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,dt$ e in particolare

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-2x^6}}\,dx = \int \frac{1}{3\sqrt{2-2t^2}}\,dt = \frac{1}{3\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$
$$\frac{1}{3\sqrt{2}}\arcsin(t) + c = \frac{1}{3\sqrt{2}}\arcsin(x^3) + c.$$

$$\int \sqrt[5]{a+b\,x^3}\,x^2\,dx.$$

Operando la sostituzione $x^3 = t$ si ha $3x^2\,dx = dt$, ovvero $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,dt$ e in particolare, per ogni $b \neq 0$, si ha

$$\int \sqrt[5]{a+b\,x^3}\,x^2\,dx = \int \frac{1}{3}\sqrt[5]{a+b\,t}\,dt = \frac{1}{3b}\int \sqrt[5]{a+b\,t}\,D(a+bt)dt =$$
$$\frac{5}{18b}(a+b\,t)^{\frac{6}{5}} + c = \frac{5}{18b}(a+b\,x^3)^{\frac{6}{5}} + c.$$

■

**ESERCIZI:** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \left(\sqrt{\sqrt{2}+x}\right)\,e^{\sqrt{\sqrt{2}+x}}\,dx, \qquad \int \frac{\log(x)}{x}\frac{\log^2(x)-4}{2+\log(x)}\,dx\,,$$
$$\int \left(\arctan\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)\right)\frac{1}{x^2}\,dx, \qquad \int \frac{\arctan^3(e^x+4)+\arctan(e^x+4)}{1+(e^x+4)^2}\,e^x\,dx.$$

**Soluzione.**

$$\int \left(\sqrt{\sqrt{2}+x}\right)\,e^{\sqrt{\sqrt{2}+x}}\,dx.$$

Operando la sostituzione $\sqrt{2}+x=t$ si ha
$$\int \left(\sqrt{\sqrt{2}+x}\right)\, e^{\sqrt{\sqrt{2}+x}}\, dx = \int \sqrt{t}\, e^{\sqrt{t}}\, dt.$$
Operando la sostituzione $t=y^2$, $y>0$ si ha $dt = 2y\, dy$, $\sqrt{t}=y$ e in particolare
$$\int \sqrt{t}\, e^{\sqrt{t}}\, dt = \int y\, e^y 2y\, dy = 2\int y^2 e^y.$$
Dato che (vedere sopra)
$$\int y^2 e^y = y^2 e^y - 2ye^y + 2e^y + c,$$
si ha
$$\int \left(\sqrt{\sqrt{2}+x}\right)\, e^{\sqrt{\sqrt{2}+x}}\, dx = 2\int y^2 e^y = 2y^2 e^y - 4ye^y + 4e^y + c =$$
$$2te^{\sqrt{t}} - 4\sqrt{t}\, e^{\sqrt{t}} + 4e^{\sqrt{t}} + c = 2(\sqrt{2}+x)e^{\sqrt{\sqrt{2}+x}} - 4\left(\sqrt{\sqrt{2}+x}\right) e^{\sqrt{\sqrt{2}+x}} + 4e^{\sqrt{\sqrt{2}+x}} + c.$$

$$\int \frac{\log(x)}{x}\frac{\log^2(x)-4}{2+\log(x)}\, dx.$$
Operando la sostituzione $\log x = t$ si ha
$$\int \frac{\log(x)}{x}\frac{\log^2(x)-4}{2+\log(x)}\, dx = \int t\frac{t^2-4}{2+t}\, dt = \int t(t-2)\, dt = \frac{t^3}{3} - t^2 + c = \frac{(\log x)^3}{3} - (\log x)^2 + c.$$

