

SOLUZIONI ESERCIZI ASSEGNATI

CONTENTS

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §7.

1

[B] Dispense a cura del docente.

1. SOLUZIONI ESERCIZI DEL §7.

§7.2

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_n \frac{2^{-2n} + \frac{1}{n!}}{5n^n + (\log_4 n)^7 - 3}, \quad \lim_n \frac{5n^n + (\log_4 n)^7 - 3}{2^{-2n} + \frac{1}{n!} + 1},$$

$$\lim_n \frac{(\log_4 n)^{-3} + \frac{1}{n!} - 9}{n^7 + 2^{-2n} + 1 + n^n}, \quad \lim_n \frac{n^7 + 2^{-n} + 1 + n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5} + \frac{1}{(n!)^5}},$$

$$\lim_n \left(2^{-2n} + \frac{1}{n!} - (5n^n + (\log_4 n)^7 - 3) \right),$$

$$\lim_n \left(n^7 + 2^{-2n} + 1 + n^n - (\log_4 n)^{-3} + \frac{1}{n!} - 9 \right),$$

$$\lim_n \frac{4 + n^{-2}}{3 + (\log_2 n)^{-5}}, \quad \lim_n (4 + n^{-2} - 3 + (\log_2 n)^{-5}).$$

Soluzione:

- $\lim_n \frac{2^{-2n} + \frac{1}{n!}}{5n^n + (\log_4 n)^7 - 3} = 0.$

Infatti, ragionando come nel §7.2, si ha,

$$\frac{2^{-2n} + \frac{1}{n!}}{5n^n + (\log_4 n)^7 - 3} \longrightarrow \frac{0 + 0}{5(+\infty) + \infty - 3} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$

- $\lim_n \frac{5n^n + (\log_4 n)^7 - 3}{2^{-2n} + \frac{1}{n!} + 1} = +\infty.$

Infatti, ragionando come nel §7.2, si ha,

$$\frac{5n^n + (\log_4 n)^7 - 3}{2^{-2n} + \frac{1}{n!} + 1} \longrightarrow \frac{5(+\infty) + \infty - 3}{0 + 0 + 1} = \frac{+\infty}{1} = +\infty.$$

- $\lim_n \frac{(\log_4 n)^{-3} + \frac{1}{n!} - 9}{n^7 + 2^{-2n} + 1 + n^n} = 0.$

Infatti, ragionando come nel §7.2, si ha,

$$\frac{(\log_4 n)^{-3} + \frac{1}{n!} - 9}{n^7 + 2^{-2n} + 1 + n^n} \longrightarrow \frac{0 + 0 - 9}{+\infty + 0 + 1 + \infty} = \frac{-9}{+\infty} = 0.$$

- $\lim_n \frac{n^7 + 2^{-n} + 1 + n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5} + \frac{1}{(n!)^5}} = +\infty.$

Questo limite è più delicato. Dato che

$$\frac{n^7 + 2^{-n} + 1 + n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5} + \frac{1}{(n!)^5}} \longrightarrow \frac{+\infty + 0 + 1 + \infty}{0 + 0} = \frac{+\infty}{0},$$

usando l'Osservazione seguente il Teorema sul calcolo dei limiti (vedere [B] §7.2 equazione (7.8)), possiamo solo concludere che

$$\lim_n \left| \frac{n^7 + 2^{-n} + 1 + n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5} + \frac{1}{(n!)^5}} \right| = +\infty.$$

Tuttavia, possiamo anche osservare che

$$n^7 + 2^{-n} + 1 + n^{4n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\log_8 n)^{-5} + \frac{1}{(n!)^5} > 0, \forall n \geq 2.$$

Si è usata la proprietà ben nota: $a > 1, x > 1 \implies \log_a(x) > 0$. Quindi

$$\left| \frac{n^7 + 2^{-n} + 1 + n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5} + \frac{1}{(n!)^5}} \right| = \frac{n^7 + 2^{-n} + 1 + n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5} + \frac{1}{(n!)^5}}, \forall n \geq 2.$$

