

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

$$y(x) = 3 e^{2x} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y'(x) = 6 e^{2x}$$

$$y'(x) = 2y(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$y'(x) = \lambda y(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

CAMBIA MO VARIABILE

$$y(x) = z(x) e^{\lambda x}$$

$$y'(x) = \lambda y(x)$$

$$y(x) = z(x)e^{\lambda x}$$

L'INCOGNITA ORA È $z(x)$

$$(z(x)e^{\lambda x})' = \lambda(z(x)e^{\lambda x})$$

$$z'(x)e^{\lambda x} + \cancel{\lambda z(x)e^{\lambda x}} = \cancel{\lambda z(x)e^{\lambda x}}$$

$$z'(x) \cdot e^{\lambda x} = 0 \iff$$

$$z'(x) = 0 \quad \forall x$$

$$\implies z(x) = \text{costante}$$

$$z(x) = c$$

$$y(x) = c e^{\lambda x}$$

Se

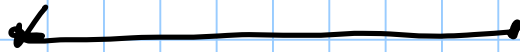
$$c = 0$$

$$y(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

È

SOLUZIONE di

$$y'(x) = \lambda y(x)$$



FISSANDO IL DATO INIZIALE

SI TROVA UNA SOLA
SOLUZIONE

$$\begin{cases} y'(x) = 3y(x), x \in \mathbb{R} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

$$y(x) = c e^{3x}, x \in \mathbb{R}$$

$$c e^{3 \cdot 1} = 3 \Rightarrow c = 3 e^{-3}$$

$$y(x) = 3 e^{3(x-1)} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

$$Y(x) = c e^{\lambda x}$$

$$c e^{\lambda \cdot 1} = 3 \quad \Rightarrow \quad c = 3 e^{-\lambda}$$

$$Y(x) = 3 e^{\lambda(x-1)}$$

PROBLEMA di CAUCHY ($\exists \mathbb{R} Y' = \lambda Y$)
 $\lambda \neq 0$

$$(P) \quad \begin{cases} Y'(x) = \lambda Y(x), x \in \mathbb{R} \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

TROVARE $Y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, DERIVABILE

$$: Y'(x) = \lambda Y(x), x \in \mathbb{R} \text{ e } Y(x_0) = Y_0$$

$$Y(x) = c e^{\lambda x}$$

$$c e^{\lambda x_0} = Y_0 \quad \rightarrow \quad c = Y_0 e^{-\lambda x_0}$$

$$y(x) = y_0 e^{\lambda(x-x_0)}, x \in \mathbb{R}$$

LA SOLUZIONE È UNICA

DIMOSTRAZIONE

SUPPONIAMO PER ASSURDO

CHE ESISTANO y_1, y_2 :

$$\begin{cases} y_1' = \lambda y_1, & x \in \mathbb{R} \\ y_1(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2' = \lambda y_2, & x \in \mathbb{R} \\ y_2(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\text{e } y_1 \neq y_2$$

$$W(x) = y_1(x) - y_2(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} W'(x) &= y_1'(x) - y_2'(x) = \lambda (y_1(x) - y_2(x)) \\ &= \lambda W(x) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} W'(x) = \lambda W(x) \\ W(x_0) = 0 \end{cases}$$

$$W(x_0) = \gamma_1(x_0) - \gamma_2(x_0) = \gamma_0 - \gamma_0 = 0$$

$$e^{-\lambda x} W'(x) = e^{-\lambda x} \lambda W(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$e^{-\lambda x} W'(x) - \lambda e^{-\lambda x} W(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\left(e^{-\lambda x} W(x) \right)' = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda x} W(x) = \text{costante}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$e^{-\lambda x} W(x) = c$$

$$e^{-\lambda x_0} W(x_0) = c$$

$$e^{-\lambda x_0} \cdot 0 = c \Rightarrow c = 0$$

$$e^{-\lambda x} W(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$W(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y_1(x) = y_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

ASSURD O 

NOTA : $y'(x) = \lambda y(x)$

$$e^{-\lambda x} y'(x) = e^{-\lambda x} \lambda y(x)$$

$$(e^{-\lambda x} y(x))' = 0$$

$$e^{-\lambda x} y(x) = c$$

$$y(x) = c e^{-\lambda x}$$



Equazioni DIFFERENZIALI LINEARI OMOGONEE del 1° ORDINE

I Intervallo,

$$C^0(I) = \left\{ \text{Insieme delle} \right. \\ \left. \text{funzioni continue in } I \right\}$$

