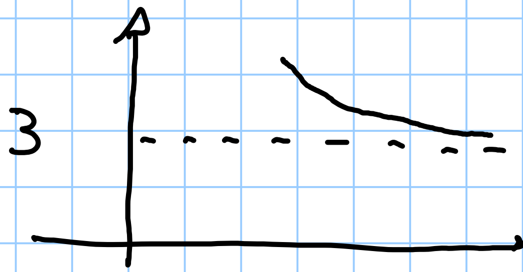
$$f(x) = 3 + \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$



$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = 3 \\ f(x) > 3 \text{ definitivamente in } x. \end{cases}$$

$\mathcal{P}_x$ VALE DEFINITIVAMENTE PER $x \to +\infty$

se $\exists M > 0$: $\mathcal{P}_x$ VALE $\forall x > M$

$\mathcal{P}_x$ VALE DEFINITIVAMENTE PER $x \to x_0$ $(x_0 \in \mathbb{R})$

$\exists \delta > 0$: $\mathcal{P}_x$ VALE $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$

DEFINIZIONE

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad L \in \mathbb{R}$

"f Tende a $L^{\pm}$ (L da DESTRA
da SINISTRA)

per $x \to x_0$"

$$f(x) \longrightarrow L^{\pm}, \quad x \to x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L^{\pm}$$

se

1) $f(x) \to L, \quad x \to x_0$

2) $f(x) > L$ DEFINITIVAMENTE PER $x \to x_0$

$(f(x) < L)$

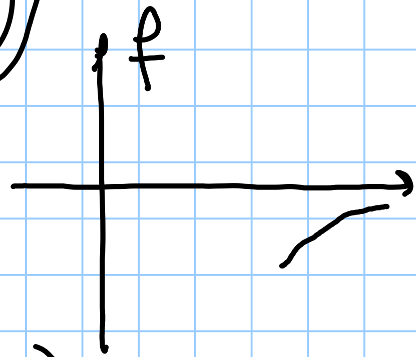
$x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L^{+}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : L < f(x) < L + \varepsilon,$$

$$\forall x \in \{(x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \cap X\} \setminus \{x_0\}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+e^{-x}+x(\log x)^3}{(\log x)^2 - x^{\frac{3}{2}}(\log x)} \longrightarrow f(x)$$



$$(\log(x))^2 - x^{\frac{3}{2}}(\log(x)) =$$

$$x^{3/2}\log(x)\left(-1+\frac{\log(x)}{x^{3/2}}\right) =$$

$$= x^{3/2}\log(x)\left(-1+o(1)\right), \; x\to+\infty$$

$$x+e^{-x}+x(\log x)^3 = x(\log x)^3\left(1+o(1)\right) \quad x\to+\infty$$

$$(x) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x(\log x)^3\,(1+o(1))}{x^{3/2}\log x\,(-1+o(1))} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{(\log x)^2}{x^{\frac{1}{2}}}}_{\to\, 0+}\left(-1+o(1)\right) = 0^-$$

POSSIAMO AGGIUNGERE al TEOREMA SUL RAPPORTO DEI LIMITI IL SEGUENTE RISULTATO

Se $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0^{\pm}$ $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \pm\infty$

$$\boxed{\frac{1}{0^+} = +\infty} \; ; \; \boxed{\frac{1}{0^-} = -\infty}$$

In particolare se $L \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

$$\frac{L}{0^+} = L \cdot (+\infty) \; ; \; \frac{L}{0^-} = L \cdot (-\infty)$$

TEOREMA

Se $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L$, $L \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

e Se $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0^{\pm}$, ALLORA

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{L}{0^{\pm}} = L \cdot (\pm\infty)$$

$$\boxed{\text{"}\frac{0}{0}\text{"} \ \text{F.I.}}$$

DiM. $\boxed{f(x) \equiv 1}$

$g(x) \longrightarrow 0^+$, $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty$$

$$\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 : \frac{1}{g(x)} > M$$

$\forall x \in (x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M) / \{x_0\}$

