

TEOREMA [DEGLI ZERI]

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad -\infty < a < b < +\infty$$

f continua in $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$

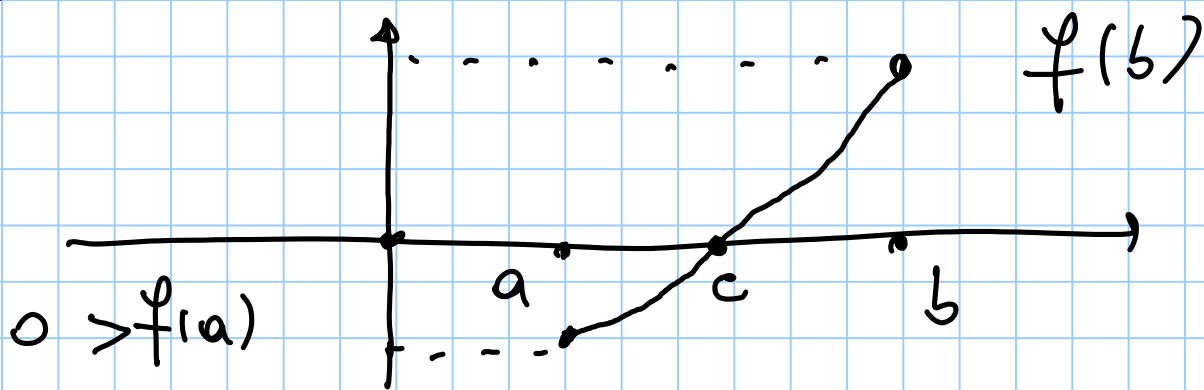
ALLORA $\exists c \in (a, b)$:

$$f(c) = 0$$

$$f(a)f(b) < 0$$

$$f(a) < 0 \Rightarrow f(b) > 0$$

$$f(a) > 0 \Rightarrow f(b) < 0$$



DOMANDA: SE TOLGO L'IPOTESI
di CONTINUITA', IL TEOREMA
E' ANCORA VERO?

RISPOSTA: NO.

COME DIMOSTRIAMO CHE LA
RISPOSTA E' NO? CERCHIAMO

UN

CONTROESEMPIO

OVVERO, in questo caso,

UN ESEMPIO DI UNA FUNZIONE

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

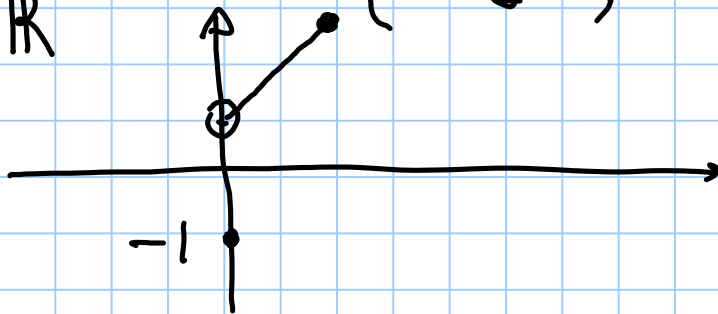
NON CONTINUA, Tale che

$\nexists c \in (a, b) : f(c) = 0$

CONTROESEMPLO

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in (0,1] \\ -1, & x=0 \end{cases}$$

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$



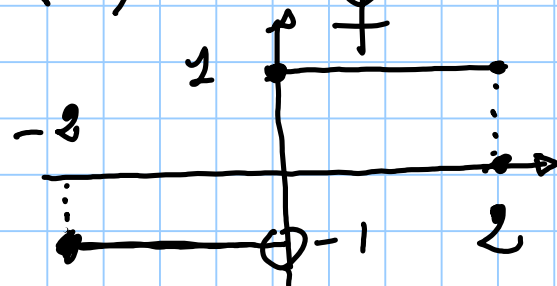
$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(1) = 2 > 0$$

