DERIVATE

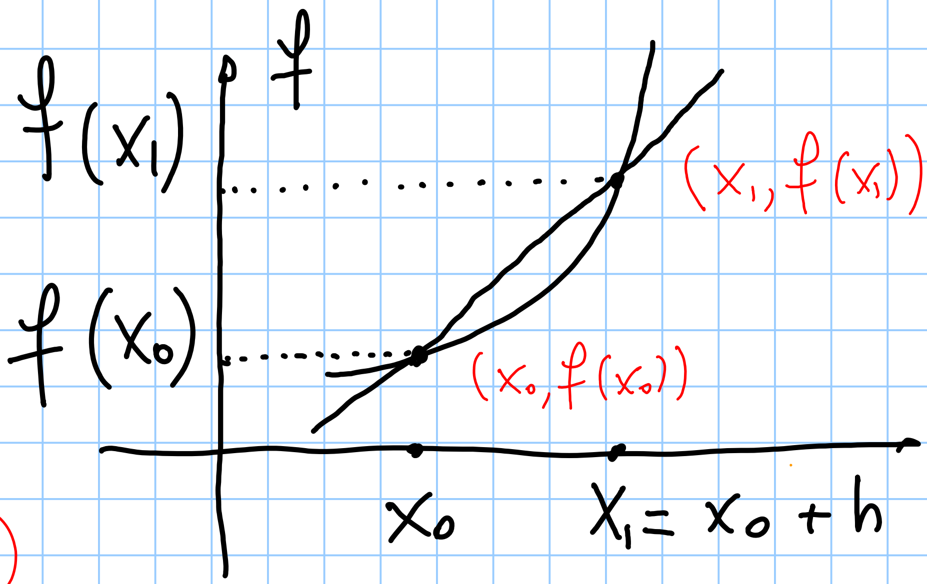
EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER I PUNTI

$(x_0, f(x_0))$ e

$(x_1, f(x_1))$

detta

RETTA SECANTE (IL GRAFICO)



$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

$h = x_1 - x_0 \neq 0$

$$m_f(x_0, h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

RAPPORTO INCREMENTALE di f TRA x_0 e $x_0 + h$

h = incremento

$$P_f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

o Tra x_0 e x_1

Il rapporto incrementale è il COEFFICENTE ANGOLARE DELLA RETTA

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + m_f(x - x_0)$$

TEOREMA

$f : I \to \mathbb{R}$, I un INTERVALLO

f è MONOTONA CRESCENTE (STRETTAMENTE)

$$\Longleftrightarrow$$

$P_f(x, x_0) \geq 0 \ (>0)$, $\forall x \in I$, $\forall x_0 \in I$, $x \neq x_0$

DIM.

$\Rightarrow$ $f \uparrow$

$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x > x_0$;

$$x - x_0 > 0 \Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$f \nearrow, \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x < x_0,$$

$$x - x_0 < 0 \Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

QUINDI si ha $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \neq x_0$

$$f \nearrow \Longrightarrow P_f(x, x_0) \geq 0 \quad \forall x \neq x_0$$

$$\Longleftarrow \quad \forall x \neq x_0 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \text{se } x > x_0 \quad f(x) \geq f(x_0)$$

$\blacksquare$

DEFINIZIONE [DERIVATA]

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

f è DERIVABILE in x_0

SE ESISTE FINITO IL LIMITE

$$(D) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

IL VALORE del LIMITE (D) SI DICE DERIVATA di f in x_0

$$\frac{df}{dx}(x_0), \quad f'(x_0), \quad Df(x_0)$$

Se f è derivabile $\forall x \in (a,b)$

ALLORA LA FUNZIONE

$f' : (a,b) \to \mathbb{R}$,

$$x \longrightarrow f'(x) \quad , x \in (a,b)$$

SI DICE DERIVATA o FUNZIONE DERIVATA di f in (a,b)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

TEOREMA $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$. Se f è DERIVABILE in x_0, allora f è CONTINUA in x_0.

