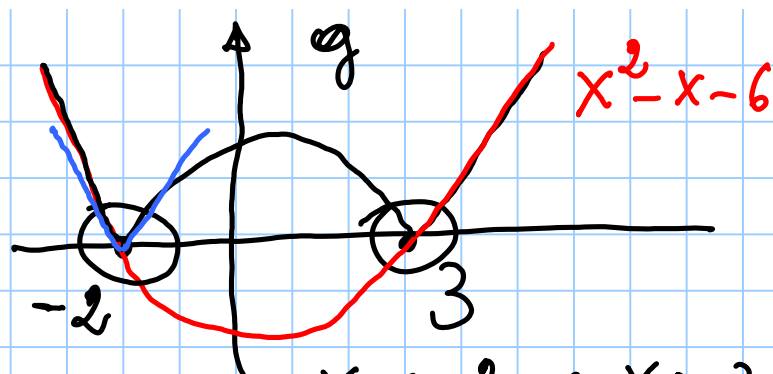


ESempi di Punti di Non Derivabilità

$$g(x) = |x^2 - x - 6|, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6, & x \leq -2, x \geq 3 \\ -(x^2 - x - 6), & -2 < x < 3 \end{cases}$$



$$g'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < -2 \text{ e } x > 3 \\ -(2x - 1) & -2 < x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} g'(x) = -5 = Dg^{(-)}(-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} g'(x) = +5 = Dg^{(+)}(-2)$$

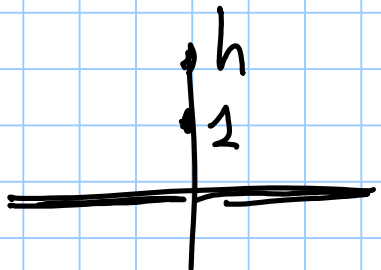
-2 è PUNTO ANGOLOSO

TEOREMA di CONTINUITA'
DELLA DERIVATA PRIMA

$$Dg^{(\pm)}(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^{\pm}} \frac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)} = \pm 5$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^{\pm}} g'(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^{\pm}} \frac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)}$$

TEOREMA DI CONTINUITÀ
della DERIVATA PRIMA

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$


$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 \neq h(0) = 1$$

Questa discontinuità non si può
VERIFICARE Se h è una DERIVATA!

Se f è derivabile e se $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = L$
ALLORA $f'(x_0) = L$.

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - x - 6|} = \sqrt{|(x+2)(x-3)|}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 6} & x \leq -2 \text{ e } x \geq 3 \\ \sqrt{-(x^2 - x - 6)} & -2 < x < 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}} & x < -2 \text{ e } x > 3 \\ \frac{1}{2} \frac{-(2x-1)}{\sqrt{-(x^2-x-6)}} & -2 < x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

T. CONTINUITA' DERIVATA PRIMA

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{2} \frac{2x-1}{\sqrt{|(x+2)(x-3)|}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} -\frac{1}{2} \frac{2x-1}{\sqrt{|(x+2)(x-3)|}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{5}{\sqrt{0^+}} = -\infty$$