DATO CHE $g(x) \longrightarrow 0^+$,

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \sigma_\varepsilon > 0 : 0 < g(x) < \varepsilon$

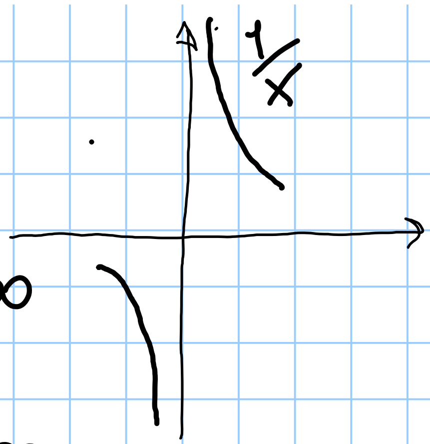
$\forall x \in (x_0 - \sigma_\varepsilon, x_0 + \sigma_\varepsilon) \setminus \{x_0\}$

Per $M > 0$, Sia $\varepsilon = \frac{1}{M}$ e $\delta_M = \sigma_{\frac{1}{M}}$. Allora

Se $x \in (x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M) \setminus \{x_0\} \Longrightarrow 0 < g(x) < \frac{1}{M}$

$\Longrightarrow \frac{1}{g(x)} > M$ $\blacksquare$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

DEFINIZIONE

$$f: \overline{X} \to \mathbb{R}, \quad L \in \overline{\mathbb{R}}, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = L$$

$$f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} L, \quad \forall \{a_n\} \subset \overline{X} \setminus \{x_0\},$$

$$\begin{cases} a_n \to x_0, & n \to +\infty \\ a_n > x_0, & \text{definitivamente in } n \\ a_n < x_0 & \text{"} \quad \text{"} \end{cases}$$

TEOREMA

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = L \iff$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta_\varepsilon>0 : \ |f(x)-L|<\varepsilon$$

$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta_\varepsilon) \cap X$$

$$x \in (x_0-\delta_\varepsilon, x_0) \cap X$$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{\log(x)}}$$

$$dom(f) = (0,+\infty) \setminus \{1\}$$

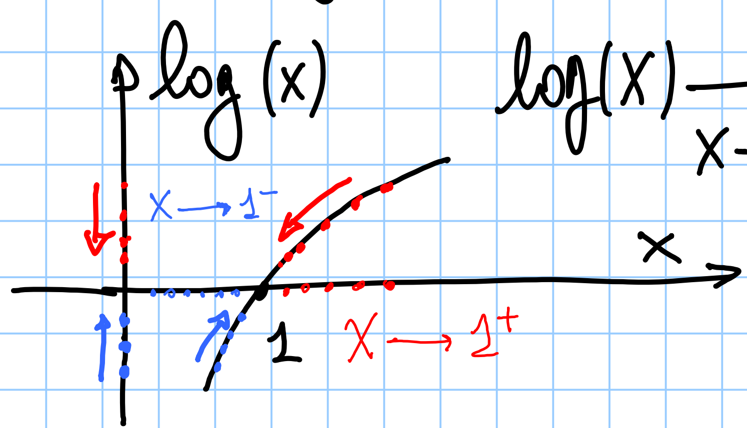
$x \neq 1$,

$x > 0$

$$x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \ ?$$

$$g(x) = -\frac{1}{\log(x)} \ ; \quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -\frac{1}{0^+} = -(+\infty) = -\infty$$

