

SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNOTI

CONTENTS

1.	SOLUZIONI ESERCIZI DEL §8.5.	1
----	-------------------------------------	---

[B] Dispense a cura del docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §8.5.

§8.5

ESERCIZIO. Disporre in ordine di infinitesimo crescente le funzioni

$$e^{x^3}, \quad \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)^4, \quad \cos \left(\frac{1}{(\log |x|)^3} \right) - 1,$$

per $x \rightarrow -\infty$.

Soluzione.

Si ha

$$\frac{\left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)^4}{e^{x^3}} = e^{-x^3} \left(\frac{1}{x} + o \left(\frac{1}{x} \right) \right)^4 = e^{-x^3} \left(\frac{1}{x^4} \right) (1+o(1))^4 = \frac{e^{-x^3}}{x^4} \cdot (1+o(1)) = \frac{e^{|x|^3}}{|x|^4} \cdot (1+o(1)), \quad x \rightarrow -\infty.$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)^4}{e^{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{|x|^3}}{|x|^4} (1+o(1)) = +\infty,$$

e otteniamo che $e^{x^3} = o \left(\left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)^4 \right)$, per $x \rightarrow -\infty$.

Inoltre

$$\frac{\left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)^4}{\cos \left(\frac{1}{(\log |x|)^3} \right) - 1} = \frac{\left(\frac{1}{x} + o \left(\frac{1}{x} \right) \right)^4}{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\log |x|)^3} \right)^2 + o \left(\left(\frac{1}{(\log |x|)^3} \right)^2 \right)} = -2 \frac{(\log x)^6}{x^4} \frac{1+o(1)}{1+o(1)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty,$$

e si conclude che

$$\left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)^4 = o \left(\cos \left(\frac{1}{(\log |x|)^3} \right) - 1 \right), \quad x \rightarrow -\infty.$$

Dunque la disposizione cercata è

$$\cos \left(\frac{1}{(\log |x|)^3} \right) - 1, \quad \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)^4, \quad e^{x^3}.$$

ESERCIZIO. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-(\log x)^\alpha}$$

al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-(\log x)^\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{2y} e^{-y^\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{2y-y^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha \in (0, 1] \\ 0^+, & \alpha \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Quindi $e^{-(\log x)^\alpha} = o(\frac{1}{x^2})$ se $\alpha > 1$ e viceversa, se $\alpha \in (0, 1]$, $\frac{1}{x^2} = o(e^{-(\log x)^\alpha})$.

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x}.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$
Si ha

$$x^x = e^{x \log x} \rightarrow e^0 = 1, \quad x \rightarrow 0^+$$

perché $x = o(\frac{1}{\log x})$, $x \rightarrow 0^+$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = -\infty$.

Dato che $x \log x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0^+$, si ha

$$\frac{x^x - 1}{x} = \frac{e^{x \log x} - 1}{x} = \frac{e^{x \log x} - 1}{x \log x} \log x \rightarrow 1 \cdot (-\infty) = -\infty, \quad x \rightarrow 0^+.$$

ESERCIZIO. Disporre in ordine di infinito crescente le seguenti successioni

$$4^{n^2}, \quad 4^{n^2} n^4, \quad \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Soluzione.

Si ha

$$\frac{4^{n^2} n^4}{4^{n^2}} = n^4 \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty,$$

e quindi 4^{n^2} è un infinito di ordine inferiore rispetto a $4^{n^2} n^4$, perché $\frac{4^{n^2}}{4^{n^2} n^4} \rightarrow 0$. D'altra parte,

$$\frac{\left(4 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{4^{n^2} n^4} = \frac{1}{n^4} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{n^2} = e^{-\log n^4 + n^2 \log(1 + \frac{1}{4n})},$$

e in particolare

$$\begin{aligned} -\log n^4 + n^2 \log\left(1 + \frac{1}{4n}\right) &= -4 \log n + n^2 \left(1 + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \\ n^2 \left(-4 \frac{\log n}{n^2} + 1 + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= n^2(1 + o(1)) \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

e quindi,

$$\frac{\left(4 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{4^{n^2} n^4} = e^{-\log n^4 + n^2 \log(1 + \frac{1}{4n})} \rightarrow e^{+\infty} = +\infty,$$

e quindi $4^{n^2} n^4$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $\left(4 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Abbiamo usato il fatto che

$$\log\left(1 + \frac{1}{4n}\right) = 1 + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Questo è vero perché si ha

$$\log\left(1 + \frac{1}{4n}\right) = 1 + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dunque la disposizione cercata è

$$4^{n^2}, \quad 4^{n^2} n^4, \quad \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

ESERCIZIO. Calcolare il limite

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\cos(2\pi 2^{\frac{1}{y}}) - 1}{\cos(2^{\frac{\pi}{y}} - 1) - 1}$$

Prima Soluzione.

