SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI

Contents

[B] Dispense a cura del docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §8.3.

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi x + x^{\frac{3}{2}}}{ex^4+x^9}\sin\left(\frac{3x^5+2x^8}{x^2+6x^{\frac{5}{2}}}\right),\ \lim_{x\to-\infty} e^{-4x}\sin\left(e^{-4x}\right).$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right),\ \lim_{x\to-\infty}(\log|x|)^4\left(1-\cos\left(\frac{1}{(\log|x|)^4}\right)\right)$$

Soluzione:

- $\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi x+x^{\frac{3}{2}}}{ex^4+x^9}\sin\left(\frac{3x^5+2x^8}{x^2+6x^{\frac{5}{2}}}\right)=\frac{3\pi}{e}$.

  Si osserva innanzitutto che il problema non è ben posto nel limite per $x\to 0^-$, perché $x^{\frac{3}{2}}$ e $x^{\frac{5}{2}}$ non sono definite per $x<0$. Si considera quindi solo il limite per $x\to 0^+$. Dato che, per $x\to 0^+$, si ha

  $$\frac{3x^5+2x^8}{x^2+6x^{\frac{5}{2}}}=\frac{x^5}{x^2}\cdot\frac{3+2x^3}{1+6\sqrt{x}}=x^3\cdot\frac{3+2x^3}{1+6\sqrt{x}}\to 0\cdot\frac{1+0}{1+0}=0,$$

  e

  $$\frac{\pi x+x^{\frac{3}{2}}}{ex^4+x^9}=\frac{x}{x^4}\cdot\frac{\pi+\sqrt{x}}{e+x^5}=\frac{1}{x^3}\cdot\frac{\pi+\sqrt{x}}{e+x^5},$$

  allora possiamo concludere che,

  $$\left(\frac{\pi x+x^{\frac{3}{2}}}{ex^4+x^9}\right)\left(\frac{3x^5+2x^8}{x^2+6x^{\frac{5}{2}}}\right)\frac{\sin\left(\frac{3x^5+2x^8}{x^2+6x^{\frac{5}{2}}}\right)}{\frac{3x^5+2x^8}{x^2+6x^{\frac{5}{2}}}}=\frac{1}{x^3}\cdot\frac{\pi+\sqrt{x}}{e+x^5}\cdot x^3\cdot\frac{3+2x^3}{1+6\sqrt{x}}\frac{\sin\left(\frac{3x^5+2x^8}{x^2+6x^{\frac{5}{2}}}\right)}{\frac{3x^5+2x^8}{x^2+6x^{\frac{5}{2}}}}=$$

  $$\frac{\pi+\sqrt{x}}{e+x^5}\cdot\frac{3+2x^3}{1+6\sqrt{x}}\frac{\sin\left(\frac{3x^5+2x^8}{x^2+6x^{\frac{5}{2}}}\right)}{\frac{3x^5+2x^8}{x^2+6x^{\frac{5}{2}}}}\longrightarrow\frac{\pi+0}{e+0}\cdot\frac{3+0}{1+0}\cdot 1=\frac{3\pi}{e},\ x\to 0^+.$$

- $\lim_{x\to-\infty}e^{-4x}\sin\left(e^{-4x}\right)$ non esiste.

  Questo esercizio è più delicato. Osserviamo che il Teorema 8.8 in **[B]** §8.1, asserisce che

  $$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=L=\lim_{y\to y_0}f(y)$$

se $g(x) \to y_0$ e $g(x) \neq y_0$ definitivamente, e se esiste finito o infinito $\lim_{y \to y_0} f(y) = L$. In questo caso, ponendo $g(x) = e^{-4x}$ e $f(y) = y \sin y$, si ha $e^{-4x} \to +\infty$ per $x \to -\infty$. Quindi, definendo $y_0 = +\infty$, si potrebbe pensare di applicare il Teorema cercando di calcolare direttamente $\lim_{y \to +\infty} f(y)$. Ma in questo caso, questa operazione **non è giustificata**, perché $\lim_{y \to +\infty} f(y)$ non esiste, come andiamo a dimostrare. Osserviamo che

se $a_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, si ha $f(a_n) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \to +\infty$, $n \to +\infty$

se $b_n = 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$, si ha $f(a_n) = \left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \to -\infty$, $n \to +\infty$,

e quindi il limite di $f(y)$ per $y \to +\infty$ non esiste.

Usando le due successioni a_n e b_n, si può dimostrare in questo caso particolare, che anche il limite di $f(g(x))$ non esiste. Infatti, osserviamo che:

se $c_n = -\frac{1}{4} \log\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, si ha $f(g(c_n)) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \to +\infty$, $n \to +\infty$

se $d_n = -\frac{1}{4} \log\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$, si ha $f(g(d_n)) = \left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \to -\infty$, $n \to +\infty$,

e quindi il limite dato non esiste.

- $\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}$.

  Si ha
  $$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{y \to 0^+} \frac{1 - \cos(y)}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

- $\lim_{x \to -\infty} (\log|x|)^4 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{(\log|x|)^4}\right)\right) = 0$.