È chiaro che due successioni che coincidono per ogni $n \geq 2$, hanno lo stesso limite, e quindi

$$\lim_n \frac{n^7 + 2^{-n} + 1 + n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5} + \frac{1}{(n!)^5}} = \lim_n \left| \frac{n^7 + 2^{-n} + 1 + n^{4n}}{(\log_8 n)^{-5} + \frac{1}{(n!)^5}} \right| = +\infty.$$

- $\lim_n \left(2^{-2n} + \frac{1}{n!} - (5n^n + (\log_4 n)^7 - 3) \right) = -\infty.$

Infatti, ragionando come nel §7.2, si ha,

$$2^{-2n} + \frac{1}{n!} - (5n^n + (\log_4 n)^7 - 3) \longrightarrow 0 + 0 - (5 \cdot (+\infty) + \infty - 3) = -(+\infty) = -\infty.$$

- $\lim_n \left(n^7 + 2^{-2n} + 1 + n^n - (\log_4 n)^{-3} + \frac{1}{n!} - 9 \right) = +\infty.$

Infatti, ragionando come nel §7.2, si ha,

$$n^7 + 2^{-2n} + 1 + n^n - (\log_4 n)^{-3} + \frac{1}{n!} - 9 \longrightarrow +\infty + 0 + 1 + \infty - 0 + 0 - 9 = +\infty.$$

- $\lim_n \frac{4 + n^{-2}}{3 + (\log_2 n)^{-5}} = \frac{4}{3}.$

Infatti, ragionando come nel §7.2, si ha,

$$\frac{4 + n^{-2}}{3 + (\log_2 n)^{-5}} \longrightarrow \frac{4 + 0}{3 + 0} = \frac{4}{3}.$$

- $\lim_n (4 + n^{-2} - 3 + (\log_2 n)^{-5}) = 1$.

Infatti, ragionando come nel §7.2, si ha,

$$4 + n^{-2} - 3 + (\log_2 n)^{-5} \longrightarrow 4 + 0 - 3 + 0 = 1.$$

■

§7.3

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_n \frac{4n^3 - n^{\frac{7}{2}}}{1 - \sqrt{n}}, \quad \lim_n \frac{n^{\frac{5}{3}} - n + 1}{n - n^2 + 1}, \quad \lim_n \frac{n^{\frac{1}{10}} - n^2 + 1}{n^{\frac{8}{5}} + 2\sqrt{n} - 1},$$

$$\lim_n \frac{4n^3 - n^{-\frac{7}{2}} + (n!)^{-1}}{-2^{-3n} + \sqrt[3]{n} + 1}, \quad \lim_n \frac{n^{\frac{5}{3}} - (\log_2 n)^{-\frac{1}{4}} + 5n}{n^{-n} - n^2}, \quad \lim_n \frac{n^{\frac{8}{5}} + 2\sqrt{n} - 1}{n^{\frac{1}{10}} - n^2 + 1}.$$

Soluzione:

- $\lim_n \frac{4n^3 - n^{\frac{7}{2}}}{1 - \sqrt{n}} = +\infty$.

Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,

$$\frac{4n^3 - n^{\frac{7}{2}}}{1 - \sqrt{n}} = \frac{n^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{n}} \left(\frac{-1 + \frac{4n^3}{n^{\frac{7}{2}}}}{-1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \right) = n^3 \left(\frac{-1 + 4(n^{-\frac{1}{2}})}{-1 + n^{-\frac{1}{2}}} \right) \longrightarrow +\infty \cdot \frac{-1 + 0}{-1 + 0} = +\infty.$$

- $\lim_n \frac{n^{\frac{5}{3}} - n + 1}{n - n^2 + 1} = 0$.

Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,

$$\frac{n^{\frac{5}{3}} - n + 1}{n - n^2 + 1} = \frac{n^{\frac{5}{3}}}{n^2} \left(\frac{1 - n^{-\frac{2}{3}} + n^{-\frac{5}{3}}}{-1 + n^{-1} + n^{-2}} \right) = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{1 - n^{-\frac{2}{3}} + n^{-\frac{5}{3}}}{-1 + n^{-1} + n^{-2}} \right) \longrightarrow 0 \cdot \frac{1 - 0 + 0}{-1 + 0 + 0} = 0.$$

- $\lim_n \frac{n^{\frac{1}{10}} - n^2 + 1}{n^{\frac{8}{5}} + 2\sqrt{n} - 1} = -\infty$.

Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,

$$\frac{n^{\frac{1}{10}} - n^2 + 1}{n^{\frac{8}{5}} + 2\sqrt{n} - 1} = \frac{n^2}{n^{\frac{8}{5}}} \left(\frac{-1 + n^{-\frac{19}{10}} + n^{-2}}{1 + 2(n^{-\frac{11}{10}}) - n^{-\frac{8}{5}}} \right) = n^{\frac{2}{5}} \left(\frac{-1 + n^{-\frac{19}{10}} + n^{-2}}{1 + 2(n^{-\frac{11}{10}}) - n^{-\frac{8}{5}}} \right) \longrightarrow +\infty \cdot \frac{-1 + 0 + 0}{1 + 0 - 0} = -\infty.$$

- $\lim_n \frac{4n^3 - n^{-\frac{7}{2}} + (n!)^{-1}}{-2^{-3n} + \sqrt[3]{n} + 1} = +\infty$.

Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,

$$\frac{4n^3 - n^{-\frac{7}{2}} + (n!)^{-1}}{-2^{-3n} + \sqrt[3]{n} + 1} = \frac{n^3}{n^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{4 - (n^{-\frac{7}{2}}) \cdot (n^{-3}) + (n^{-3}) \cdot (n!)^{-1}}{1 + n^{-\frac{1}{3}} - (n^{-\frac{1}{3}}) \cdot (2^{-3n})} \right) \rightarrow +\infty \cdot \frac{4 - (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0)}{1 + 0 - (0 \cdot 0)} = +\infty,$$

dove si è usato direttamente il fatto che $n^{(3-\frac{1}{3})} \rightarrow +\infty$.

- $\lim_n \frac{n^{\frac{5}{3}} - (\log_2 n)^{-\frac{1}{4}} + 5n}{n^{-n} - n^2} = 0$.

Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,

$$\frac{n^{\frac{5}{3}} - (\log_2 n)^{-\frac{1}{4}} + 5n}{n^{-n} - n^2} = \frac{n^{\frac{5}{3}}}{n^2} \left(\frac{1 + 5(n^{-\frac{2}{3}}) - (n^{-\frac{5}{3}}) \cdot (\log_2 n)^{-\frac{1}{4}}}{-1 + (n^{-2}) \cdot (n^{-n})} \right) \longrightarrow 0 \cdot \frac{1 + (5 \cdot 0) - (0 \cdot 0)}{-1 + (0 \cdot 0)} = 0,$$

dove si è usato direttamente il fatto che $n^{(\frac{5}{3}-2)} \rightarrow 0$.

- $\lim_n \frac{n^{\frac{8}{5}+2\sqrt{n}-1}}{n^{\frac{1}{10}}-n^2+1} = 0$.

Si può ragionare come sopra, oppure osservare che la successione data è il reciproco della successione $b_n = \frac{n^{\frac{1}{10}}-n^2+1}{n^{\frac{8}{5}+2\sqrt{n}-1}}$. Dato che si è dimostrato sopra che $b_n \rightarrow -\infty$, si può applicare la (7.7) di [B] §7.2, scegliendo $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si ha quindi

$$\lim_n \frac{n^{\frac{8}{5}+2\sqrt{n}-1}}{n^{\frac{1}{10}}-n^2+1} = \lim_n \frac{1}{b_n} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

ESERCIZI:

$$\lim_n \frac{3^n + 4^n}{4^n + 7^n}, \quad \lim_n \frac{n! + 2^n}{(3n - \sqrt{n})(n-1)!}, \quad \lim_n \frac{(6n^2 + 1)((\log_2(n))^3 - n^{-n})}{(n \log_2(n) - \sqrt{n})(n + 3^{-n})(\log_2(n))^2},$$

Soluzione:

- $\lim_n \frac{3^n + 4^n}{4^n + 7^n} = 0$.

Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,

$$\frac{3^n + 4^n}{4^n + 7^n} = \frac{4^n}{7^n} \left(\frac{1 + \frac{3^n}{4^n}}{1 + \frac{4^n}{7^n}} \right) = \left(\frac{4}{7} \right)^n \left(\frac{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{4}{7}\right)^n} \right) \rightarrow 0 \cdot \frac{1+0}{1+0} = 0,$$

dove si è usato il fatto che se $b = \frac{4}{7}$, o $b = \frac{3}{4}$, allora $a = \frac{1}{b} > 1$ e quindi (vedere [B] §7.2), $b^n = \frac{1}{a^n} \rightarrow 0$.

- $\lim_n \frac{n! + 2^n}{(3n - \sqrt{n})(n-1)!} = \frac{1}{3}$.

Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,

$$\frac{n! + 2^n}{(3n - \sqrt{n})(n-1)!} = \frac{n!}{n \cdot (n-1)!} \frac{1 + \frac{2^n}{n!}}{(3 - n^{-\frac{1}{2}})} = \frac{n!}{n!} \frac{1 + \frac{2^n}{n!}}{(3 - n^{-\frac{1}{2}})} = \frac{1 + \frac{2^n}{n!}}{(3 - n^{-\frac{1}{2}})} \rightarrow \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3}.$$

- $\lim_n \frac{(6n^2 + 1)((\log_2(n))^3 - n^{-n})}{(n \log_2(n) - \sqrt{n})(n + 3^{-n})(\log_2(n))^2} = 6$.

Infatti, ragionando come nel §7.3, si ha,

$$\begin{aligned} \frac{(6n^2 + 1)((\log_2(n))^3 - n^{-n})}{(n \log_2(n) - \sqrt{n})(n + 3^{-n})(\log_2(n))^2} &= \frac{(n^2) \cdot (\log_2(n))^3}{(n \log_2(n)) \cdot n \cdot (\log_2(n))^2} \frac{(6 + n^{-2})(1 - (\log_2(n))^{-3} \cdot (n^{-n}))}{(1 - \frac{\sqrt{n}}{n \log_2(n)})(1 + (n^{-1}) \cdot (3^{-n}))} = \\ &= \frac{(n^2) \cdot (\log_2(n))^3}{(n^2) \cdot (\log_2(n))^3} \frac{(6 + n^{-2})(1 - (\log_2(n))^{-3} \cdot (n^{-n}))}{(1 - \frac{1}{\sqrt{n} \log_2(n)})(1 + (n^{-1}) \cdot (3^{-n}))} = \\ &= \frac{(6 + n^{-2})(1 - (\log_2(n))^{-3} \cdot (n^{-n}))}{(1 - \frac{1}{\sqrt{n} \log_2(n)})(1 + (n^{-1}) \cdot (3^{-n}))} \rightarrow \frac{(6 + 0)(1 - (0 \cdot 0))}{(1 - 0)(1 + (0 \cdot 0))} = 6. \end{aligned}$$

§7.4

ESERCIZIO. Fissato $a > 1$, calcolare il limite

$$\lim_n \frac{(\log_a(n))^2 3^n - 2^n \sin(n)}{\left(2(\log_a(n)) - \cos(n)\sqrt{\log_a(n)}\right) 2^n \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n \log_a(n) - n^4 \arctan n\right)}.$$

Soluzione:

Dato che:

$$-\frac{2^n}{3^n(\log_a(n))^2} \leq \frac{2^n \sin(n)}{3^n(\log_a(n))^2} \leq \frac{2^n}{3^n(\log_a(n))^2}, \quad \forall n \geq 2,$$

e

$$\frac{2^n}{3^n(\log_a(n))^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{(\log_a(n))^2} \longrightarrow 0 \cdot \frac{1}{+\infty} = 0,$$

dal Teorema di confronto 7.4.2 (vedere [B] §7.4), si ha

$$\frac{2^n \sin(n)}{3^n(\log_a(n))^2} \longrightarrow 0.$$

Dato che:

$$-\frac{1}{\sqrt{\log_a(n)}} \leq \frac{\cos(n)}{\sqrt{\log_a(n)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\log_a(n)}}, \quad \forall n \geq 2,$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{\log_a(n)}} \longrightarrow 0,$$