$$\int \left(\arctan\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)\right)\frac{1}{x^2}\, dx.$$
Operiamo la sostituzione $2-\frac{1}{x}=t$, e successivamente $\sqrt{t}=y$ osservando che se $\sqrt{t}=y$ allora $\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = dy$ ovvero $dt = 2ydy$.
$$\int \left(\arctan\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)\right)\frac{1}{x^2}\, dx = \int \left(\arctan\left(\sqrt{t}\right)\right)\, dt = \int (\arctan(y))\, 2y\, dy =$$
$$\int (\arctan(y))\, D(y^2)\, dy = y^2\arctan(y) - \int \frac{y^2}{1+y^2}\, dy = y^2\arctan(y) - \int \frac{1+y^2-1}{1+y^2}\, dy =$$
$$y^2\arctan(y) - y + \int \frac{1}{1+y^2}\, dy = y^2\arctan(y) - y + \arctan(y) + c =$$
$$t\arctan(\sqrt{t}) - \sqrt{t} + \arctan(\sqrt{t}) + c = \left(3-\frac{1}{x}\right)\arctan\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right) - \sqrt{2-\frac{1}{x}} + c.$$

$$\int \frac{\arctan^3(e^x+4)+\arctan(e^x+4)}{1+(e^x+4)^2}\, e^x\, dx.$$
Operando la sostituzione $e^x+4=t$ e successivamente $\arctan(t)=y$, si ha
$$\int \frac{\arctan^3(e^x+4)+\arctan(e^x+4)}{1+(e^x+4)^2}\, e^x\, dx = \int \frac{\arctan^3(t)+\arctan(t)}{1+(t)^2}\, dt =$$
$$\int (y^3+y)\, dy = \frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} + c = \frac{\arctan^4(e^x+4)}{4} + \frac{\arctan^2(e^x+4)}{2} + c.$$

**ESERCIZIO.** Fissato $n \in \mathbb{N}$, utilizzando la tecnica di integrazione per parti, determinare una formula ricorsiva per i seguenti integrali indefiniti:

$$\int (\sin(x))^{2n}\, dx, \quad \int (\cos(x))^{2n}\, dx.$$

**Soluzione.** La soluzione sarà discussa a ricevimento con gli studenti interessati.

## 2. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONE 37.

**ESERCIZI:** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx, \quad \int \frac{x}{x^2 - a^2}\, dx,$$
$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx, \quad \int \frac{x}{x^2 + a^2}\, dx.$$

**Soluzione.**
Si ha

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a}\frac{1}{x+a},$$

e quindi

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{2a}\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a}\frac{1}{x+a}\right) dx = \frac{1}{2a}\log(|x-a|) - \frac{1}{2a}\log(|x+a|) + c.$$

Si ha

$$\int \frac{x}{x^2 \pm a^2}\, dx = \int \frac{1}{2}\frac{D(x^2 \pm a^2)}{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{2}\log(|x^2 \pm a^2|) + c.$$

Si ha

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\frac{x^2}{a^2} + 1}\, dx = \frac{1}{a}\int \frac{D(\frac{x}{a})}{\frac{x^2}{a^2} + 1}\, dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

■

**ESERCIZIO CONSIGLIATO:** Calcolare l' integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\, dx, \qquad a \neq 0,$$

utilizzando la sostituzione $x = \frac{t-b}{2a}$ avendo cura di ritrovare le formule determinate a lezione corrispondenti ai casi $\Delta \gtreqless 0$, dove $\Delta = b^2 - 4ac$.

**Soluzione.**
Operando la sostituzione $x = \frac{t-b}{2a}$ si ha $dx = \frac{1}{2a}\, dt$ e

$$ax^2 + bx + c = \frac{a}{4a^2}(t-b)^2 + b\frac{t-b}{2a} + c = \frac{t^2}{4a} - \frac{tb}{2a} + \frac{b^2}{4a} + \frac{tb}{2a} - \frac{b^2}{2a} + c =$$
$$\frac{t^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c = \frac{1}{4a}\left(t^2 - \Delta\right).$$

Se $\Delta > 0$, si ha $x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ e quindi

