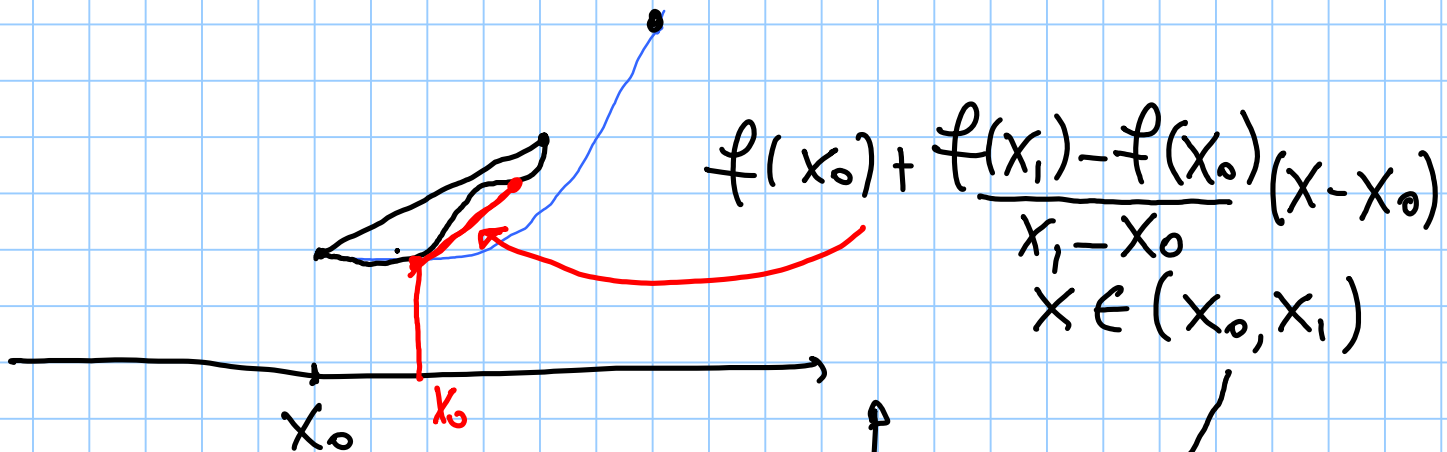


DEFINIZIONE

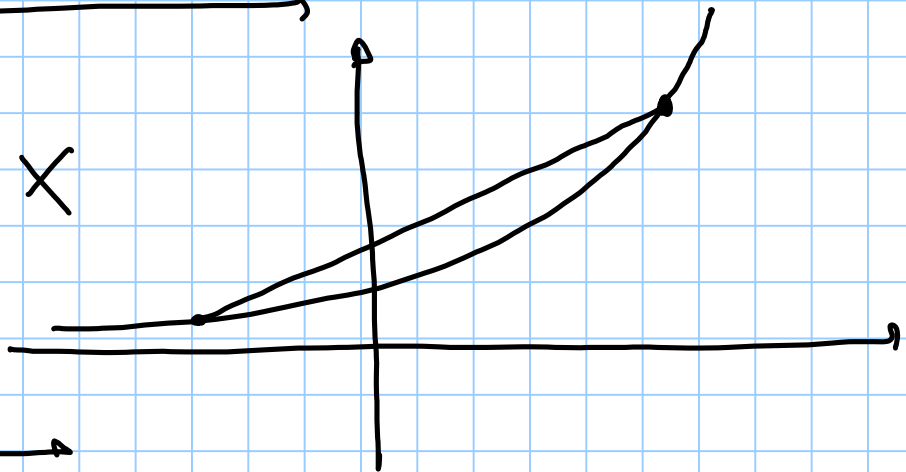
Si DICE **CONVESSA**
(STRETTAMENTE)

$$\text{SE } f(x) \leq f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) \quad (\leq)$$
$$\forall a < x_0 < x < x_1 < b$$



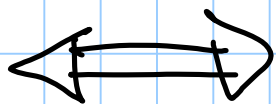
$$f(x) = e^x$$

$$f(x) = x^2$$



TEOREMA

$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ è CONVESSA
(STRETTAMENTE)