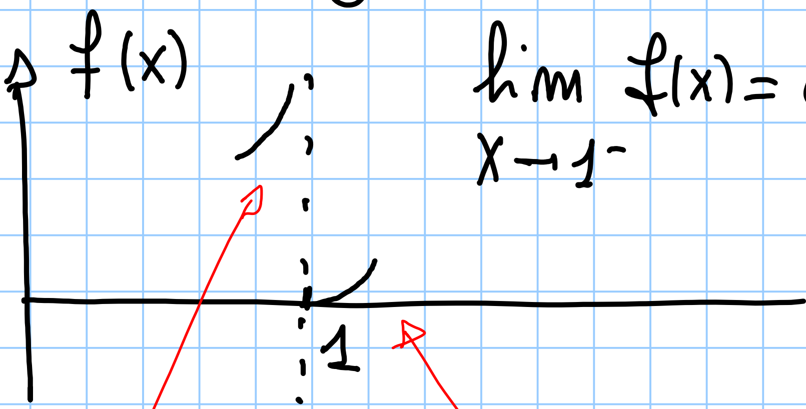


$$\log(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0^+$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = e^{-\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -\frac{1}{0^-} = -(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$$



$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0^+$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

NOTA Se $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = +\infty$

si dice che si ha un asintoto VERTICALE DESTRO (SINISTRO)

LIMITI DI FUNZIONI COMPOSTE

TEOREMA

$f: Y \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$,

$Im(g) \subseteq Y$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$, $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$,

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$ e $g(x) \neq y_0$ ✱

DEFINITIVAMENTE, $x \to x_0$

e se $\lim_{y \to y_0} f(y) = L$, ALLORA

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y) = L$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(\log(x))}{\log(x)} =$$

$y = \log(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\log(y)}{y} = 0^+$$

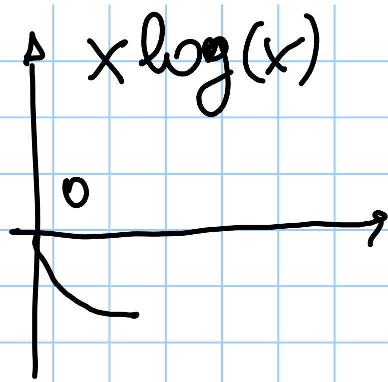
$$\lim_{x \to 1^+} e^{-\frac{1}{\log x}} = \lim_{y \to 0^+} e^{-\frac{1}{y}} = e^{-\infty} = 0^+$$

$y = \log x \xrightarrow[x \to 1^+]{} 0^+$

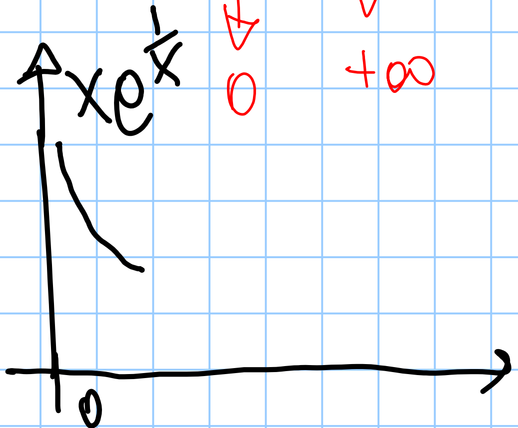
$$\lim_{x \to 0^+} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x} \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{\log(x)} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\log(y^{-1})}{y}$$

$y = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty} -\frac{\log(y)}{y} = 0^-$$



$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{0}\ \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{+\infty} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$$



$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x \log\left(e^x - e^{2x}\right) =$$

$$y = e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^+$$

$$\lim_{y\to 0^+} y\log(y-y^2) =$$

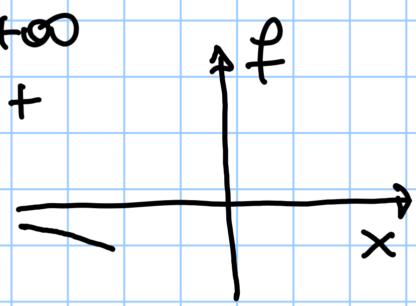
$$\lim_{y\to 0^+} y\log(y(1+o(1))) =$$

$$\lim_{y\to 0^+} y\log(y) + y\log(1+o(1)) =$$

$$\lim_{y\to 0^+} y\log(y) = \lim_{t\to +\infty} -\frac{\log(t)}{t} = 0^-$$

$$"\, 0^+ \cdot -\infty \,"$$

$$t = \frac{1}{y} \xrightarrow[y\to 0^+]{} +\infty$$



$$\lim_{x\to 0} x^5 e^{\frac{1}{|x|}} = 0\cdot e^{\frac{1}{0^+}} = \text{"}0\cdot +\infty\text{"}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^5 e^{\frac{1}{|x|}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{e^y}{y^5} = +\infty$$

