IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g^{-1}(t))\,(g^{-1}(t))'\,dt$$

$t = g(x)$ $\qquad$ $x = g^{-1}(t)$

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$
DERIVABILE, INVERTIBILE, $(g^{-1})'$ continua, g' continua, f continua

---

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} g(x) = t \\ x = g^{-1}(t) \end{array} \right\}$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(g^{-1}(t))\,(g^{-1}(t))'\,dt$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b; \quad \max_{k=1,\dots,N} |\Delta x_k| \to 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) =$$

g INIETTIVA e continua $\Rightarrow g$ MONOTONA

S.P.D.G. $\circledast$

$$x_k = g^{-1}(t_k)$$

$$x_{k-1} = g^{-1}(t_{k-1}), \quad t_{k-1} < t_k, \quad k = 1,\dots,N$$

$$= \sum_{k=1}^{N} f\left(g^{-1}(t_k)\right)\left(g^{-1}(t_k) - g^{-1}(t_{k-1})\right)$$

$$g^{-1}(t_k) - g^{-1}(t_{k-1}) = \{\text{T. LAGRANGE}\}$$

$$\left(g^{-1}\right)'(c_k)(t_k - t_{k-1}), \quad c_k \in (t_{k-1}, t_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} f\left(g^{-1}(t_k)\right) \overbrace{\left(g^{-1}\right)'(c_k)(t_k - t_{k-1})}^{\Delta x_k}$$

SERVE LA CONTINUITA' UNIFORME

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_{g(a)}^{g(b)} f(g^{-1}(t))\,(g^{-1}(t))'\,dt$$

IN PARTICOLARE

S.P.D.G. $g \nearrow$ e

$$g(a)=t_0<t_1<t_2<\dots<t_N=g(b)$$

t_k, $k=0,\dots,N$ è una PARTIZIONE di $[g(a),g(b)]=Im(g)$

CONTINUITÀ UNIFORME

$f(x) = x^2 \quad , \quad x \in I \subseteq [0, +\infty)$

f continua in $I \iff \forall\, x_0 \in I$

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta_\varepsilon(x_0) \;:$

$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon \;,\; \forall\, x \in I :$

$|x - x_0| < \delta_\varepsilon(x_0)$

CALCOLIAMO $\delta_\varepsilon(x_0)$

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon \iff \begin{cases} x^2 < \varepsilon + x_0^2 \\ x^2 > -\varepsilon + x_0^2 \end{cases}$$

SE $-\varepsilon + x_0^2 < 0$, OVVERO

SE $\varepsilon > x_0^2$, ALLORA E' SOFFICENTE

CHE $x^2 < \varepsilon + x_0^2$

DATO CHE $x \in [0, +\infty)$,

$$0 \le x < \sqrt{\varepsilon + x_0^2}$$

$$-x_0 \le x - x_0 < \sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0$$

$$-|x_0| \le x - x_0 < \sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0$$

$$|x - x_0| < \min\left\{ \sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0,\ |x_0| \right\}$$

SE $\varepsilon > x_0^2$

SE $\varepsilon \leq x_0^2$

$$\sqrt{x_0^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon + x_0^2}$$

$$\sqrt{x_0^2 - \varepsilon} - x_0 < x - x_0 < \sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0$$

$$|x - x_0| < \min\left\{ \sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0,\ \left|\sqrt{x_0^2 - \varepsilon} - x_0\right| \right\}$$

SE $\varepsilon \leq x_0^2$

$\forall x_0 \in [0,+\infty), \forall \varepsilon > 0$ si ha

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon \quad \forall x : |x - x_0| < \delta_\varepsilon(x_0)$$

$$\delta_\varepsilon(x_0) = \begin{cases} \min\left\{\sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0, |x_0|\right\}, & \varepsilon > x_0^2 \\ \min\left\{\sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0, \left|\sqrt{x_0^2 - \varepsilon} - x_0\right|\right\}, & \varepsilon \leq x_0^2 \end{cases}$$

δ_ε, PER $\varepsilon > 0$ FISSATO, E' UNA FUNZIONE (continua) di x_0 in I.

(Q)

DOMANDA: È POSSIBILE TROVARE (per $\varepsilon > 0$ fissato) un δ_ε ADATTO A TUTTI GLI x_0?

$$\forall x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon(x_0) : |x^2 - x_0^2| < \varepsilon \quad \forall x \in I : |x - x_0| < \delta_\varepsilon(x_0)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon : \forall x_1 \in I\ \forall x_2 \in I : |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \text{ si ha } |x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon$$

δ_ε è UNIFORME in X CIOÈ NON DIPENDE DA x_1 e x_2

NEL PRIMO CASO $\forall x_0 \in I$ e $\forall \varepsilon > 0$

TROVO $\delta_\varepsilon(x_0)$:

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

NEL SECONDO CASO $\forall \varepsilon > 0$

TROVO δ_ε : se $x \in I$, $x_0 \in I$

e $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

OVVERO TROVO δ_ε : PER OGNI COPPIA di PUNTI x_1 e x_2 in un qualunque intervallo di lunghezza δ_ε $\left(|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon\right)$ si ha $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

LA RISPOSTA ALLA DOMANDA (Q) DIPENDE DA $I \subseteq [0,+\infty)$

SE $\inf_{x_0 \in I} \delta_\varepsilon(x_0) = 0$ LA RISPOSTA È NO

PER ESEMPIO SE $I = [0,+\infty)$ O SE $I = [a,+\infty)$, $a \geq 0$ LA RISPOSTA È NO

SE $\delta_\varepsilon := \inf_{x_0 \in I} \delta_\varepsilon(x_0) > 0$, LA RISPOSTA È SI

PER ESEMPIO SE $I = [a,b]$ $0 \leq a < b < +\infty$ LA RISPOSTA È SI

Infatti supponiamo che $\forall \varepsilon > 0$ si abbia

$$\delta_\varepsilon := \inf_{x_0 \in I} \delta_\varepsilon(x_0) > 0$$

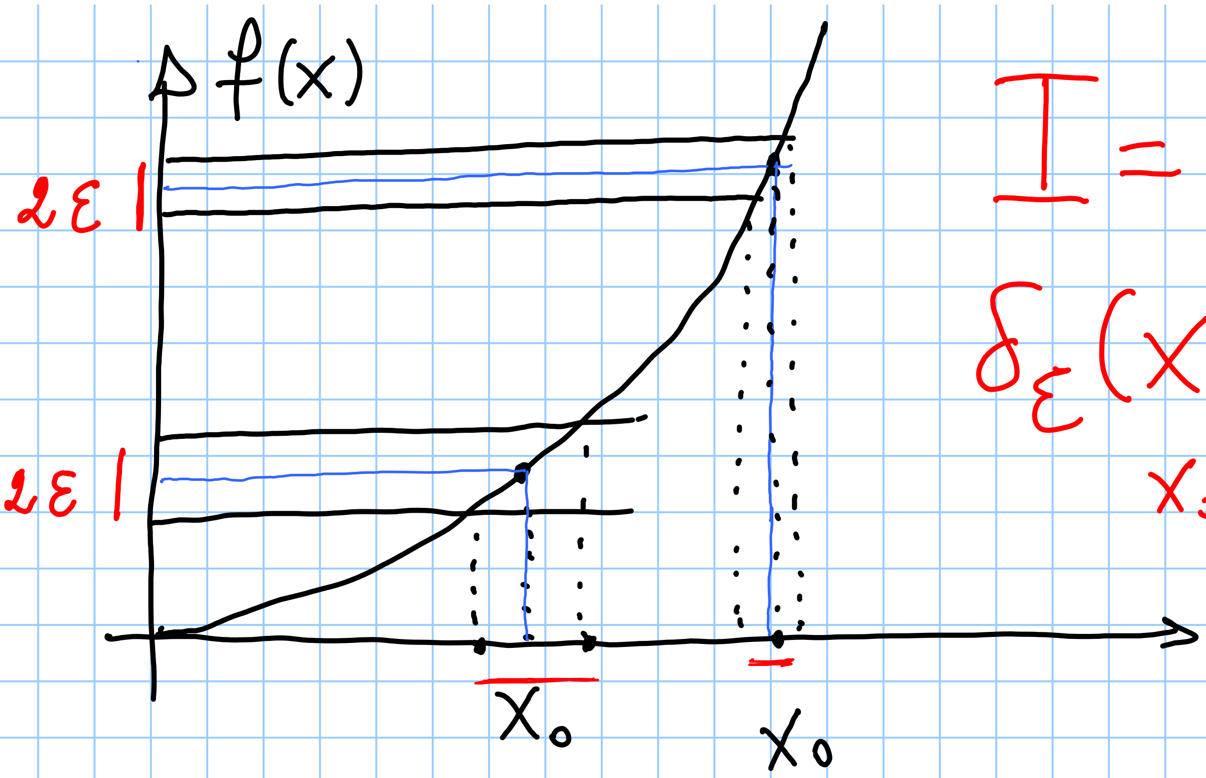
Siano $x \in I$ e $x_0 \in I$:

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad , \quad \text{ALLORA}$$

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon = \inf_{x_0 \in I} \delta_\varepsilon(x_0) < \delta_\varepsilon(x_0)$$

$$\Longrightarrow |x^2 - x_0^2| < \varepsilon$$

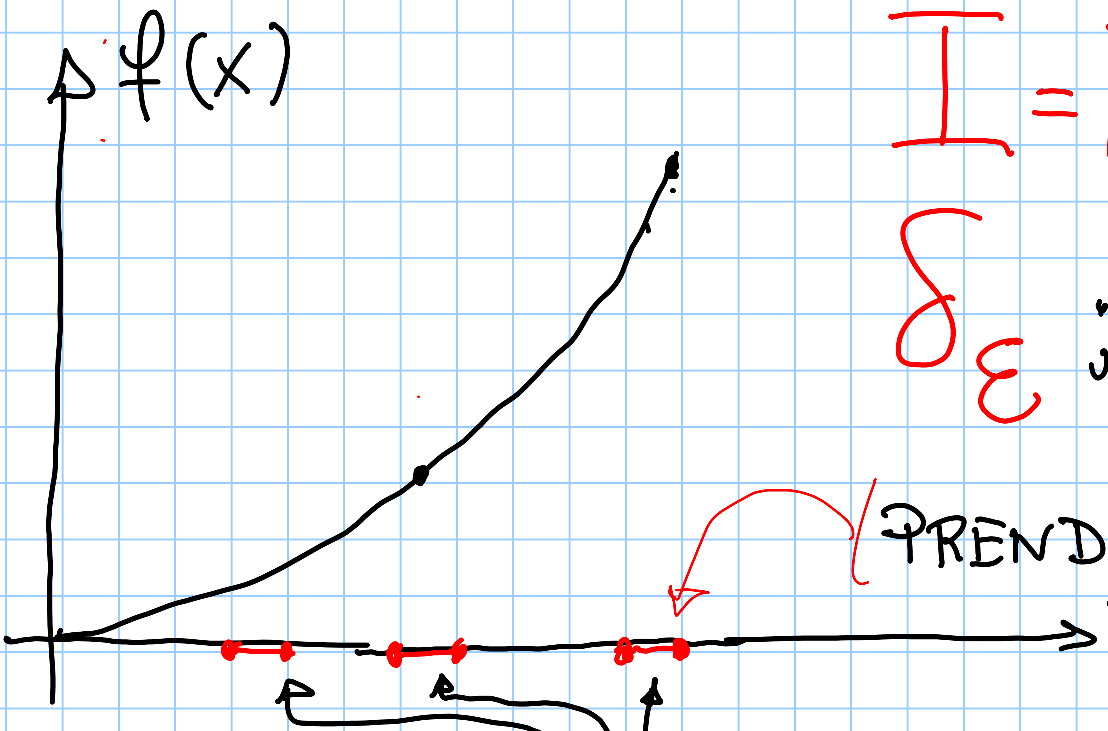
Quindi $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon \quad \forall \{x, x_0\} \in I : |x - x_0| < \delta_\varepsilon$



$I = [0, +\infty)$

$\delta_\varepsilon(x_0) \to 0^+$

$x_0 \to +\infty$



$I = [0, 2]$

δ_ε :

PRENDO IL δ_ε "PIÙ PICCOLO"

SE $\{x_1, x_2\}$: $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

CALCOLIAMO $\delta_\varepsilon = \inf_{[2,3]} \delta_\varepsilon(x_0)$

$$f(x) = x^2 \quad , \quad x \in I = [2,3]$$

$$\delta_\varepsilon(x_0) = \begin{cases} \min\left\{\sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0 , |x_0|\right\}, & \varepsilon > x_0^2 \\ \min\left\{\sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0 , \left|\sqrt{x_0^2 - \varepsilon} - x_0\right|\right\}, & \varepsilon \le x_0^2 \end{cases}$$

$I = [2,3]$ $\quad$ $\delta_\varepsilon(t)$ è continua per $t \in [2,3]$

$$\delta_\varepsilon = \min_{x_0 \in [2,3]} \delta_\varepsilon(x_0)$$

È SUFFICENTE CONSIDERARE

$\delta_\varepsilon(x_0)$ CON $\varepsilon \le \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$

$x_0 \in [2,3] \Rightarrow x_0^2 \ge 4 = (2)^2$

SCEGLIAMO $\varepsilon_0 = 4$

PER $\varepsilon \le \varepsilon_0 = 4 \le x_0^2$ SI HA

$$\delta_\varepsilon(x_0) = \begin{cases} \min\left\{\sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0, |x_0|\right\}, & \varepsilon > x_0^2 \\ \min\left\{\sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0, \left|\sqrt{x_0^2 - \varepsilon} - x_0\right|\right\}, & \varepsilon \le x_0^2 \end{cases}$$

