## Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
## Analisi Matematica I – Prova scritta del 29/01/2020

| | |
|---|---|
| **Cognome**: (in STAMPATELLO) | |
| **Nome**: (in STAMPATELLO) | |
| **Matricola**: | |
| **Titolare del corso**: | |
| **Esame orale**: | |

| Esercizio | Punteggio |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| **Totale** | |

A/B/C/D

---

**Esercizio 1.** [**4 punti**] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 6$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \sin(e^{ax^2} - \cos(\sqrt{2}x)), \qquad f(x) = \sin(\cos(\sqrt{2}x) - e^{ax^2}).$$

$[a = 1, -2]$

*Svolgimento:* Utilizziamo lo sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3), \qquad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \frac{y^6}{720} + o(y^7), \qquad \sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4).$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} e^{ax^2} - \cos(\sqrt{2}x) &= 1 + ax^2 + \frac{a^2}{2}x^4 + \frac{a^3}{6}x^6 - 1 + x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{90}x^6 + o(x^6) \\ &= (1+a)x^2 + \frac{3a^2-1}{6}x^4 + \frac{1+15a^3}{90}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \sin(e^{ax^2} - \cos(\sqrt{2}x)) &= (1+a)x^2 + \frac{3a^2-1}{6}x^4 + \frac{1+15a^3}{90}x^6 - \frac{1}{6}\Big((1+a)x^2 + o(x^3)\Big)^3 + o(x^6) \\ &= (1+a)x^2 + \frac{3a^2-1}{6}x^4 + \frac{-14-45a(a+1)}{90}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): ......................................... Nome (in STAMPATELLO):.........................................

**Esercizio 2. [7 punti]** Data la funzione

$$f(x) = \frac{\left(x+\cos\sqrt{2x}\right)^{\frac{a}{x}}-1}{\log(1+x)}(ax+b),$$

calcolare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$[(a,b) = (2,5),(3,4),(4,3),(5,1)]$

*Svolgimento:* Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5).$$

Per $x \to 0^+$ si ha:

$$x + \cos\sqrt{2x} = x + 1 - x + \frac{x^2}{6} + o(x^2) = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\left(x+\cos\sqrt{2x}\right)^{\frac{a}{x}} &= \left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^{\frac{a}{x}} = e^{\frac{a}{x}\log(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2))} = e^{\frac{a}{x}(\frac{x^2}{6}+o(x^2))}\\ &= e^{\frac{a}{6}x+o(x)} = 1 + \frac{a}{6}x + o(x).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{a}{6}x+o(x)}{x+o(x)}(b+o(1)) = \frac{ab}{6}.$$

D'altra parte, per $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned}\left(x+\cos\sqrt{2x}\right)^{\frac{a}{x}} &= x^{\frac{a}{x}}\left(1+\frac{\cos\sqrt{2x}}{x}\right)^{\frac{a}{x}} = e^{a\frac{\log x}{x}} e^{\frac{a}{x}\log(1+\frac{\cos\sqrt{2x}}{x})}\\ &= e^{a\frac{\log x}{x}} e^{a\frac{\cos\sqrt{2x}}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})}\\ &= \left(1+a\frac{\log x}{x}+o\Big(\frac{\log x}{x}\Big)\right)\left(1+\frac{\cos\sqrt{2x}}{x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\right)\\ &= 1+a\frac{\log x}{x}+o\Big(\frac{\log x}{x}\Big),\end{aligned}$$

$$\log(1+x) = \log x + \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \log x + o(\log x), \quad ax+b = ax+o(x).$$

Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a\frac{\log x}{x}+o\big(\frac{\log x}{x}\big)}{\log x+o(\log x)}(ax+o(x)) = a^2.$$

Cognome (in STAMPATELLO): ......................................... Nome (in STAMPATELLO):.........................................

**Esercizio 3.** **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \log |(a+1)e^x - ae^{2x}|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

*Svolgimento:* Dominio: $\{x \in \mathbb{R} \mid (a+1)e^x - ae^{2x} \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\log \frac{a+1}{a}\}$.

$$\lim_{x \to (\log \frac{a+1}{a})^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to (\log \frac{a+1}{a})^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$f(x) = \log((a+1)e^x - ae^{2x}) = x + \log((a+1) - ae^x) = x + \log(a+1) \text{ per } x \to -\infty.$$
$$f(x) = \log(ae^{2x} - (a+1)e^x) = 2x + \log(a - (a+1)e^{-x}) = 2x + \log a \text{ per } x \to +\infty.$$

$\boxed{x = \log \frac{a+1}{a} \text{ asintoto verticale.}}$

$\boxed{y = x + \log(a+1) \text{ asintoto orizzontale a } -\infty,\ y = 2x + \log a \text{ asintoto obliquo } +\infty.}$

Per $x \neq \log \frac{a+1}{a}$: $f'(x) = \frac{(a+1)e^x - 2ae^{2x}}{(a+1)e^x - ae^{2x}}$, pertanto $f$ è crescente per $x \leq \log \frac{a+1}{2a}$ e per $x > \log \frac{a+1}{a}$ e $f$ è decrescente per $\log \frac{a+1}{2a} \leq x < \log \frac{a+1}{a}$.

