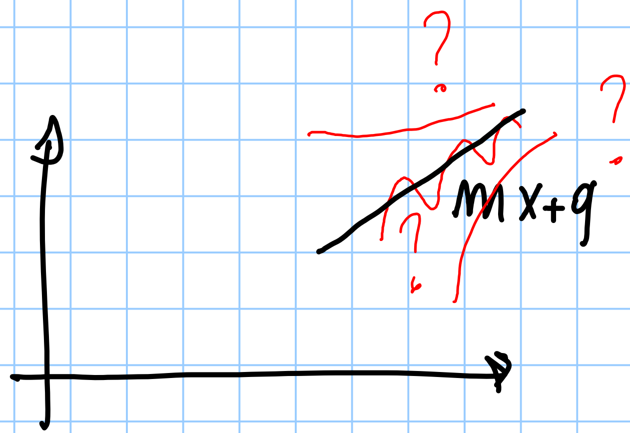
CONVESSITÀ E ASINTOTI
FACOLTATIVO

(MA MOLTO UTILE PER GRAFICI CON ASINTOTI)



$$f(x) = mx + q + o(1) \quad x \to +\infty$$

$m \in \mathbb{R}$ (VALE ANCHE PER AS. ORIZ.)

f STRETTAMENTE CONVESSA

$f' \uparrow \longrightarrow f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} m^-$

e $f(x) \geq mx + q$

PERCHÉ $y = mx + q$ è LA "RETTA TANGENTE A $+\infty$"

TEOREMA $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$f(x)= mx+q+o(1), x\to+\infty$

$m\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}$.

Se PER $x\to+\infty$ f è DEFINITIVAMENTE CONVESSA

ALLORA $f(x)\geq mx+q$ DEFINITIVAMENTE per $x\to+\infty$.

DIMOSTRAZIONE

$g(x)=f(x)-(mx+q)$,

$g(x)\to 0$, $x\to+\infty$ ed è

DEFINITIVAMENTE CONVESSA

NOTA: $h(x) = mx + q$ È SIA CONVESSA CHE CONCAVA

IN PARTICOLARE SE f È CONVESSA $f + h$ È CONVESSA

$\exists M > 0 : \forall M \leq x_0 < x < x_1$

$$g(x) \leq g(x_0) + \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0}$$

QUINDI IL RAPPORTO INCREMENTALE $P_g(x, x_0)$, fissato $x_0 \geq M$, È CRESCENTE PER $x > x_0$

Inoltre $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{0 - g(x_0)}{+\infty - x_0} = 0$

Quindi $P_g(x, x_0) \longrightarrow 0$, $x \to +\infty$

e $P_g(x, x_0) \nearrow$ come funzione di x in $(x_0, +\infty)$

CONSEGUENZA: $P_g(x, x_0) \leq 0$ $\forall x > x_0$

RICAPITOLIAMO:

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \forall x > x_0 \geq M$$

OVVERO $g(x) \leq g(x_0)$, $\forall x > x_0 \geq M$

CIOE' $g(x)$ E' DECRESCENTE

in $[M, +\infty)$.

$g \downarrow$ in $[M, +\infty)$, $g(x) \to 0$, $x \to +\infty$

$\Longrightarrow g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [M, +\infty)$

$\Longrightarrow f(x) \geq mx + q \quad \forall x \in [M, +\infty)$ $\blacksquare$

Ex DIM. CHE SE $f(x) \to 0^+$, $x \to +\infty$, f non può ESSERE DEFINITIVAMENTE CONCAVA

(T1) TEOREMA $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, CONTINUA, DERIVABILE DUE VOLTE in $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$

INOLTRE $f(x) = mx + q + o(1)$, $x \to +\infty$

$m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$. ALLORA SI HA:

(i) $f'(x) < m$, $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} m^-$

(ii) $f(x) > mx + q$ $\quad \forall x \in [0, +\infty)$

$\not\longleftarrow$

TEOREMA [DELL'ASINTOTO]

Sia $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, DERIVABILE e $g(x) \to \ell$, $x \to +\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$.

