SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI

Contents

[B] Dispense a cura del docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §9.

§9.2

ESERCIZIO. Dimostrare che $D(\log x) = \frac{1}{x}$, $D(\cos x) = -\sin x$ e $D(\sin x) = \cos x$ nei loro dominii naturali.

Soluzione.

- $D(\log x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
  Si ha,
$$D(\log x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x_0+h) - \log(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+\frac{h}{x_0})}{h} = \frac{1}{x_0}.$$

- $D(\cos x) = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
  Si ha,
$$D(\cos x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h) - \cos(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0)(\cos(h)-1) - \sin(x_0)\sin(h)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0)(\cos(h)-1)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\sin(h)}{h} = \cos(x_0)\cdot 0 - \sin(x_0)\cdot 1 = -\sin x_0.$$

- $D(\sin x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.
  Si ha,
$$D(\sin x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)(\cos(h)-1) + \sin(h)\cos(x_0)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)(\cos(h)-1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0)\sin(h)}{h} = \sin(x_0)\cdot 0 + \cos(x_0)\cdot 1 = \cos(x_0).$$

$\blacksquare$

ESERCIZIO. Dimostrare che $D(\cosh x) = \sinh x$ e $D(\sinh x) = \cosh x$ nei loro dominii naturali.

Soluzione.
Dato che $D(e^x) = e^x$, usando il teorema di derivazione della somma e della funzione composta, si ha
$$D(\cosh x) = \frac{1}{2}D(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}D(e^x) + \frac{1}{2}D(e^{-x}) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \sinh x,\ x \in \mathbb{R}$$

e

$$D(\sinh x) = \frac{1}{2}D(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}D(e^x) - \frac{1}{2}D(e^{-x}) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh x,\ x \in \mathbb{R}.$$

■

ESERCIZIO. Dimostrare che

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(Df)g - f(Dg)}{g^2}.$$

Soluzione.
Si osserva che, usando il teorema di derivazione del prodotto e della funzione composta,

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D\left(f(g)^{-1}\right) = Df \cdot (g)^{-1} + f \cdot D((g)^{-1}) = Df \cdot (g)^{-1} + f \cdot (-1)((g)^{-2})Dg = \frac{(Df)g - f(Dg)}{g^2}.$$

■

ESERCIZI: Calcolare le derivate delle seguenti funzioni nei loro dominii naturali.

$$\tanh(x), \quad \frac{1}{\log x}, \quad \frac{1}{x^2 \log x}, \quad e^{\frac{x^4}{x^2-1}}, \quad (\log x)^{\sin x}.$$

Ricordiamo che $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

Soluzione.

- $D(\tanh(x)) = 1 - \tanh^2(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)},\ x \in \mathbb{R}$.
  Si ha
  $$D(\tanh(x)) = D\left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

- $D\left(\frac{1}{\log x}\right) = -\dfrac{1}{x \log^2(x)},\ x \in (0, +\infty)$.
  Si ha
  $$D\left(\frac{1}{\log x}\right) = D\left((\log x)^{-1}\right) = (-1)(\log(x))^{-2}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x \log^2(x)}.$$

- $D\left(\frac{1}{x^2 \log x}\right) = -\dfrac{2\log x + 1}{x^3 \log^2(x)},\ x \in (0, +\infty)$.
  Si ha
  $$D\left(\frac{1}{x^2 \log x}\right) = D\left((x^2 \log x)^{-1}\right) = (-1)(x^2 \log(x))^{-2}\left(2x \log x + x^2 \frac{1}{x}\right) =$$
  $$-\frac{2x \log x + x}{x^4 \log^2(x)} = -\frac{2\log x + 1}{x^3 \log^2(x)}.$$

- $D\left(e^{\frac{x^4}{x^2-1}}\right) = \left(e^{\frac{x^4}{x^2-1}}\right) \cdot 2x^3 \cdot \dfrac{x^2 - 2}{(x^2-1)^2},\ x \notin \{-1, +1\}$.
  Si ha
  $$D\left(e^{\frac{x^4}{x^2-1}}\right) = \left(e^{\frac{x^4}{x^2-1}}\right)\frac{4x^3(x^2-1) - 2x \cdot x^4}{(x^2-1)^2} = \left(e^{\frac{x^4}{x^2-1}}\right)\frac{4x^5 - 4x^3 - 2x^5}{(x^2-1)^2} =$$
  $$\left(e^{\frac{x^4}{x^2-1}}\right)\frac{2x^5 - 4x^3}{(x^2-1)^2} = \left(e^{\frac{x^4}{x^2-1}}\right) \cdot 2x^3 \cdot \frac{x^2 - 2}{(x^2-1)^2}.$$