$$a_0 \in C^0(I)$$

$$y'(x) = a_0(x) y(x), \quad x \in I$$

CERCHIAMO UNA SOLUZIONE
DEL TIPO

$$y(x) = c e^{A(x)}$$

$$(c e^{A(x)})' = a_0(x) (c e^{A(x)})$$

$$\cancel{c} A'(x) \cancel{e^{A(x)}} = a_0(x) \cancel{c} \cancel{e^{A(x)}}$$

$$A'(x) = a_0(x)$$

Sia $A(x)$ una PRIMITIVA
FISSATA di a_0

ALLORA $y(x) = c e^{A(x)}$

$$\left[A(x) = \int a_0(x) dx \right]$$

$$y'(x) = \log(x) y(x), \quad x \in (0, +\infty)$$

$$I = (0, +\infty)$$

$$\int \log(x) dx =$$

$$= x \log(x) - x + c; \quad A(x) = x \log(x) - x$$

$$y(x) = c e^{x \log(x) - x} =$$

$$= c x^x e^{-x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y'(x) = a_0(x) y(x), & x \in I \\ y(x_0) = y_0, & x_0 \in I \end{cases}$$

$$y(x) = c e^{\int a_0(x) dx}$$

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x a_0(t) dt}$$

$$y(x_0) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x_0} a_0(t) dt}$$

$$= y_0$$

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x a_0(t) dt}, x \in I$$

ALTRO MODO $y(x) = c e^{A(x)}$

$A(x)$ una PRIMITIVA FISSATA

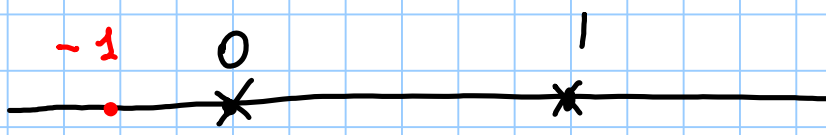
$$y(x_0) = y_0 \rightarrow c e^{A(x_0)} = y_0 \rightarrow c = y_0 e^{-A(x_0)}$$

$$y(x) = y_0 e^{A(x) - A(x_0)} \quad x \in I$$

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{x^2 - x} y(x) \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

$$a_0(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

condizione iniziale in $x_0 = -1$

$$\frac{1}{x^2 - x}$$


$$\text{dom}(a_0) = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$I = (-\infty, 0)$$

$$y'(x) = a_0(x) y(x), \quad x \in (-\infty, 0)$$

$$\begin{aligned} \int a_0(x) dx &= \int \frac{dx}{x^2 - x} = \int \frac{dx}{x(x-1)} = \\ &= - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= \log \left| \frac{x-1}{x} \right| + c \end{aligned}$$

$$A(x) = \log \left| \frac{x-1}{x} \right|$$

$$\left| \frac{x-1}{x} \right| = \frac{x-1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0)$$

$$y(x) = c e^{\log\left(\frac{x-1}{x}\right)}, x \in (-\infty, 0)$$

$$= c \frac{x-1}{x}; \quad y(-1) = 2$$

$$c \frac{-1-1}{-1} = 2 \rightarrow c = 1$$

$$y(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x},$$

$$x \in (-\infty, 0) = I$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI NON OMogenee del 1° ORDINE

$$\{a_0, a_1\} \subset C^0(I)$$

$$y'(x) = a_0(x)y(x) + a_1(x), x \in I$$

$$\tilde{y}(x) = C e^{A(x)}, \quad A(x) \text{ una primitiva di } a_0(x)$$

SOLUZIONE SE $a_1(x) \equiv 0$

METODO DI VARIAZIONE DELLA COSTANTE

$$y(x) = z(x) e^{A(x)};$$

DETERMINIAMO L'EQUAZIONE PER
 $z(x)$

$$\begin{aligned} \left(z(x) e^{A(x)} \right)' &= a_0(x) \left(z(x) e^{A(x)} \right) \\ &+ a_1(x), \quad x \in I \end{aligned}$$

$$z'(x) e^{A(x)} + \cancel{z(x) a_0(x) e^{A(x)}} = \cancel{a_0(x) z(x) e^{A(x)}} + a_1(x)$$

$$z'(x) = a_1(x) e^{-A(x)}, \quad x \in I$$

$$z(x) = \int a_1(x) e^{-A(x)} dx$$

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} a_1(x) dx$$

$A(x)$ = una PRIMITIVA FISSATA
di $a_0(x)$

$$y(x) = e^{A(x)} \int a_1(x) e^{-A(x)} dx$$

INTEGRALE INDEFINITO
CONTIENE LA COSTANTE ARBITRARIA.

$$y' = y + 3$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$\int a_0(x) dx = \int 1 dx = x + c; \quad A(x) = x$$

FISSIAMO A

$$y(x) = e^x \int a_1(x) e^{-x} dx$$

$$= e^x \int 3e^{-x} dx =$$

$$= e^x [-3e^{-x} + c]$$

$$y(x) = ce^x - 3 = \tilde{y}(x) + y_p(x)$$

IN GENERALE

TUTTE LE SOLUZIONI di

$$y' = a_0(x)y + a_1(x) \quad x \in I$$

Sono del Tipo

$$y(x) = \tilde{y}(x) + y_p(x)$$

dove $\tilde{y}$ è Soluzione di $y' = a_0(x)y$

(EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA)

e $y_p(x)$ è una soluzione qualunque di $y' = a_0(x)y + a_1$

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} a_1(x) dx =$$

$$= e^{A(x)} \left[\int_{x_0}^x e^{-A(t)} a_1(t) dt + c \right]$$

$$= c e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^x e^{-A(t)} a_1(t) dt$$