ALLORA, SE ESISTE il LIMITE di $g'(x)$ per $x \to +\infty$, SI HA

$$\lim_{x \to +\infty} g'(x) = 0$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $x > 0$. $\exists\, c \in (x, x+1)$:

$$g'(c) = g(x+1) - g(x)$$

(dal T. di LAGRANGE)

Sia $x_n \longrightarrow +\infty$, ALLORA

$\exists\, c_n \in (x_n, x_n + 1)$:

$$g'(c_n) = g(x_n+1) - g(x_n)$$

$$x_n \leq c_n \leq x_n + 1 \implies c_n \longrightarrow +\infty$$

$$\lim_n g'(c_n) = \lim_n g(x_n+1) - g(x_n)$$

$$= \ell - \ell = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell \iff \lim_n g(a_n) = \ell \quad \forall\, a_n \longrightarrow +\infty$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{m} g'(c_m) = 0}$$

Dato che per ipotesi $\exists \lim_{x \to +\infty} g'(x)$,

ALLORA il SUO VALORE COINCIDE CON IL VALORE ASSUNTO LUNGO c_m,

$$\lim_{x \to +\infty} g'(x) = \lim_{m} g'(c_m) = 0$$

DIMOSTRAZIONE di (T1)

$$g(x) = f(x) - (mx+q),$$

$$g : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{CONTINUA}$$

$$g''(x) > 0 \quad \forall\, x \in (0,+\infty)$$

$$g(x) \longrightarrow 0, \quad x \longrightarrow +\infty$$

$g'' > 0 \Longrightarrow g$ è STRETTAMENTE

CONVESSA e g' è STRETTAMENTE CRESCENTE $\Longrightarrow$

$$\exists \lim_{x \to +\infty} g'(x) = \sup_{(0,+\infty)} g'(x)$$

TEOREMA DELL'ASINTOTO

$$\lim_{x \to +\infty} g'(x) = 0 \Rightarrow \sup_{(0,+\infty)} g' = 0$$

$$\Longrightarrow g'(x) < 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$$

PER DEFINIZIONE $g'(x) = f'(x) - m$,

QUINDI SI HA

$$g'(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) < m \quad \forall x \in (0,+\infty)$$

e in particolare $f'(x) \longrightarrow m^-$, $x \to +\infty$.

DIMOSTRIAMO CHE

$$f(x) > mx+q \quad \forall x \in [0,+\infty)$$

DATO CHE

$$f(x) > mx+q \iff g(x) > 0,$$

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE

$$g(x_0) \leq 0 \quad \text{PER UN } x_0 > 0.$$

DALLA PARTE PRECEDENTE

SI HA $g'(x) < 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$

QUINDI $g(x) \downarrow$ STRETTAMENTE

e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \inf_{(0,+\infty)} g < g(x_0) \leq 0$

ASSURDO (PERCHÉ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$)

$\blacksquare$

COROLLARIO: f continua

$$f(x) = mx + q + o(1), \quad x \to +\infty \qquad \begin{matrix} m \in \mathbb{R} \\ q \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

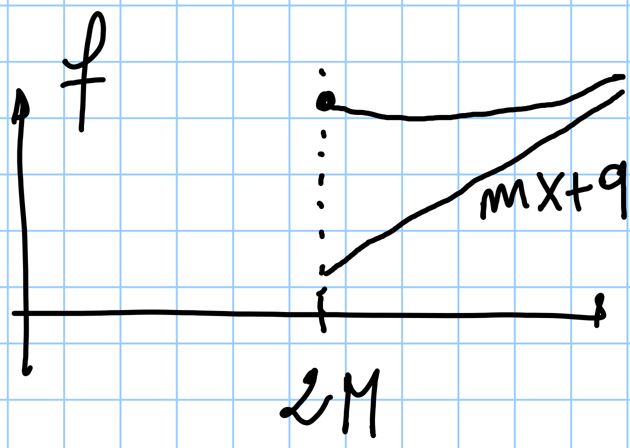
e definitivamente $f''(x) > 0$, $x \to +\infty$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, M > 0 : \; f(x) > mx + q, \quad \forall x > M$$

DIM.

