Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 17/02/2020

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [7 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(e^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\right)^{an}-\frac{\sqrt{n^2+1}}{n-\frac{a}{2}}\right]n^2.$$

$[a=\mp 6, \mp 2]$

<u>*Svolgimento:*</u> Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y\to 0$:

$$e^y=1+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^6),\quad \log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+o(y^2),\quad \sqrt{1+y}=1+\frac{y}{2}+o(y),\quad \frac{1}{1-y}=1+y+y^2+o(y^2).$$

Si ha:

$$\log\left(e^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\right)=\log\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right)=\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{6n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$$

da cui segue

$$\left(e^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\right)^{an}=\exp\left(an\log\left(e^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\right)\right)=\exp\left(\frac{a}{2n}-\frac{a}{6n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)$$
$$=1+\frac{a}{2n}-\frac{a}{6n^2}+\frac{a^2}{8n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

D'altra parte

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n-\frac{a}{2}}=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\frac{1}{1-\frac{a}{2n}}=\left(1+\frac{1}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\left(1+\frac{a}{2n}+\frac{a^2}{4n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)$$
$$=1+\frac{a}{2n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{a^2}{4n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Pertanto

$$\left(e^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\right)^{an}-2\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n-a}=-\frac{a}{6n^2}+\frac{a^2}{8n^2}-\frac{1}{2n^2}-\frac{a^2}{4n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)=\frac{-12-4a-3a^2}{24n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$\frac{-12-4a-3a^2}{24}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 2. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - a^2 - 1}{|x| - a}\right) - |x|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = \sqrt{6}, \sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{2}]$

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$. f è pari. Risulta:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \frac{\pi}{2} - a, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\frac{\pi}{2} - a,$$
$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - a^2 - 1}{x - a}\right) - x = -x + \frac{\pi}{2} + o(1) \text{ per } x \to +\infty.$$

$\boxed{y = -x + \frac{\pi}{2} \text{ asintoto obliquo a } +\infty,\ y = x + \frac{\pi}{2} \text{ asintoto obliquo a } -\infty.}$

Per $0 < x < a$ e $x > a$: $f'(x) = \frac{x^2-2ax+a^2+1}{(x-a)^2+(x^2-a^2-1)^2} - 1 = \frac{1-(x^2-a^2-1)^2}{(x-a)^2+(x^2-a^2-1)^2}$, pertanto f è crescente per $a < x \leq \sqrt{a^2+2}$ e f è decrescente $0 \leq x < a$ e $x \geq \sqrt{a^2+2}$.

$\boxed{x = \sqrt{a^2+2} \text{ punto di massimo relativo, } f(\sqrt{a^2+2}) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+2}-a}\right) - \sqrt{a^2+2}.}$

Inoltre

$$\lim_{x\to a^-} f'(x) = \lim_{x\to a^+} f'(x) = 0, \qquad f'_+(0) = \frac{-a^4 - 2a^2}{a^4 + 3a^2 + 1}.$$

Dato che f è pari si ha $f'_-(0) = -\frac{-a^4-2a^2}{a^4+3a^2+1}$ e $x = 0$ è un punto angoloso. In particolare $x = 0$ è il massimo di f.

