

SOTTO SUCCESSIONI

$$a_m = \frac{(-1)^m}{m+3}, \quad b_k = a_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k+3} \equiv 1$$

$\uparrow$

$(m=2k), k \in \mathbb{N}$

$$c_k = a_{2k-1} = \frac{-1}{2k+2}$$

$m=2k-1, k \in \mathbb{N}$

$$m=2k; \quad f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$
$$f(k) = 2k$$

$$\text{Im}(f) = 2\mathbb{N}$$

STRETTAMENTE
CRESCENTE

OSSERVAZIONE

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$\Rightarrow f(k) \geq k$
 $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f(1) \geq 1 \quad (P_1)$$

$$\mathbb{N} \ni f(2) > f(1) \quad (P_1 \Rightarrow P_2)$$

$$\text{Se } f(1) = 1 \Rightarrow f(2) \geq 2$$

$$\text{Se } f(1) > 1 \quad f(2) > 1 \Rightarrow f(2) \geq 2$$

PER INDUZIONE

$$\implies f(k) \geq k, \forall k$$

DEFINIZIONE

Sia a_n una successione e

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione

monotona STRETTAMENTE
CRESCENTE

Si dice **SOTTO SUCCESSIONE**
ESTRATTA da a_n la

SUCCESSIONE $b_k = a_{f(k)}, k \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+3}, \quad f(k) = 2^k$$

$$b_k = a_{2^k} = \frac{(-1)^{2^k}}{2^k + 3} = \frac{1}{2^k + 3}$$

$$m_k = f(k) = 2^k$$

$$a_n \quad a_{m_k}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+3}, \quad a_{2^k} = \frac{1}{2^k + 3}$$

$$\{a_{m_k}\} \subset \{a_n\} \quad a_{2^k-1} = \frac{-1}{2^k+2}$$

$$a_{2^k} = \frac{1}{2^k+3}$$

TEOREMA [REGOLARITA' e SOTTOSEQUENZE]

Sia a_n una successione e $a \in \overline{\mathbb{R}}$

ALLORA

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \iff a_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a \quad \text{per ogni}$$

SOTTOSEQUENZA
ESTRATTA da a_n

$$\{a_{m_k}\} \subset \{a_n\}$$

Def. ($a \in \mathbb{R}$) FACOLTATIVA

$$(\implies) \forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > \nu_\varepsilon$$

$$\implies a_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a \quad \forall \{a_{m_k}\} \subset \{a_n\}$$

Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Se $k > \nu_\varepsilon \implies$

$$f(k) = m_k \geq k \implies$$

$$m_k \geq k > \nu_\varepsilon \implies |a_{m_k} - a| < \varepsilon$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \text{ si ha } |a_{m_k} - a| < \varepsilon \quad \forall k > \nu_\varepsilon$$

$$(\Leftarrow) \left(a_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a, \forall \{a_{m_k}\} \subset \{a_m\} \right) \\ \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon : |a_m - a| < \varepsilon \quad \forall m > \nu_\varepsilon \\ \left(a_m \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \right) \quad (*)$$

PER ASSURDO: SUPPONIAMO
CHE $a_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a, \forall \{a_{m_k}\} \subset \{a_m\}$
E CHE $(*)$ E' FALSO

$$\rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \nu \in \mathbb{N}, \exists m_0 > \nu : |a_{m_0} - a| \geq \varepsilon_0$$

$$\nu = 1 \Rightarrow \exists m_1 > 1 : |a_{m_1} - a| \geq \varepsilon_0$$

$$\nu = m_1 + 1 \Rightarrow \exists m_2 > m_1 + 1 : |a_{m_2} - a| \geq \varepsilon_0$$

$$\nu = m_2 + 1 \Rightarrow \exists m_3 > m_2 + 1 : |a_{m_3} - a| \geq \varepsilon_0$$

PER INDUZIONE OTTENIAMO
 $\{a_{m_k}\} \subset \{a_m\} : |a_{m_k} - a| \geq \varepsilon_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

PER
IPOTESI: $a_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}:$
 $|a_{m_k} - a| < \varepsilon,$
 $\forall k > N_\varepsilon$

