

SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI

CONTENTS

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §8.

1

[B] Dispense a cura del docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §8.

Il seguente Teorema generalizza al caso delle funzioni il corrispondente Teorema di confronto per successioni divergenti (vedere [B] §7.3).

TEOREMA

Per ogni $\alpha > 0$, per ogni $a > 1$, e per ogni $\beta > 0$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{(\log_a x)^\beta} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{\beta x}}{x^{\alpha x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha x}}{a^{\beta x}} = +\infty;$$

La dimostrazione di questo Teorema si può ottenere usando il Teorema suddetto valido per le successioni divergenti e la definizione di limite di funzione (vedere [B] §8.1, Definizione 8.3).

§8.1

ESERCIZI CONSIGLIATI. Calcolare i seguenti limiti.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 5^{-x}), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x + x^3 + 3^{-x}}{5x^x + (\log(x))^7 - 6^x + x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 4x^2), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + x^4 + (\log(|x|))x}{4x^5 + (\cos(\log(|x|)))x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} + x}{e^{\frac{|x|}{2}} + \sin(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{-x} - x^2}{2^{-x} + x^3} - \frac{3^{-x} + x^2}{2^{-x} - x^3}.$$

Soluzione:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 5^{-x}) = +\infty.$

Si ha,

$$x^2 + 5^{-x} = x^2(1 + x^{-2} \cdot 5^{-x}) \longrightarrow +\infty \cdot (1 + 0 \cdot 0) = +\infty.$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x + x^3 + 3^{-x}}{5x^x + (\log(x))^7 - 6^x + x} = 0.$

È chiaro che, per $x \rightarrow +\infty$, si ha,

$$\frac{4^x}{x^x} \rightarrow 0, \quad \frac{x^3}{4^x} \rightarrow 0, \quad \frac{6^x}{x^x} \rightarrow 0, \quad \frac{(\log(x))^7}{x^x} = \frac{(\log(x))^7}{x^3} \frac{x^3}{x^x} \rightarrow 0,$$

Quindi, per $x \rightarrow +\infty$, si ha,

$$\frac{4^x + x^3 + 3^{-x}}{5x^x + (\log(x))^7 - 6^x + x} = \frac{4^x}{x^x} \frac{1 + 4^{-x} \cdot x^3 + 4^{-x} 3^{-x}}{5 + x^{-x} \cdot (\log(x))^7 - x^{-x} \cdot 6^x + x^{1-x}} \rightarrow 0 \cdot \frac{1 + 0 + 0}{5 + 0 - 0 + 0} = 0.$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1.$

Si ha

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \rightarrow 1^+, \quad x \rightarrow +\infty,$$

dove si è osservato che $\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} > 1, \forall x > 0.$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 4x^2) = -\infty.$

Si ha,

$$x^5 - 4x^2 = x^5(1 - 4x^{-3}) \rightarrow -\infty \cdot (1 + 0) = -\infty.$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + x^4 + (\log(|x|))x}{4x^5 + (\cos(\log(|x|)))x} = \frac{1}{4}.$

Si ha,

$$\frac{\log(|x|)}{x^4} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Inoltre, per il teorema del confronto, le disuguaglianze

$$-\frac{1}{x^4} \leq \frac{\cos(\log(|x|))}{x^4} \leq \frac{1}{x^4},$$

implicano che

$$\frac{\cos(\log(|x|))}{x^4} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Si ha allora,

$$\frac{x^5 + x^4 + (\log(|x|))x}{4x^5 + (\cos(\log(|x|)))x} = \frac{x^5}{x^5} \frac{1 + x^{-1} + x^{-4} \cdot (\log(|x|))}{4 + x^{-4} \cdot (\cos(\log(|x|)))} \rightarrow \frac{1}{4}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} + x}{e^{\frac{|x|}{2}} + \sin(x)} = +\infty.$

Dato che per ogni $x < 0$ si ha $-x = |x|$, per $x \rightarrow -\infty$, si ha,

$$\frac{e^{-x} + x}{e^{\frac{|x|}{2}} + \sin(x)} = \frac{e^{|x|} + x}{e^{\frac{|x|}{2}} + \sin(x)} = \frac{e^{|x|}}{e^{\frac{|x|}{2}}} \frac{1 + xe^{-|x|}}{1 + \sin(x)e^{-\frac{|x|}{2}}} = e^{\frac{|x|}{2}} \frac{1 + xe^{-|x|}}{1 + \sin(x)e^{-\frac{|x|}{2}}} \rightarrow +\infty \frac{1 + 0}{1 + 0} = +\infty,$$

dove si è usato nuovamente il teorema del confronto per dimostrare che

$$\frac{\sin(x)}{e^{\frac{|x|}{2}}} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty.$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{-x} - x^2}{2^{-x} + x^3} - \frac{3^{-x} + x^2}{2^{-x} - x^3} = 0.$