DIM.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] + f(x_0)$$

$$= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$= f(x_0) + \quad f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0) \quad \blacksquare$$

ESEMPIO $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$D(\sin(x))\Big|_{x=0} = D\sin(0) = 1$$

RICORDIAMO CHE QUESTO E' EQUIVALENTE A

$$\sin(x) = x + o(x), \quad x \to 0$$

PROCEDIAMO COME PER I LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0), \quad x \to x_0$$

$$(D_1) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \to x_0$$

(D_1) E' EQUIVALENTE ALLA DERIVABILITÀ di f in x_0.

POSSIAMO PER ESEMPIO USARE (D_1) PER DIMOSTRARE CHE LA DERIVABILITÀ IMPLICA LA CONTINUITÀ

$$(D_1) \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + \overbrace{f'(x_0)(x-x_0)}^{\to 0} + \overbrace{o(x-x_0)}^{\to 0} \right)$$

$$= f(x_0)$$

DEFINIZIONE

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$.

si dice che f è DIFFERENZIABILE in x_0 SE $\exists\ \lambda\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=f(x_0)+\lambda(x-x_0)+o(x-x_0) \quad x\to x_0$$

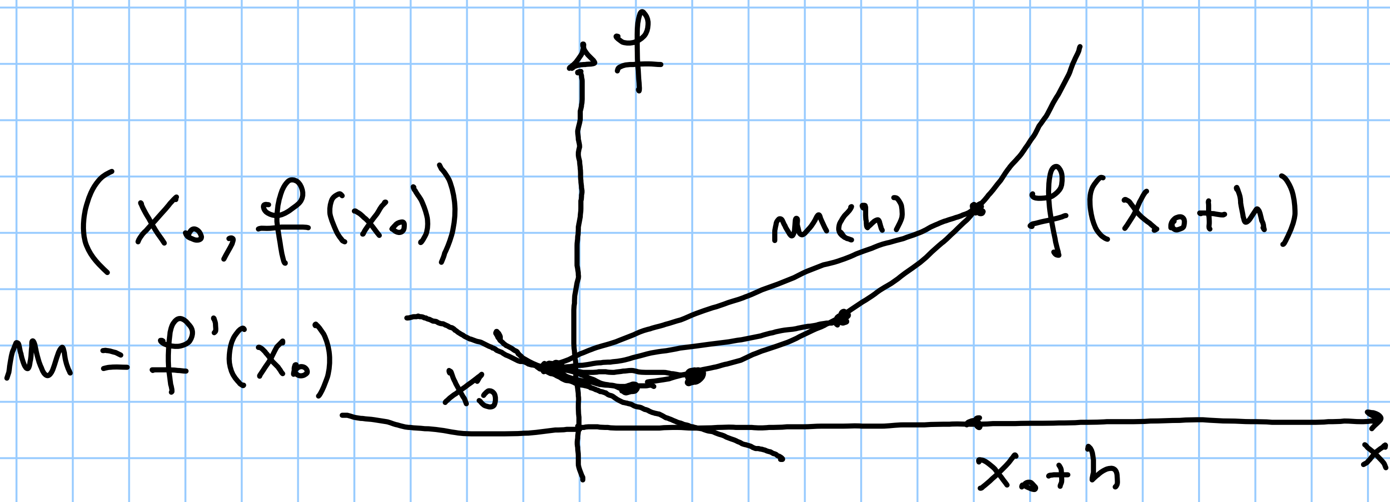
Se f è DIFFERENZIABILE in x_0, allora la retta $y=f(x_0)+\lambda(x-x_0)$ si DICE RETTA TANGENTE al GRAFICO di f nel punto $(x_0,f(x_0))$.

TEOREMA

$f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R},\quad x_0\in(a,b).$

f è DIFFERENZIABILE in $x_0 \Longleftrightarrow$

f è DERIVABILE in x_0 e $f'(x_0)=\lambda$.



$f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R},\qquad x_0\in(a,b)$

$\exists\ f'(x_0)\longrightarrow$ RETTA TANGENTE

$$y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}\ + \ o(x-x_0)$$

DIM. Se $\exists f'(x_0) \Longrightarrow$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \to x_0$$

Quindi f è DIFFERENZIABILE e $\lambda = f'(x_0)$.

