

(3.27)

(3.28, 3.29)

***3.28** - Quanto vale la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n$?

Se nella nota formula (3.25.3) che fornisce tale sviluppo si pone $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 1$, risulta immediatamente che la somma richiesta vale r^n .

***3.29** - Somme delle potenze simili dei numeri naturali

Detto r un numero intero non negativo, ci proponiamo di indicare un procedimento di calcolo della somma $\sigma_r(n)$ delle potenze r -esime dei primi n numeri naturali:

$$\sigma_r(n) = 1^r + 2^r + \dots + n^r.$$

A tale scopo partiamo dalla formula

$$(h+1)^r - h^r = \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} h^{r-k};$$

poniamo in essa successivamente $h = 1, 2, 3, \dots, n$ e poi sommiamo membro a membro le relazioni ottenute. Si perviene così alla:

$$\sum_{h=1}^n [(h+1)^r - h^r] = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} h^{r-k}.$$

Il primo membro vale evidentemente $(n+1)^r - 1^r$; il secondo vale $\sum_{k=1}^r \binom{r}{k} \sum_{h=1}^n h^{r-k} = \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} \sigma_{r-k}(n)$, e si ha pertanto la relazione fondamentale

$$(3.29.1) \quad \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} \sigma_{r-k}(n) = (n+1)^r - 1$$

dalla quale si può dedurre il calcolo di tutte le $\sigma_n(n)$.

Se infatti si pone nella (3.29.1) successivamente $r = 1, 2, 3, 4, \dots$ si ottengono le

$$\begin{aligned} \sigma_0(n) &= n, \\ 2\sigma_1(n) + \sigma_0(n) &= (n+1)^2 - 1, \\ 3\sigma_2(n) + 3\sigma_1(n) + \sigma_0(n) &= (n+1)^3 - 1, \\ 4\sigma_3(n) + 6\sigma_2(n) + 4\sigma_1(n) + \sigma_0(n) &= (n+1)^4 - 1, \\ &\dots \end{aligned}$$

dalle quali si ricava

$$\sigma_0(n) = n, \sigma_1(n) = n(n+1)/2, \sigma_2(n) = n(n+1)(2n+1)/6, \sigma_3(n) = n^2(n+1)^2/4, \dots$$

Dimostri il lettore che risulta

$$\sigma_4(n) = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30.$$

Esse valgo

$$8\sigma_3(n) + 12\sigma_2(n)$$

vale a dire (§

n(2