dal Teorema di confronto 7.4.2 (vedere [B] §7.4), si ha

$$\frac{\cos(n)}{\sqrt{\log_a(n)}} \longrightarrow 0.$$

Dato che:

$$-\frac{\pi}{2} \frac{n^4}{\left(\frac{3}{2}\right)^n (\log_a(n))^2} \leq \frac{n^4 \arctan(n)}{\left(\frac{3}{2}\right)^n (\log_a(n))^2} \leq \frac{\pi}{2} \frac{n^4}{\left(\frac{3}{2}\right)^n (\log_a(n))^2}, \quad \forall n \geq 2,$$

e

$$\frac{\pi}{2} \frac{n^4}{\left(\frac{3}{2}\right)^n (\log_a(n))^2} = \frac{\pi}{2} \frac{n^4}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \frac{1}{(\log_a(n))^2} \longrightarrow \frac{\pi}{2} \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

dal Teorema di confronto 7.4.2 (vedere [B] §7.4), si ha

$$\frac{n^4 \arctan(n)}{\left(\frac{3}{2}\right)^n (\log_a(n))^2} \longrightarrow 0.$$

Si ha allora che,

$$\begin{aligned} & \frac{(\log_a(n))^2 3^n - 2^n \sin(n)}{\left(2(\log_a(n)) - \cos(n)\sqrt{\log_a(n)}\right) 2^n \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n \log_a(n) - n^4 \arctan n\right)} = \\ & \frac{(\log_a(n))^2 3^n}{(\log_a(n)) \cdot 2^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \log_a(n)} \cdot \frac{1 - \frac{2^n \sin(n)}{3^n(\log_a(n))^2}}{\left(2 - \frac{\cos(n)}{\sqrt{\log_a(n)}}\right) \left(1 - \frac{n^4 \arctan n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n \log_a(n)}\right)} = \\ & \frac{1 - \frac{2^n \sin(n)}{3^n(\log_a(n))^2}}{\left(2 - \frac{\cos(n)}{\sqrt{\log_a(n)}}\right) \left(1 - \frac{n^4 \arctan n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n \log_a(n)}\right)} \longrightarrow \frac{1 - 0}{(2 - 0)(1 - 0)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\lim_n \frac{(\log_a(n))^2 3^n - 2^n \sin(n)}{\left(2(\log_a(n)) - \cos(n)\sqrt{\log_a(n)}\right) 2^n \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n \log_a(n) - n^4 \arctan n\right)} = \frac{1}{2}.$$

§7.6

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_n (n^n)^{\frac{1}{n}}, \quad \lim_n (n^n)^{\frac{n+1}{n^2+e^{-n}}}, \quad \lim_n \left(n^{\frac{n^2+1}{n+e^{-n}}}\right)^{\frac{3n+1}{n^2+e^{-n}}}, \quad \lim_n (n^n)^{\frac{1}{\log(n)}}, \quad \lim_n (n^n)^{\frac{3n+1}{n^3+e^{-n}}};$$

$$\lim_n \left(1 \pm \frac{1}{n^2}\right)^{\mp n}, \quad \lim_n \left(1 \pm \frac{1}{n^2}\right)^{\mp n^3}, \quad \lim_n \left(1 \pm \frac{5}{n^2}\right)^{\mp n^2}.$$

Soluzione:

- $\lim_n (n^n)^{\frac{1}{n}} = +\infty$.
Si ha,

$$(n^n)^{\frac{1}{n}} = n \longrightarrow +\infty.$$

- $\lim_n (n^n)^{\frac{n+1}{n^2+e^{-n}}} = +\infty$.
Si ha,

$$(n^n)^{\frac{n+1}{n^2+e^{-n}}} = (n)^{n \frac{n+1}{n^2+e^{-n}}} \longrightarrow (+\infty)^1 = +\infty.$$

- $\lim_n \left(n^{\frac{n^2+1}{n+e^{-n}}}\right)^{\frac{3n+1}{n^2+e^{-n}}} = +\infty$.
Si ha,

$$\left(n^{\frac{n^2+1}{n+e^{-n}}}\right)^{\frac{3n+1}{n^2+e^{-n}}} = (n)^{\frac{n^2+1}{n+e^{-n}} \cdot \frac{3n+1}{n^2+e^{-n}}} \longrightarrow (+\infty)^3 = +\infty.$$