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\, dx = \frac{4a}{2a}\int \frac{1}{t^2 - \Delta}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\log|t - \sqrt{\Delta}| - \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\log|t + \sqrt{\Delta}| + c =$$
$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\log|(2ax + b) - \sqrt{\Delta}| - \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\log|(2ax + b) + \sqrt{\Delta}| + c =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\log|2ax-(-b+\sqrt{\Delta})|-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\log|2ax-(-b-\sqrt{\Delta})|+c=$$
$$\frac{a}{x_+-x_-}\log|x-x_+|-\frac{a}{x_+-x_-}\log|x-x_-|+c.$$

Se $\Delta=0$, si ha $x_0=x_\pm=\frac{-b}{2a}$ e quindi

$$\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx=\frac{4a}{2a}\int\frac{1}{t^2-\Delta}\,dt=2\int\frac{1}{t^2}\,dt=-2\frac{1}{t}+c=-2\frac{1}{2ax+b}+c=-\frac{1}{a}\frac{1}{x-x_0}+c.$$

Se $\Delta<0$, si ha $x_\pm=\frac{-b\pm\imath\sqrt{|\Delta|}}{2a}=x_1\pm\imath y_1$ e quindi

$$\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx=\frac{4a}{2a}\int\frac{1}{t^2-\Delta}\,dt=2\int\frac{1}{t^2+|\Delta|}\,dt=\frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{|\Delta|}}\right)+c=$$
$$\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)+c=$$
$$\frac{1}{a\,y_1}\arctan\left(\frac{2ax+b}{2ay_1}\right)+c=\frac{1}{a\,y_1}\arctan\left(\frac{x-x_1}{y_1}\right)+c.$$

**ESERCIZI:** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int\frac{5x-\sqrt{3}}{9x^2-6\sqrt{2}x+4}\,dx,\qquad\int\frac{x-4}{2x^2+5x-3}\,dx.$$

**Soluzione.**

$$\int\frac{5x-\sqrt{3}}{9x^2-6\sqrt{2}x+4}\,dx.$$

Dato che in questo caso $a=9$, $b=-6\sqrt{2}$, $c=4$, si ha $\Delta=b^2-4ac=72-144=-72<0$. Si ha

$$\int\frac{5x}{9x^2-6\sqrt{2}x+4}\,dx=\frac{5}{18}\int\frac{D(9x^2)-6\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{9x^2-6\sqrt{2}x+4}\,dx=$$
$$\frac{5}{18}\int\frac{D(9x^2-6\sqrt{2}x+4)+6\sqrt{2}}{9x^2-6\sqrt{2}x+4}\,dx=$$
$$\frac{5}{18}\log(9x^2-6\sqrt{2}x+4)+\frac{5\sqrt{2}}{3}\int\frac{1}{9x^2-6\sqrt{2}x+4}\,dx.$$

Calcoliamo ora

$$\int\frac{1}{9x^2-6\sqrt{2}x+4}\,dx.$$

Dato che $\Delta<0$, il Teorema fondamentale dell' Algebra implica che

$$9x^2-6\sqrt{2}x+4=9[(x-(x_1+\imath y_1))(x-(x_1-\imath y_1))]=9[(x-x_1)^2+y_1^2].$$

Si possono allora ricavare $x_1,\ y_1$ scrivendo

$$9x^2-6\sqrt{2}x+4=9x^2-18xx_1+9x_1^2+9y_1^2,$$

per ottenere

$$x_1=\frac{6\sqrt{2}}{18}=\frac{\sqrt{2}}{3},\qquad y_1^2=\frac{4-9x_1^2}{9}=\frac{4-9\frac{2}{9}}{9}=\frac{2}{9}.$$