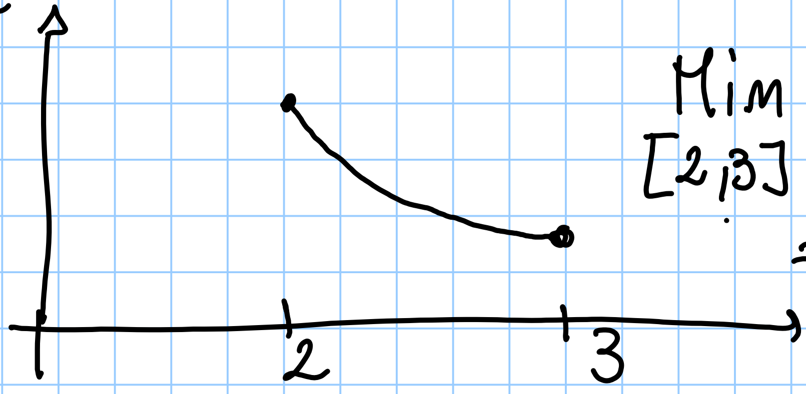
$x_0 \in [2,3]$

$$= \min\left\{\sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0, \left|\sqrt{x_0^2 - \varepsilon} - x_0\right|\right\}, \varepsilon \le x_0^2$$

$0 < \varepsilon \leq x_0^2$, ε FISSATO

$$\delta_\varepsilon(x_0) = \min_{x_0 \in [2,3]} \left\{ \sqrt{x_0^2+\varepsilon} - x_0 , \left| \sqrt{x_0^2-\varepsilon} - x_0 \right| \right\}$$

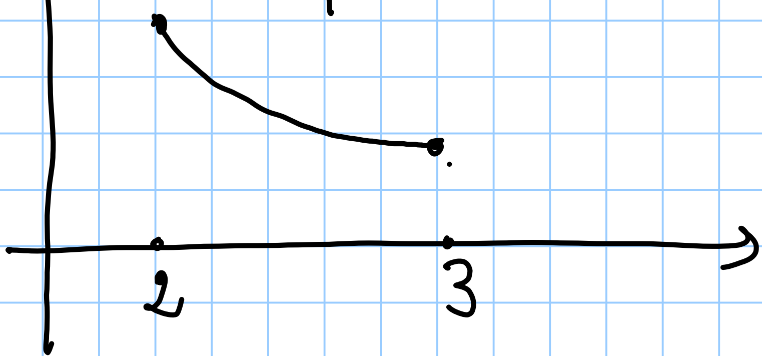
$$g_\varepsilon(t) = \sqrt{t^2+\varepsilon} - t \ , \ t \in [2,3]$$



$$\min_{[2,3]} g_\varepsilon(t) = \sqrt{9+\varepsilon} - 3$$

$$h_\varepsilon(t) = \left|\sqrt{t^2-\varepsilon} - t\right|,$$

$$\min_{t\in[2,3]} h_\varepsilon(t) = \left|\sqrt{9-\varepsilon} - 3\right|$$



$$\delta_\varepsilon = \min_{0<\varepsilon\le 4}\left\{\sqrt{9+\varepsilon}-3,\ \left|\sqrt{9-\varepsilon}-3\right|\right\}$$

$$\sqrt{9+\varepsilon} - 3 \le 3 - \sqrt{9-\varepsilon}$$

$$\sqrt{9+\varepsilon} + \sqrt{9-\varepsilon} \le 6$$

$$9+\varepsilon + 9 - \varepsilon + 2\sqrt{81-\varepsilon^2} \le 36$$

$$18 + 2\sqrt{81-\varepsilon^2} \leq 36$$

$$\sqrt{81-\varepsilon^2} \leq 9 \quad \text{VERO}$$
$$\forall\ \varepsilon \in (0,4]$$

$$\delta_\varepsilon = \min_{x_0 \in [2,3]} \delta_\varepsilon(x_0) = \sqrt{9+\varepsilon} - 3$$
$$\varepsilon \in (0,4]$$

$$\delta_\varepsilon = \delta_4 = \sqrt{13} - 3, \quad \varepsilon > 4.$$

$f(x) = x^2$ è uniformemente continua in $[2,3]$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0 : \forall \{x_1, x_2\} \subset I,$$
$$|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \text{ si ha } |x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon$$

Se $I = [0, +\infty)$ non è possibile,

$f(x) = x^2$ NON è UNIFORMEMENTE

CONTINUA in $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$

$$\nexists\, \delta_\varepsilon \text{ UNIFORME in } [1, +\infty)$$

$$\Updownarrow$$

$$\delta_\varepsilon := \inf_{x_0 \in [1, +\infty)} \delta_\varepsilon(x_0) = 0$$