($<$) $t \in (0,1)$

$$f(t x_1 + (1-t) x_0) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_0)$$

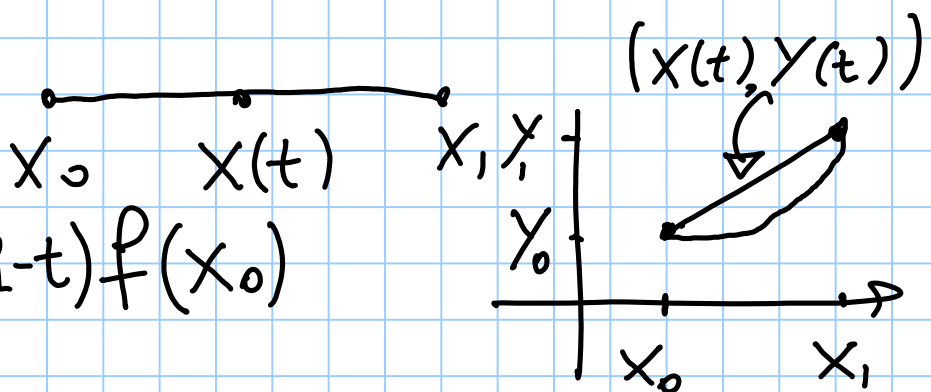
$$\forall a < x_0 < x_1 < b$$

$$\forall t \in [0,1]$$

→ $X(t) = t x_1 + (1-t) x_0, \quad t \in [0,1]$

COMBINAZIONE CONVESSA
di x_0, x_1

$$Y(t) = t f(x_1) + (1-t) f(x_0)$$



USANDO QUESTA
DEFINIZIONE DI
CONVESSITA' SI
PUO' DIMOSTRARE
IL SEGUENTE

RISULTATO (dove

$$P_f(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$x \neq x_0$

TEOREMA

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

- f è CONVESSA (STRETTAMENTE)

SE E SOLO SE

- $\forall x_0 \in (a, b)$, $P_f(x, x_0)$ è
una funzione monotona
CRESCENTE (STRETTAMENTE)
di x in $(a, b) / \{x_0\}$

Se f è DERIVABILE in
 (a, b) , ALLORA

• f è CONVESSA (STRETTAMENTE)

SE E SOLO SE $\forall x_0 \in (a, b)$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

($>$) $\forall x \in (a, b) \quad (a, b) \setminus \{x_0\}$

• f è CONVESSA (STRETTAMENTE)