Ricordiamo che la forma

$$9x^2-6\sqrt{2}x+4=9[(x-x_1)^2+y_1^2],$$

può essere ottenuta direttamente a partire dalle soluzioni $x_{\pm} = \frac{-b \pm \imath\sqrt{|\Delta|}}{2a} = x_1 \pm \imath y_1$.
Si ha ora

$$\int \frac{1}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4}\,dx = \int \frac{1}{9[(x - \frac{\sqrt{2}}{3})^2 + \frac{2}{9}]}\,dx = \frac{1}{9}\frac{9}{2}\int \frac{1}{[\frac{9}{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{3})^2 + 1]}\,dx =$$

$$\frac{1}{9}\sqrt{\frac{9}{2}}\int \frac{D(\sqrt{\frac{9}{2}}(x - \frac{\sqrt{2}}{3}))}{[[\sqrt{\frac{9}{2}}(x - \frac{\sqrt{2}}{3})]^2 + 1]}\,dx = \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) + c.$$

Riassumendo si ha

$$\int \frac{5x - \sqrt{3}}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4}\,dx = \frac{5}{18}\log(9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4) + \left(\frac{5\sqrt{2}}{3} - \sqrt{3}\right)\frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) + c.$$

Si suggerisce di calcolare l' integrale

$$\int \frac{1}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4}\,dx,$$

ottenendo la forma

$$9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4 = 9[(x - x_1)^2 + y_1^2],$$

direttamente a partire dalle soluzioni $x_{\pm} = \frac{-b \pm \imath\sqrt{|\Delta|}}{2a} = x_1 \pm \imath y_1$.
Si suggerisce inoltre di effettuare per esercizio il calcolo dell' integrale

$$\int \frac{1}{9x^2 - 6\sqrt{2}x + 4}\,dx,$$

operando la sostituzione $x = \frac{t-b}{2a} = \frac{t+6\sqrt{2}}{18}$.

$$\int \frac{x - 4}{2x^2 + 5x - 3}\,dx.$$

Dato che in questo caso $a = 2, b = 5, c = -3$, si ha $\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49 > 0$ e

$$x_{\pm} = \frac{-5 \pm 7}{4},\ x_+ = \frac{1}{2},\ x_- = -3.$$

Si può quindi scrivere

$$\frac{x - 4}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{A_1}{x - \frac{1}{2}} + \frac{A_2}{x + 3}.$$

Calcoliamo $A_{1,2}$. Si ha

$$\frac{A_1}{x - \frac{1}{2}} + \frac{A_2}{x + 3} = \frac{A_1(x + 3) + A_2(x - \frac{1}{2})}{(x - \frac{1}{2})(x + 3)} = 2\frac{A_1x + 3A_1 + A_2x - \frac{A_2}{2}}{2x^2 + 5x - 3}.$$

In particolare deve aversi

$$\frac{x - 4}{2x^2 + 5x - 3} = 2\frac{A_1x + 3A_1 + A_2x - \frac{A_2}{2}}{2x^2 + 5x - 3},$$

ovvero

$$x - 4 = (2A_1 + 2A_2)x + (6A_1 - A_2).$$

Da questa identità ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} 2A_1 + 2A_2 = 1 \\ 6A_1 - A_2 = -4 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $A_1 = -\frac{1}{2}$ $A_2 = 1$. Sostituendo si ha

$$\int \frac{x - 4}{2x^2 + 5x - 3}\,dx = \int \left(-\frac{1}{2(x - \frac{1}{2})} + \frac{1}{x + 3}\right)dx =$$

$$-\frac{1}{2}\log\left|x-\frac{1}{2}\right|+\log|x+3|+c.$$

Si suggerisce di calcolare per esercizio l' integrale dato effettuando prima il calcolo di

$$\int \frac{x}{2x^2+5x-3}\,dx,$$

che si risolve come sopra costruendo a numeratore la derivata del denominatore, e successivamente calcolando con la scomposizione in fratti semplici

$$\int \frac{1}{2x^2+5x-3}\,dx.$$

Si suggerisce inoltre di effettuare per esercizio il calcolo dell' integrale

$$\int \frac{1}{2x^2+5x-3}\,dx.$$

operando la sostituzione $x=\frac{t-b}{2a}=\frac{t-5}{4}$. ■

**ESERCIZI:** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{x^5+2x^4-9x^3-x^2+11x-7}{x^2+2x-8}\,dx, \qquad \int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx.$$