- $\lim_n (n^n)^{\frac{1}{\log(n)}} = +\infty$.
Si ha,

$$(n^n)^{\frac{1}{\log(n)}} = (e)^{n \frac{\log(n)}{\log(n)}} = e^n \longrightarrow +\infty.$$

- $\lim_n (n^n)^{\frac{3n+1}{n^3+e^{-n}}} = 1$.
Si ha,

$$(n^n)^{\frac{3n+1}{n^3+e^{-n}}} = (n)^{n \cdot \frac{3n+1}{n^3+e^{-n}}} = (n)^{\frac{n^2}{n^3} \cdot \frac{3+n^{-1}}{1+n^{-3} \cdot e^{-n}}} = e^{\frac{\log(n)}{n} \cdot \frac{3+n^{-1}}{1+n^{-3} \cdot e^{-n}}} \longrightarrow e^{0 \cdot 3} = 1.$$

- $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n} = 1$.
Si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{n^2}{n}} = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{-\frac{1}{n}}.$$

Usiamo allora il limite (7.6.20) in [B] §7.6, per concludere che

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \longrightarrow e.$$

Possiamo applicare il Teorema in [B] §7.6, con $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \rightarrow e$, $b_n = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$, ovvero

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{-\frac{1}{n}} \longrightarrow e^{-0}.$$

Se ne deduce che

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n} = e^{-0} = 1.$$

- $\lim_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Usando la formula (7.6.20) in [B] §7.6 si ha,

$$\left(1 + \frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2} \longrightarrow e.$$

Se ne deduce, applicando il Teorema in [B] §7.6,

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \longrightarrow e^0 = 1.$$

- $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n^3} = 0.$

Si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n^3} = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n^2 \cdot n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{-n}.$$

Usiamo allora il limite (7.6.20) in [B] §7.6, per concludere che,

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \longrightarrow e.$$

Possiamo applicare il Teorema in [B] §7.6,

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n^3} = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{-n} \longrightarrow e^{-\infty} = 0.$$

Se ne deduce che

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n^3} = e^{-\infty} = 0.$$

- $\lim_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} = 0.$

Ragionando come sopra si ha,

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} = \left[\left(1 + \frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2}\right]^{-n} \longrightarrow e^{-\infty} = 0.$$

- $\lim_n \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{-n^2} = e^{-5}$.

Ragionando come sopra si ha,

$$\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{-n^2} = \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{-\frac{5n^2}{5}} = \left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n^2}{5}\right)}\right)^{\frac{n^2}{5}}\right]^{-5} \longrightarrow e^{-5}.$$

- $\lim_n \left(1 - \frac{5}{n^2}\right)^{n^2} = e^{-5}$.

Ragionando come sopra si ha,

$$\left(1 - \frac{5}{n^2}\right)^{n^2} = \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{n^2}{5}}\right)^{-\frac{n^2}{5}}\right]^{-5} \longrightarrow e^{-5}$$

■

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_n \frac{(n+5)! \cdot (n+\pi)^{(n+2)}}{n^{n+6}[(n+1)! + 5^n]}, \quad \lim_n \frac{(n+3)^{n+1} \log(n)}{n(n^n \log(n) + 1)},$$

$$\lim_n \frac{(n+3)^{n+1} \log(n) - (n!) \sin(3n+2) \cos(n)}{n\sqrt{\log(n)}(n^n \sqrt{\log(n)} - 4 \arctan(\log(n)))}.$$

Soluzione:

- $\lim_n \frac{(n+5)! \cdot (n+\pi)^{(n+2)}}{n^{n+6}[(n+1)! + 5^n]} = e^\pi$.