SCEGLIENDO $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ SI

OTTIENE

$$\varepsilon_0 \leq |a_{m_k} - a| < \varepsilon_0/2$$
$$\forall k > N_\varepsilon$$

ASSURDO



COROLLARIO

Se a_n è una successione e ne esistono 2 sottosuccessioni estratte

$$da\ a_n, \quad a_{n_k}^{(1)}, \quad a_{n_k}^{(2)}$$

$$a_{n_k}^{(1)} \rightarrow L_1, \quad k \rightarrow +\infty$$

$$a_{n_k}^{(2)} \rightarrow L_2, \quad k \rightarrow +\infty,$$

$$e\ L_1 \neq L_2$$

ALLORA a_n è IRREGOLARE



$$a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a_{2k} = 1, \quad \forall k \Rightarrow a_{2k} \rightarrow 1, \quad k \rightarrow +\infty$$

$$a_{2k-1} = -1, \quad \forall k \Rightarrow a_{2k-1} \rightarrow -1, \quad k \rightarrow +\infty$$

$\Rightarrow a_n$ è IRREGOLARE

FUNZIONI INIETTIVE,
SURIETTIVE.

INSIEMI FINITI,
INFINITI,
NUMERABILI

DEFINIZIONE

$f: X \rightarrow Y$, f è **INiettiva**

se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\forall \{x_1, x_2\} \subset X$

OGNI $y \in \text{Im}(f)$ ha

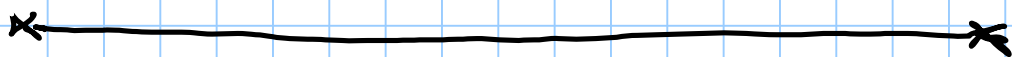
una e una sola
controimmagine.

f è **SURiettiva**

se $\text{Im}(f) = Y$

Se f è **INiettiva** e **SURiettiva**, f è

UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA



⊗ ogni funzione strettamente
monotona è **INiettiva**

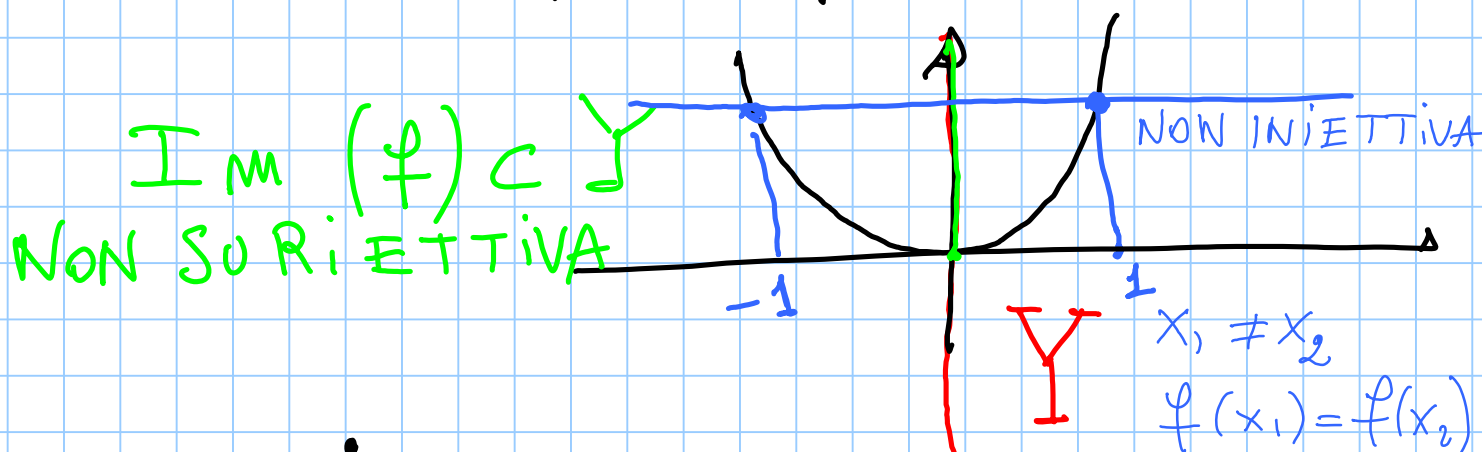
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