**Soluzione.**

$$\int \frac{x^5+2x^4-9x^3-x^2+11x-7}{x^2+2x-8}\,dx.$$

Dato che il grado del numeratore è maggiore o uguale al grado del denominatore, Operiamo la divisione con il metodo di Ruffini. Si ha

$$\frac{x^5+2x^4-9x^3-x^2+11x-7}{x^2+2x-8}=1-x+x^3+\frac{1+x}{x^2+2x-8}.$$

Per il calcolo di

$$\int \frac{1+x}{x^2+2x-8}\,dx,$$

osserviamo che $\Delta=4+32=36>0$ e $x_{\pm}=-1\pm 3$, $x_+=2$, $x_-=-4$ e poniamo

$$\frac{1+x}{x^2+2x-8}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+4}.$$

Dato che

$$\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+4}=\frac{A_1x+4A_1+A_2x-2A_2}{x^2+2x-8}=\frac{(A_1+A_2)x+(4A_1-2A_2)}{x^2+2x-8},$$

ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} A_1+A_2=1 \\ 4A_1-2A_2=1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $A_1=\frac{1}{2}$ $A_2=\frac{1}{2}$. Sostituendo si ha

$$\int \frac{1+x}{x^2+2x-8}\,dx=\int\left(\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x+4)}\right)dx=$$
$$\frac{1}{2}\log|\,x-2|+\frac{1}{2}\log|x+4|+c.$$

Riassumendo

$$\int \frac{x^5+2x^4-9x^3-x^2+11x-7}{x^2+2x-8}\,dx=\int(1-x+x^3)\,dx+\int\frac{1+x}{x^2+2x-8}\,dx=$$
$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}\log|\,x-2|+\frac{1}{2}\log|x+4|+c.$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx.$$

Dato che il grado del numeratore è maggiore o uguale al grado del denominatore, operiamo la divisione con il metodo di Ruffini. In questo caso si può operare la divisione rapidamente osservando che

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x + x^3 - x}{1+x^2} = \frac{x + x^3}{1+x^2} + \frac{-x}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}.$$

Se ne deduce che

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx = \int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c.$$

**ESERCIZIO:** Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)(x+2)}\, dx.$$

**Soluzione.**
Osserviamo che il determinante del polinomio di secondo grado vale $\Delta = 24 - 32 = -8 < 0$ con $x_\pm = x_1 \pm \imath y_1$, $x_1 = \sqrt{6}$, $y_1 = \sqrt{2}$. Scriviamo quindi

$$\frac{1}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)(x+2)} = \frac{Ax + B}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)} + \frac{C}{(x+2)},$$

Dato che

$$\frac{Ax + B}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)} + \frac{C}{(x+2)} = \frac{Ax(x+2) + B(x+2) + C(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)(x+2)} =$$

$$\frac{(A+C)x^2 + (2A + B - 2\sqrt{6}C)x + (2B + 8C)}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)(x+2)}$$

ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B - 2\sqrt{6}C = 0 \\ 2B + 8C = 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $A = -\frac{1}{4(3+\sqrt{6})}$, $B = \frac{1}{2} - \frac{1}{(3+\sqrt{6})}$, $C = \frac{1}{4(3+\sqrt{6})}$. Risolviamo gli integrali relativi ai fratti semplici separatamente.

$$\int \frac{x}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6}}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{D(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{2\sqrt{6}}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)}\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\log(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8) + \sqrt{6}\int \frac{1}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)}\, dx.$$

Dato che $x_1 = \sqrt{6}$, $y_1 = \sqrt{2}$, si ha poi

$$\frac{1}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)} = \frac{1}{(x - x_1)^2 + y_1^2} = \frac{1}{(x - \sqrt{6})^2 + 2}$$

e in particolare

$$\int \frac{1}{(x^2 - 2\sqrt{6}x + 8)}\, dx = \int \frac{1}{(x - \sqrt{6})^2 + 2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\frac{x - \sqrt{6}}{\sqrt{2}})^2 + 1}\, dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{D(\frac{x - \sqrt{6}}{\sqrt{2}})}{(\frac{x - \sqrt{6}}{\sqrt{2}})^2 + 1}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x - \sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right) + c.$$