- $D\left((\log x)^{\sin x}\right) = \left(\cos(x)\log(\log(x)) + \frac{\sin(x)}{x\log(x)}\right),\ x > 1.$
  Si ha

$$D\left((\log x)^{\sin(x)}\right) = D\left(e^{\sin(x)\log(\log(x))}\right) = (\log x)^{\sin x}\left(\cos(x)\log(\log(x)) + \sin(x)\frac{1}{\log(x)}\frac{1}{x}\right).$$

■

ESERCIZI: Dimostrare che per $y \in (-1,1)$, si ha

$$D(\arcsin y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ D(\arccos y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Osservare che i dominii naturali delle derivate delle funzioni circolari inverse non coincidono con quelli delle funzioni stesse.

Soluzione.
Per la funzione $\arccos y$, ricordiamo che $g(y) = \arccos y$, $y \in [-1,1]$ è la inversa di $f(x) = \cos x$, $x \in [0,\pi]$. Osserviamo che, per $x \in (0,\pi)$, si ha $\sin x > 0$ e quindi in particolare $\sin x = \sqrt{1-(\cos x)^2}$. Quindi

$$Df(x) = -\sin x = -\sqrt{1-(\cos x)^2} = -\sqrt{1-y^2},\ y = \cos(x),\ x \in (0,\pi).$$

Dal Teorema di derivazione della funzione inversa si ha

$$D(g(y)) = \left.\frac{1}{Df(x)}\right|_{y=f(x)} = \left.\frac{1}{-\sin x}\right|_{y=\cos(x)} =$$

$$-\left.\frac{1}{\sqrt{1-(\cos x)^2}}\right|_{y=\cos(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ x \in (-1,1).$$

Discutere in modo analogo la funzione $\arcsin y$. ■

§9.3

ESERCIZIO. Determinare la retta tangente a

$$f(x) = \frac{e^x}{x}\log(x-5),$$

nel punto $x = 6$.

Soluzione.
Iniziamo con il calcolo di $f(6)$. Si ha

$$f(6) = \frac{e^6}{6}\log(1) = 0.$$

Per determinare la retta tangente, calcoliamo la derivata $Df(6)$. È utile in questo caso calcolare direttamente il limite del rapporto incrementale. Sia $x = 6 + y$. Per $y \to 0$, si ha

$$\frac{e^x}{x}\log(x-5) = \frac{e^{6+y}}{(6+y)}\log(1+y) = \frac{e^6}{6}\cdot e^y \cdot \left(1+\frac{y}{6}\right)^{-1}\log(1+y) =$$

$$\frac{e^6}{6}\cdot(1+y+o(y))\cdot\left(1+(-1)\frac{y}{6}+o(y)\right)\cdot(y+o(y)) = \frac{e^6}{6}\cdot y\cdot(1+o(1)).$$

Quindi

$$Df(6) = \lim_{x\to 6}\frac{f(x)-f(6)}{x-6} = \lim_{y\to 0}\frac{e^{6+y}}{y(6+y)}\log(1+y) = \lim_{y\to 0}\frac{e^6}{6}\cdot(1+o(1)) = \frac{e^6}{6}.$$

Concludiamo che la retta tangente cercata è

$$y = \frac{e^6}{6}(x-6).$$

■

ESERCIZIO. Determinare gli asintoti obliqui di

$$f(x) = (x-4)\arctan\left|\frac{x}{x-1}\right|.$$

Prima Soluzione.
Si ha

$$m_\pm = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)\arctan\left|1+\frac{1}{x-1}\right| = 1\cdot\arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Inoltre

$$q_\pm = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-\frac{\pi}{4}\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\left(1-\frac{4}{x}\right)\arctan\left|1+\frac{1}{x-1}\right|-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[x\left(\arctan\left|1+\frac{1}{x-1}\right|-\frac{\pi}{4}\right)-x\frac{4}{x}\arctan\left|1+\frac{1}{x-1}\right|\right] =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x}{x-1}\frac{\left(\arctan\left|1+\frac{1}{x-1}\right|-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{x-1}}-4\arctan\left|1+\frac{1}{x-1}\right|\right] = 1\cdot\frac{1}{2}-4\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}-\pi,$$

dove si è usato il limite ottenuto in **[B]** §9.3

$$\lim_{y\to 0}\frac{\arctan(1+y)-\frac{\pi}{4}}{y} = \frac{1}{2}. \tag{1.1}$$

Seconda Soluzione.
Come sopra, si ha

$$m_\pm = \frac{\pi}{4}.$$

Usiamo ora il limite (1.1) nella forma

$$\arctan(1+y) = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}y+o(y),\ y\to 0.$$