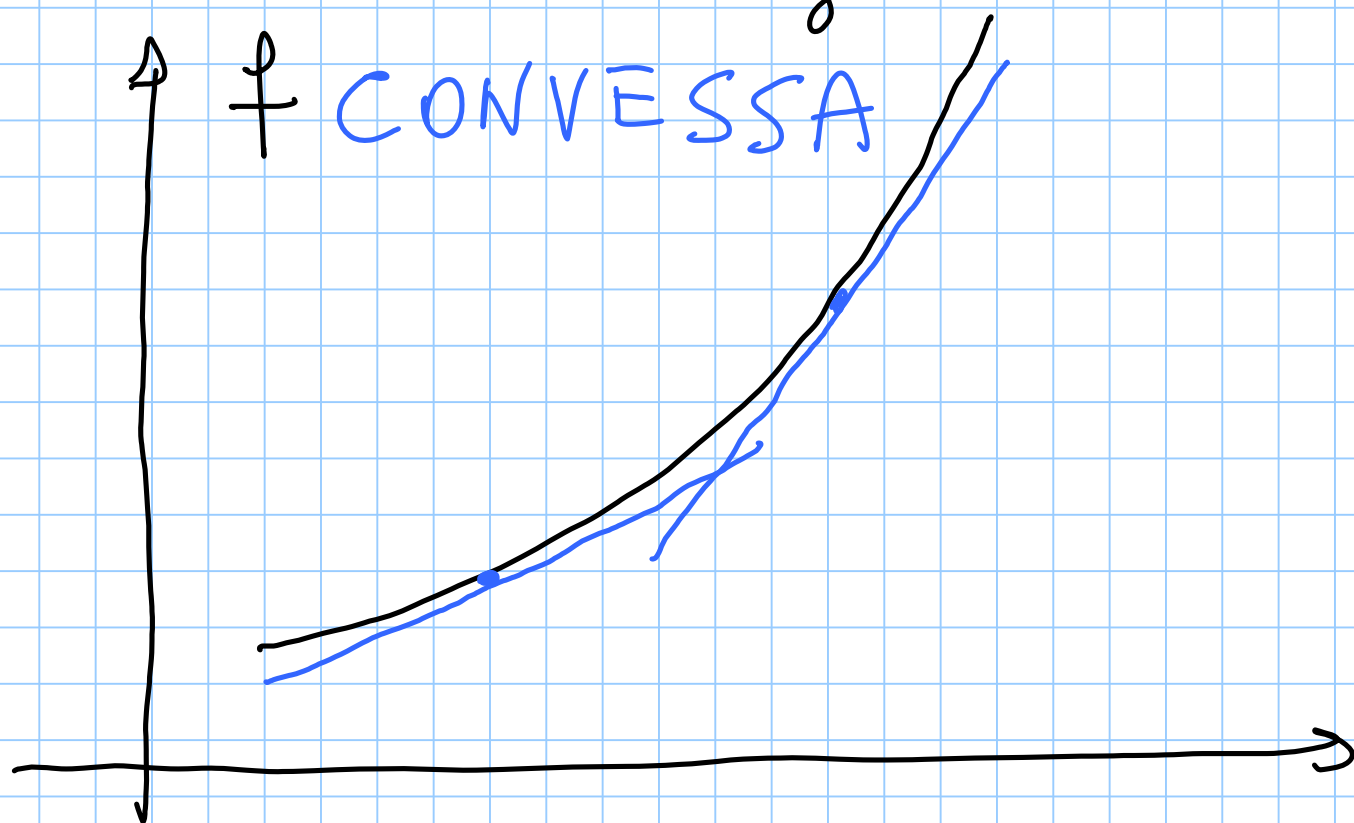
SE E SOLO SE

$f'(x)$ è MONOTONA

CRESCENTE (STRETTAMENTE)

Im PARTICOLARE: Se f è
DERIVABILE in (a,b) , ALLORA
 f è **CONVESSA** $\Leftrightarrow$ il grafico
di f si TROVA **SOPRA** a
Tutte le rette Tangenti.

ANALOGAMENTE Se f è
DERIVABILE in (a,b) , ALLORA
 f è **CONCAVA** $\Leftrightarrow$ il grafico
di f si TROVA **SOTTO** a
Tutte le rette Tangenti.



Per le funzioni DERIVABILI
USEREMO LA DEFINIZIONE

EQUIVALENTE:

DEFINIZIONE: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

f è CONVESSA (STRETTAMENTE)

SE E SOLO SE $\forall x_0 \in (a, b)$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$(>) \quad \forall x \in (a, b) \quad (a, b) \setminus \{x_0\}$$

DEFINIZIONE: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

Se f è derivabile in (a, b)

e se $\exists$ finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Si dice che f è DERIVABILE

DUE VOLTE in x_0 e

il VALORE del limite si DICE

DERIVATA SECONDA

di f in x_0

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

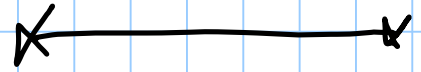
$$\frac{d^2}{dx^2} f(x_0), \quad D^{(2)} f(x_0)$$

Se $f''(x) \exists \forall x \in (a, b)$
la funzione $x \rightarrow f''(x)$

si dice

DERIVATA SECONDA

$\downarrow f \text{ in } (a, b)$



TEOREMA

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

DERIVABILE DUE VOLTE
in (a, b) .