$\varepsilon > 0$ FISSATO

$$\lim_{x_0 \to +\infty} \delta_\varepsilon(x) = \left\{ \begin{array}{l} x_0 \to +\infty, \ x_0^2 > \varepsilon \\ \text{definitivamente} \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{x_0 \to +\infty} \min \left\{ \sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0, \left| \sqrt{x_0^2 - \varepsilon} - x_0 \right| \right\} =$$

$$\left| \sqrt{x_0^2 - \varepsilon} - x_0 \right| = x_0 - \sqrt{x_0^2 - \varepsilon} =$$

$$= x_0 \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{x_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= x_0 \left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{x_0^2} + o\left(\frac{1}{x_0^2} \right) \right) \right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2x_0} \left(1 + o(1) \right)$$

$$= \lim_{x_0 \to +\infty} \min \left\{ \sqrt{\varepsilon + x_0^2} - x_0 \, , \, \left| \sqrt{x_0^2 - \varepsilon} - x_0 \right| \right\} =$$

$$= \lim_{x_0 \to +\infty} \min \left\{ \overbrace{\frac{\varepsilon}{2x_0} (1 + o(1))}^{Ex} , \, \frac{\varepsilon}{2x_0} (1 + o(1)) \right\} = 0$$

ALTRO MODO

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon : \forall \{x, x_0\} \subset [1, +\infty[;$$

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ si ha } |x^2 - x_0^2| < \varepsilon$$

Sia $x = x_0 + \frac{\delta_\varepsilon}{2}$, quindi

in particolare $|x - x_0| = \frac{\delta_\varepsilon}{2}$

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,|x + x_0| =$$
$$= \frac{\delta_\varepsilon}{2}|x + x_0| < \varepsilon$$

ma $x = x_0 + \frac{\delta_\varepsilon}{2}$

$$\frac{\delta_\varepsilon}{2}\left|2x_0 + \frac{\delta_\varepsilon}{2}\right| < \varepsilon$$

$\forall x_0 \in [1, +\infty)$

$$+\infty = \lim_{x_0 \to +\infty} \frac{\delta_\varepsilon}{2}\left|2x_0 + \frac{\delta_\varepsilon}{2}\right| < \varepsilon$$

ASSURDO

$\blacksquare$

DEFINIZIONE I intervallo.

$f: I \to \mathbb{R}$ è

UNIFORMEMENTE CONTINUA in I, se

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon : \forall \{x_1, x_2\} \subset I$

$|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$ si ha $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

TEOREMA [HEINE-CANTOR]

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua.

f è UNIFORMEMENTE CONTINUA in $[a,b]$

DIMOSTRAZIONE

NOTA: $[a,b]$ chiuso e limitato

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE

$\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta \ \exists\, x_{1,\delta}$ e $x_{2,\delta}$:

$|x_{1,\delta} - x_{2,\delta}| < \delta$ e $|f(x_{1,\delta}) - f(x_{2,\delta})| \geq \varepsilon_0$

$\delta_m = \frac{1}{m}$, $\delta_m \longrightarrow 0^+$, $m \longrightarrow +\infty$,

$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_m = x_{1,\delta_m}$, $y_m = x_{2,\delta_m}$

$: \quad |x_m - y_m| < \frac{1}{m} (= \delta_m)$

$|f(x_m) - f(y_m)| \geq \varepsilon_0$

- $\{x_m\} \subset [a,b]$

(i) $[a,b]$ LIMITATO, dal

T. di BOLZANO-WEIERSTRASS

$\exists \{x_{m_k}\} \subset \{x_m\} : x_{m_k} \longrightarrow \overline{x}$, $k \longrightarrow +\infty$

$\overline{x} \in \mathbb{R}$

(ii) $[a,b]$ CHIUSO $\Longrightarrow \overline{x} \in [a,b]$

$|y_{m_k} - \overline{x}| \leq |y_{m_k} - x_{m_k}| +$

$|y+z| \leq |y| + |z|$

$+ |x_{m_k} - \overline{x}| <$

$$< \frac{1}{m_k} + |x_{m_k} - \bar{x}| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0^+$$

$$\Longrightarrow \quad y_{m_k} \longrightarrow \bar{x}, \quad k \to +\infty$$

f CONTINUA

$$\varepsilon_0 \leq |f(x_{m_k}) - f(y_{m_k})| \xrightarrow[k \to +\infty]{} |f(\bar{x}) - f(\bar{x})| = 0, \text{ ASSURDO}$$

$\blacksquare$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f' limitata in $[a,b]$ $\quad |f'(x)| \leq M, \ \forall x \in [a,b]$

$$\Longrightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(c)|\,|x-y| \leq M|x-y|$$

f è UNIFORMEMENTE CONTINUA con $\delta_\varepsilon = \varepsilon / M$

$\boxed{\text{INTEGRABILITÀ DELLE funzioni CONTINUE.}}$

Ricordiamo che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e se D è una partizione di $[a,b]$

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$$

si chiama AMPIEZZA di D

$$\max_{k=1,\dots,N} |x_k - x_{k-1}| .$$

Ricordiamo che

$$\sup_D s(D,f) \leq \inf_P S(P,f)$$

In particolare $f \in \mathcal{R}(a,b)$

Se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ una partizione $D^{(\varepsilon)}$

$$S(D^{(\varepsilon)}, f) - s(D^{(\varepsilon)}, f) < \varepsilon$$

Infatti in questo caso si ha

$$0 \le \inf_{P} S(P, f) - \sup_{D} s(D, f) \le S(D^{(\varepsilon)}, f) - s(D^{(\varepsilon)}, f) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Longrightarrow 0 \le \inf_{P} S(P, f) - \sup_{D} s(D, f) \le 0$$