NON È SURiettiva

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$$

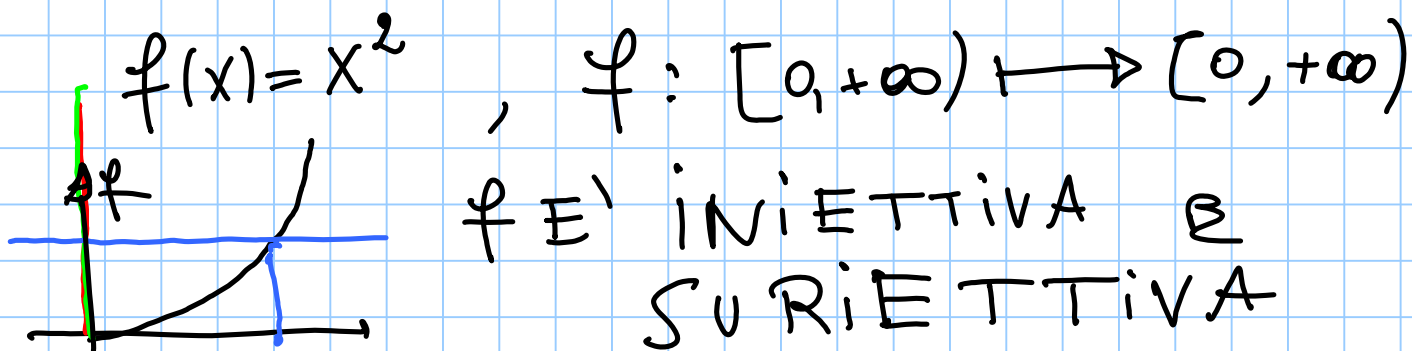
NON È INiettiva

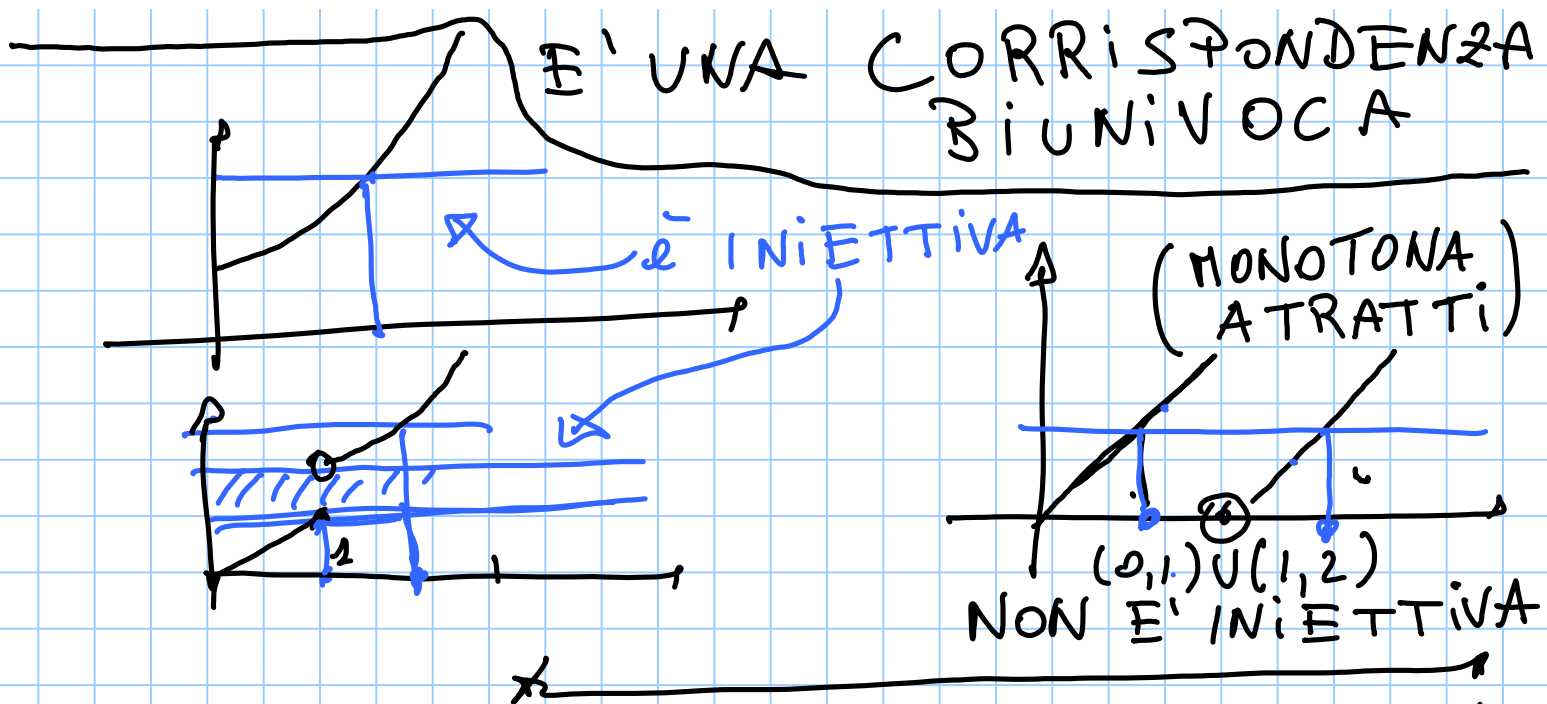
$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$$f(x) = x^2, f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$$

