

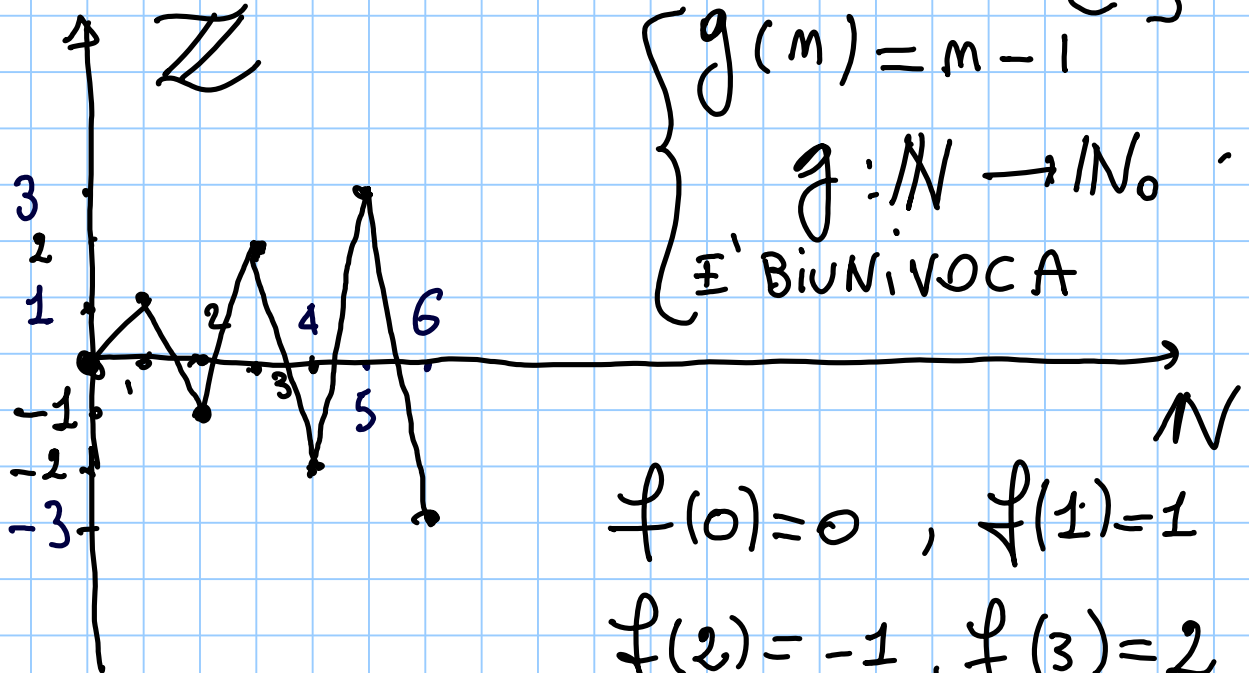
$N$  è infinito,

$2N$ ,  $2N-1$  e  $\mathbb{Z}$  sono infiniti.

$$f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\begin{cases} g(m) = m-1 \\ g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0 \\ \text{È BIUNIVOCITÀ} \end{cases}$$



$$f(0) = 0, f(1) = 1$$

$$f(2) = -1, f(3) = 2$$

$$f(4) = -2, \dots$$

$$f(m) = \begin{cases} k, m=2k-1 \\ -k, m=2k \end{cases}$$

## DEFINIZIONE

Un INSIEME si dice  
**NUMERABILE** se è  
EQUIVALENTE A  $\mathbb{N}$

  
 $2\mathbb{N}$ ,  $2\mathbb{N}-1$  e  $\mathbb{Z}$  sono  
numerabili.

Si può dimostrare che  $\mathbb{Q}$  è  
numerabile.

$$\mathbb{Q}, q = \frac{m}{n} \quad h = |m| + |n|$$

$h$  è l'ALTEZZA del NUMERO  
RAZIONALE  $q$ .

Si costruisce  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$   
iniettiva e suriettiva  
numerando i razionali  
in sottoinsiemi di altezza  
crescente.