$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$. f NON È CONTINUA
in $[0,1]$, ma
solo in $(0,1]$

e $\nexists c \in (0,1) : f(c) = 0$

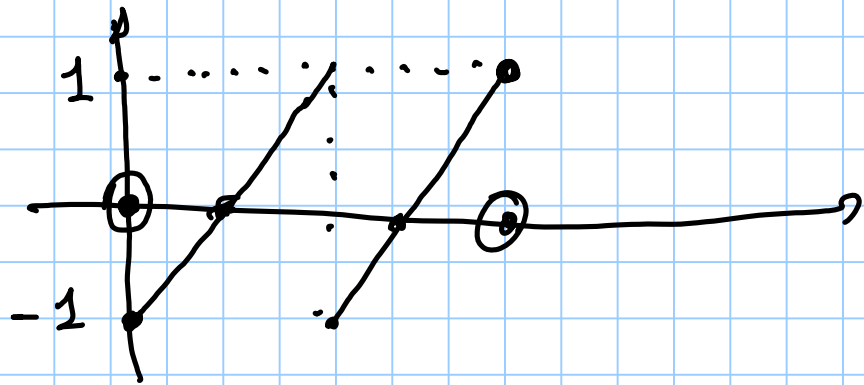
$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



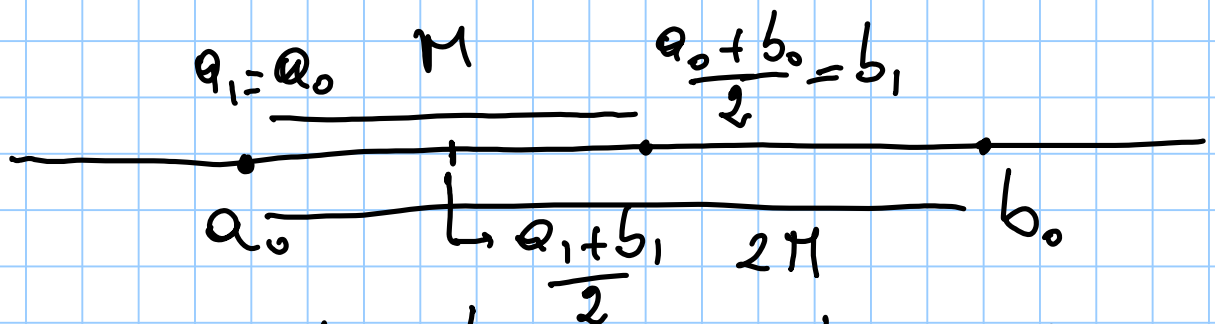
$$f(x) = g(x), x \in [-2,2]$$

g non è continua e $\nexists c : g(c) = 0$
in $[-2,2]$ $c \in (-2,2)$

QUESTO NON VUOL DIRE CHE LA
CONTINUITA' SIA NECESSARIA



Dim.



$$a_0 = a \quad b_0 = b \quad 0 < b_0 - a_0 = 2M$$

$$\text{S.P.D.G. } f(a) < 0 \quad \cdot \quad f(b) > 0$$

$$\text{Se } f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) = 0 \Rightarrow c = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

$$f(c) = 0$$

$$\text{S.P.D.G. } f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) \neq 0$$

$$S \equiv f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) > 0$$

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

$$S \equiv f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) < 0$$

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad b_1 = b_0$$

$$a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0, \quad 0 < b_1 - a_1 = M$$

$$f(a_1) < 0 \quad \text{e} \quad f(b_1) > 0$$

$$S \equiv f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) = 0 \Rightarrow c = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

$$f(c) = 0$$

$$S.P.D.G. \quad f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) \neq 0$$

$$S \equiv f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) > 0$$

$$a_2 = a_1, \quad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

$$\exists f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \quad b_2 = b_1$$

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \leq b_0, \quad 0 < b_2 - a_2 = \frac{M}{2}$$

$$f(a_2) < 0 \quad \text{e} \quad f(b_2) > 0$$

PER INDUZIONE costruiamo

$$\{a_m\} \quad \text{e} \quad \{b_m\} :$$

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m < b_m \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$$

$$0 < b_m - a_m = \frac{M}{2^{m-1}}$$

$$f(a_m) < 0 \quad \text{e} \quad f(b_m) > 0$$

a_m è MONOTONA CRESCENTE
e LIMITATA $a_0 \leq a_m \leq b_0$.