TEOREMA [INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE]

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f CONTINUA in $[a,b]$

ALLORA $f \in \mathcal{R}(a,b)$

DIMOSTRAZIONE

E' SUFFICIENTE DIMOSTRARE CHE

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists D_{\bar{\varepsilon}}$ $\{$ una PARTIZIONE di AMPIEZZA $\bar{\varepsilon}$ $\}$:

$$S(D_{\bar{\varepsilon}}) - s(D_{\bar{\varepsilon}}) < \varepsilon .$$

f è UNIFORMEMENTE CONTINUA in $[a,b]$ (HEINE-CANTOR)

$\exists \delta_\varepsilon > 0$:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$\forall \{x, y\} \subset [a,b] : |x - y| < \delta_\varepsilon .$

Sia $D_{\bar\varepsilon}$ una partizione di ampiezza $\bar\varepsilon = \frac{\delta_\varepsilon}{2}$; $|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{\delta_\varepsilon}{2}$
$k = 1, \dots, N$

$$S(D_{\bar\varepsilon}) - s(D_{\bar\varepsilon}) = \{ I_k = [x_{k-1}, x_k] \}$$

$$\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \right)(x_k - x_{k-1})$$

f continua

$$= \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \left(\max_{I_k} f - \min_{I_k} f \right)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \left(f(\bar x_k) - f(\bar y_k) \right)(x_k - x_{k-1})$$

$\bar x_k \in I_k$, $\bar y_k \in I_k$

$$= \left\{ \begin{array}{l} |\bar x_k - \bar y_k| < \frac{\delta_\varepsilon}{2} < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \\ 0 \leq f(\bar x_k) - f(\bar y_k) < \frac{\varepsilon}{b-a} \end{array} \right\}$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot b-a = \varepsilon$$

$\blacksquare$

IN MODO SIMILE SI DIMOSTRA CHE SE

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua,

e se D_N è una partizione

con N intervalli $I_k = [x_{k-1}, x_k]$,

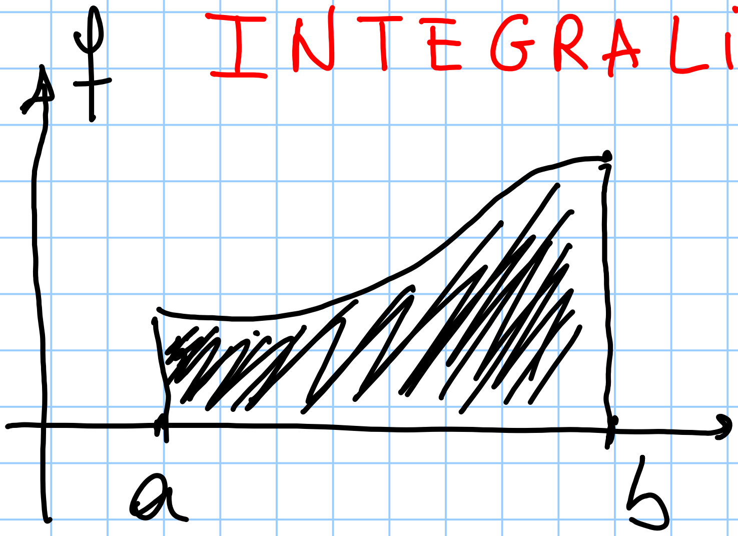
di ampiezza $\varepsilon_N \to 0$, $N \to +\infty$,

