Analisi Matematica 1

C. L. Ingegneria - Università di Roma "Tor Vergata"

Prova scritta online - 14 Settembre 2020

SOLUZIONI

Esercizio 1. Per $A > 0$ calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{A^2}{6x} - 1 + 3^{-x}\left(2+\cos\left(\frac{A}{x}\right)\right)^x\right)\left(x^2+\log^2(x)\right).$$

Dato che per $t \to 0$,

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3), \quad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

ne segue che per $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
\left(2+\cos\left(\frac{A}{x}\right)\right)^x &= \left(3 - \frac{A^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^x = 3^x\left(1 - \frac{A^2}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^x \\
&= 3^x \exp\left(x\log\left(1 - \frac{A^2}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right) \\
&= 3^x \exp\left(x\left(-\frac{A^2}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right) \\
&= 3^x \exp\left(-\frac{A^2}{6x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= 3^x\left(1 - \frac{A^2}{6x} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{A^2}{6x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{A^2}{6x} - 1 + 3^{-x}\left(2+\cos\left(\frac{A}{x}\right)\right)^x = \frac{A^2}{6x} - 1 + 1 - \frac{A^2}{6x} + \frac{A^4}{72x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{A^4}{72x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Inoltre

$$x^2 + \log^2(x) = x^2\left(1 + o(1)\right).$$

Così possiamo concludere che per $x \to +\infty$,

$$\left(\frac{A^2}{6x} - 1 + 3^{-x}\left(2+\cos\left(\frac{A}{x}\right)\right)^x\right)\left(x^2+\log^2(x)\right) = \left(\frac{A^4}{72} + o(1)\right)(1+o(1)) \to \frac{A^4}{72}.$$

Esercizio 2. Per $A > 0$ determinare gli intervalli di crescenza/decrescenza della seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - A^3}}{|x - A|}.$$

La funzione è continua nel dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{A\}$.

i) Per $x > A$,

$$f'(x) = \frac{\frac{3x^2}{3}(x^3 - A^3)^{-2/3}(x - A) - (x^3 - A^3)^{1/3}}{(x - A)^2} = \frac{A(A^2 - x^2)}{(x^3 - A^3)^{2/3}(x - A)^2}.$$

Risolvendo la disuguaglianza $f'(x) \geq 0$, ossia

$$\begin{cases} x > A \\ A^2 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > A \\ x \in [-A, A] \end{cases} \quad \text{(non ci sono soluzioni)}$$

si ottiene che f è decrescente in $(A, +\infty)$.

ii) Per $x < A$,

$$f'(x) = -\frac{A(A^2 - x^2)}{(x^3 - A^3)^{2/3}(x - A)^2}.$$

Risolvendo la disuguaglianza $f'(x) \geq 0$, ossia

$$\begin{cases} x < A \\ A^2 - x^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < A \\ x \in (-\infty, -A] \cup [A, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -A]$$

si ottiene che f è crescente in $(-\infty, -A]$ e f è decrescente in $[-A, A)$.

Riassumendo, f è crescente in $(-\infty, -A]$ e f è decrescente in $[-A, A)$ e in $(A, +\infty)$.

Esercizio 3. Determinare le primitive della funzione

$$f(x) = \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$$

e calcolare per $A > 0$ il seguente integrale improprio

$$\int_A^{+\infty} \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\, dx.$$

Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ e successivamente integrando due volte per parti si ha

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\, dx &= \int te^{-t}\,(2tdt) = 2\int t^2e^{-t}\, dt \\
&= 2\int t^2(-e^{-t})'dt = -2t^2e^{-t} + 4\int te^{-t}dt \\
&= -2t^2e^{-t} + 4\int t(-e^{-t})'dt = -2t^2e^{-t} - 4te^{-t} + 4\int e^{-t}dt \\
&= -2t^2e^{-t} - 4te^{-t} - 4e^{-t} + c = -2(x + 2\sqrt{x} + 2)e^{-\sqrt{x}} + c.
\end{aligned}$$

Quindi l'integrale improprio vale

$$\begin{aligned}
\int_A^{+\infty} \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\, dx &= \lim_{x\to+\infty} \left(-2(x + 2\sqrt{x} + 2)e^{-\sqrt{x}}\right) - \left(-2(A + 2\sqrt{A} + 2)e^{-\sqrt{A}}\right) \\
&= 2(A + 2\sqrt{A} + 2)e^{-\sqrt{A}}.
\end{aligned}$$