$b_m \in \mathbb{R}$ // DECRESCENTE

e LIMITATA $a_0 \leq b_m \leq b_0$

$$a_m \longrightarrow \bar{a} \in \mathbb{R}, m \longrightarrow +\infty$$

$$b_m \longrightarrow \bar{b} \in \mathbb{R}, m \longrightarrow +\infty$$

$$b_m - a_m = \frac{M}{2^{m-1}}$$

limite per $m \longrightarrow +\infty$

$$\lim_m (b_m - a_m) = 0 \Rightarrow \bar{b} - \bar{a} = 0$$

$\bar{a} = \bar{b}$

$$c := \bar{a} = \bar{b}$$

DIMOSTRIAMO CHE $f(c) = 0$

$$f(a_m) < 0, \quad a_m \longrightarrow c$$

$m \longrightarrow +\infty$

f continua $\Rightarrow$

$$\exists a_n \rightarrow c \Rightarrow \boxed{\lim_n f(a_n) = f(c)}$$

$$f(a_n) < 0$$

$$f(c) = \lim_n f(a_n) \leq 0$$

$$\boxed{f(c) \leq 0}$$

$$f(b_n) > 0, \quad b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} c$$

f is continuous $\Rightarrow$

$$\exists b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} c$$

$$\boxed{f(b_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(c)}$$

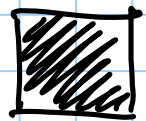
$$f(b_n) > 0$$

$$f(c) = \lim_n f(b_n) \geq 0$$

$$\boxed{f(c) \geq 0}$$

$$f(c) = 0 \quad \swarrow \quad 0 \leq f(c) \leq 0$$

$$c \in (a, b)$$



COROLLARIO

Se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è CONTINUA e
se I è un Intervallo, ALLORA

$I_m(f)$ è un Intervallo.

DIM.

$I_m(f)$ è un Intervallo SE:

$y_1 \in I_m(f)$, $y_2 \in I_m(f)$ e
 $y_1 < z < y_2$ (S.P.D.G. $y_1 < y_2$)

$\implies z \in I_m(f)$

$y_1 = f(x_1)$ $x_1 \in I$,

$y_2 = f(x_2)$, $x_2 \in I$.

S.P.D.G. $x_1 < x_2$

e $z \in (y_1, y_2)$

$$g(x) = f(x) - z, \quad x \in [x_1, x_2]$$

g è continua in $[x_1, x_2]$

$$g(x_1) = f(x_1) - z = y_1 - z < 0$$

$$g(x_2) = f(x_2) - z = y_2 - z > 0$$

$\Rightarrow$ TEOREMA degli ZERI

$$\exists c \in (x_1, x_2) : g(c) = 0$$

$$f(c) - z = 0 \Rightarrow z = f(c)$$

$$z \in \text{Im}(f)$$

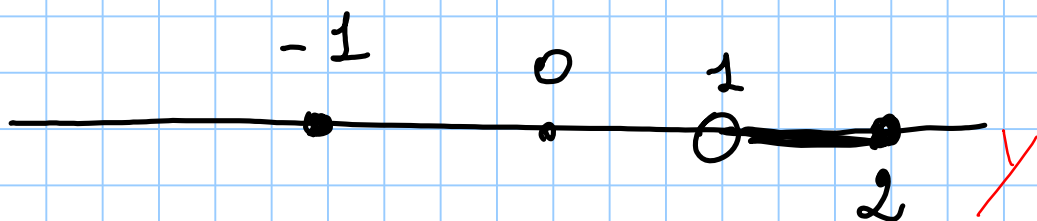


CONTROESEMPLO

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & x \in (0, 1] \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = \{-1\} \cup (1, 2]$$

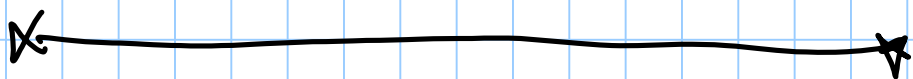


NOTA:

$$f(x) = 1+x, \quad x \in (0, 1]$$

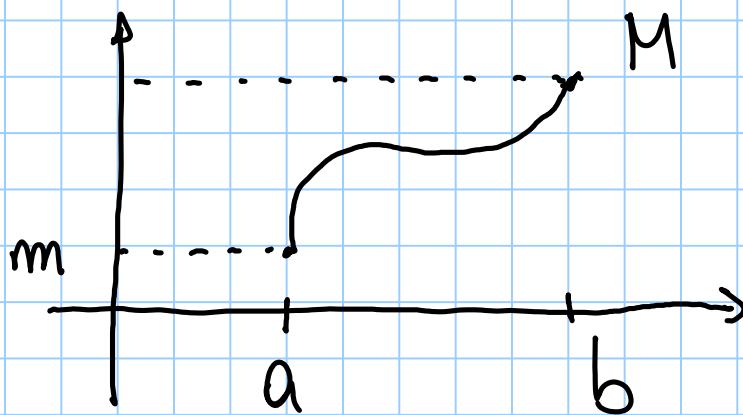
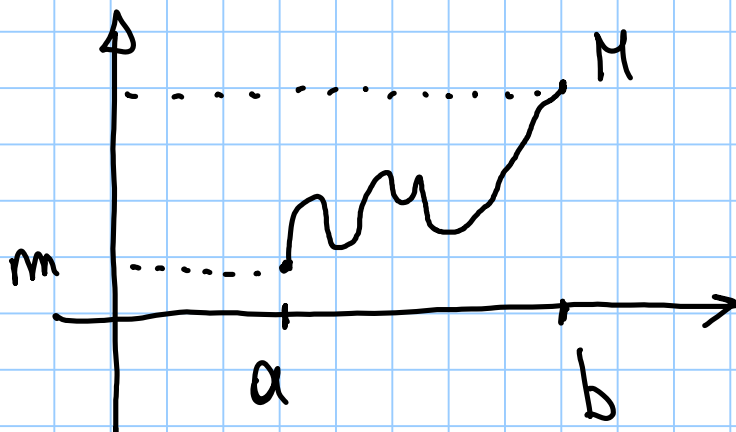
f è continua in $(0, 1] \rightarrow \text{Im}(f)$
 è un intervallo

$$\text{Im}(f) = (1, 2]$$



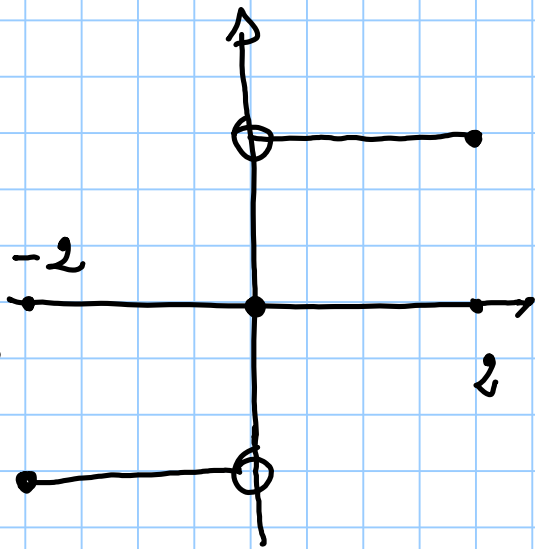
Ma funzione continua in un
 intervallo I NON PUÒ SALTARE
 NESSUN VALORE

COMPRESO TRA $\min_I f / \inf_I f$
 $\max_I f / \sup_I f$. Si dice anche che
 "si disegna senza staccare
 la penna dal foglio"



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, 2] \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x \in [-2, 0) \end{cases}$$

$$\text{Im}(f) = \{-1, 0, 1\}$$



TEOREMA [WEIERSTRASS]

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, -\infty < a < b < +\infty,$

f CONTINUA in $[a, b]$.

ALLORA $\exists$

$\min_{[a, b]} f$

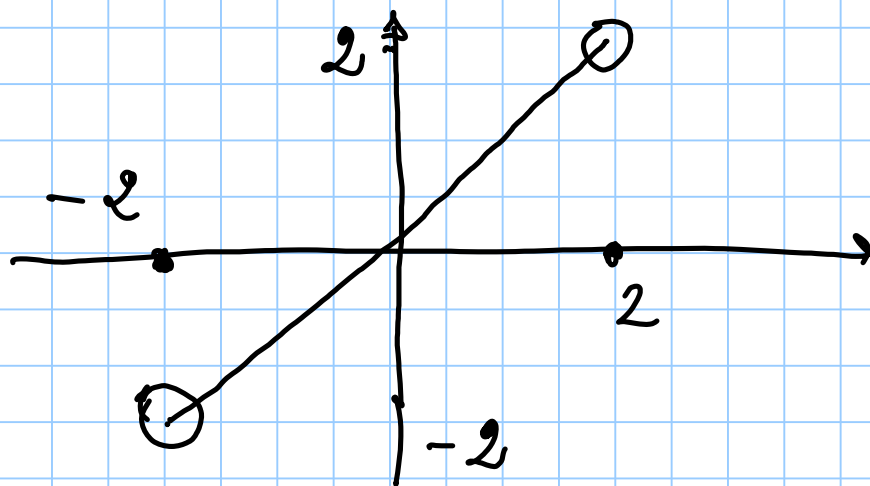
e $\max_{[a, b]} f$

CONTROESEMPLO

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 2 \\ x, & x \in (-2, 2) \\ 0, & x = -2 \end{cases}$$