\*—————\*

VICEVERSA si può dimostrare  
che SE

$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  è INIETTIVA  
ALLORA NON è SURIETTIVA

IN PARTICOLARE  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

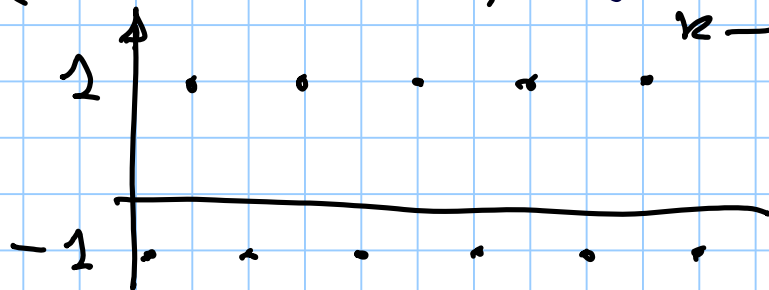
(l'insieme dei numeri  
IRRAZIONALI) NON È  
NUMERABILE

# TEOREMA DI BOLZANO - WEIERSTRASS

$$c_m = (-1)^m, \quad \text{E' IRREGOLARE}$$

$$c_{2k} = (-1)^{2k} = 1, \quad c_{2k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$$

$$c_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1, \quad c_{2k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -1$$



Se  $I_m(c_m)$  è un insieme FINITO,  
allora  $\exists$  almeno un VALORE  
 $\gamma \in I_m(c_m)$  che ha infinite  
controimmagini.  
 $c_m = (-1)^m, \gamma = 1$  ha

Controlliamo tutti i numeri

$$\text{PARI} \Rightarrow C_{2k} = 1$$

$$\{C_{2k}\} \subset \{C_n\} : C_{2k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

↑  
sottosuccessione estratta da  $C_n$

$\exists C_n$  assume un numero  
FINITO di VALORI  $\Rightarrow$

$\exists$  almeno una sottosuccessione

$$\{C_{n_k}\} \subset \{C_n\} : C_{n_k} \text{ è CONVERGENTE}$$

$$C_n = \sin(n) , n \in \mathbb{N} ?$$

$$|C_n| \leq 1 , \forall n \in \mathbb{N} ?$$

TEOREMA [BOLZANO - WEIERSTRASS]

Sia  $c_n$  una successione LIMITATA.

ALLORA ESISTE UNA  
SOTTOSUCCESSIONE ESTRATTA da  
 $c_n$  CHE CONVERGE.

OVVERO  $\exists c \in \mathbb{R}$  e  $\{c_{n_k}\} \subset \{c_n\}$ :

$$c_{n_k} \rightarrow c, k \rightarrow +\infty$$

DIM.

Se  $c_n$  assume un numero FINITO di VALORI, (OVVERO  $I_m(c_n)$  è UN INSIEME FINITO) ALLORA ESISTE almeno 1 VALORE  $c \in I_m(c_n)$  con infinite CONTROIMMAGINI  $\Rightarrow$   
 $c_{m_k} = c, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$c_{m_k} \rightarrow c, k \rightarrow +\infty,$$

S.P.D.G.  $c_n$  ASSUME INFINITI VALORI DISTINTI.

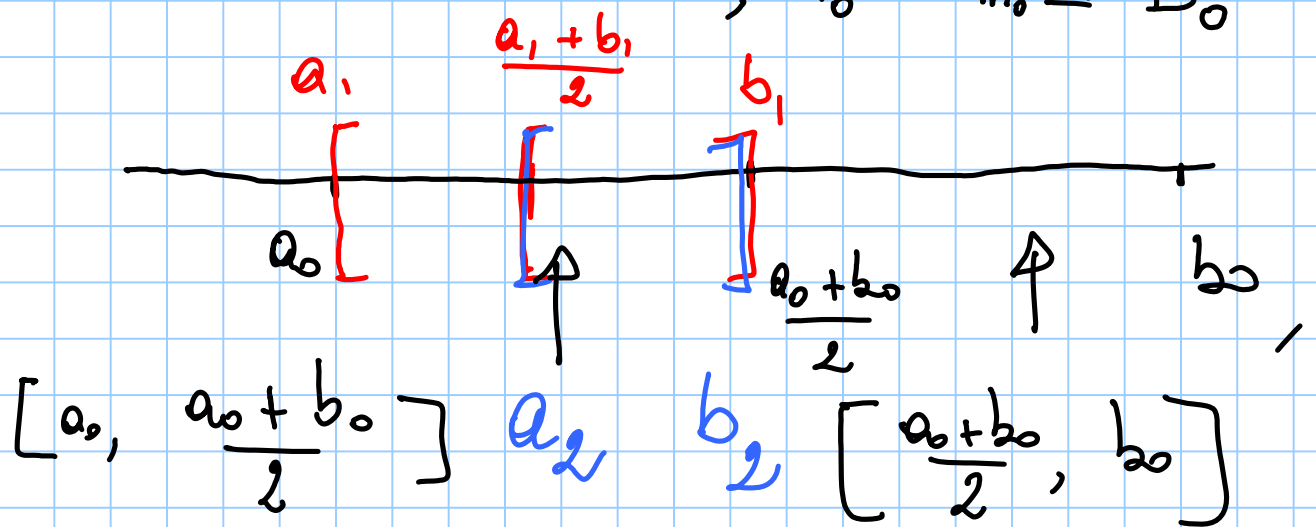
$$\exists M > 0: -M \leq c_n \leq M, \forall n$$