$\boxed{x = \log \frac{a+1}{2a} \text{ punto di massimo relativo, } f(\log \frac{a+1}{2a}) = \log \frac{(a+1)^2}{4a}.}$

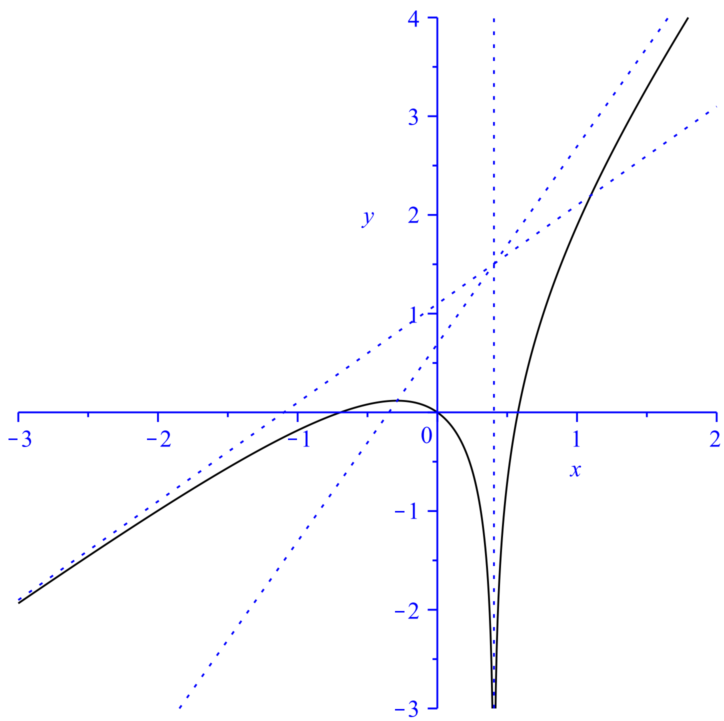


Figura 1. Caso $a = 2$: grafico di $f(x) = \log |3e^x - 2e^{2x}|$.

Cognome (in STAMPATELLO): ........................................ Nome (in STAMPATELLO):........................................

**Esercizio 4. [6 punti]** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{1/a} \sqrt{x}\arcsin(1-ax)dx, \qquad \left[\int_0^{1/a} \sqrt{x}\arcsin(ax-1)dx\right].$$

$[a=4,2]$

*Svolgimento:* Integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\arcsin(1-ax)dx &= \int \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)' \arcsin(1-ax)dx \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\arcsin(1-ax) - \frac{2}{3}\int x^{3/2}\frac{-a}{\sqrt{1-(1-ax)^2}}dx = \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\arcsin(1-ax) - \frac{2}{3\sqrt{a}}\int \frac{-ax}{\sqrt{2-ax}}dx \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\arcsin(1-ax) - \frac{2}{3\sqrt{a}}\int \left(\sqrt{2-ax} - \frac{2}{\sqrt{2-ax}}\right)dx \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\arcsin(1-ax) + \frac{4}{9a\sqrt{a}}(2-ax)^{3/2} - \frac{8}{3a\sqrt{a}}\sqrt{2-ax} + c\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_0^{1/a} \sqrt{x}\arcsin(1-ax)dx = \frac{4}{9a\sqrt{a}} - \frac{8}{3a\sqrt{a}} - \frac{8\sqrt{2}}{9a\sqrt{a}} + \frac{8\sqrt{2}}{3a\sqrt{a}} = -\frac{20}{9a\sqrt{a}} + \frac{16\sqrt{2}}{9a\sqrt{a}}.$$

Cognome (in `STAMPATELLO`): .......................................... Nome (in `STAMPATELLO`):..........................................

---

**Esercizio 5. [5 punti]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 e^{-x}}{\sqrt{a+e^{-x}}} \\ y(0) = \dfrac{1}{1+2b} \end{cases}.$$

$[(a,b) = (3,2),(8,3),(1,\sqrt{2}),(2,\sqrt{3})]$

*Svolgimento:* L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{a+e^{-x}}}dx.$$

Risolviamo il primo integrale:

$$\int \frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{y} + c.$$

Risolviamo il secondo integrale: con la sostituzione $e^{-x} = t$ si ha

$$\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{a+e^{-x}}}dx = -\int \frac{1}{\sqrt{a+t}}dt = -2\sqrt{a+t} + c = -2\sqrt{a+e^{-x}} + c.$$

Pertanto

$$-\frac{1}{y} = -2\sqrt{a+e^{-x}} + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{1+2b}$ si ottiene $c = -1-2b+2\sqrt{a+1}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{a+e^{-x}} + 1 + 2b - 2\sqrt{a+1}}.$$