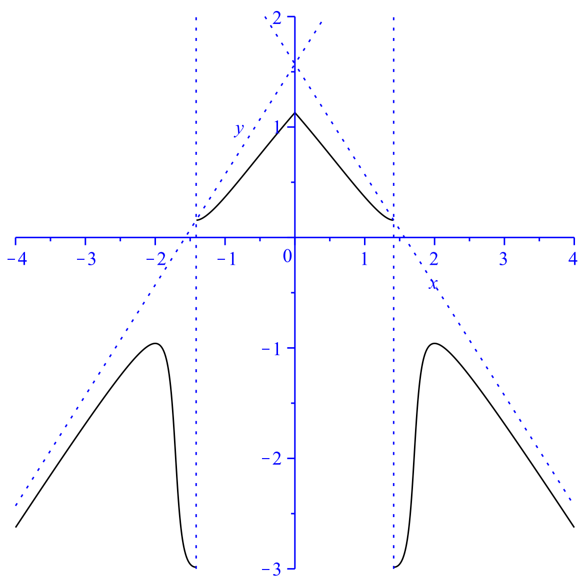

FIGURA 1. Caso $a = \sqrt{2}$: grafico di $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - 3}{|x| - \sqrt{2}}\right) - |x|$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [**4 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{\pm\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\cos x)}{|\sin(2x)|^\alpha} dx. \qquad \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\sin x)}{|\sin(2x)|^\alpha} dx, \quad \int_{-\pi/2}^{0} \frac{\log(1+\sin x)}{|\sin(2x)|^\alpha} dx\right].$$

Svolgimento: Consideriamo il primo integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\cos x)}{|\sin(2x)|^\alpha} dx.$$

Risulta:

$$f(x) = \frac{2\log x}{2^\alpha x^\alpha}(1+o(1)) \text{ per } x \to 0^+.$$

Quindi f è integrabile in $(0, \frac{\pi}{4})$ se e solo se $\alpha < 1$.
D'altra parte

$$f(x) = \frac{-\cos x}{2^\alpha \sin^\alpha x \cos^\alpha x}(1+o(1)) = \frac{-(\cos x)^{1-\alpha}}{2^\alpha}(1+o(1)) = -\frac{1}{2^\alpha}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^{1-\alpha}$$
$$= \frac{1}{2^\alpha}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{1-\alpha} \text{ per } x \to \frac{\pi}{2}^-$$

Quindi f è integrabile in $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ se e solo se $\alpha < 2$.

Pertanto f è integrabile in $(0, \frac{\pi}{2})$ se e solo se $\alpha < 1$.

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):...

Esercizio 4. **[6 punti]** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\pm\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\log(1-\cos x)dx. \quad \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\log(1-\sin x)dx, \quad \int_{-\pi/2}^{0} \sin(2x)\log(1+\sin x)dx\right].$$

Svolgimento: Consideriamo il primo integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\log(1-\cos x)dx.$$

Usando la sostituzione $t = \cos x$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\log(1-\cos x)dx &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \log(1-\cos x)dx \\ &= 2\int_0^1 t\log(1-t)dt\end{aligned}$$

Integrando per parti

$$\begin{aligned}\int t\log(1-t)dt = \int \left(\frac{t^2}{2}\right)' \log(1-t)dt &= \frac{t^2}{2}\log(1-t) + \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1-t}dt \\ &= \frac{t^2}{2}\log(1-t) - \frac{1}{2}\int \left(t+1-\frac{1}{1-t}\right)dt \\ &= \frac{t^2}{2}\log(1-t) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} - \frac{\log(1-t)}{2} + c.\end{aligned}$$

Si conclude:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\log(1-\cos x)dx &= 2\int_0^1 t\log(1-t)dt \\ &= 2\lim_{t\to 1^-}\left(\frac{t^2-1}{2}\log(1-t) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right) \\ &= -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x(x+2)(y-a)}{1+x^2} \\ y(0) = b \end{cases}.$$

$[(a,b) = (3,1), (4,1), (4,2), (5,2)]$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int \frac{1}{y-a}dy = \int \frac{x(x+2)}{1+x^2}dx.$$

Risolviamo il primo integrale:

$$\int \frac{1}{y-a}dy = \log|y-a| + c.$$

Risolviamo il secondo integrale:

$$\int \frac{x(x+2)}{1+x^2}dx = \int \Big(1 - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}\Big)dx = x - \arctan x + \log(1+x^2) + c.$$

Pertanto

$$\log|y-a| = x - \arctan x + \log(1+x^2) + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = b$ si ottiene: $c = \log|b-a| = \log(a-b)$ (essendo $b < a$). Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = a - (a-b)e^{x - \arctan x + \log(1+x^2)} = a - (a-b)(1+x^2)e^{x - \arctan x}.$$