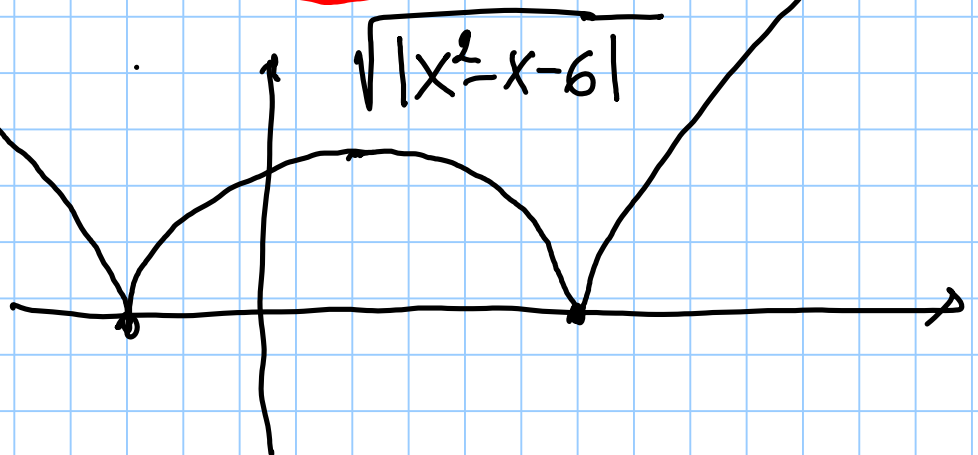
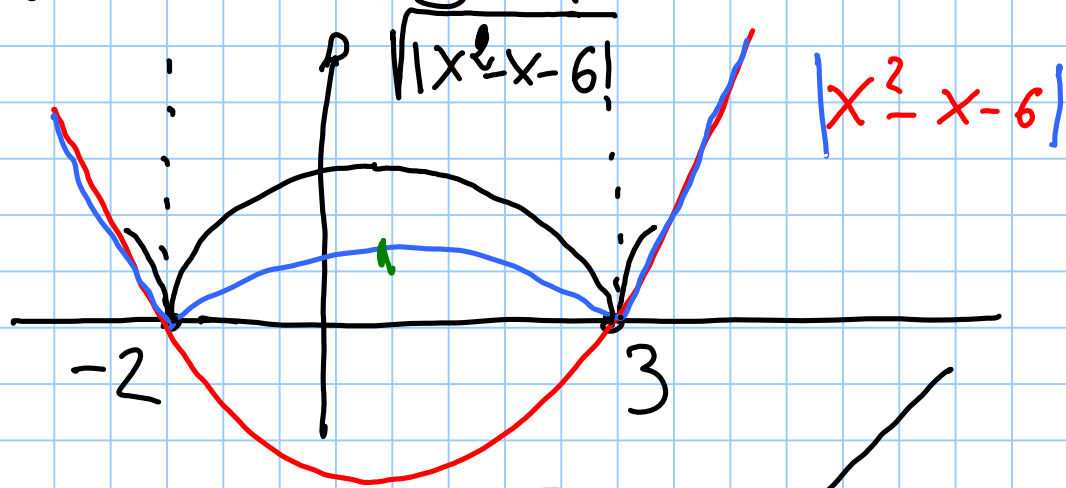
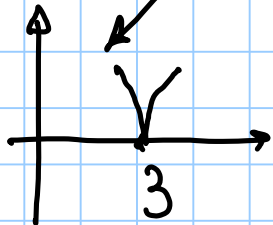
$x=3$ PUNTO di CUSPIDE

$$\sqrt{|x^2 - x - 6|} =$$

$$\sqrt{|(x+2)(x-3)|} =$$

$$= \sqrt{5+0} \sqrt{|x-3|}$$

$x \rightarrow 3$



ESTREMI LOCALI

TEOREMI DI FERMAT, ROLLE, LAGRANGE

DEFINIZIONE $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $x_0 \in (a, b)$. Si dice che x_0
è un PUNTO DI

ESTREMO LOCALE

• $\exists$ un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 !

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

(MINIMO LOCALE)

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

(MASSIMO LOCALE)

TEOREMA [FERMAT]

Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

Se x_0 è di ESTREMO LOCALE

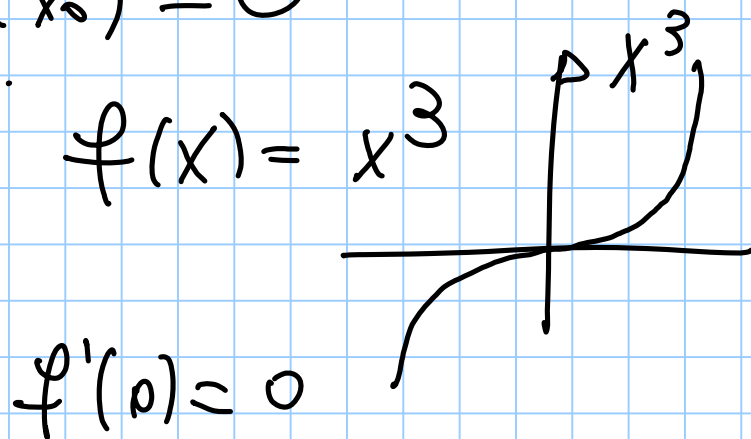
per f , e se f è DERIVABILE
in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$