e $c_k \in I_k$, $k = 1, \dots, N$,

ALLORA

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

INTEGRALI IMPROPRI



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f MONOTONA o

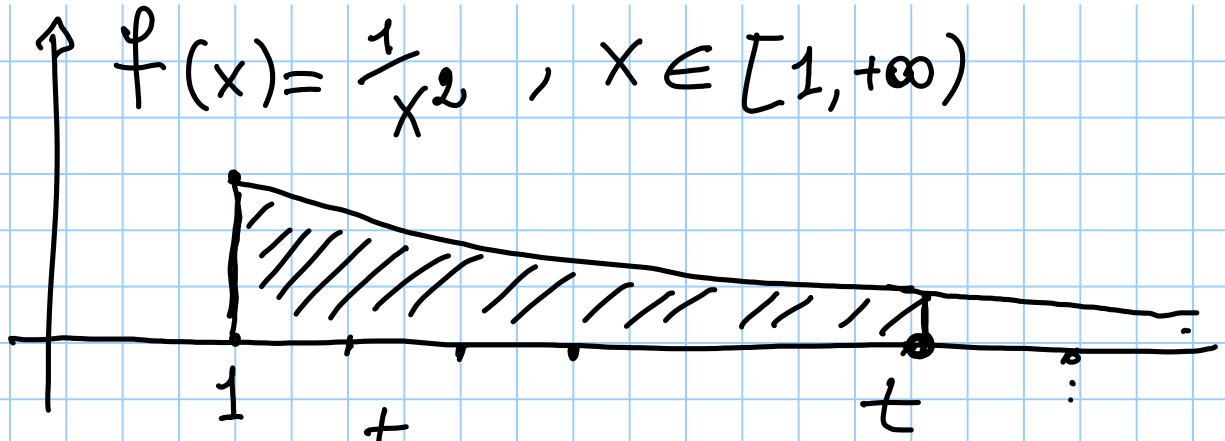
f CONTINUA

$\Longrightarrow \quad f \in \mathcal{R}(a,b)$

- SE f NON E' LIMITATA?
- SE (a,b) NON E' LIMITATO?

IN ENTRAMBI CASI
LE SOMME di RIEMANN NON SONO SEMPRE BEN DEFINITE!

$f(x) = 1/x^2 \quad , \quad x \in [1, +\infty)$



$$I(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx =$$

$t \geq 1$

$$= \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

$$\lim_{t \to +\infty} I(t) = 1$$

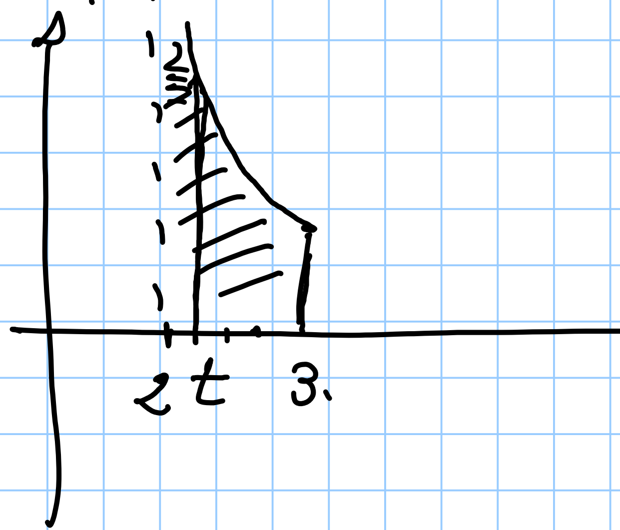
$f(x) = 1/\sqrt{x} \quad , \quad x \in [1, +\infty)$

$$I(t) = \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}} = \ldots$$

Ex.

$$\lim_{t\to+\infty} I(t) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \quad , \quad x \in (2,3]$$



$$I(t) = \int_t^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$$

$t \in (2,3]$

$$= \Big[2\sqrt{x-2} \Big]_t^3 = 2 - 2\sqrt{t-2}$$

$$\lim_{t\to 2^+} I(t) = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \quad , \quad x \in (2,3]$$

Ex

$$I(t) = \int_t^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx \quad , \quad \lim_{t\to 2^+} I(t) = +\infty$$

DEFINIZIONE

Sia $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, $b\in(a,+\infty]$

- $f\in\mathcal{R}(a,t)\ ,\ \forall t\in(a,b)$

Si dice **INTEGRALE IMPROPRIO** (SE $\exists$) il LIMITE

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

L'INTEGRALE IMPROPRIO SI DICE **CONVERGENTE** SE IL LIMITE È FINITO

DIVERGENTE Se NON è FINITO

ANALOGAMENTE se

$f \in \mathcal{R}(t,b)$, $\forall t > a$,

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

Se $x_0 \in (a,b)$

$f \in \mathcal{R}(a,s)$ $\forall s \in (a,x_0)$

$f \in \mathcal{R}(t,b)$ $\forall t \in (x_0,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\substack{s\to x_0^- \\ t\to x_0^+}} \left[\int_a^s f(x)\,dx + \int_t^b f(x)\,dx\right]$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \in (0, +\infty)$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ è CONVERGENTE $\alpha > 1$

DIVERGENTE $\alpha \leq 1$

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \in (0,1)$

Ex

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ è DIVERGENTE $\alpha \geq 1$

CONVERGENTE $\alpha < 1$

$$\int_{x_0-1}^{x_0+1} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\,dx \;\grave{e}\; \begin{cases} \text{DIVERGENTE } \alpha \geq 1 \\ \text{CONVERGENTE } \alpha < 1 \end{cases}$$

PER STABILIRE IL CARATTERE (CONVERGENTE / DIVERGENTE)

di UN INTEGRALE IMPROPRIO SI USANO I TEOREMI DI CONFRONTO

TEOREMA [CONFRONTO TRA INTEGRALI IMPROPRI]