Si ha,

$$\begin{aligned} \frac{(n+5)! \cdot (n+\pi)^{(n+2)}}{n^{n+6}[(n+1)! + 5^n]} &= \frac{(n+5)!}{[(n+1)! + 5^n]} \cdot \frac{(n+\pi)^{(n+2)}}{n^{n+6}} = \frac{(n+5)!}{(n+1)! \left[1 + \frac{5^n}{(n+1)!}\right]} \frac{(n+\pi)^n}{n^n} \frac{(n+\pi)^2}{n^6} = \\ &= \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)}{\left[1 + \frac{5^n}{(n+1)!}\right]} \frac{n^2}{n^6} \left(1 + \frac{\pi}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{\pi}{n}\right)^n = \\ &= \frac{n^4 \left(1 + \frac{5}{n}\right) \left(1 + \frac{4}{n}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n^4 \left[1 + \frac{5^n}{(n+1)!}\right]} \left(1 + \frac{\pi}{n}\right)^2 \left[\left(1 + \frac{\pi}{n}\right)^{\frac{n}{\pi}}\right]^\pi \longrightarrow \\ &= 1 \cdot \frac{(1+0)(1+0)(1+0)(1+0)}{(1+0)} \cdot (1+0)^2 \cdot e^\pi = e^\pi. \end{aligned}$$

- $\lim_n \frac{(n+3)^{n+1} \log(n)}{n(n^n \log(n) + 1)} = e^3$.

Si ha,

$$\begin{aligned} \frac{(n+3)^{n+1} \log(n)}{n(n^n \log(n) + 1)} &= \frac{(n+3)^{n+1} \log(n)}{n^{n+1} \log(n) (1 + (n^n \log(n))^{-1})} = \left(\frac{n+3}{n}\right)^n \frac{n+3}{n} \frac{1}{(1 + (n^n \log(n))^{-1})} = \\ &= \left[\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3 \frac{n+3}{n} \frac{1}{(1 + (n^n \log(n))^{-1})} \longrightarrow e^3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+0} = e^3. \end{aligned}$$

- $\lim_n \frac{(n+3)^{n+1} \log(n) - (n!) \sin(3n+2) \cos(n)}{n^n \sqrt{\log(n)} (n^n \sqrt{\log(n)} - 4 \arctan(\log(n)))} = e^3.$

Si ha,

$$\begin{aligned} & \frac{(n+3)^{n+1} \log(n) - (n!) \sin(3n+2) \cos(n)}{n^n \sqrt{\log(n)} (n^n \sqrt{\log(n)} - 4 \arctan(\log(n)))} = \\ & \frac{(n+3)^{n+1} \log(n)}{n^{n+1} \log(n)} \cdot \frac{1 - \frac{(n!) \sin(3n+2) \cos(n)}{(n+3)^{n+1} \log(n)}}{1 - \frac{4 \arctan(\log(n))}{n^n \sqrt{\log(n)}}} \rightarrow e^3 \left(\frac{1-0}{1-0} \right) = e^3, \end{aligned}$$

dove si sono usati i seguenti limiti:

$$\frac{(n+3)^{n+1} \log(n)}{n^{n+1} \log(n)} \rightarrow e^3$$

la dimostrazione essendo identica a quella dell' esercizio precedente,

$$\begin{aligned} & \frac{(n!) \sin(3n+2) \cos(n)}{(n+3)^{n+1} \log(n)} \rightarrow 0, \\ & \frac{4 \arctan(\log(n))}{n^n \sqrt{\log(n)}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

che si ottengo come segue:

$$-\frac{n!}{n^n} \leq -\frac{(n!)}{(n+3)^{n+1} \log(n)} \leq \frac{(n!) \sin(3n+2) \cos(n)}{(n+3)^{n+1} \log(n)} \leq \frac{(n!)}{(n+3)^{n+1} \log(n)} \leq \frac{n!}{n^n}$$

e la conclusione segue facilmente dal Teorema del confronto 7.4.2. in [B] §7.4 e dai limiti notevoli del §7.3;

$$-\frac{\pi}{2} \frac{4}{n^n \sqrt{\log(n)}} \leq \frac{4 \arctan(\log(n))}{n^n \sqrt{\log(n)}} \leq \frac{\pi}{2} \frac{4}{n^n \sqrt{\log(n)}} \rightarrow 0,$$

e la conclusione segue facilmente dal Teorema del confronto 7.4.2. in [B] §7.4.

■