Questo esercizio è più delicato. Non è difficile verificare che si tratta di una forma indeterminata del tipo $(+\infty) - (+\infty)$. Mettendo in evidenza i termini dominanti a numeratore e denominatore di entrambe le frazioni otterremmo il termine $\frac{3^{-x}}{2^{-x}}$ a moltiplicare due frazioni che tendono entrambe a 1 per $x \rightarrow -\infty$. Mettendo nuovamente in comune il termine $\frac{3^{-x}}{2^{-x}}$ otterremmo una forma indeterminata del tipo $+\infty \cdot (1 - 1) = +\infty \cdot 0$, e saremmo allora costretti a calcolare la somma delle frazioni sperando in qualche semplificazione. Dunque è meglio in questo caso fare subito il minimo comune multiplo, per ottenere

$$\begin{aligned} \frac{3^{-x} - x^2}{2^{-x} + x^3} - \frac{3^{-x} + x^2}{2^{-x} - x^3} &= \frac{(3^{-x} - x^2)(2^{-x} - x^3) - (3^{-x} + x^2)(2^{-x} + x^3)}{(2^{-x} + x^3)(2^{-x} - x^3)} = \\ &= \frac{3^{-x}2^{-x} - 3^{-x}x^3 - x^22^{-x} + x^5 - 3^{-x}2^{-x} - 3^{-x}x^3 - x^22^{-x} - x^5}{2^{-2x} - x^6} = \\ &= \frac{-2 \cdot 3^{-x}x^3 - 2 \cdot x^22^{-x}}{2^{-2x} - x^6} = -2 \frac{3^{-x}x^3 + x^22^{-x}}{4^{-x} - x^6}. \end{aligned}$$

Quindi, dato che per ogni $x < 0$ si ha $-x = |x|$, concludiamo che

$$\begin{aligned} \frac{3^{-x} - x^2}{2^{-x} + x^3} - \frac{3^{-x} + x^2}{2^{-x} - x^3} &= -2 \frac{3^{|x|}x^3 + x^22^{|x|}}{4^{|x|} - x^6} = -2 \frac{3^{|x|}x^3}{4^{|x|}} \cdot \left(\frac{1 + x^{-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{|x|}}{1 - 4^{-|x|}x^6} \right) = \\ &= -2 \frac{x^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^{|x|}} \left(\frac{1 + x^{-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{|x|}}{1 - 4^{-|x|}x^6} \right) \rightarrow -2 \cdot 0 \frac{1+0}{1+0} = 0, \quad x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

§8.2

ESERCIZI CONSIGLIATI: Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x} + x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x 3^{x^x} - 5^{x^x}}{[x^x]^4}.$$

Soluzione:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x} + x = \frac{1}{2}.$

Razionalizzando, si ha, per $x \rightarrow -\infty$,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - x} + x &= \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} - x} = \frac{-x}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - x} = \frac{|x|}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + |x|} = \\ &= \frac{|x|}{|x|} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dato che la radice quadrata $\sqrt{y}$ è una funzione continua in $[0, +\infty)$, in particolare è continua in $y_0 = 1$ e quindi $\sqrt{y} \rightarrow 1$, $y \rightarrow 1$. Dato che $1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1$, $x \rightarrow -\infty$, concludiamo che $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow 1$, $x \rightarrow -\infty$. Quindi,

$$\sqrt{x^2 - x} + x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1} \rightarrow \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Una volta ottenuta la (1.1), si sarebbe anche potuto scrivere direttamente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{y} + 1} = \frac{1}{2}.$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x 3^{x^x} - 5^{x^x}}{[x^x]^4}.$

Ponendo $y = x^x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x 3^{x^x} - 5^{x^x}}{(x^x)^4} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y 3^y - 5^y}{y^4} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{5^y}{y^4} \left(y \left(\frac{3}{5} \right)^y - 1 \right) = +\infty(0 - 1) = -\infty.$$

Interpretando questo esercizio con " $[\cdot]$ = funzione parte intera", si ottiene lo stesso risultato osservando che se $y > 0$, si ha $y \leq [y] < y + 1$ e quindi $y^4 \leq [y]^4 < (y + 1)^4$. Si ottiene allora

$$\frac{5^y}{[y]^4} \left(y \left(\frac{3}{5} \right)^y - 1 \right) \leq \frac{5^y}{(y + 1)^4} \left(y \left(\frac{3}{5} \right)^y - 1 \right), \text{ definitivamente per } y \rightarrow +\infty$$

dove si è usato il fatto che l'argomento della parentesi tonda è definitivamente negativo. La tesi segue allora dal Teorema di confronto.