$\exists\, M > 0 : \; f''(x) > 0$
$\quad \forall x \in (M, +\infty)$

$h(x) = f(2M + x)$, $x \in [0, +\infty)$



VERIFICA LE IPOTESI DEL TEOREMA (T1) $\blacksquare$

TEOREMA DI CAUCHY

TEOREMA [CAUCHY]

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

CONTINUE in $[a,b]$, DERIVABILI in (a,b)

ALLORA $\exists\, c \in (a,b)$:

$$f'(c)\,\big(g(b)-g(a)\big) = g'(c)\,\big(f(b)-f(a)\big)$$

OSSERVAZIONE : SE $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$

ALLORA $g(b)-g(a) \neq 0$ e

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

DIM. PER ASSURDO supponiamo $g(b)=g(a)$

T. di LAGRANGE $\Rightarrow \exists\, c :$ $g'(c)=0$, $c \in (a,b)$

ASSURDO ■

DIMOSTRAZIONE del T. di CAUCHY.

$$h(x) = g(x)\big(f(b)-f(a)\big) - f(x)\big(g(b)-g(a)\big)$$

h è continua in $[a,b]$
derivabile in (a,b)

$h(a) = h(b) \Longrightarrow$ T. di ROLLE

$\exists\, c \in (a,b) : \quad h'(c) = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad g'(c)\big(f(b)-f(a)\big) = f'(c)\big(g(b)-g(a)\big)$$

$\blacksquare$

TEOREMA [L'HOPITAL (1)] $x_0 \in (a,b)$

$f : (a,b) \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$g : (a,b) \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

CONTINUE e DERIVABILI in $(a,b) \setminus \{x_0\}$

INOLTRE, $\begin{array}{l} f(x) \to 0 \\ g(x) \to 0 \end{array}$, $x \to x_0$

SE $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$

e SE ESISTE il LIMITE

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \left(L \in \overline{\mathbb{R}} \right)$$

ALLORA

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

DIMOSTRAZIONE

$$\{x_n\} \subset (a,b) \setminus \{x_0\}$$

$$x_n \longrightarrow x_0 , \quad n \longrightarrow +\infty$$

f e g SONO CONTINUE in $(a,b)\setminus\{x_0\}$ ALLORA SI POSSONO ESTENDERE PER CONTINUITÀ in x_0, PONENDO

$$f(x_0) = 0 = g(x_0) .$$

DAL T. di CAUCHY (RICORDARE

CHE $g'(x) \neq 0$ per Ipotesi) $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists c_n$:

$c_n \in$ "(x_0, x_n) o (x_n, x_0)"

$$f'(c_n)\left(g(x_n)-g(x_0)\right) = g'(c_n)\left(f(x_n)-f(x_0)\right)$$

$$\left(g'(x) \neq 0\right) \Longrightarrow \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \frac{f(x_n)-f(x_0)}{g(x_n)-g(x_0)}$$

$$\left(f(x_0)=0=g(x_0)\right) \qquad = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

$-|x_n - x_0| \leq c_n - x_0 \leq |x_n - x_0|$ e

$x_n \to x_0 \ n \to +\infty \Longrightarrow c_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$

$$\lim_n \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_n \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = L$$

IPOTESI: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

RIASSUMENDO: $\forall \{x_n\} \subset (a,b) \setminus \{x_0\}$: $x_n \to x_0$, $n \to +\infty$, SI HA

$$\lim_n \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L.$$

QUINDI $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \quad \blacksquare$$

OSSERVAZIONE. IL TEOREMA CONTINUA A VALERE SE:

(•) $x_0 = a$ o $x_0 = b$ nel SENSO DEL LIMITE PER $x \to a^+$, $x \to b^-$.

(••) $f, g : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

$(\cdots)$ $\quad f, g : (-\infty, b) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

DIM. $(\cdot\cdot)$ $\quad a > 0$

$g, f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad x = \frac{1}{t}$

$\tilde{g}(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$, $\quad \tilde{f}(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$

$t \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$, $\quad \begin{cases} g(x) \to 0 \\ f(x) \to 0 \end{cases}, \ x \to +\infty$

$\Downarrow$

$\begin{cases} \tilde{g}(t) \to 0 \\ \tilde{f}(t) \to 0 \end{cases}, t \to 0^+$. $\quad \boxed{\frac{d}{dt}\tilde{f}(t) = \dot{\tilde{f}}(t)}$

$$\frac{\dot{\tilde{f}}(t)}{\dot{\tilde{g}}(t)} = \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} \cdot \frac{\cancel{\left(-\frac{1}{t^2}\right)}}{\cancel{\left(-\frac{1}{t^2}\right)}} = \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} \xrightarrow[t \to 0^+]{} L$$

APPLICHIAMO IL TEOREMA a $\tilde{g}, \tilde{f}$ per $t \to 0^+ \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\dot{\tilde{f}}(t)}{\dot{\tilde{g}}(t)} = L \qquad \blacksquare$$

TEOREMA [L'HOPITAL (2)]

$f:(a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$, $g:(a,b)\to\mathbb{R}$