$$a_0 = -M$$

$$b_0 = M$$

$$a_0 \leq c_{m_0} \leq b_0$$

$$0 < b_0 - a_0 = 2M, \quad a_0 \leq c_{m_0} \leq b_0$$



Almeno uno dei due Intervalli  
contiene infiniti Valori Distinti  
di  $C_m$ .

Se  $[a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}]$  contiene infiniti  
Valori distinti

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad C_{m_1}:$$

$$a_1 \leq c_{m_1} \leq b_1, \quad m_1 > m_0$$

$$\text{Se } [\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0] \quad // \quad // \quad // \quad //$$



$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad b_1 = b_0, \quad c_{m_1} :$$

$$a_1 \leq c_{m_1} \leq b_1, \quad m_1 > m_0.$$

$$a_0 \leq a_1 \leq c_{m_1} \leq b_1 \leq b_0, \quad m_1 > m_0 \geq 1$$

$$0 < b_1 - a_1 = \frac{M}{2}$$

$$\left[ a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right]$$

$$\left[ \frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$$

infiniti valori distinti

$$a_2 = a_1, \quad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

$$a_2 \leq c_{m_2} \leq b_2$$

$$m_2 > m_1$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = b_1, \quad a_2 \leq c_{m_2} \leq b_2$$

$$0 < b_2 - a_2 = \frac{M}{2}, \quad m_2 > m_1$$

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq c_{m_2} \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0, \quad m_2 > m_1 > m_0 \geq 1.$$

PER INDUZIONE  
COSTRUIAMO due successioni:

$$a_k \text{ e } b_k \text{ e}$$

$$m_k > m_{k-1} > \dots > m_1 > m_0, \{C_{m_k}\} \subset \{C_m\} :$$

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq C_{m_k} \leq b_k \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$$

$$a_k \uparrow, \quad b_k \downarrow, \quad 0 < b_k - a_k = \frac{m}{2^{k-1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$a_n \uparrow \text{ e LIMITATA } (a_k \leq b_0)$$

$$b_n \downarrow \text{ e LIMITATA } (b_k \geq a_0)$$

TEOREMA di REGOLARITA'  
delle SUCCESSIONI MONOTONE

$$a_k \longrightarrow a, \quad b_k \longrightarrow b, \quad k \longrightarrow +\infty$$

$$0 < b_k - a_k = \frac{M}{2^{k-1}}$$

$$b - a = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k - a_k = 0 \Rightarrow \boxed{b = a}$$

$$c := b = a$$

$$(a_k \leq c_{m_k} \leq b_k) \rightarrow c$$

PER CONFRONTO

$$c_{m_k} \rightarrow c, k \rightarrow +\infty$$



# LIMITI DI FUNZIONI

## NOZIONI PRELIMINARI

DEFINIZIONE

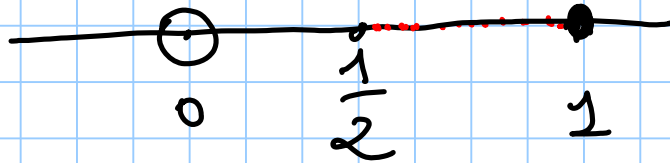
$X \subseteq \mathbb{R}$ .  $x_0 \in \mathbb{R}$  è

un PUNTO di ACCUMULAZIONE

per  $X$  se  $\exists \{x_m\} \subset X$ :

$x_m \longrightarrow x_0, m \longrightarrow +\infty$   
 $x_m \neq x_0$  definitivamente

ESEMPIO  $X = (0, 1]$ .