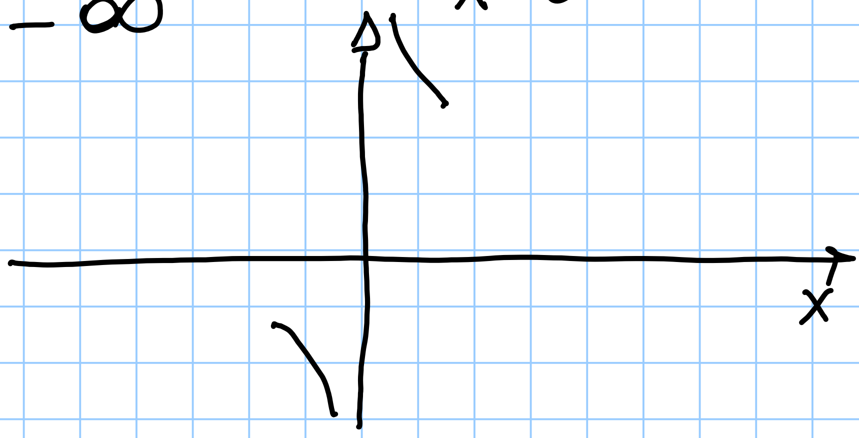
$$y=\frac{1}{|x|}\xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} x^5 e^{\frac{1}{|x|}} = \lim_{x\to 0^-} -|x|^5 e^{\frac{1}{|x|}} =$$

$$y=\frac{1}{|x|}\xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty$$

$$\lim_{y\to +\infty} -\frac{e^y}{y^5} = -\infty$$

$x^5 e^{\frac{1}{|x|}}$



TEOREMA

Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \quad \text{non } \exists \quad \left(\lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty \right)$$

$$\lim_{x \to 0} x^5 e^{\frac{1}{|x|}} \quad \text{non } \exists \quad \left(\lim_{x \to 0^\pm} x^5 e^{\frac{1}{|x|}} = \pm\infty \right)$$

$$\lim_{x \to 1} e^{\frac{1}{\log(x)}} \quad \text{non } \exists \quad \dots$$

FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$

Si dice che f è CONTINUA in x_0

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

f si dice CONTINUA in X

se è continua $\forall x \in X$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

$$f(x) = x^{\alpha}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad x_0 \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \to x_0} x^{\alpha} = x_0^{\alpha}$$

$$f(x) = \log(x), \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad x_0 \in (0, +\infty)$$

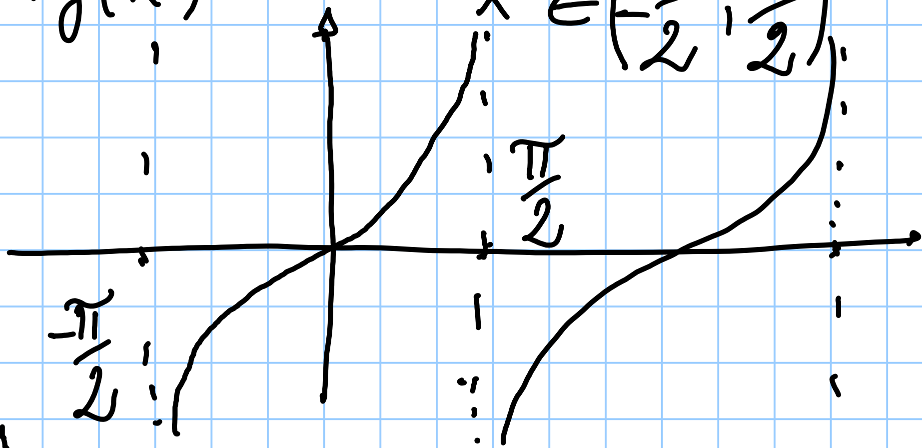
$$\lim_{x \to x_0} \log(x) = \log(x_0)$$