Riassumendo, si ha

$$\int \frac{1}{(x^2-2\sqrt{6}x+8)(x+2)}\,dx = A\int \frac{x}{(x^2-2\sqrt{6}x+8)}\,dx + B\int \frac{1}{(x^2-2\sqrt{6}x+8)}\,dx + C\int \frac{1}{(x+2)}\,dx =$$

$$A\frac{1}{2}\log(x^2-2\sqrt{6}x+8) + (A\sqrt{6}+B)\int \frac{1}{(x^2-2\sqrt{6}x+8)}\,dx + C\int \frac{1}{(x+2)}\,dx =$$

$$A\frac{1}{2}\log(x^2-2\sqrt{6}x+8) + (A\sqrt{6}+B)\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right) + C\log|x+2| + c =$$

$$-\frac{1}{4(3+\sqrt{6})}\frac{1}{2}\log(x^2-2\sqrt{6}x+8) + \left(-\frac{\sqrt{6}}{4(3+\sqrt{6})}+\frac{1}{2}-\frac{1}{(3+\sqrt{6})}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4(3+\sqrt{6})}\log|x+2| + c =$$

$$-\frac{1}{8(3+\sqrt{6})}\log(x^2-2\sqrt{6}x+8) + \frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4(3+\sqrt{6})}\log|x+2| + c.$$

**ESERCIZI:** Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{4x+1}{(9x^2-6\sqrt{2}x+4)^2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{(3x^2+4)^4}\,dx$$

**Soluzione.**

$$\int \frac{4x+1}{(9x^2-6\sqrt{2}x+4)^2}\,dx.$$

Si ha $a=9$, $b=-6\sqrt{2}$, $c=4$, e $\Delta=b^2-4ac=72-144=-72<0$. Il polinomio a denominatore ha radici complesse e coniugate di molteplicità due, $x_\pm=\frac{-b\pm\imath\sqrt{|\Delta|}}{2a}=x_1\pm\imath y_1$, con $x_1=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $y_1=\frac{\sqrt{2}}{3}$.
Si ha

$$\int \frac{4x}{(9x^2-6\sqrt{2}x+4)^2}\,dx = \frac{4}{18}\int \frac{18x-6\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{(9x^2-6\sqrt{2}x+4)^2}\,dx =$$

$$\frac{2}{9}\int \frac{D(9x^2-6\sqrt{2}x+4)}{(9x^2-6\sqrt{2}x+4)^2}\,dx + \frac{4\sqrt{2}}{3}\int \frac{1}{(9x^2-6\sqrt{2}x+4)^2}\,dx =$$

$$-\frac{2}{9}\frac{1}{(9x^2-6\sqrt{2}x+4)} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\int \frac{1}{(9x^2-6\sqrt{2}x+4)^2}\,dx.$$

Dato che

$$9x^2-6\sqrt{2}x+4 = 9[(x-x_1)^2+y_1^2] = 9\left[\left(x-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right],$$

si ha

$$\int \frac{1}{(9x^2-6\sqrt{2}x+4)^2}\,dx = \int \frac{1}{\left[9[(x-\frac{\sqrt{2}}{3})^2+\frac{2}{9}]\right]^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{[\frac{9}{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{3})^2+1]^2}\,dx =$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{9}}\int \frac{D(\sqrt{\frac{9}{2}}(x-\frac{\sqrt{2}}{3}))}{[[\sqrt{\frac{9}{2}}(x-\frac{\sqrt{2}}{3})]^2+1]^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{12}\int \frac{1}{[t^2+1]^2}\,dt,$$

dove si è operata la sostituzione $t=\sqrt{\frac{9}{2}}(x-\frac{\sqrt{2}}{3})$. L' integrale