$$X_0 = 1 \quad . \quad X_m = 1 - e^{-m} \rightarrow 1$$
$$X_m \in (0, 1] \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

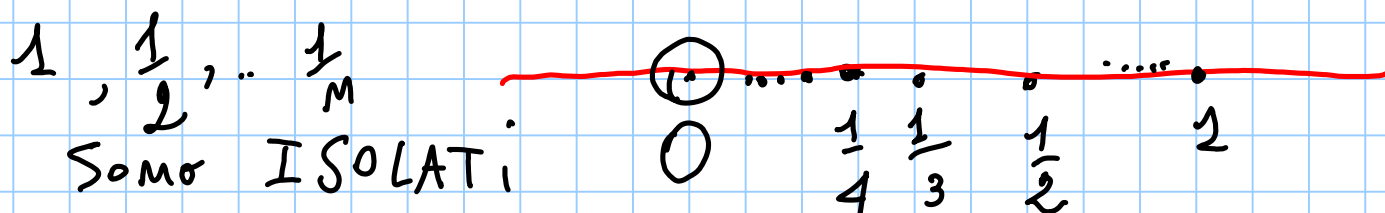
$$X_0 = \frac{1}{2} \quad X_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \rightarrow \frac{1}{2}$$
$$X_m \in (0, 1] \quad \forall m \geq 1$$

$X_0 \in (0, 1] \Rightarrow X_0$  è un punto di  
accumulazione per  $(0, 1]$

$$X_0 = 0 \quad X_m = \frac{1}{m} \rightarrow 0,$$
$$X_m \in (0, 1], \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

L'insieme dei punti di accumulazione  
per  $(0, 1]$  è  $[0, 1]$

$$\underline{X} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N} \right\}$$



DEFINIZIONE

Sia  $\underline{X} \subseteq \mathbb{R}$ .  $x_0 \in \underline{X}$  è un

**PUNTO ISOLATO** di  $\underline{X}$  se

NON è UN PUNTO di ACCUMULAZIONE.

OGNI PUNTO di  $\underline{X} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{m} \right\}$   
 è ISOLATO.

$$x_0 = 0 \quad x_m = \frac{1}{m} \rightarrow 0, m \rightarrow +\infty$$

$$0 \notin \underline{X} \quad x_m \in \underline{X} \forall m.$$

0 è punto di accumulazione,  $0 \notin \underline{X}$

L'insieme dei punti di accumulazione è  $\{0\}$ .

# DEFINIZIONE

Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$ .  $X$  è **CHIUSO**

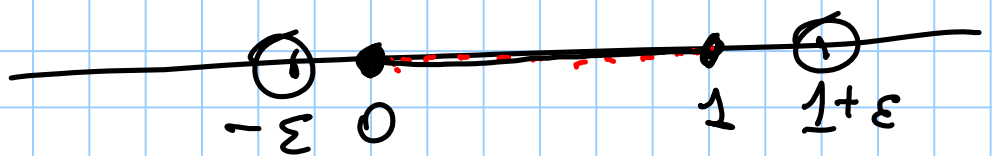
Se contiene tutti i suoi  
PUNTI di ACCUMULAZIONE

**APERTO** se  $C_{\mathbb{R}}X$  è chiuso

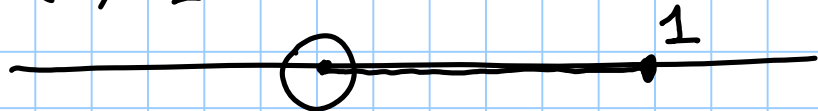
il complementare in  $\mathbb{R}$

$$C_{\mathbb{R}}X = \mathbb{R} \setminus X$$

ESEMPI  $X = [0, 1]$  è **CHIUSO**



$X = (0, 1]$  ← NE' CHIUSO  
NE' APERTO



NON è CHIUSO 0 è di  
accumulazione per  $X$ ,  $0 \notin X$

$$C_{\mathbb{R}} X = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$$

NON E' CHIUSO perché  $1 \notin C_{\mathbb{R}} X$   
ma E' di ACCUMULAZIONE per  $C_{\mathbb{R}} X$   
 $\Rightarrow X$  NON E' APERTO



$$X = (a, b) \quad -\infty < a < b < +\infty$$

$$\mathbb{C}_R X = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$$

E' CHIUSO

E' APERTO !