ESERCIZI: Per le seguenti funzioni determinare il dominio naturale e calcolare i limiti possibili corrispondenti a tutti gli estremi del dominio determinato. Dire poi se e in quali punti le funzioni date si possono estendere per continuità.

$$\arctan(\log(|x|)), \log(|\cos x|), e^{\frac{1}{x}}, e^{-\frac{1}{|x|}}, e^{\frac{1}{|x|-4}}, \\ \frac{|x|}{|x|-1}, \log\left(\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right|\right), \arctan\left|\frac{|x|}{|x|-1}\right|.$$

Soluzione:

- $f(x) = \arctan(\log(|x|)).$

Dato che la funzione arcotangente ha dominio naturale $\mathbb{R}$ e la funzione logaritmo ha dominio naturale $(0, +\infty)$, si ha $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Si tratta quindi di calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \rightarrow \pm\infty$ e $x \rightarrow 0^\pm$.

Dato che f è pari si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x),$$

e quindi è sufficiente calcolare i limiti per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow 0^+$.

Dato che $\log|x| \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(\log(|x|)) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}.$$

Dato che $\log|x| \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow 0^+$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(\log(|x|)) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}.$$

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \arctan(\log(|x|)) = -\frac{\pi}{2},$$

concludiamo che f si può estendere per continuità in $x_0 = 0$, ponendo $f(0) = -\frac{\pi}{2}$. In particolare, dato che $|\cdot|$, $\log(\cdot)$ e $\arctan(\cdot)$ sono continue nei loro domini di definizione, per il Teorema in

[B] §8.2, $\arctan(\log(|\cdot|))$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora, per il Teorema in [B] §8.2, la funzione estesa

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\log(|x|)), & x \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}$.

- $f(x) = \log(|\cos x|)$.

Si ha $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |\cos x| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$.

Dato che $|\cos(\cdot)|$ è periodica di periodo π , è sufficiente studiare i limiti corrispondenti ad un qualunque intervallo di ampiezza π . Se scegliamo $[0, \pi]$, f sarà definita in $[0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ e si tratterà di calcolare i limiti per $x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^\pm$. Se scegliamo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, f sarà definita in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e si tratterà di calcolare i limiti per $x \rightarrow (\pm\frac{\pi}{2})^\mp$. Scegliamo per esempio l'ultimo caso.

Dato che $|\cos(x)| \rightarrow 0^+$, per $x \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm(\frac{\pi}{2})^\mp} \log(|\cos x|) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \log y = -\infty.$$

Come sopra f è continua nel suo insieme di definizione. In questo caso, ogni punto appartenente a $\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$ è di asintoto verticale per f . Quindi f non si può estendere per continuità.

- $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Si ha $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Si tratta quindi di calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \rightarrow \pm\infty$ e $x \rightarrow 0^\pm$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^{0^+} = 1^+,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0^+,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^{0^-} = 1^-.$$

Come sopra, f è continua nel suo insieme di definizione. $x_0 = 0$ è di asintoto verticale e quindi f non si può estendere per continuità. D'altra parte, ponendo

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

si ottiene una funzione continua da sinistra in $x_0 = 0$.

- $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$.

Si ha $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Si tratta quindi di calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \rightarrow \pm\infty$ e $x \rightarrow 0^\pm$.

Dato che f è pari, è sufficiente calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{+\infty}} = e^{0^-} = 1^-,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0^+.$$

Come sopra, f è continua nel suo insieme di definizione. In questo caso $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0$ e quindi f si può estendere per continuità in $x_0 = 0$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- $f(x) = e^{\frac{1}{|x|-4}}$.

Si ha $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\} = (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, +\infty)$.

Si tratta quindi di calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \rightarrow \pm\infty$ e $x \rightarrow -4^\pm$ e $x \rightarrow 4^\pm$.