$$\int \frac{1}{[t^2+1]^2}\,dt$$

è stato svolto a lezione. Si ha

$$\int \frac{1}{[t^2+1]^2}\,dt = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\arctan t + c,$$

e sostituendo,

$$\int \frac{1}{(9x^2-6\sqrt{2}x+4)^2} = \frac{\sqrt{2}}{12}\frac{\sqrt{\frac{9}{2}}(x-\frac{\sqrt{2}}{3})}{2(1+[\sqrt{\frac{9}{2}}(x-\frac{\sqrt{2}}{3}))]^2)} + \frac{\sqrt{2}}{12}\frac{1}{2}\arctan\left[\sqrt{\frac{9}{2}}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right] + c.$$

Riassumendo

$$\int \frac{4x+1}{(9x^2-6\sqrt{2}x+4)^2} = -\frac{2}{9}\frac{1}{(9x^2-6\sqrt{2}x+4)} + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}+1\right)\int \frac{1}{(9x^2-6\sqrt{2}x+4)^2}\,dx =$$

$$-\frac{2}{9}\frac{1}{(9x^2-6\sqrt{2}x+4)} + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\frac{\sqrt{\frac{9}{2}}(x-\frac{\sqrt{2}}{3})}{2(1+[\sqrt{\frac{9}{2}}(x-\frac{\sqrt{2}}{3})]^2)} + \frac{\sqrt{2}}{24}\arctan\left[\sqrt{\frac{9}{2}}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]\right) + c.$$

$$\int \frac{1}{(3x^2+4)^4}\,dx.$$

Si ha

$$\int \frac{1}{(3x^2+4)^4}\,dx = \frac{1}{4^4}\int \frac{1}{(\frac{3}{4}x^2+1)^4}\,dx = \frac{1}{4^4}\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{D(\frac{\sqrt{3}}{2}x)}{\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+1\right)^4}\,dx = \frac{2}{4^4\sqrt{3}}\int \frac{1}{(1+t^2)^4}\,dt.$$

Si ha in particolare

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^4}\,dt = \frac{t}{6}\frac{1}{(1+t^2)^3} + \frac{5}{6}\int \frac{1}{(1+t^2)^3}\,dt =$$

$$\frac{t}{6}\frac{1}{(1+t^2)^3} + \frac{5}{6}\left(\frac{t}{4}\frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt\right) =$$

$$\frac{t}{6}\frac{1}{(1+t^2)^3} + \frac{5t}{24}\frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{15}{24}\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt =$$

$$\frac{t}{6}\frac{1}{(1+t^2)^3} + \frac{5t}{24}\frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{15}{48}\frac{t}{(1+t^2)} + \frac{15}{48}\arctan t + c.$$

Sostituendo si ha

$$\int \frac{1}{(3x^2+4)^4}\,dx = \frac{2}{4^4\sqrt{3}}\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{6}\frac{1}{(1+(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2)^3} + \frac{5\frac{\sqrt{3}}{2}x}{24}\frac{1}{(1+(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2)^2} + \frac{15}{48}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{(1+(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2)} + \frac{15}{48}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right] + c =$$

$$\frac{x}{4^4 6}\frac{1}{(1+(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2)^3} + \frac{5x}{4^5 6}\frac{1}{(1+(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2)^2} + \frac{15}{4^6 3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{(1+(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2)} + \frac{15}{4^5 6\sqrt{3}}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c.$$

■

## 3. SOLUZIONI ESERCIZI LEZIONE 38 – 39.

**ESERCIZI CONSIGLIATI:** Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_1^2 x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx, \qquad \int_1^2 x^2\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx.$$

**Soluzione.**

$$\int_1^2 x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx.$$

Si ha $\Delta = (3)^2 - 4(-1)(-2) = 9 - 8 = 1$. Operiamo la sostituzione $x = \frac{t-b}{2a} = \frac{t-3}{-2}$. Si ha

$$-x^2+3x-2 = -\frac{1}{4}(t-3)^2 - \frac{3}{2}(t-3) - 2 = -\frac{1}{4}(t^2-6t+9) - \frac{3t-9}{2} - 2 =$$

$$-\frac{1}{4}t^2 - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 2 = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}.$$