PERCHE' CONTIENE  
TUTTI i SUOI PUNTI di  
ACCUMULAZIONE

$$x_0 \in (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$$

è di accumulazione per  $X$   
e NON

ESISTONO ALTRI PUNTI  
di ACCUMULAZIONE PER  $X$

DEFINIZIONE Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Un **INTORNO** di  $x_0$  è un INTERVALLO APERTO CHE CONTIENE  $x_0$ .

Se  $x_0 = +\infty$ , un **INTORNO** di  $+\infty (-\infty)$  È UN INTERVALLO SUPERIORMENTE ILLIMITATO (INFERIORMENTE)

TEOREMA

$X \subseteq \mathbb{R}$ .  $X$  è APERTO

SE E SOLO SE  $\forall x_0 \in X \exists$  un

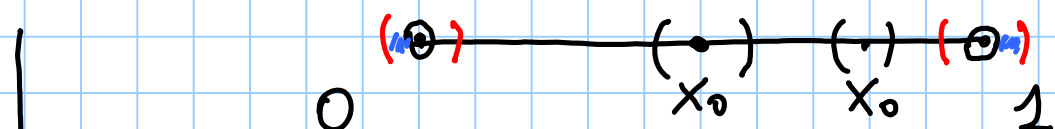
INTORNO  $\mathcal{U}$  di  $x_0$  contenuto in  $X$

$$[\forall x_0 \in X \exists \mathcal{U} \text{ di } x_0 : \mathcal{U} \subset X]$$

$$X = (0, 1)$$

$$0 \notin X$$

$$1 \notin X$$



$$x_0 = \frac{1}{2},$$

$$\varepsilon = 0,1$$

$$\left(\frac{1}{2} - 0,1, \frac{1}{2} + 0,1\right) = (0,4, 0,6) \subset X$$

$$x_0 = 0,9$$

$$\varepsilon = 0,01$$

$$(0,89, 0,91) \subset X$$

$$x_0 = 0,9999$$

$$\varepsilon = 0,00001$$

ESEMPIO  $X = \{x_0\}$

$$\subset \mathbb{R} \quad X = (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$$

è APERTO  $\rightarrow \{x_0\}$  è CHIUSO

$\mathbb{R}$  e  $\emptyset$  SONO SIA APERTI CHE CHIUSI

## DEFINIZIONE

$$X \subseteq \mathbb{R}, \quad x_0 \in X$$

$x_0$  è un **PUNTO INTERNO**

a  $X$  se  $\exists$  un intervallo  $U$   
di  $x_0$  :  $U \subset X$

ESEMPIO  $X = (0, 1]$

L'INSIEME DEI PUNTI

INTERNI di  $X$  è  $(0, 1)$

ESEMPIO Se  $X$  è APERTO  
ALLORA ogni  $x_0 \in X$  è  
INTERNO

DEFINIZIONE

$$X \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$$

è un PUNTO di FRONTIERA

di  $X$  se in ogni intorno di  
 $x_0$  CADONO PUNTI di  $X$   
e PUNTI di  $\mathbb{R} \setminus X$

ESEMPIO

$$X = (0, 1]$$

PUNTI di FRONTIERA

$$\{0, 1\}$$

DEFINIZIONE

Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$ . LA CHIUSURA

di  $X$  è l'unione TRA  $X$

e i suoi PUNTI di

ACCUMULAZIONE,

$$\overline{X} = X \cup \left\{ \text{TUTTI i PUNTI di ACCUMULAZIONE di } X \right\}$$

ESEMPIO

$$X = (0, 1) \Rightarrow \overline{X} = [0, 1]$$

PER DEFINIZIONE, SE  
 $X \subseteq \mathbb{R}$  ALLORA  $\overline{X}$  è  
CHIUSO

Es  $X = \left\{ x \in \mathbb{R} : x_m = \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N} \right\}$

DETERMINARE : PUNTI INTERNI,  
di ACCUMULAZIONE, di FRONTIERA,  
ISOLATI e  $\overline{X}$

# LIMITI DI FUNZIONI



DEFINIZIONE

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, L \in \overline{\mathbb{R}}$$

$x_0 \in \mathbb{R}$  punto d'accumulazione  
per  $X$

Se  $X$  è SUPERIORMENTE; limitato  
(INFERIORMENTE)

allora consideriamo anche  $x_0 = +\infty$   
( $-\infty$ )

"  $f(x)$  tende a  $L$  per  $x$  che  
tende a  $x_0$  "

$$f(x) \rightarrow L, x \rightarrow x_0$$

" il limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende  
a  $x_0$  è  $L$  "