LE SEGUENTI PROPRIETÀ
SONO EQUIVALENTI

- (i) f è CONVESSA in (a, b)
- (ii) f' è CRESCENTE in (a, b)
- (iii) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

DIMOSTRAZIONE

Sia $g = f'$, dal Teorema

su DERIVABILITÀ e
MONOTONIA

$$g \uparrow \iff g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Quindi (ii) $\iff$ (iii)

DIMOSTRIAMO CHE

$$(i) \iff (ii)$$

$\Rightarrow$ Siamo $a < x_1 < x_2 < b$,
dato che f è CONVESSA,

$$f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \quad \forall x \in (a, b)$$

$$f(x) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)$$

PONIAMO $x = x_2$ nella PRIMA
 $x = x_1$ nella SECONDA

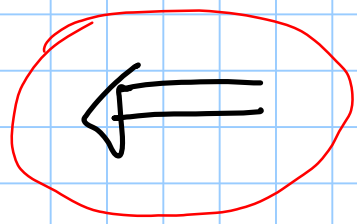
e Poi SOMMIAMO

$$0 \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

OVVERO

$$0 \leq (f'(x_2) - f'(x_1))(x_2 - x_1)$$

Quindi $f'(x_2) \geq f'(x_1) \quad \forall x_2 > x_1$



Si è m^o $x \in (a, b)$ e
 $x_0 \in (a, b)$
 $x \neq x_0$

T. di LAGRANGE, $\exists x_1$:

$x_1 \in (x_0, x)$ (Se $x > x_0$)

$x_1 \in (x, x_0)$ (Se $x < x_0$)

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0)$$

Se $x > x_0$, dato che $f' \uparrow$, si ha

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

PERCHÉ $f'(x_1) \geq f'(x_0)$ e $x - x_0 > 0$

Se $x < x_0$, si ha

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

PERCHE' $f'(x_1) \leq f'(x_0)$ e $x - x_0 < 0$



Si dimostra analogamente
che
 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è

STRETTAMENTE

CONVESSA $\iff$

f' è STRETTAMENTE

CRESCENTE.

In particolare, Se

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

allora f' $\uparrow$ strettamente

e f $\bar{\cup}$ strettamente

convessa.

Il contrario NON È

VERO, cioè Se

f $\bar{\cup}$ STRETTAMENTE

CONVESSA e $\exists f''(x)$
 $\forall x \in (a, b)$ NON È
SEMPRE VERO CHE
 $f''(x) > 0 \forall x \in (a, b)$

CONTROESEMPIO

$f(x) = x^4 \quad x \in \mathbb{R}$
 $f'(x) = 4x^3$ STRETTAMENTE MONOTONA $\nearrow$
 $\Downarrow$
 f STRETTAMENTE CONVESSA.

$$f''(x) = 12x^2, \quad f''(0) = 0$$

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2 \rightarrow f \text{ STRETTAMENTE CONVESSA}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x \geq 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{x^{3/2}} < 0$$

$$f \text{ STRETTAMENTE CONCAVA}$$

$$f(x) = e^x = f'(x) = f''(x), x \in \mathbb{R}$$

STRETTAMENTE
CONVESSA

$$f(x) = \log(x), x \in (0, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

STRETTAMENTE
CONCAVA

APPENDICE FACOLTATIVA SULLE FUNZIONI CONVESSE

$$(1.0) \quad f(x) \leq f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) \quad (<)$$

$$\forall a < x_0 < x < x_1 < b$$

$$(1.1) \quad f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_1) \quad (<)$$

$$(1.0) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (2.0)$$

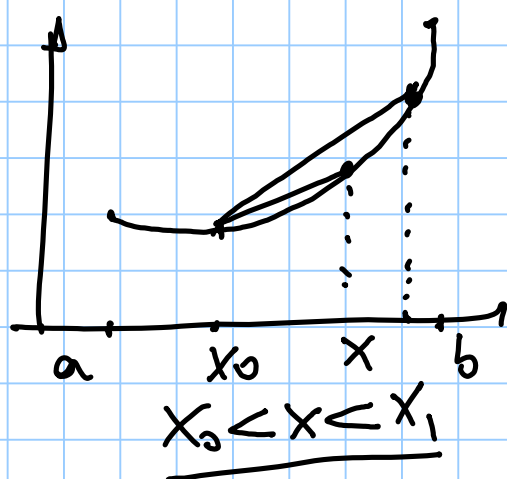
$$(1.1) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \quad (2.1)$$