Se f è DIFFERENZIABILE

$$f(x) = f(x_0) + \lambda (x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda + o(1), \quad x \to x_0$$

Quindi $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda$

OVVERO $f'(x_0) = \lambda$ $\blacksquare$

RIASSUMENDO:

LA DERIVABILITÀ dice CHE i RAPPORTI INCREMENTALI DELLE RETTE SECANTI CONVERGONO AD UN NUMERO REALE $f'(x_0)$

LA DIFFERENZIABILITÀ dice CHE $f(x)$ è, per $x \to x_0$, APPROSSIMATA DALLA RETTA $y = f(x_0) + \lambda(x - x_0)$

A MENO DI UN ERRORE CHE' $o(x-x_0)$.

IL TEOREMA DICE CHE QUESTE DUE NOZIONI COINCIDONO

$$(D) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(D_1)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad x \to x_0$$

(D) ESISTE FINITO

IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE in x_0 OVVERO LA DERIVATA

$$f'(x_0)$$

(D_1) ESISTE in x_0

LA RETTA TANGENTE

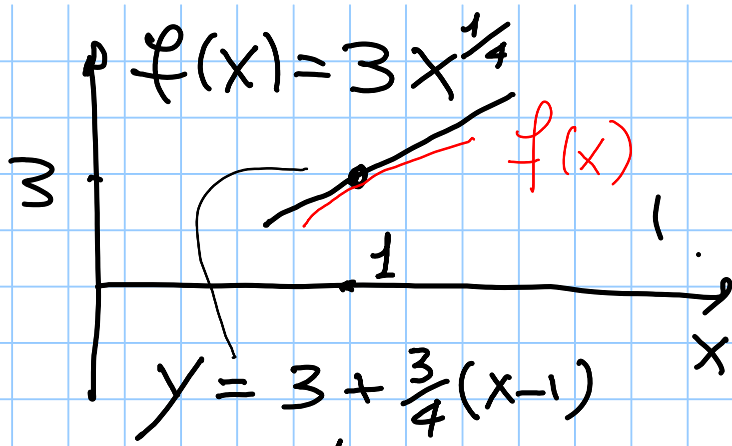
$$y = f(x_0) + \lambda \, (x - x_0)$$

$$e \; f'(x_0) = \lambda$$

$$f(x) = 3x^{1/4}$$

$$x_0 = 1$$

$$f(x_0) = 3$$



$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^{1/4} - 3}{x-1} =$$

$$= 3 \lim_{x\to 1} \frac{x^{1/4} - 1}{x-1} = 3 \cdot \frac{1}{4} = 3/4$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{\alpha} - 1}{x^{\beta} - 1} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \beta \neq 0$$

$$f(x) = c, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} 0 = 0$$

$$f(x) = x$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

$$f(x) = x^{\alpha}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\alpha \neq 0, \quad x_0 \in (0, +\infty)$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^{\alpha} - x_0^{\alpha}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^{\alpha} - x_0^{\alpha}}{h} =$$

$$= x_0^{\alpha} \lim_{h \to 0} \frac{\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\alpha} - 1}{h} =$$

$$= x_0^{\alpha} \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1} + \alpha \frac{h}{x_0} + o(h) - \cancel{1}}{h} =$$

$$(1 + y)^{\alpha} = 1 + \alpha y + o(y)$$

$$= \alpha \, x_0^{\alpha - 1}$$

$$\alpha > 1 \implies f'(0) = 0$$

$$f(x) = x^{\alpha}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$f'(1) = \alpha$$

$$f(x) \underset{x \to 1}{=} f(1) + \alpha(x-1) + o(x-1)$$

$$x^{\alpha} \underset{x \to 1}{=} 1 + \alpha(x-1) + o(x-1),$$

$$y = x - 1$$

$$(1+y)^{\alpha} = 1 + \alpha y + o(y), \quad y \to 0$$

$$x^{\alpha} = x_0^{\alpha} + \alpha x_0^{\alpha-1}(x - x_0) + o(x - x_0),$$

$$x \to x_0$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} =$$

$$= e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0}$$

$$e^y = 1 + y + o(y) \quad , y \to 0$$

$$y = x - x_0$$

$$D(e^x) = e^x$$

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + o(x - x_0), \; x \to x_0$$

$$D(\cos(x_0)) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x_0+h) - \cos(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x_0)\cos(h) - \sin(x_0)\sin(h) - \cos(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos(x_0) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \lim_{h \to 0} \sin(x_0) \frac{\sin(h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos(x_0) \frac{o(h)}{h} - \sin(x_0) = -\sin(x_0)$$