$$e^{x} \quad \ldots$$

$$f(x) = \sin(x)$$
$$\cos(x)$$
$$Tg(x)$$
$$arcTg(x)$$

sono CONTINUE nei RISPETTIVI DOMINI NATURALI

$$f(x) = Tg(x) \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



Ex $$\lim_{x \to \left(\mp\frac{\pi}{2}\right)^{\mp}} Tg(x)$$

TEOREMA

f è CONTINUA in $x_0 \iff$

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = f(x_0)$$

TEOREMA

f è CONTINUA in $X_0 \Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \cap X$$

COSA CAMBIA RISPETTO ALLA DEF. di LIMITE?

TEOREMA [SOMMA, PRODOTTO e COMPOSIZIONE DI FUNZIONI CONTINUE]

(i) $f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$

Se f e g sono continue in X,

allora $f \pm g$ sono continue in X.

$f \cdot g$ è continua in X

f/g è continua $\forall x \in X : g(x) \neq 0$

(ii) $f: Y \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$

$Im(g) \subseteq Y$, $x_0 \in X$.

Se $g(x_0) = y_0$, g è continua in x_0

e f è continua in y_0

allora $f(g(x))$ è continua in x_0.

La dimostrazione di (i) segue subito dai teoremi su somma e prodotto di limiti. Per la dimostrazione di (ii) si usa il teorema del limite della funzione composta continua

$$\lim_{x \to 1} \underbrace{\frac{e^{x} + x^{2}}{4x + \log(x)}}_{f(x) =} = \frac{e^{1} + (1)^{2}}{4 \cdot 1 + \log(1)} = \frac{1+e}{4}$$

$f(x)$ è il rapporto di funzioni continue con denominatore non nullo, quindi è continua.

$$\lim_{x \to 1} \log \sqrt{\frac{e^x + x^2}{4x + \log(x)}} = \log \sqrt{\frac{1+e}{4}}$$

$\shortparallel$

$f(x)$

$f(x)$ è composta di funzioni continue quindi è continua

DISCONTINUITÀ di SALTO

Se $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$

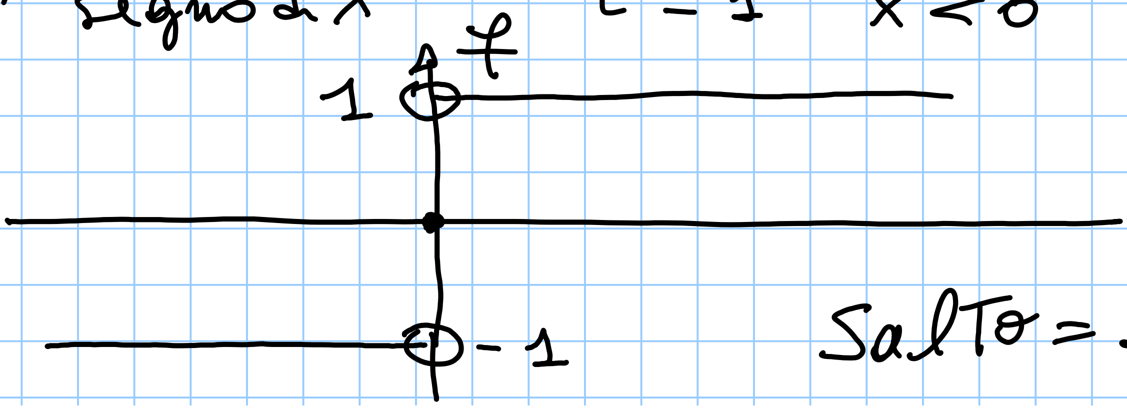
e $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = L^\pm$,