OSSERVAZIONI IMPORTANTI

1) Se x_0 è l'ESTREMO LOCALE
 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

IL CONTRARIO
IN GENERALE

NON È VERO



CIOÈ NON È SEMPRE

VERO CHE SE $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$

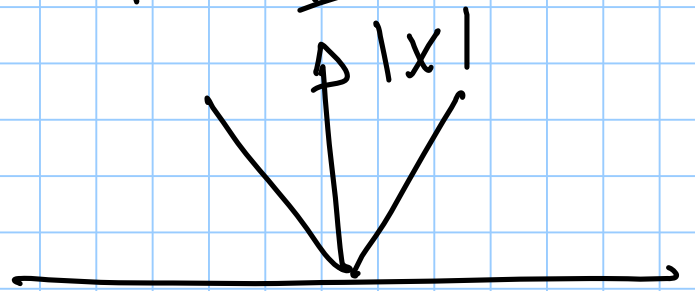
$x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0) = 0$,

ALLORA x_0 è un punto di
ESTREMO LOCALE

Si PUO' SOLO DIRE
CHE $\exists$ la retta Tangente
e che e' PARALLELA
all'ASSE x .

2) NON È VERO CHE
SE x_0 È UN PUNTO
DI ESTREMO LOCALE
LA DERIVATA ESISTE

$$f(x) = |x|$$

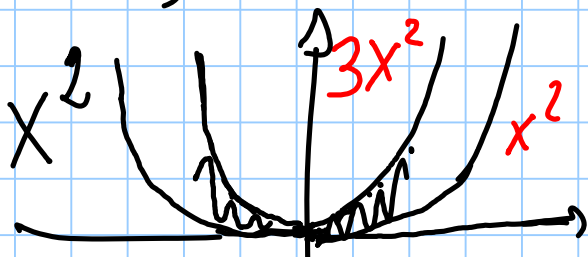


3) NON È VERO CHE
SE x_0 È UN PUNTO
DI ESTREMO LOCALE

ALLORA la funzione
è definitivamente
monotona per $x \rightarrow x_0^+$
e/o per $x \rightarrow x_0^-$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 (2 + \sin(\frac{1}{x})) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$$x^2 \leq f(x) \leq 3x^2$$



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x(2 + \sin(\frac{1}{x})) = 0$$

NOTA BENE: $f(x) \geq f(0) = 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONE [T. di FERMAT]

(a) S.P.D.G. $f(x) \geq f(x_0) \quad x \in U$

(b) $\exists f'(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) \geq 0 \quad \forall x \in U$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \Leftarrow x \in U \\ & \quad x > x_0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$Df(x_0) = Df^{(+)}(x_0) \geq 0$$

(DERIVABILITÀ)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$\begin{aligned} & \Leftarrow x < x_0 \\ & \quad x \in U \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$Df(x_0) = Df^{(-)}(x_0) \leq 0$$