~~$\exists \max f$~~
 $[-2, 2]$

~~$\exists \min f$~~
 $[-2, 2]$



$$f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

f non è continua, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -2 \neq 0 = f(-2)$

$$f(x) = e^x \quad x \in \mathbb{R}$$

f è CONTINUA in $\mathbb{R}$, ma
 $\mathbb{R}$ NON È LIMITATO

$$\inf_{\mathbb{R}} f = 0 \quad \text{NON} \exists \min_{\mathbb{R}} f$$

$$\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty \quad \text{NON} \exists \max_{\mathbb{R}} f$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

$(-1, 1)$ è limitato, ma non è CHIUSO

f è CONTINUA in $(-1, 1)$

$$\min_{(-1, 1)} f = f(0) = 1, \quad \text{ma}$$

$$\sup_{(-1, 1)} f = +\infty$$

$$\text{NON} \exists \max_{(-1, 1)} f$$

$$f(x) = \tan(x) \quad , \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

f è continua ma $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

NON È CHIUSO

$$\inf_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} f = -\infty \quad , \quad \sup_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} f = +\infty$$

Dim. [DEL T. DI WEIERSTRASS]

$$M = \sup_{[a,b]} f \quad , \quad M \in (-\infty, +\infty]$$

$$\exists \{y_m\} \subset \mathbb{R} : y_m \rightarrow M, m \rightarrow +\infty$$

$$y_m < M, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\text{Se } M = +\infty \Rightarrow y_m = m, m \in \mathbb{N}$$

$$\text{Se } M < +\infty \Rightarrow y_m = M - \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}$$

$$y_m \rightarrow M^-, m \rightarrow +\infty$$

DATO CHE $M = \sup f$ $\Rightarrow$
 $[a, b]$

y_m NON E' MAGGIORANTE di $I_m(f)$

$\Rightarrow \forall m \exists x_m \in [a, b] : f(x_m) \geq y_m$

$y_m \leq f(x_m) \leq M, \forall m \in \mathbb{N}$

$\{x_m\} \subset [a, b] \Rightarrow \{x_m\}$ è LIMITATA

$\Rightarrow$ Teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS

$\exists \{x_{m_k}\} \subset \{x_m\} :$

$x_{m_k} \rightarrow \bar{x}, k \rightarrow +\infty.$

PER DEFINIZIONE $\bar{x}$ è un punto

di ACCUMULAZIONE di $[a, b]$

Ma $[a, b]$ è CHIUSO $\iff$

CONTIENE TUTTI i SUOI

PUNTI DI ACCUMULAZIONE
 $\Rightarrow \bar{x} \in [a, b]$

$$y_m \leq f(x_m), \quad y_m \rightarrow M,$$

$$\{y_{m_k}\} \subset \{y_m\}$$

$$y_{m_k} \leq f(x_{m_k}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$y_{m_k} \rightarrow M, \quad k \rightarrow +\infty$$

$$y_{m_k} \leq f(x_{m_k}) \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{m_k} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{m_k}) \leq M$$

PER CONFRONTO $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{m_k}) = M$

f è CONTINUA $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{m_k}) = f(\bar{x})$

$$f(\bar{x}) = M, \quad \bar{x} \in [a, b]$$

$$(i) \quad M < +\infty \quad \Longleftarrow \quad M = f(\bar{x})$$

$$(ii) \quad M = \max_{[a, b]} f \quad M \in I_m(f)$$

$$M = \sup_{[a, b]} f$$

Per il minimo:

$$\max_{[a, b]} (-f) = -\min_{[a, b]} f$$

$\Rightarrow$ APPLICHIAMO IL RISULTATO

$$\min_{[a, b]} f = -\max_{[a, b]} (-f)$$

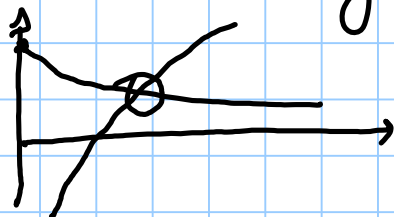


ESEMPIO (APPLICAZIONE)