$$(2.0) \quad P_f(x, x_0) \leq P_f(x_1, x_0)$$

$$\forall x_0 \in (a, b) \quad x_0 < x < x_1$$

$$\forall x_0 \in (a, b)$$

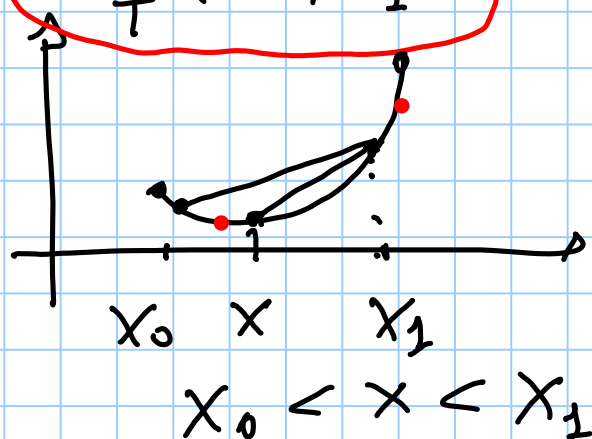
$$P_f(x, x_0) \nearrow x > x_0$$



$$(2.1) \Leftrightarrow P_f(x_0, x_1) = P_f(x_1, x_0) \leq P_f(x_1, x) = P_f(x, x_1)$$

$$\forall x_1 \in (a, b)$$

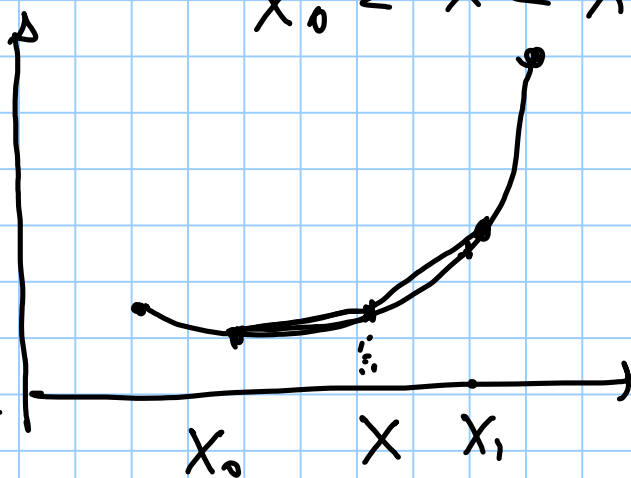
$$P_f(x, x_1) \nearrow x < x_1$$



$$P_f(x_0, x) =$$

$$P_f(x, x_0) \leq (2.0)$$

$$\leq P_f(x_1, x_0) =$$



$$= P_f(x_0, x_1) \leq (2.1) \leq P_f(x, x_1)$$

$x_0 < x < x_1$

$$= P_f(x_1, x) ; P_f(x_0, x) \leq P_f(x_1, x)$$

$x_0 < x < x_1$

TEOREMA

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

f è CONVESSA

(STRETTAMENTE)