Si ha

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\cos(2\pi 2^{\frac{1}{y}}) - 1}{\cos(2^{\frac{\pi}{y}} - 1) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2\pi 2^x) - 1}{\cos(2^{\pi x} - 1) - 1}.$$

Osserviamo poi che

$$\frac{\cos(2\pi 2^x) - 1}{\cos(2^{\pi x} - 1) - 1} = \frac{\cos(2\pi(2^x - 1)) - 1}{\cos(2^{\pi x} - 1) - 1} = \frac{\cos(2\pi(2^x - 1)) - 1}{\cos(2^{\pi x} - 1) - 1},$$

e quindi,

$$\frac{\cos(2\pi 2^x) - 1}{\cos(2^{\pi x} - 1) - 1} = \frac{\cos(2\pi(2^x - 1)) - 1}{(2\pi(2^x - 1))^2} \frac{(2\pi(2^x - 1))^2}{(2^{\pi x} - 1)^2} \frac{(2^{\pi x} - 1)^2}{\cos(2^{\pi x} - 1) - 1}.$$

Ora, dato che $2^x - 1 \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$, e $2^{\pi x} - 1 \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\cos(2\pi(2^x - 1)) - 1}{(2\pi(2^x - 1))^2} &\rightarrow -\frac{1}{2}, \quad x \rightarrow 0, \\ \frac{(2^{\pi x} - 1)^2}{\cos(2^{\pi x} - 1) - 1} &\rightarrow -2, \quad x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\cos(2\pi 2^{\frac{1}{y}}) - 1}{\cos(2^{\frac{\pi}{y}} - 1) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2\pi(2^x - 1))^2}{(2^{\pi x} - 1)^2},$$

se l'ultimo limite esiste. Ora osserviamo che

$$\frac{(2\pi(2^x - 1))}{(2^{\pi x} - 1)} = \frac{(2\pi(2^x - 1))}{x \log 2} \frac{x \log 2}{x \pi \log 2} \frac{x \pi \log 2}{(2^{\pi x} - 1)} \rightarrow 2, \quad x \rightarrow 0,$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2\pi(2^x - 1))^2}{(2^{\pi x} - 1)^2} = 4.$$

Seconda Soluzione.

Si ha

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\cos(2\pi 2^{\frac{1}{y}}) - 1}{\cos(2^{\frac{\pi}{y}} - 1) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2\pi 2^x) - 1}{\cos(2^{\pi x} - 1) - 1}.$$

Osserviamo poi che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2\pi 2^x) - 1}{\cos(2^{\pi x} - 1) - 1} &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\cos(2\pi t) - 1}{\cos(t^\pi - 1) - 1} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2\pi + 2\pi s) - 1}{\cos((1+s)^\pi - 1) - 1} = \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2\pi s) - 1}{\cos((1+s)^\pi - 1) - 1} &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{(2\pi s)^2}{2} + o(s^2) - 1}{\cos(1 + \pi s + o(s) - 1) - 1} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{-2\pi^2 s^2 + o(s^2)}{\cos(\pi s + o(s)) - 1} = \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{-2\pi^2 s^2 + o(s^2)}{1 - \frac{(\pi s)^2}{2} + o(s^2) - 1} &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s^2}{s^2} \cdot \frac{-2\pi^2 + o(1)}{-\frac{\pi^2}{2} + o(1)} = \frac{-2\pi^2}{-\frac{\pi^2}{2}} = 4, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\cos(\pi s + o(s)) - 1 = 1 - \frac{1}{2}(\pi s + o(s))^2 + o((\pi s + o(s))^2) - 1 = -\frac{1}{2}\pi^2 s^2 + o(s^2) + o(s^2) = -\frac{1}{2}\pi^2 s^2 + o(s^2).$$

Il ragionamento per

$$\cos(2\pi s) - 1 = -2\pi^2 s^2 + o(s^2),$$

è analogo.