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

2e  $\lim_n f(a_n) = L$ ,  $\forall$  Successione  $a_n$ ;

$$\{a_n\} \subset X \setminus \{x_0\} \text{ e } a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0.$$

ESEMPio  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 5^2$$

$$a_n \rightarrow 5, \quad n \rightarrow +\infty,$$

$$\boxed{a_n \neq 5}, \quad f(a_n) = a_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 5^2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

$$a_n \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty$$

$$\log(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

$$a_n \rightarrow 0, \\ \boxed{a_n \neq 0}$$

$$e^{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty$$

$$a_n \rightarrow 0, \\ a_n > 0$$

$$\log(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$a_n \rightarrow -\infty, \quad n \rightarrow +\infty,$$

$$\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$$

PER DEFINIZIONE  
NEL CALCOLO DEL LIMITE  
PER  $x \rightarrow x_0$  NON SI USA  
MAI  $f(x_0)$ !

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \quad ? \quad a_{+\infty} ? \quad \begin{array}{l} n = +\infty \text{ non si} \\ \text{USA MAI} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = L \quad ? \quad f(+\infty) ? \quad \begin{array}{l} x = +\infty \text{ non si} \\ \text{USA MAI} \end{array}$$

$$! \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log(|x|) = -\infty \quad ! \quad \begin{array}{l} x = 0 \text{ non si} \\ \text{USA MAI} \\ ? \log(0) ? \end{array}$$

LA DEFINIZIONE di LIMITE  
ci PERMETTE di ASSEGNARE  
UN VALORE A QUANTITÀ  
NON DEFINITE

$$! \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty \quad !$$

---

Con questa definizione  
di limite per le funzioni  
vediamo anche facilmente  
che valgono tutti i risultati  
già dimostrati per i limiti  
di successioni:

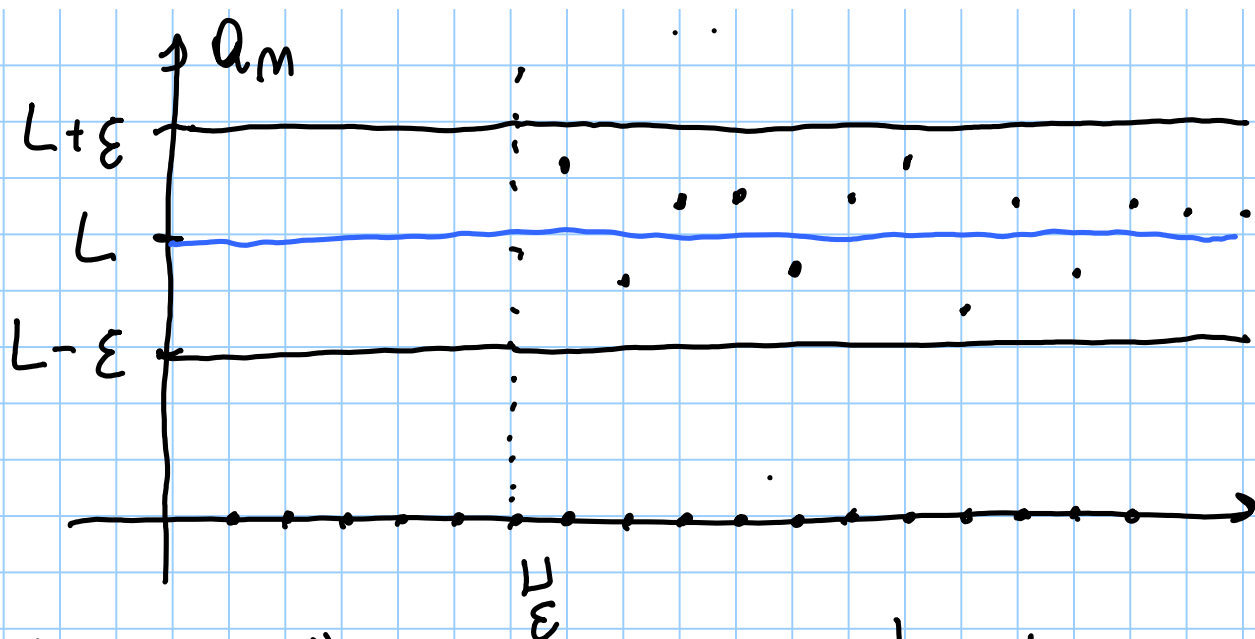
il TEOREMA di  
unicità del limite, di  
PERMANENZA del segno,  
di CONFRONTO .....