$$\forall x_0 \in (a, b), P_f(x, x_0) \text{ è}$$

CRESCENTE

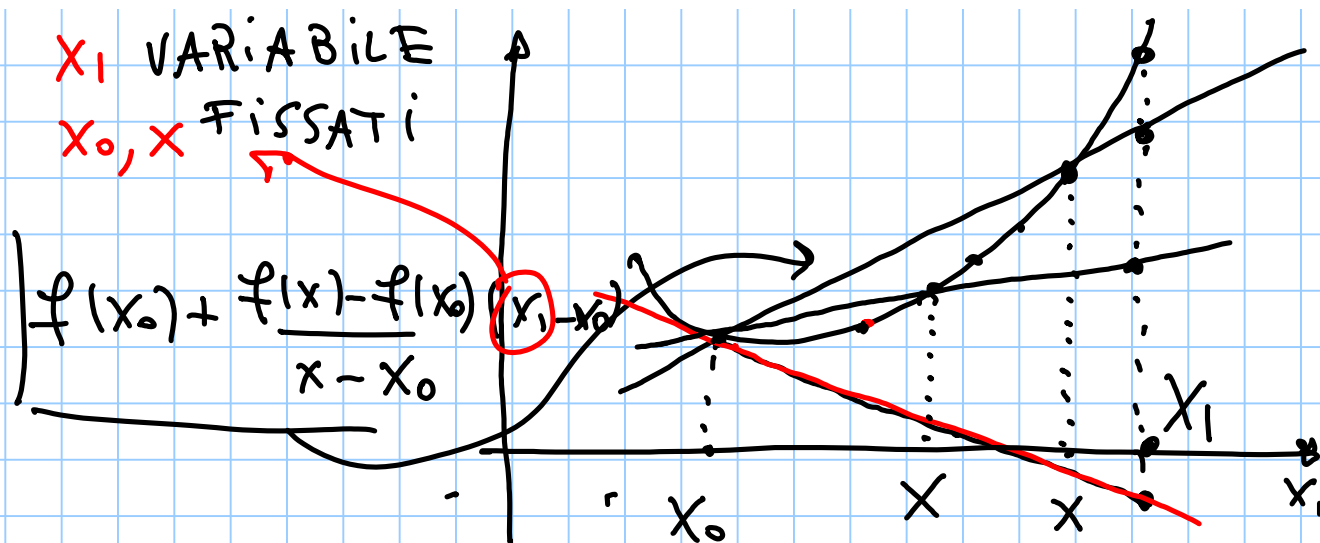
in $x \neq x_0$

(STRETTAMENTE)

$$(2.0) \quad f(x_1) \geq f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x_1 - x_0)$$

$$f \text{ DERIVABILE} \quad \forall a < x_0 < x < x_1 < b$$

POSSIAMO FARE IL LIMITE $x \rightarrow x_0^+$



$$f(x_1) \geq f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x_1 - x_0)$$

$$\geq f(x_0) + f'(x_0) (x_1 - x_0)$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0) \quad a < x_0 < x_1 < b$$

$$a < x_0 < x < b$$

(2.1) Ex

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0)$$

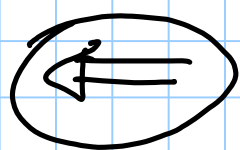
$$\forall a < x < x_0 < b$$

TEOREMA ! $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, DERIVABILE
 f è CONVESSA
(STRETTAMENTE) $\iff$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad (3)$$

($>$, $x \neq x_0$) $\forall x_0 \in (a,b), \forall x \in (a,b)$

DIMOSTRAZIONE



$$x_1 \neq x_2 \text{ in } (a,b)$$
$$t \in [0,1]$$

$$\underline{x_0} = t x_1 + (1-t) x_2$$

$$t \cdot f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$(1-t) \cdot f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$$

$$t f(x_1) + (1-t) f(x_2) \geq t f(\underline{x_0}) + (1-t) f(x_0)$$

$$x_0 = t x_1 + (1-t) x_2 \text{ CONVESSITA' } [t + (1-t)] f(x_0) = f(x_0)$$

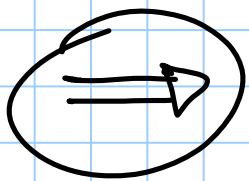
$$+ \underbrace{t f'(x_0)(x_1 - x_0) + (1-t) f'(x_0)(x_2 - x_0)}_{=0}$$