  Si ha
  $$\lim_{x \to -\infty} (\log|x|)^4 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{(\log|x|)^4}\right)\right) = \lim_{y \to 0^+} \frac{1 - \cos(y)}{y} = 0.$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \sin(x), \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha (1 - \cos(x)).$$

Soluzione:

- $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \sin(x)$

  Si ha
  $$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \sin(x) = \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha+1} \frac{\sin(x)}{x} = \begin{cases} 0 \cdot 1 = 0, & \alpha + 1 > 0, \\ 1 \cdot 1 = 1, & \alpha + 1 = 0, \\ +\infty \cdot 1 = +\infty, & \alpha + 1 < 0. \end{cases}$$

- $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha(1-\cos(x))$

  Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha(1-\cos(x)) = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+2}\frac{(1-\cos(x))}{x^2} = \begin{cases} 0\cdot\frac{1}{2}=0, & \alpha+2>0, \\ 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, & \alpha+2=0, \\ +\infty\cdot\frac{1}{2}=+\infty, & \alpha+2<0. \end{cases}$$

ESERCIZI: Calcolare, al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ il limite.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha.$$

Soluzione.

Se $\alpha=0$, l' argomento della parentesi è identicamente uguale a 1. Quindi in questo caso stiamo considerando il limite di $1^x=1\ \forall x\in\mathbb{R}$, che è certamente pari a $1=e^0$. Se $\alpha>0$,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y\cdot\alpha} = \left(\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^\alpha = e^\alpha,$$

dove si è usata la continuità della funzione $f(s)=s^\alpha$, $s>0$. Se $\alpha<0$,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{y\to\mp\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y\cdot\alpha} = \left(\lim_{y\to\mp\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^\alpha = e^\alpha,$$

dove si è usata la continuità della funzione $f(s)=s^\alpha$, $s>0$. Quindi il limite dato vale e^α.
Osserviamo che, in modo equivalente, se $\alpha\neq 0$, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{x\to\pm\infty} e^{x\log\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)} = \lim_{y\to 0^\pm} e^{\frac{1}{y}\log(1+\alpha y)} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{\alpha}{t}\log(1+t)} = e^{\alpha\cdot 1} = e^\alpha,$$

dove si è usata la continuità della funzione $f(s)=e^s$, $s\in\mathbb{R}$. Notare che in questo caso non è necessario distinguere i casi $\alpha>0$ e $\alpha<0$, perché si ha $t=\alpha y\to 0$, $y\to 0^\pm$, indipendentemente dal segno di α.

ESERCIZIO. Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(4-e^x)^\pi-4^\pi}{e^{2x}} = -\infty.$$

Soluzione.

$$\frac{(4-e^x)^\pi-4^\pi}{e^{2x}} = 4^\pi\frac{\left(1-\frac{1}{4}e^x\right)^\pi-1}{e^{2x}} = 4^{\pi-1}\frac{e^x}{e^{2x}}(-1)\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{4}e^x\right)^\pi-1}{-\frac{1}{4}e^x} =$$

$$-4^{\pi-1}e^{-x}\frac{\left(1-\frac{1}{4}e^x\right)^\pi-1}{-\frac{1}{4}e^x} \longrightarrow -4^{\pi-1}\cdot(+\infty)\cdot\pi = -\infty,\ x\to-\infty.$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)^2}{\sin(x)\log(1+x)},\ \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)^4}{(\sin(x))^3\log(1+x)},\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\tan(x)}.$$

Soluzione.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2^x-1)^2}{\sin(x)\log(1+x)} = (\log 2)^2$.

  Si ha,
$$\frac{(2^x-1)^2}{\sin(x)\log(1+x)} = \frac{\left(e^{x\log 2}-1\right)^2}{(x\log 2)^2}\frac{(x\log 2)^2}{x^2}\frac{x\cdot x}{\sin(x)\log(1+x)} =$$
$$\left(\frac{e^{x\log 2}-1}{x\log 2}\right)^2\cdot(\log 2)^2\frac{1}{\frac{\sin(x)}{x}\frac{\log(1+x)}{x}} \to 1\cdot(\log 2)^2\cdot\frac{1}{1\cdot 1} = (\log 2)^2,\ x\to 0.$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\cos x-1)^4}{(\sin(x))^3\log(1+x)} = 0$.

  Si ha,
$$\frac{(\cos x-1)^4}{(\sin(x))^3\log(1+x)} = \frac{(\cos x-1)^4}{(x^2)^4}\frac{(x^2)^4}{(x)^3x}\frac{(x)^3x}{(\sin(x))^3\log(1+x)} =$$
$$\left(\frac{\cos x-1}{x^2}\right)^4\cdot x^4\cdot\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^3\frac{x}{\log(1+x)} \to \left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot 0\cdot(1)^3\cdot 1 = 0,\ x\to 0.$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

  Si ha,
$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} \to 1\cdot\frac{1}{1} = 1,\ x\to 0.$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(x)} = 3$.

  Si ha,
$$\frac{\sin(3x)}{\tan(x)} = \frac{\sin(3x)\cos(x)}{\sin(x)} = \cos x\frac{\sin(3x)}{3x}\frac{3x}{x}\frac{x}{\sin(x)} \to 1\cdot 1\cdot 3\cdot\frac{1}{1} = 3,\ x\to 0.$$

ESERCIZIO. Al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ calcolare il limite:
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sin(x)}-1}{x^\alpha}.$$
Si ha,
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sin(x)}-1}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x^\alpha}\frac{e^{\sin(x)}-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+}x^{1-\alpha}\frac{\sin(x)}{x}\frac{e^{\sin(x)}-1}{\sin x} = \begin{cases} 0\cdot 1\cdot 1 = 0, & 1-\alpha>0, \\ 1\cdot 1\cdot 1 = 1, & 1-\alpha = 0, \\ +\infty\cdot 1\cdot 1 = +\infty, & 1-\alpha<0. \end{cases}$$