T. degli zeri
Dimostriamo che $\exists! c \in (0, +\infty)$

Tale che $e^{-c} = \log c$

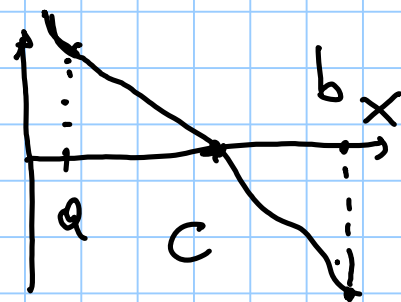
$$f(x) = e^{-x} - \log x, x \in (0, +\infty)$$



f è CONTINUA in $(0, +\infty)$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+ - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 - (-\infty) = +\infty$$



$$\exists b > a : f(b) < 0$$

$$f(a) > 0$$

TEOREMA degli ZERI

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$$

$$e^{-(c)} = \log(c)$$

Dato che $f(x)$ è strettamente
monotona, c è unico

$$A = \{ 3 + |e^{-x} - \log(x)|, x \in (0, +\infty) \}$$

$$\inf / \sup A \text{ e } (\exists \exists) \min / \max A$$

$$g(x) = 3 + |e^{-x} - \log(x)|, x \in (0, +\infty)$$

$$g \text{ é CONTÍNUA em } (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \quad \sup_{(0, +\infty)} g = +\infty$$

$$g(x) = 3 + |f(x)|$$

$$f(x) = e^{-x} - \log(x)$$

$$g(x) \geq 3 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

$$\inf_{(0, +\infty)} g \geq 3$$

$$\exists \exists c \in (0, +\infty) : g(c) = 3$$

ALLORA $\min_{(0, +\infty)} g = g(c) = 3$

Dato che

$$g(c) = 3 \iff f(c) = 0$$

Dalla parte precedente

Sappiamo che $\exists! c:$

$$f(c) = 0 \implies \min_{(0, +\infty)} g = 3$$

ESEMPIO [ZERI di Polinomi di GRADO DISPARI]

$$P_{2k+1}(x) = a_{2k+1} x^{2k+1} + a_{2k} x^{2k} + \dots + a_1 x + a_0$$
$$a_{2k+1} \neq 0$$

Polinomio di GRADO DISPARI

$$a_{2k+1} > 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P_{2k+1}(x) = +\infty$$

$$(a_{2k+1} < 0) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P_{2k+1}(x) = +\infty$$

$$\exists a < b : P_{2k+1}(a) < 0$$

$$P_{2k+1}(b) > 0$$

OGNI POLINOMIO È UNA
FUNZIONE CONTINUA

$\Rightarrow$ TEOREMA degli ZERI

$$\exists x_0 \in (a, b) : P_{2k+1}(x_0) = 0$$

CONTROESEMPİ:

$$f(x) = x^4 + 1 \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\nexists c : f(c) = 0$$

AVEVAMO VISTO CHE:

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, monotone
STRETTAMENTE
CRESCENTE

Allora $\nexists \min_{(a,b)} f$, $\nexists \max_{(a,b)} f$

TEOREMA

(i) $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, monotona crescente. Allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{(a,b)} f$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f$$

(ii) SE f È STRETTAMENTE
CRESCENTE

Allora $\nexists \min_{(a,b)} f$, $\nexists \max_{(a,b)} f$

$$\inf_{(a,b)} f = \lim_{x \rightarrow a^+} f$$

$$\sup_{(a,b)} f = \lim_{x \rightarrow b^-} f$$

Es.

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$

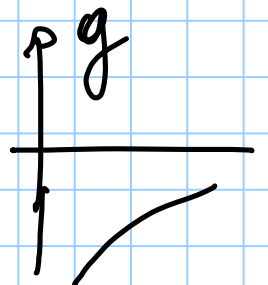
$$x \in (0, +\infty)$$

$$f = h \circ g$$

$$h(t) = e^t$$



$$g(x) = -\frac{1}{x}$$



f è monotone

STRETTAMENTE

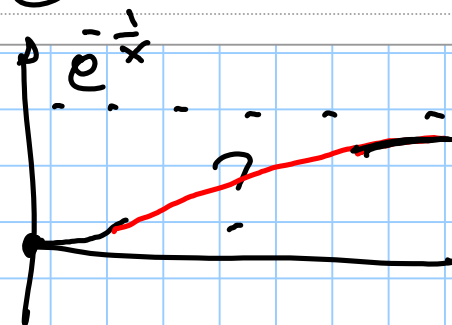
CRESCENTE

$$\inf_{(0, +\infty)} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-(\frac{1}{0^+})} = e^{-\infty} = 0$$

$$\sup_{(0, +\infty)} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{+\infty}} = e^{-0^+} = 1$$

SI PUÒ ESTENDERE
PER CONTINUITÀ

da DESTRA in $x=0$



$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & , x \in (0, +\infty) \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ è continua in $[0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} x\right) = f(x_0)$$

TEOREMA [CONTINUITÀ FUNZIONE INVERSA]

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e
iniettiva. Allora la funzione
inversa è continua.