$$f'(x_0) [t(x_1 - x_0) + (1-t)(x_2 - x_0)] = 0$$

$$t x_1 + (1-t) x_2 + (-t x_0 + (1-t)(-x_0)) = 0$$

$$t x_1 + (1-t) x_2 - (t x_0 + (1-t) x_0) = 0$$

$$x_0 - x_0 = 0$$



STRETTAMENTE
CONVESSA

$$f(x_1) > f(x_0) + P_f(x, x_0)(x_1 - x_0)$$

$$x_0 < x < x_1$$

$$P_f(x, x_0) \nearrow \quad x \in (x_0, x_1) \Rightarrow$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} P_f(x, x_0) = \inf_{(x_0, x_1)} P_f(x, x_0)$$

$$P_f(x, x_0) \geq f'(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_1)$$

$$f(x_1) > f(x_0) + P_f(x, x_0)(x_1 - x_0) \geq$$

$$\geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

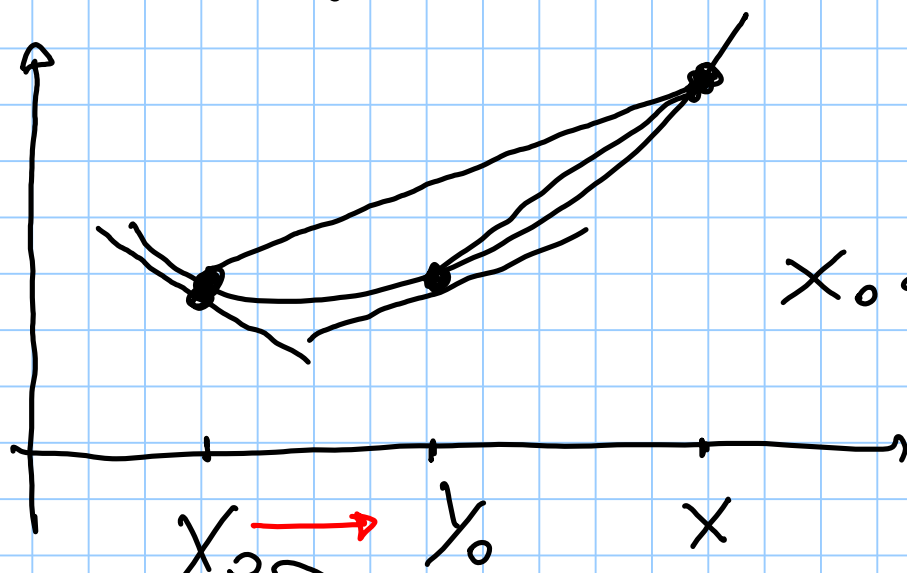
$$f(x_1) > f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$x_0 < x_1$$



$$\text{Da (3)} \quad f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$a < x_0 < x < b$$



$$x_0 < y_0 < x$$

$$P_f(x, x_0) = P_f(x_0, x) \leq P_f(y_0, x)$$

$$f'(x_0) \leq P_f(x, x_0) \leq P_f(y_0, x)$$

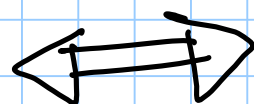
$$f'(y_0) = \lim_{x \rightarrow y_0^+} P_f(y_0, x) \quad x_0 < y_0 < x$$

$$f'(x_0) \leq f'(y_0)$$

$$a < x_0 < y_0 < b$$

TEOREMA ! $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ DERIVABILE

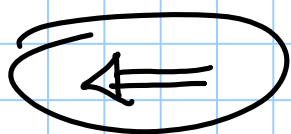
f CONVESSA
(STRETTAMENTE)



f' CRESCENTE
(STRETTAMENTE)



DIMOSTRAZIONE



$$a < x_1 < x_2 < b$$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

$$c \in (x_1, x_2)$$

→
T. di LAGRANGE

$$f'(c) \geq f'(x_1)$$

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x > x_0$$

$$\forall x_0 \in (a, b)$$

$$f'(c) \leq f'(x_1)$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x < x_0$$



TEOREMA

$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, DERIVABILE
due volte in (a,b)

f CONVESSA IN $(a,b) \iff$

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

(ii) f STRETTAMENTE

CONVESSA $\iff$

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$$