$$0 \leq Df(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad \square$$

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

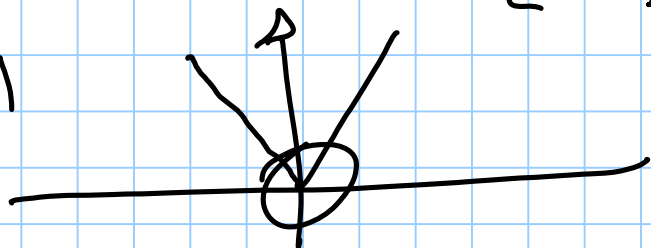
DERIVABILE

$$(a, b) \setminus \{x_0\}$$

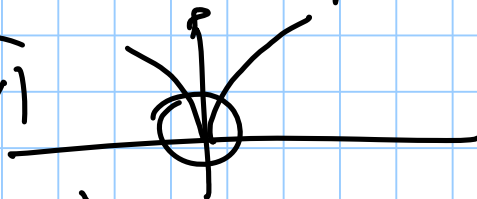
x_0

L'ESTREMO
LOCALE

$$f(x) = |x|$$



$$f(x) = \sqrt{|x|}$$



$$\nexists f'(0)$$

ma $x_0 = 0$
è MINIMO
LOCALE

I punti in cui
si annulla la
derivata prima
($f'(x_0) = 0$) si dicono
PUNTI CRITICI
della funzione

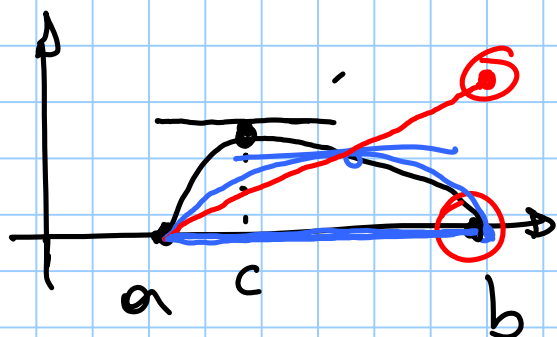
TEOREMA [ROLLE]

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, CONTINUA in $[a, b]$,
DERIVABILE in (a, b) .

SE $f(a) = f(b)$,

ALLORA $\exists c \in (a, b)$:

$$f'(c) = 0$$



$$f(a) = 0 = f(b)$$

DIMOSTRAZIONE

S.P.D.G. $f(a) = 0 = f(b)$

SE $f(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow$

$$\forall c \in (a, b) \quad f'(c) = 0$$

$$\text{S. P. D. G.} \quad \exists x_0 \in (a, b) : \\ f(x_0) \neq 0.$$

$$\text{S. P. D. G.} \quad f(x_0) > 0$$

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ CONTINUA} \Rightarrow$$

T. di WEIERSTRASS, $\exists$ un
MASSIMO di f in $[a, b]$

$$\max_{[a, b]} f \geq f(x_0) > 0$$

$$c_n \in [a, b] : f(c_n) = \max_{[a, b]} f$$

$$\Rightarrow c_n \in (a, b), \quad c_n \neq a \wedge c_n \neq b$$

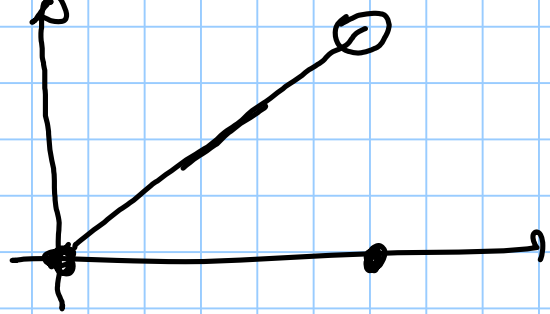
$$\text{PERCHÉ} \quad f(c_n) \geq f(x_0) > 0$$

$$\text{e} \quad f(a) = 0 = f(b)$$

$$\Rightarrow c_n \text{ è MASSIMO LOCALE}$$

$f \in \mathcal{C}^1$ DERIVABILE
 in $C_M \Rightarrow$ T. DI FERMAT
 $f'(C_M) = 0$ 

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 f continua in $[a, b]$
 derivabile in (a, b)