$L^+ \in \mathbb{R}$, $L^- \in \mathbb{R}$, $L^+ \neq L^-$

$|L^+ - L^-|$ si dice SALTO di f in x_0

ESEMPIO

$$f(x) = \underbrace{\mathrm{sgn}(x)}_{\text{“segno di } x\text{”}} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



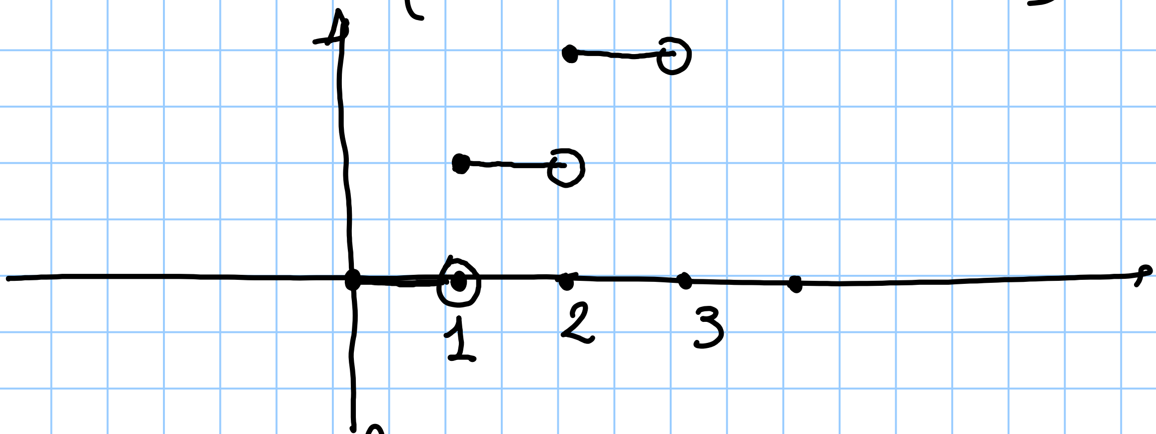
Salto $= 2$

f NON E' CONTINUA in $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n < x\}$$



$$\lim_{x \to 1^-} [x] = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 1^+} [x] = 1$$

$$\lim_{x \to n^-} [x] = n - 1 , \quad \lim_{x \to n^+} [x] = n$$

Salto $= 1$

In questo caso si dice che la funzione è continua da destra, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

DISCONTINUITÀ di 1^a SPECIE

$f : X \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per X, entrambe i limiti $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$ esistono e almeno uno dei due non è finito oppure sono diversi. (Include le disc. di SALTO)

ESEMPI

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{\log(x)}}, \quad x_0 = 1$$

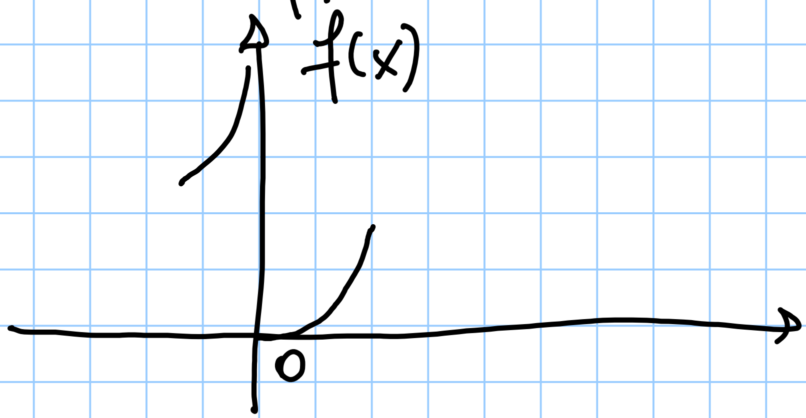
$$f(x) = \log(x), \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \qquad x \neq 0$$

f è continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

$x_0 = 0$ DISCONTINUITÀ di 1ª SPECIE (ASINTOTO VERTICALE SINISTRO)



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

DISCONTINUITÀ di 2ª SPECIE

Se $f : X \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per X e almeno uno dei due limiti

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

non esiste.