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2) = 1 + o(y)$$

$$D(\cos(x)) = -\sin(x)$$

$$D(\sin(x)) = \cos(x)$$

$$D(\log(x)) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

Con alcune DERIVATE RITROVIAMO I LIMITI NOTEVOLI

$$f(x) = e^x \quad , \quad f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$= 1$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + o(x), \quad x \to 0$$

$$e^x = 1 + 1 \cdot x + o(x)$$

$$= 1 + x + o(x) \quad , \quad x \to 0$$

$$f(x) = \sin(x) \quad ,$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\sin(x) = 0 + 1 \cdot x + o(x)$$
$$= x + o(x), \quad x \to 0$$

Possiamo ricavare altri limiti notevoli DIRETTAMENTE

$$f(x) = e^x, \quad f'(3) = e^3$$

$$e^x = e^3 + e^3 (x-3) + o(x-3)$$
$$x \to 3$$

$$f(x) = x^{\alpha} \quad , \quad f'(1) = \alpha(1)^{\alpha-1} = \alpha$$

$$x^{\alpha} = 1 + \alpha(x-1) + o(x-1)$$
$$x \to 1$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$$

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$x \to \frac{\pi}{4}.$$

ATTENZIONE:

$f(x) = \cos(x)$,

$f'(0) = -\sin(0) = 0$

$$\cos(x) = 1 + 0 \cdot x + o(x)$$
$$= 1 + o(x)$$

In questo caso il limite notevole $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ dice di più, ovvero che

$$o(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

TEOREMA

(i) $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, I è un insieme APERTO, $x_0 \in I$, $c \in \mathbb{R}$

SE f e g sono DERIVABILI in x_0

ALLORA $f \pm g$, cf, $f \cdot g$ sono DERIVABILI e si HA

$$D(f \pm g)(x_0) = Df(x_0) \pm Dg(x_0)$$

$$D(cf)(x_0) = c\,Df(x_0)$$

$$D(f \cdot g)(x_0) = Df(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot Dg(x_0)$$

(ii) I e J insiemi APERTI

$f : J \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(g) \subseteq J$

$x_0 \in I$, $g(x_0) = y_0$, $y_0 \in J$

SE g è DERIVABILE in x_0 e

SE f È DERIVABILE in y_0, ALLORA $f \circ g$ È DERIVABILE in x_0 e SI HA

$$D(f\circ g)(x_0) = D(f(g(x_0))) \cdot Dg(x_0)$$

$$h(x) = \sin(x^3)$$

$$Dh(x) = D(\sin(y))\Big|_{y=x^3} \cdot D(x^3)$$

$$= \cos(x^3)\cdot 3\cdot x^2 = 3x^2\cos(x^3)$$

$$D(\log(\sin(e^{3x}))) =$$

$$= \frac{1}{\sin(e^{3x})}\cdot \cos(e^{3x})\cdot e^{3x}\cdot 3$$

$$= 3e^{3x}\cot g(e^{3x})$$

"$\sin(e^{3x}) > 0$"

$$D\left(\sqrt{x^4+e^{\sin x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^4+e^{\sin x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(4x^3+e^{\sin x}\cos x\right)$$

$$D\left(x^{x^2}\right) = D\left(e^{x^2\log x}\right) =$$

$$e^{x^2\log x}\left(2x\log x + x^2\cdot\frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^{x^2+1}\left(2\log(x)+1\right)$$

$$\boxed{g \neq 0}$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D\left(f\cdot(g)^{-1}\right) =$$

$$Df\cdot(g)^{-1} + f\cdot D\left((g)^{-1}\right) =$$

$$= \frac{Df}{g} + f\left((-1)\cdot g^{-2}\,Dg\right) =$$

$$= \frac{Df}{g} - \frac{f\,Dg}{g^2} = \frac{Df \cdot g - f\,Dg}{g^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad , \quad g \neq 0$$

$$f(x) = x^2 \log(x)$$

$$f'(x) = 2x \log(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$= x\left(2\log(x) + 1\right)$$