$\tilde{y}'(x)$
 $x_0 \in I$ qualunque

$y'_p(x)$
SOLUZIONE
PARTICOLARE

NOTARE infatti che $y_p(x) = -3, \forall x$
è SOLUZIONE di $y'(x) = y(x) + 3$

ESISTONO INFINITE SOLUZIONI
di $y' = y + 3$, ma fissandoci

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + 3 & , x \in \mathbb{R} \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

DATO INIZIALE

$$y(x) = -3 + c e^x$$

$$-3 + ce^2 = 1 \quad ; \quad c = 4e^{-2}$$

$$y(x) = -1 + 4e^{x-2}$$

LA SOLUZIONE È UNICA

$$\begin{cases} y' = a_0(x)y + a_1(x) & , x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$A(x)$ una PRIMITIVA FISSATA di $a_0(x)$

$$y(x) = e^{A(x)} \left[\int_{x_0}^x e^{-A(t)} a_1(t) dt + c \right]$$

$$= \underbrace{c e^{A(x)}}_{\tilde{y}(x)} + \underbrace{e^{A(x)}}_{y_p(x)} \int_{x_0}^x e^{-A(t)} a_1(t) dt$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$c e^{A(x_0)} + 0 = y_0$$

$$c = y_0 e^{-A(x_0)}$$

$$y(x) = e^{A(x)} \left[\int_{x_0}^x e^{-A(t)} a_1(t) dt + y_0 e^{-A(x_0)} \right]$$

$$= y_0 e^{A(x) - A(x_0)} +$$

$$e^{A(x)} \int_{x_0}^x e^{-A(t)} a_1(t) dt$$

$$\begin{cases} y'(x) = \cos(x)y(x) + x, & x \in \mathbb{R} \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \end{cases}$$

$$\int a(x) dx = \int \cos(x) dx = \sin(x) + c$$

$$A(x) = \sin(x)$$

$$y(x) = c e^{\sin(x)} + e^{\sin(x)} \int_{\frac{\pi}{4}}^x e^{-\sin(t)} t dt$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$c e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 0 = 2 \quad c = 2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$y(x) = 2 e^{\sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}} + e^{\sin(x)} \int_{\frac{\pi}{4}}^x e^{-\sin(t)} t dt$$

$$y' = \cos(x)y(x) + x, \quad x \in \mathbb{R}$$

DETERMINARE TUTTE LE
SOLUZIONI

$$\int a_0(x) dx = \int \cos(x) dx = \sin(x) + c$$

$$A(x) = \sin(x)$$

$$y(x) = c e^{\sin(x)} + e^{\sin(x)} \int_0^x -\sin t dt$$

$$\begin{cases} y'(x) = \operatorname{Tg}(x)y + \sin(x), \\ y(-\frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases}$$

$$x_0 = -\frac{\pi}{4} \rightarrow I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\int a_0(x) dx = \int \operatorname{Tg}(x) dx = -\log|\cos(x)| + C$$

$$A(x) = -\log|\cos(x)|$$

$$y(x) = C e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{-\frac{\pi}{4}}^x e^{-A(t)} \sin(t) dt$$

$$= \frac{C}{|\cos(x)|} + \frac{1}{|\cos(x)|} \int_{-\frac{\pi}{4}}^x |\cos(t)| \sin(t) dt =$$

$$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{c}{\cos(x)} + \frac{1}{\cos(x)} \int_{-\frac{\pi}{4}}^x \cos(t) \sin(t) dt$$

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad ; \quad \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \quad , \quad c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^x \cos(t) \sin(t) dt \right]$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^x \cos(t) \sin(t) dt = - \frac{\cos^2(t)}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^x =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos^2(x) + \frac{1}{4}$$

$$y(x) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}}{\cos(x)} - \frac{1}{2} \cos(x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y' = q_0(x)y,$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE

LINEARE, OMOGENEA,

DEL 1° ORDINE

- 1° ORDINE: PERCHE' CONTIENE SOLO LA DERIVATA PRIMA

- OMOGENEA: PERCHE' $q_1 \equiv 0$

- LINEARE: PERCHE'

Se y_1 e y_2 SONO DUE SOLUZIONI qualunque,

ALLORA $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha y_1 + \beta y_2$ è SOLUZIONE

Dimostrazione

$$W(x) = \alpha Y_1(x) + \beta Y_2(x)$$

$$W'(x) = (\alpha Y_1(x) + \beta Y_2(x))' =$$
$$\alpha Y_1'(x) + \beta Y_2'(x) =$$

$$\alpha a_0(x) Y_1(x) + \beta a_0(x) Y_2(x) =$$

$$a_0(x) (\alpha Y_1(x) + \beta Y_2(x)) =$$

$$a_0(x) W(x) \quad \square$$