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad x \neq 0$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ NON ESISTONO

PER DIMOSTRARLO E' SUFFICENTE TROVARE 2 SUCCESSIONI

$$a_n \to 0^+ \ , \ b_n \to 0^+ :$$

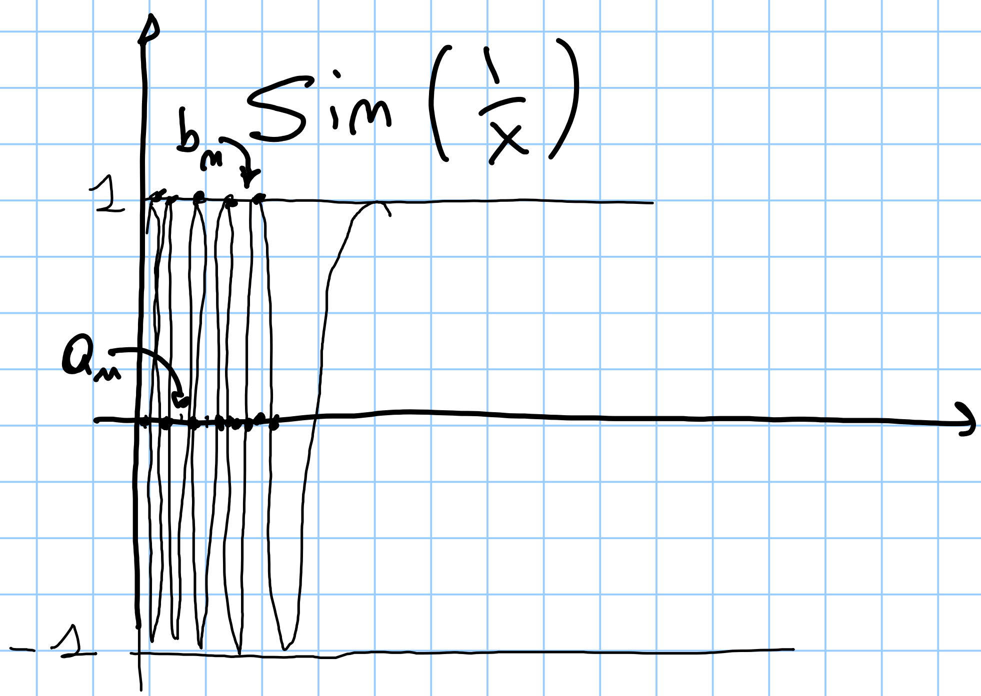
$$\lim_n \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \neq \lim_n \sin\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi n} \ , \ b_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$$

$$0 = \lim_n \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \neq \lim_n \sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = 1$$

il $\lim_{x \to 0^-} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \nexists$

perché $\sin(t)$ è dispari



$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
b_n
a_n
1
-1

DISCONTINUITÀ ELIMINABILI

$$f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \quad , \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

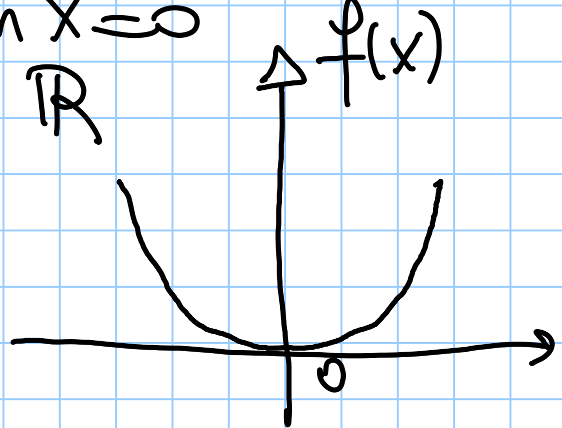
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{-1/0^+} = e^{-\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = e^{-1/0^+} = e^{-\infty} = 0^+$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

f è ESTESA PER CONTINUITÀ in $x=0$

è CONTINUA in $\mathbb{R}$



TEOREMA

$f:(a,b)\setminus\{x_0\}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, $L\in\mathbb{R}$