Osserviamo inoltre che $dx = -\frac{1}{2}\,dt$ e che $x = 2 \Longrightarrow t = -1$ e $x = 1 \Longrightarrow t = 1$. Si ha quindi

$$\int_1^2 x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_1^{-1} \frac{t-3}{-2}\frac{1}{2}\sqrt{-t^2+1}\,dt = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}(3-t)\sqrt{-t^2+1}\,dt.$$

Osserviamo che

$$\int_{-1}^{1} t\sqrt{-t^2+1}\,dt = 0,$$

perché è l' integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico. Operiamo ora la sostituzione $t = \sin(y)$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si ha $dt = \cos(y)\,dy$, $t = 1 \Longrightarrow y = \frac{\pi}{2}$ e $t = -1 \Longrightarrow y = -\frac{\pi}{2}$ e quindi

$$\int_1^2 x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx = \frac{3}{8}\int_{-1}^{1}\sqrt{-t^2+1}\,dt = \frac{3}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-(\sin(y))^2}\cos(y)\,dy =$$

$$\frac{3}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos(y)|\cos(y)\,dy = \frac{3}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(y)\,dy = \frac{3\pi}{16},$$

dove l' ultimo passaggio si può ottenere osservando che

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2(y)+\sin^2(y))\,dy = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dy = \frac{1}{2}y\,|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{2}.$$

Altrimenti, si possono usare le formule di bisezione

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin(2y))\,dy = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dy = \frac{\pi}{2}.$$

Si suggerisce di effettuare il calcolo di $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(y)\,dy$ utilizzando una formula ricorsiva.

$$\int_1^2 x^2\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx.$$

Ragionando come sopra si ottiene

$$\int_1^2 x^2\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_1^{-1}\left(\frac{t-3}{-2}\right)^2\frac{1}{2}\sqrt{-t^2+1}\,dt = \frac{1}{16}\int_{-1}^{1}(t-3)^2\sqrt{-t^2+1}\,dt =$$

$$\frac{1}{16}\int_{-1}^{1}(t^2+9)\sqrt{-t^2+1}\,dt.$$

In particolare, dal calcolo di cui sopra si ha

$$\frac{1}{16}\int_{-1}^{1}9\sqrt{-t^2+1}\,dt = \frac{3}{2}\frac{3}{8}\int_{-1}^{1}\sqrt{-t^2+1}\,dt = \frac{3}{2}\frac{3\pi}{16} = \frac{9\pi}{32}.$$

Osserviamo poi che, ragionando come sopra

$$\int_{-1}^{1}t^2\sqrt{-t^2+1}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(y)\cos^2(y)\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2(y)-\sin^4(y))\,dy = \frac{\pi}{2} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(y))\,dy.$$

D' altra parte, si ha

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(y)\,dy = -\frac{1}{4}\cos(y)\sin^3(y)\,|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(y)\,dy =$$

$$-\frac{1}{4}(\cos(\frac{\pi}{2})\sin^3(\frac{\pi}{2}) - \cos(-\frac{\pi}{2})\sin^3(-\frac{\pi}{2})) + \frac{3}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.$$

Riassumendo, si ha

$$\int_1^2 x^2\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx = \frac{1}{16}\int_{-1}^{1}(t^2+9)\sqrt{-t^2+1}\,dt = \frac{1}{16}\int_{-1}^{1}t^2\sqrt{-t^2+1}\,dt + \frac{9}{16}\int_{-1}^{1}\sqrt{-t^2+1}\,dt =$$

$$\frac{1}{16}(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}) + \frac{9\pi}{32} = \frac{\pi}{16}(\frac{1}{8}+\frac{9}{2}) = \frac{\pi}{16}\frac{37}{8} = \frac{37\pi}{128}.$$

$\blacksquare$