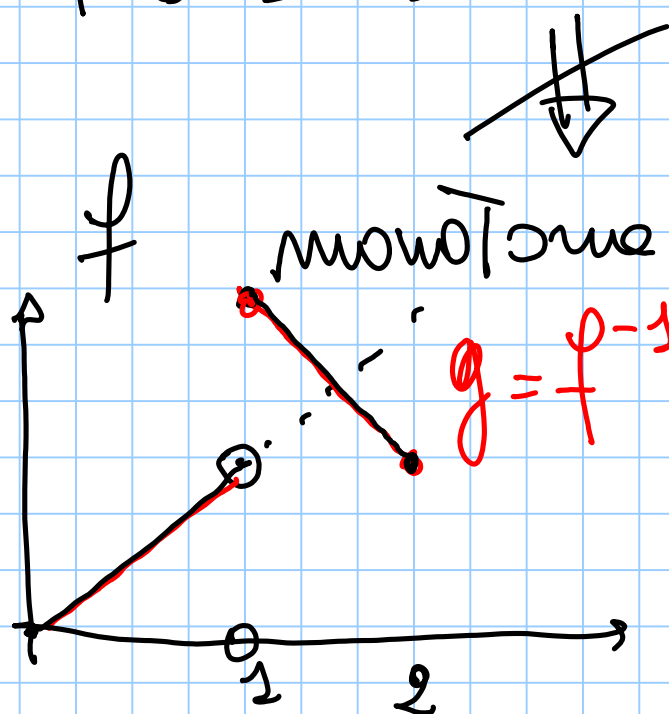
$$f(0) = 0 = f(1)$$

f continua in $[0, 1)$

CONTROESEMPLO

A. A. 20/21 del SEGNO ~~del SEGNO~~ FACOLTATIVO

$\left\{ \begin{array}{l} f: I \rightarrow \mathbb{R}, I \text{ intervallo,} \\ f \text{ è INIETTIVA} \end{array} \right\}$



$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ -x+3, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

$$f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

f non è monotone, ma è
iniettiva (e $g = f^{-1}$)

TEOREMA $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo,
CONTINUA e INIETTIVA.

ALLORA f è STRETTAMENTE
MONOTONA in I

DIM Sia $x_0 \in I$.

(1) $f(x) - f(x_0)$ ha segno
COSTANTE a DESTRA
e a SINISTRA di x_0 .

$\bar{x} > x_0$ supponiamo che
 $f(\bar{x}) > f(x_0)$.

Allora si ha $f(x) > f(x_0)$
 $\forall x > x_0$

INFATTI, se ciò non fosse,
Supponiamo per ASSURDO che

$$\exists x_1 > x_0 : f(x_1) \leq f(x_0)$$

f è iniettiva $\Rightarrow$

$$f(x_1) < f(x_0)$$

$$f(\bar{x}) > f(x_0)$$

$$f(x_1) < f(x_0) \quad \begin{matrix} x_1 > x_0 \\ \bar{x} > x_0 \end{matrix}$$

del Teorema degli ZERI:

$$\exists \xi \in (x_1, \bar{x}) \vee \xi \in (\bar{x}, x_1):$$

$$f(\xi) = f(x_0), \text{ ASSURDO}$$

Siano $a < b$ arbitrari in I .

supponiamo S.P.D.G. che

$$f(a) < f(b)$$

Allora f è MONOTONA

STRETTAMENTE

CRESCENTE

$$x_1 < x_2 \text{ ARBITRARI: in } I \\ \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

$$b_1 = \max \{b, x_2\}$$

Da (1) che $f(b) > f(a)$ da (1)

$$f(x) > f(a) \quad \forall x > a.$$

In particolare $b_1 > a \Rightarrow$

$$f(b_1) > f(a) \quad \text{da (1)}$$

$f(b_1) - f(x)$ è costante
a SINISTRA di b_1

$$f(b_1) > f(x) \quad \forall x < b_1$$

$$x_1 < b_1 \Rightarrow f(b_1) > f(x_1)$$

$$\text{da (1)} \quad f(x) > f(x_1) \quad \forall x > x_1.$$

$$\Rightarrow x_2 > x_1 \quad f(x_2) > f(x_1)$$