DIMOSTRAZIONE

f continua in $[a, b] \Rightarrow \text{Im}(f)$
è un intervallo.

Dal T. di WEIERSTRASS

$$\text{Im}(f) = [m, M],$$

$$m = \min_{[a, b]} f, \quad M = \max_{[a, b]} f$$

Sia $y_0 \in [m, M]$, $y_0 = f(x_0)$

Dimostriamo che $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$

PER ASSURDO $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y)$ non è x_0 1

PER DEFINIZIONE

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0 \iff \forall y_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{y_m \neq y_0} y_0$$

definitivamente in m

$$\text{si ha } \lim_m f^{-1}(y_m) = x_0$$

Quindi $\exists$ almeno una successione

$$\{y_m\} \subset [m, M] : \lim_m f^{-1}(y_m) \text{ non è } x_0 \quad \text{H}$$

PER DEFINIZIONE

$$\lim_m f^{-1}(y_m) = x_0 \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon : |\varphi^{-1}(y_m) - x_0| < \varepsilon \quad \forall m > \nu_\varepsilon$$

Per ipotesi $\textcircled{H}$ questo è FALSO

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \underline{\forall \nu} \exists m > \nu : |\varphi^{-1}(y_m) - x_0| \geq \varepsilon_0$$

$$\nu = 1 \Rightarrow \exists m_1 > 1 : |\varphi^{-1}(y_{m_1}) - x_0| \geq \varepsilon_0$$

$$\nu = m_1 \Rightarrow \exists m_2 > m_1 : |\varphi^{-1}(y_{m_2}) - x_0| \geq \varepsilon_0$$

$$\nu = m_2 \Rightarrow \exists m_3 > m_2 : |\varphi^{-1}(y_{m_3}) - x_0| \geq \varepsilon_0$$

PER INDUZIONE

$$\exists \{y_{m_k}\} \subset \{y_m\}, y_{m_k} \rightarrow y_0 :$$

$$|\varphi^{-1}(y_{m_k}) - x_0| \geq \varepsilon_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

RIASSUMENDO: SUPPOSTO
PER ASSURDO CHE

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) \text{ non sia } x_0$$

concludiamo che

$$\exists \{y_m\} \subset [m, M]:$$

$$y_m \rightarrow y_0 \quad \text{e} \quad |f^{-1}(y_m) - x_0| \geq \varepsilon_0 \\ \forall m \in \mathbb{N}$$

PER ASSURDO: $\exists \{y_m\} \subset [m, M]$

$$y_m \rightarrow y_0, m \rightarrow +\infty: |f(y_m) - x_0| \geq \varepsilon_0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$y_m = f(x_m)$$

Sia $x_m = f^{-1}(y_m) \in [a, b] \quad \forall m \in \mathbb{N}$

BOLZANO-WEIERSTRASS $\Rightarrow$

$$\exists \{x_{m_k}\} \subset \{x_m\}: x_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \bar{x}$$

Intre: $[a, b]$ CHIUSO $\Rightarrow \bar{x} \in [a, b]$

Sia $y_{m_k} = f(x_{m_k}) \Rightarrow \{y_{m_k}\} \subset \{y_m\}$

$$\Rightarrow y_{m_k} \rightarrow y_0, k \rightarrow +\infty.$$

Quindi

$$f(x_0) = y_0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{m_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{m_k}) = f(\bar{x})$$

$\uparrow$
f continua

Ma f è iniettiva $\Rightarrow$

$$f(x_0) = f(\bar{x}) \Rightarrow x_0 = \bar{x}.$$

Questo è ASSURDO PERCHÉ

ALLORA ($y_{m_k} = f(x_{m_k})$)

$$\varepsilon \leq |f^{-1}(y_{m_k}) - x_0| = |x_{m_k} - x_0| =$$

$$= |x_{m_k} - \bar{x}| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty$$