Osserviamo che

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x}\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),\ x\to+\infty.$$

Si ha quindi

$$q_\pm = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-\frac{\pi}{4}\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\left(1-\frac{4}{x}\right)\arctan\left|1+\frac{1}{x-1}\right|-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\left(\left(1-\frac{4}{x}\right)\arctan\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\left(\left(1-\frac{4}{x}\right)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{x}-\frac{4}{x}\frac{\pi}{4}+o\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x}-\frac{4}{x}\frac{\pi}{4}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}-\pi.$$

Concludiamo che gli asintoti obliqui per $x\to\pm\infty$ coincidono con la retta

$$y = \frac{\pi}{4}\cdot x+\left(\frac{1}{2}-\pi\right).$$

■

§9.4

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni

$$\left|\frac{x}{x-1}\right|, \quad |\log x|, \quad \left|\arctan(x^2-1)\right|.$$

Soluzione.

- $f(x) = \left|\dfrac{x}{x-1}\right|$.

  Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e

  $$\frac{x}{x-1} \geq 0, \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty),$$

  e quindi

  $$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \\ -\frac{x}{x-1}, & x \in (0,1). \end{cases}$$

  Dato che per ogni $x \in \mathrm{dom}(f) \setminus \{0\}$ $f(x)$ è rapporto di funzioni derivabili con denominatore non nullo, allora è derivabile. In particolare f è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty)$ e continua in $(-\infty, +\infty) \setminus \{1\}$.

  Per studiare la derivabilità in $x_0 = 0$, consideriamo i limiti del rapporto incrementale

  $$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^\pm} \mp \frac{x}{x(x-1)} = \pm 1,$$

  ovvero

  $$Df^+(0) = 1, \qquad Df^-(0) = -1.$$

  Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ e il punto del grafico $(0, f(0)) = (0,0)$ è un punto angoloso. Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in **[B]** Cap.5. Il Lettore potrà verificare che il punto angoloso $x_0 = 0$ è anche il punto di minimo di f.

- $f(x) = |\log x|$.

  Si ha $\mathrm{dom}(f) = (0, +\infty)$ e

  $$\log x \geq 0, \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [1, +\infty),$$

  e quindi

  $$f(x) = \begin{cases} \log x, & x \in [1, +\infty) \\ -\log x, & x \in (0,1). \end{cases}$$

  Per ogni $x \in \mathrm{dom}(f) \setminus \{1\}$ $f(x)$ è derivabile. In particolare f è derivabile in $(0,1) \cup (1, +\infty)$ e continua in $(0, +\infty)$.

  Per studiare la derivabilità in $x_0 = 1$, consideriamo i limiti del rapporto incrementale

  $$\lim_{x \to 1^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1^\pm} \pm \frac{\log x}{x-1} = \lim_{y \to 0^\pm} \pm \frac{\log(1+y)}{y} = \pm 1,$$

  ovvero

  $$Df^+(1) = 1, \qquad Df^-(1) = -1.$$

  Quindi f non è derivabile in $x_0 = 1$ e il punto del grafico $(1, f(1)) = (1,0)$ è un punto angoloso. Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in **[B]** Cap.5. Il Lettore potrà verificare che il punto angoloso $x_0 = 1$ è anche il punto di minimo di f.

- $f(x) = \left|\arctan(x^2-1)\right|$.
Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ e
$$\arctan(x^2-1) \geq 0, \quad \iff \quad x^2 - 1 \geq 0 \quad \iff x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty),$$
e quindi
$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^2-1), & x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \\ -\arctan(x^2-1), & x \in (-1,1). \end{cases}$$
Per ogni $x \in \text{dom}(f) \setminus \{-1,1\}$ $f(x)$ è derivabile perché $f = h \circ g$ è la composta tra le funzioni derivabili nei loro dominii di definizione $h(y) = \pm\arctan y$, $y \in \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
In particolare f è derivabile in $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$ e continua in $(-\infty,+\infty)$.
Dato che f è pari, è sufficiente studiare la derivabilità in $x_0 = 1$.
Per studiare la derivabilità in $x_0 = 1$, consideriamo i limiti del rapporto incrementale
$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 1^\pm} \pm\frac{\arctan(x^2-1)}{x-1} = \lim_{y\to 0^\pm} \pm\frac{\arctan(y^2+2y)}{y} =$$
$$\lim_{y\to 0^\pm} \pm\frac{2y+y^2+o(2y+y^2)}{y} = \lim_{y\to 0^\pm} \pm\frac{2y+o(y)}{y} \pm 2,$$
ovvero
$$Df^+(1) = 2, \qquad Df^-(1) = -2.$$
Quindi f non è derivabile in $x_0 = -1$ e $x_0 = 1$ e i punti del grafico $(-1, f(-1)) = (-1,0)$ e $(1, f(1)) = (1,0)$ sono punti angolosi.
Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in **[B]** Cap.5. Il Lettore potrà verificare che i punti $x_0 = -1$ e $x_0 = 1$ sono anche i punti di minimo di f.