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$

(2) $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$

(3) $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L\in\overline{\mathbb{R}}$

ALLORA $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, $L\in[0,+\infty]$

DIMOSTRAZIONE

FACOLTATIVA

PER SEMPICITÀ SIA $L \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \, \delta_\varepsilon > 0 :$

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(c)}{g'(c)} - L < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall c \in (a, a+\delta_\varepsilon)$

Sia $a_\varepsilon = a + \delta_\varepsilon$

$\forall x \in (a, a_\varepsilon)$ dal T. di CAUCHY

$\exists\ c \in (x, a_\varepsilon)$:

$$\frac{f(x) - f(a_\varepsilon)}{g(x) - g(a_\varepsilon)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$\forall\ \varepsilon > 0$ si ha

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x) - f(a_\varepsilon)}{g(x) - g(a_\varepsilon)} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall\ x \in (a, a_\varepsilon)$

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty \ , \quad g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot h_\varepsilon(x);$$

$$h_\varepsilon(x) = \frac{1 - \frac{f(a_\varepsilon)}{f(x)}}{1 - \frac{g(a_\varepsilon)}{g(x)}}$$

$f(x) \to +\infty$

$g(x) \to +\infty$

Per $\varepsilon > 0$ fissato, $\lim_{x \to a} h_\varepsilon(x) = 1$

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists\, \delta^{(1)}_{\varepsilon, \varepsilon'} > 0 :$$

$$1 - \varepsilon' < h_\varepsilon(x) < 1 + \varepsilon'$$

$$\forall x \in (a, a + \delta^{(1)}_{\varepsilon', \varepsilon})$$

$$a + \delta^{(1)}_{\varepsilon', \varepsilon} = a_{\varepsilon', \varepsilon}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}(1 - \varepsilon') < \frac{f(x)}{g(x)} \cdot h_\varepsilon(x) < \frac{f(x)}{g(x)}(1 + \varepsilon')$$

$\frac{f}{g} > 0$ definitivamente

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} \cdot h_\varepsilon(x) < \frac{f(x)}{g(x)}(1+\varepsilon')$$

$\forall x \in (a, a_\varepsilon)$, $\forall x \in (a, a_{\varepsilon',\varepsilon})$

$$\frac{L - \frac{\varepsilon}{2}}{1+\varepsilon'} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{L + \frac{\varepsilon}{2}}{1-\varepsilon'}$$

$\forall x \in (a, \min\{a_\varepsilon, a_{\varepsilon',\varepsilon}\})$

! $1-\varepsilon' > 0$!

Da

$$0 < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{L + \varepsilon/2}{1-\varepsilon'}$$

definitivamente si deduce che

$$L > -\frac{\varepsilon}{2}, \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow L \geq 0$$

Scegliamo ora $\varepsilon' > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{L + \varepsilon/2}{1-\varepsilon'} < L + \varepsilon \\ \dfrac{L - \varepsilon/2}{1+\varepsilon'} > L - \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{L} + \frac{\varepsilon}{2} < \cancel{L} + \varepsilon - \varepsilon'(L+\varepsilon) \\ \cancel{L} - \frac{\varepsilon}{2} > \cancel{L} - \varepsilon + \varepsilon'(L-\varepsilon) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon'(L+\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \varepsilon'(L-\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

S.P.D.G. $L - \varepsilon > 0$

$$\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2(L+\varepsilon)}$$

$$\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2(L-\varepsilon)}$$

$$\varepsilon' < \min\left\{ \frac{\varepsilon}{2(L+\varepsilon)}, \frac{\varepsilon}{2(L-\varepsilon)} \right\}$$

$(L>0)$

$$= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{L+\varepsilon}$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{L+\varepsilon}$$

$$\bar{a}_\varepsilon = \min\left\{a_\varepsilon,\ a_{\frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{L+\varepsilon}},\ \varepsilon\right\}$$

$$L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon$$

$$\forall x \in (a, \bar{a}_\varepsilon) \quad \blacksquare$$

OSSERVAZIONE CONTINUA A VALERE

SE (·) $x_0 \in (a,b)$, $x \to x_0$

(··) $(a,b) = (a, +\infty)$

(···) $(a,b) = (-\infty, b)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} \overset{\cancel{\text{"}H\text{"}}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2} \overset{\cancel{\text{"}H\text{"}}}{=}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6x} \overset{\cancel{\text{"}H\text{"}}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$$