Dato che f è pari, è sufficiente calcolare i limiti per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow 4^\pm$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{|x|-4}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x-4}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^{0^+} = 1^+, \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} e^{\frac{1}{|x|-4}} &= \lim_{x \rightarrow 4^+} e^{\frac{1}{x-4}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} e^{\frac{1}{|x|-4}} &= \lim_{x \rightarrow 4^-} e^{\frac{1}{x-4}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0^+. \end{aligned}$$

Come sopra, f è continua nel suo insieme di definizione. $x_0 = \pm 4$ sono di asintoto verticale e quindi f non si può estendere per continuità. D' altra parte, ponendo

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|-4}}, & x \notin \{-4, 4\} \\ 0, & x \in \{-4, 4\}, \end{cases}$$

si ottiene una funzione continua da sinistra in $x_0 = 4$ e continua da destra in $x_0 = -4$. Notare che f è continua da destra (e non da sinistra) in $x_0 = -4$ perché se f è una funzione pari e $x_0 \in \text{dom}(f)$, si ha sempre

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -x_0^-} f(x).$$

- $f(x) = \frac{|x|}{|x|-1}$.

Si ha $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Si tratta quindi di calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \rightarrow \pm\infty$ e $x \rightarrow -1^\pm$ e $x \rightarrow 1^\pm$.

Dato che f è pari, è sufficiente calcolare i limiti per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow 1^\pm$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{|x|-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1^+,$$

dove si è osservato che $\frac{x}{x-1} > 1 \forall x > 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x|}{|x|-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x|}{|x|-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Dato che f è pari, segue che

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x|}{|x|-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x|}{|x|-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x|}{|x|-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x|}{|x|-1} = -\infty.$$

Come sopra, f è continua nel suo insieme di definizione. $x_0 = \pm 1$ sono di asintoto verticale e quindi f non si può estendere per continuità.

- $f(x) = \log \left(\left| \frac{|x|}{|x|-1} \right| \right)$.

Si ha

$$\begin{aligned} \text{dom}(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{|x|}{|x|-1} \right| > 0 \right\} \cap \{x \in \mathbb{R} : |x| - 1 \neq 0\} = \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty). \end{aligned}$$

Si tratta quindi di calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow 0^\pm$, $x \rightarrow -1^\pm$ e $x \rightarrow 1^\pm$.

Dato che f è pari, è sufficiente calcolare i limiti per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow 1^\pm$ e $x \rightarrow 0^+$.

Dato che $\left| \frac{|x|}{|x|-1} \right| \rightarrow 1^+$, $x \rightarrow +\infty$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\left| \frac{|x|}{|x|-1} \right| \right) = \lim_{y \rightarrow 1^+} \log(y) = \log(1^+) = 0^+.$$

Dato che $\left| \frac{|x|}{|x|-1} \right| \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 1^\pm$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \log \left(\left| \frac{|x|}{|x|-1} \right| \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \log(y) = +\infty.$$

Dato che $\left| \frac{|x|}{|x|-1} \right| \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0^+$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log \left(\left| \frac{|x|}{|x|-1} \right| \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \log(y) = -\infty.$$

Come sopra, f è continua nel suo insieme di definizione. $x_0 = 0, \pm 1$ sono di asintoto verticale e quindi f non si può estendere per continuità.

- $f(x) = \arctan \left| \frac{|x|}{|x|-1} \right|$.

Si ha $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Si tratta quindi di calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow -1^\pm$ e $x \rightarrow 1^\pm$.

Dato che f è pari, è sufficiente calcolare i limiti per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow 1^\pm$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \left| \frac{|x|}{|x|-1} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \left| \frac{x}{x-1} \right| = \lim_{y \rightarrow 1^+} \arctan |y| = \arctan(1^+) = \left(\frac{\pi}{4} \right)^+,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \arctan \left| \frac{|x|}{|x|-1} \right| = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan y = \left(\frac{\pi}{2} \right)^-,$$

dove si è osservato che $\arctan y < \frac{\pi}{2} \forall y \in \mathbb{R}$.

Come sopra, f è continua nel suo insieme di definizione. Ponendo

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \left| \frac{|x|}{|x|-1} \right|, & x \notin \{-1, 1\} \\ \frac{\pi}{2}, & x \in \{-1, 1\}, \end{cases}$$

si ottiene una funzione continua in $\mathbb{R}$.