■

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni
$$e^{\sqrt{x}}, \quad \log(1-x^{\frac{3}{5}}), \quad \sqrt{x+x^2}.$$

Soluzione.

- $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.
Si ha $\text{dom}(f) = [0,+\infty)$. Per ogni $x \in (0,+\infty)$ $f(x)$ è derivabile perché $f = h \circ g$ è la composta tra le funzioni derivabili $h(y) = e^y$, $y \in \mathbb{R}$ e $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0+\infty)$.
In particolare f è derivabile in $(0,+\infty)$ e continua in $[0,+\infty)$.
Per studiare la derivabilità in $x_0 = 0$, consideriamo il limite del rapporto incrementale
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty.$$
Quindi f non è derivabile da destra in $x_0 = 0$ e il punto del grafico $(0, f(0)) = (0,1)$ è un punto di tangenza verticale.
Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in **[B]** Cap.5. Il Lettore potrà verificare che il punto $x_0 = 0$ è anche il punto di minimo di f.

- $f(x) = \log(1-x^{\frac{3}{5}})$.
Si ha $\text{dom}(f) = (-\infty,1)$. Per ogni $x \in (-\infty,1) \setminus \{0\}$ $f(x)$ è derivabile perché $f = h \circ g$ è la composta tra le funzioni derivabili $h(y) = \log y$, $y \in (0,+\infty)$ e $g(x) = 1 - x^{\frac{3}{5}}$, $x \in (-\infty,1) \setminus \{0\}$.
In particolare f è derivabile in $(-\infty,1) \setminus \{0\}$ e continua in $(-\infty,1)$.
Per studiare la derivabilità in $x_0 = 0$, consideriamo i limiti del rapporto incrementale
$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\log(1-x^{\frac{3}{5}})}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\log(1-x^{\frac{3}{5}})}{-x^{\frac{3}{5}}} \cdot \frac{-x^{\frac{3}{5}}}{x} = -\infty.$$

Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ e il punto del grafico $(0, f(0)) = (0, 0)$ è di tangenza verticale. Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in **[B]** Cap.5. Il Lettore potrà verificare che la funzione è monotona decrescente in tutto il suo dominio di definizione.

- $f(x) = \sqrt{x + x^2}$.
  Si ha $\mathrm{dom}(f) = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$. Per ogni $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ $f(x)$ è derivabile perché $f = h \circ g$ è la composta tra le funzioni derivabili $h(y) = \sqrt{y}$, $y \in (0, +\infty)$ e $g(x) = x + x^2$, $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.
  In particolare f è derivabile in $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ e continua in $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$.
  Per studiare la derivabilità in $x_0 = -1$ e $x_0 = 0$, consideriamo i limiti dei rapporti incrementali
$$\lim_{x \to (-1)^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to (-1)^-} \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x+1} = \lim_{y \to 0^-} \frac{\sqrt{(y-1)y}}{y} = \lim_{y \to 0^-} \frac{\sqrt{|y|}\sqrt{|y-1|}}{y} = -\infty,$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}{x} = +\infty.$$
  Quindi f non è derivabile in $x_0 = -1$ e in $x_0 = 0$ e i punti del grafico $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$ e in $(0, f(0)) = (0, 0)$ sono di tangenza verticale.
  Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in **[B]** Cap.5. Il Lettore potrà verificare che i punti $x_0 = -1$ e $x_0 = 0$ sono anche i punti di minimo di f.

■

ESERCIZIO: Dire se la funzione $f(x) = \frac{1}{\log x}$ si può estendere per continuità in $x_0 = 0$. In tal caso studiare la derivabilità di f in $[0, +\infty)$.