$f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty]$

$f, g \in \mathcal{R}(a, t) \; \forall t \in [a, b)$

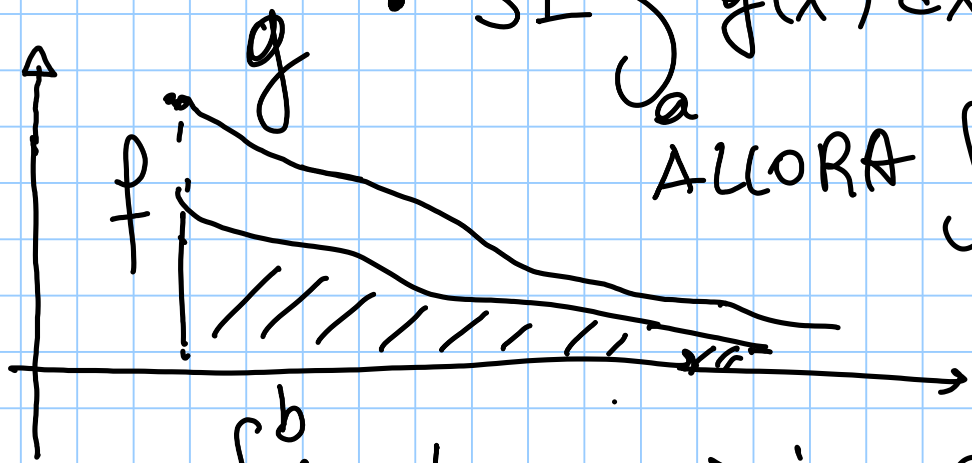
Se $\exists\, x_0 \in [a,b)$:

$$\boxed{0 \leq} f(x) \leq g(x) \,, \forall x \in [x_0, b)$$

ALLORA:

(i) GLI INTEGRALI $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ ESISTONO in SENSO IMPROPRIO.

(ii) • SE $\int_a^b g(x)\,dx$ CONVERGE ALLORA $\int_a^b f(x)\,dx$ CONVERGE



• SE $\int_a^b f(x)\,dx$ DIVERGE ALLORA $\int_a^b g(x)\,dx$ DIVERGE

DIMOSTRAZIONE

Dato che $\int_a^b f(x)\,dx$ converge

se e solo se $\int_{x_0}^b f(x)\,dx$ converge

e $\int_a^b g(x)\,dx$ converge

SE e solo se $\int_{x_0}^b g(x)\,dx$ converge

allora possiamo supporre

S.P.D.G. CHE $x_0 = a$.

$$I(t) = \int_{x_0}^{t} f(x)\,dx \ , \ t \in [x_0, b)$$

$$I(t+h) = \int_{x_0}^{t} f(x)\,dx + \int_{t}^{t+h} f(x)\,dx$$

Dato che $f(x) \geq 0$, $x \in [x_0, b)$

$$\Longrightarrow I(t+h) \geq \int_a^t f(x)\,dx = I(t) \quad \forall\, h \geq 0$$

$\Longrightarrow I(t)$ è CRESCENTE

$$\Longrightarrow \exists\ I_\infty := \lim_{t \to b^-} I(t)$$

(finito o $+\infty$)

STESSO DISCORSO PER

$$J(t) = \int_{x_0}^{t} g(x)\,dx,$$

$J(t)$ è CRESCENTE

$$\Rightarrow \exists\, J_\infty := \lim_{t \to b^-} J(t)$$

(finito o $+\infty$)

PER IPOTESI

$$\int_{x_0}^{t} f(x)\,dx \leq \int_{x_0}^{t} g(x)\,dx \quad \forall t \in [x_0, b)$$

da $\quad I(t) \leq J(t) \quad \forall t \in [x_0, b)$

$$\Longrightarrow \quad I_\infty \leq J_\infty$$

Se $\int_{x_0}^{b} g(x)\,dx$ CONVERGE

ALLORA $J_\infty < +\infty$ e

anche $I_\infty < +\infty$ $\left[\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx \text{ CONVERGE}\right]$

Se $\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx$ DIVERGE

ALLORA $I_\infty = +\infty$ e

anche $J_\infty = +\infty$ $\left[\int_{x_0}^{b} g(x)\,dx \text{ DIVERGE}\right]$

$$(*) \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{b} f(x)\,dx$$

CONVERGE SE E SOLO

SE CONVERGE $\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx$ $\blacksquare$

IMPORTANTE:

SE $0 \geq f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in (x_0, b)$

VALE LO STESSO

SE $\int_a^b f(x)\,dx$ DIVERGE $\Longrightarrow$ $\int_a^b g(x)\,dx$ DIVERGE

$(a \ -\infty)$

SE $\int_a^b g(x)\,dx$ CONVERGE

$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$

CONVERGE