Allora $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & , x\neq x_0 \\ L & , x=x_0 \end{cases}$

è continua in x_0

ATTENZIONE: una funzione estesa per continuità in un punto è in quel punto continua a tutti gli effetti

ESEMPIO $f(x) = \frac{1-x^2}{1-x}, \quad x \neq 1.$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2. \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1-x}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

Infatti $f(x) = \frac{1-x^2}{1-x} = 1+x$!

NOTA: Per la funzione $\mathrm{Sgn}(x)$ la discontinuità non si può eliminare. In particolare non si può eliminare per le discontinuità di 1^a e 2^a SPECIE

TEOREMA [LIMITE FUNZIONE COMPOSTA CONTINUA]

Sia $f: Y \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$

$Im(g) \subseteq Y$, $y_0 \in Y$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$,

e se f è CONTINUA in y_0

ALLORA $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(y_0) =$

$= \lim_{y \to y_0} f(y)$

L'ipotesi di continuità di f ci PERMETTE di TOGLIERE l'ipotesi

$g(x) \neq y_0$ definitivamente per $x \to x_0$

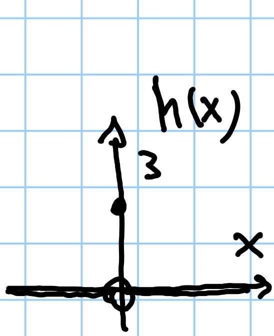
CONTROESEMPIO

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 2 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} 0 & y = 2 \\ 3 & y \neq 2 \end{cases}$$

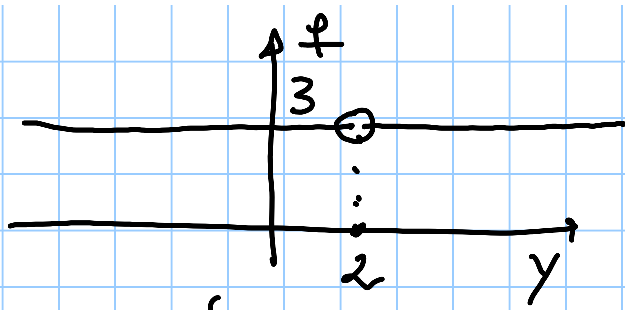
$h(x) = f(g(x))$

$$h(x) = \begin{cases} f(2) = 0 & x \neq 0 \\ f(1) = 3 & x = 0 \end{cases}$$

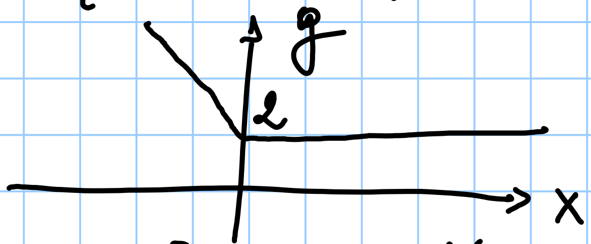


$$\lim_{x \to 0} f(g(x)) = 0 \neq \lim_{y \to 2} f(y) = 3$$

SI PUÒ COSTRUIRE UN CONTROESEMPIO ANCHE CON g continua



$$g = \begin{cases} 2-x & x<0 \\ 2 & x\geq 0 \end{cases}$$



$$f(y) = \begin{cases} 0 & y=2 \\ 3 & y\neq 2 \end{cases}$$

$$h(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(2)=0 & x\geq 0 \\ 3 & x<0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} h(x) = 3$, $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0 \neq \lim_{y\to 2^+} f(y) = 3$

e $\lim_{x\to 0} h(x)$ NON ESISTE