## DEFINIZIONE EQUIVALENTE DI LIMITI DI FUNZIONI

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \quad (L \in \mathbb{R})$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon : |a_n - L| < \varepsilon, \forall n > \nu_\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon : a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon), \forall n > \nu_\varepsilon$$



Dire " $\forall \varepsilon > 0$ " è lo stesso che dire  
 "  $\forall$  intervallo del tipo  $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$  "

$$\exists N_\varepsilon : a_m \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \quad \forall m > N_\varepsilon$$

Si dimostra (facile) che è  
 lo stesso che dire  
 "  $\forall$  intervallo aperto  $V$  che  
 contiene  $L$  "  $\exists N_V :$   
 $a_m \in V \quad \forall m > N_V$

$\forall$  intorno  $V$  di  $L \exists \underline{V} : a_m \in V \forall m > \underline{V}$

$\forall V_L \exists \underline{V} : a_m \in V \forall m > \underline{V}$

Ricordiamo che una successione  
è una funzione  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$

$X = \mathbb{N}$  ,  $a_m = g(m)$

dire " $\exists \underline{V} : a_m \in V \forall m > \underline{V}$ "

è lo stesso che dire

" $\exists$  un intorno di  $+\infty$   $(\underline{V}, +\infty)$ :  
 $a_m \in V \forall m \in (\underline{V}, +\infty) \cap X$ "



$$\text{"}\exists \mathcal{U}_\infty : a_m \in V \quad \forall m \in \mathcal{U}_\infty \cap \underline{X}\text{"}$$

"
 
$$\left( \mathcal{V}_V, +\infty \right)$$

$$\forall V_L \quad \exists \mathcal{U}_\infty : a_m \in V_L \quad \forall m \in \mathcal{U}_\infty \cap \underline{X}$$

↓  
In Torno di  
L

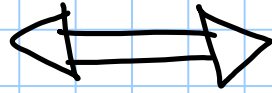
↓  
In Torno di  $+\infty$

$$\lim_m a_m = L \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall V_L \quad \exists \mathcal{U}_\infty : a_m \in V_L \quad \forall m \in \mathcal{U}_\infty \cap \underline{X}$$

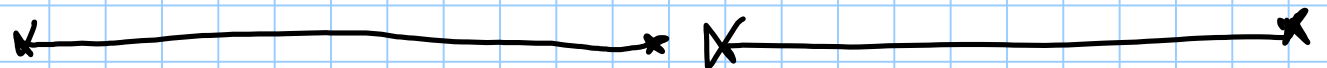
# TEOREMA

$$(A) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$



(B)  $\forall$  intorno  $V$  di  $L$ , esiste un  
intorno  $U$  di  $x_0$  :  
 $f(x) \in V \quad \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$

$$\forall V_L \exists U_{x_0} : f(x) \in V_L \quad \forall x \in U_{x_0} \cap X \setminus \{x_0\}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\boxed{L \in \mathbb{R}}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon > 0 : |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\forall x \in (N_\varepsilon, +\infty) \cap X$$

ASINTOTO  
ORIZZONTALE

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L, \quad \boxed{L \in \mathbb{R}}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon > 0 : |f(x) - L| < \varepsilon \\ \forall x \in (-\infty, -N_\varepsilon) \cap X$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$V_L = \text{intervallo di } -\infty$$

$$= (-\infty, R) = (-\infty, -M) \\ R < 0 \quad M > 0$$

$$\forall M > 0 \quad \exists N_M > 0 : f(x) < -M, \\ \forall x \in (N_M, +\infty) \cap X$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\forall x \in \{(x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \cap X\} \setminus \{x_0\}$$

## ASINTOTO VERTICALE

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

Intorno di  $+\infty \rightarrow (M, +\infty)$

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta_M : f(x) > M$$

$$\forall x \in \{(x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M) \cap X\} \setminus \{x_0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

In Torno di  $-\infty \rightarrow (-\infty, -M)$

$$\forall M > 0 \exists \delta_M : f(x) < -M$$

$$\forall x \in \{(x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M) \cap X\} \setminus \{x_0\}$$

" $x = x_0$ " è una ASINTOTO VERTICALE

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$