Soluzione.
Si ha $\mathrm{dom}(f) = (0, +\infty) \setminus \{1\}$, $x_0 = 1$ è di asintoto verticale e
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\log x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-.$$
Quindi f si può estendere per continuità ad una funzione continua da destra in $x_0 = 0$, ponendo $f(0) = 0$. La funzione estesa, che per semplicità indichiamo ancora con f,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log x}, & x \in (0,1) \cup (1, +\infty) \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
è continua in $[0, +\infty) \setminus \{1\}$.
Ragionando come negli esercizi precedenti si verifica facilmente che f è derivabile in $(0, +\infty) \setminus \{1\}$. Per studiare la derivabilità in $x_0 = 0$, consideriamo il limite del rapporto incrementale
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x \log(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$
Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ e il punto del grafico $(0, f(0)) = (0, 0)$ è di tangenza verticale.
Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in **[B]** Cap.5. ■

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni
$$e^{\sqrt{|x|}}, \quad \sin(x^{\frac{2}{3}}), \quad \sqrt{|x + x^2|}.$$

Soluzione.

- $f(x) = e^{\sqrt{|x|}}$.
Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. Ragionando come negli esercizi precedenti si verifica facilmente che f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e continua in $\mathbb{R}$.
Per studiare la derivabilità in $x_0 = 0$, consideriamo il limite del rapporto incrementale
$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{e^{\sqrt{|x|}}-1}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{e^{\sqrt{|x|}}-1}{\sqrt{|x|}} \cdot \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \pm\infty.$$
Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ e il punto del grafico $(0, f(0)) = (0, 1)$ è un punto di cuspide.
Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in **[B]** Cap.5. Il Lettore potrà verificare che il punto $x_0 = 0$ è anche il punto di minimo di f.

- $f(x) = \sin(x^{\frac{2}{3}})$.
Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. Ragionando come negli esercizi precedenti si verifica facilmente che f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e continua in $\mathbb{R}$.
Per studiare la derivabilità in $x_0 = 0$, consideriamo i limiti del rapporto incrementale
$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sin(x^{\frac{2}{3}})}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sin(x^{\frac{2}{3}})}{x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \pm\infty.$$
Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ e il punto del grafico $(0, f(0)) = (0, 0)$ è un punto di cuspide.

- $f(x) = \sqrt{|x + x^2|}$.
Si ha $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. Ragionando come negli esercizi precedenti si verifica facilmente che f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ e continua in $\mathbb{R}$.
Per studiare la derivabilità in $x_0 = -1$ e $x_0 = 0$, consideriamo i limiti dei rapporti incrementali
$$\lim_{x\to(-1)^\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to(-1)^\pm} \frac{\sqrt{|x(x+1)|}}{x+1} = \lim_{y\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|(y-1)y|}}{y} = \lim_{y\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|y|}\sqrt{|y-1|}}{y} = \pm\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|x(x+1)|}}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|x|}\sqrt{|x+1|}}{x} = \pm\infty.$$
Quindi f non è derivabile in $x_0 = -1$ e in $x_0 = 0$ e i punti del grafico $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$ e $(0, f(0)) = (0, 0)$ sono punti di cuspide.
Si suggerisce di disegnare un grafico qualitativo della funzione data utilizzando gli argomenti già visti in **[B]** Cap.5. Il Lettore potrà verificare che i punti $x_0 = -1$ e in $x_0 = 0$ sono anche i punti di minimo di f.

■

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni
$$\cos(x^{\frac{1}{3}}), \quad \cos|x|, \quad \sqrt{\tan x} \quad \sqrt{|\tan x|}.$$

Soluzione.
Ragionando come negli esercizi precedenti, non è difficile verificare che:
$$f(x) = \cos(x^{\frac{1}{3}}),\ x \in \mathbb{R}$$
è definita, continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e che $(0, 1)$ è un punto di cuspide;
$$f(x) = \cos|x|,\ x \in \mathbb{R}$$
è definita, continua e derivabile in $\mathbb{R}$;
$$f(x) = \sqrt{\tan x},\ x \in \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

è definita, continua e derivabile in $\left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ e che i punti $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ sono di tangenza verticale;

$$f(x) = \sqrt{|\tan x|},\ x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

è definita, continua e derivabile in $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ e che i punti $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ sono di cuspide;

Osservazione

In TUTTI gli esercizi del §9.4 di cui sopra, lo studio della derivabilità delle funzioni date poteva essere eseguito utilizzando il Teorema di continuità della derivata, vedere **[B]** §9.4. Si suggerisce di verificare questo fatto per gli esercizi di cui sopra seguendo il procedimento illustrato nell' Esempio che precede il Teorema in **[B]** §9.4.