f È SURiettiva





DEFINIZIONE
DUE INSIEMI SONO

È QUIVALENTI SE ESISTE

UNA CORRISPONDENZA
BIUNIVOCA TRA LORO

X è EQUIVALENTE a Y

se $\exists f: X \rightarrow Y$

INIETTIVA e SURIETTIVA

o se $\exists g: Y \rightarrow X$

X	L	M_a	M_e	G	V	S	D
$\neq$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
γ	1	2	3	4	5	6	7

$$\{L, M_a, M_e, G, V, S, D\} \leftrightarrow \{1, 2, \dots, 7\}$$

$\mathbb{N}$ è EQUIVALENTE a $2\mathbb{N}$

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$$

$$f(k) = 2k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$k_1 \neq k_2 \implies f(k_1) \neq f(k_2)$$

è INIETTIVA

f è SURIETTIVA? Sì!

$$\forall m \in 2\mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}: f(k) = m$$

$$m \in 2\mathbb{N} \implies m \text{ divisibile per } 2$$

$$k = \frac{m}{2} \implies f(k) = m \quad \square$$

! IN È EQUIVALENTE
AD UN SUO SOTTOINSIEME
PROPRIO

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), f(x) = \arctan(x)$$

È UNA CORRISPONDENZA
BIUNIVOCA

TRA $\mathbb{R}$ E $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}$$

DEFINIZIONE

X È **FINITO** SE E

EQUIVALENTE AD UN

SOTTOINSIEME LIMITATO
DI $\mathbb{N}$.

$\{1, 2, \dots, 7\}$ è FINITO

DEFINIZIONE

X si dice **INFINITO** SE NON È FINITO.

$\mathbb{N}$ è INFINITO

DIMOSTRAZIONE **FACOLTATIVA**

$\mathbb{N}$ NON È FINITO $\Leftrightarrow$

NON È EQUIVALENTE AD
UN SOTTOINSIEME
LIMITATO di $\mathbb{N}$

$I \subset \mathbb{N}$, LIMITATO

OSSERVAZIONE, SE X è equivalente

a I e I è equivalente a $\mathbb{Z}$

$\Rightarrow X$ è equivalente a $\mathbb{Z}$

USANDO questa proprietà, ci
Riconduciamo al caso in cui

$\mathbb{N} \supset I = \{1, 2, \dots, N\}$. DIMOSTRIAMO

che I NON È EQUIVALENTE a $\mathbb{N}$

PER ASSURDO Ma

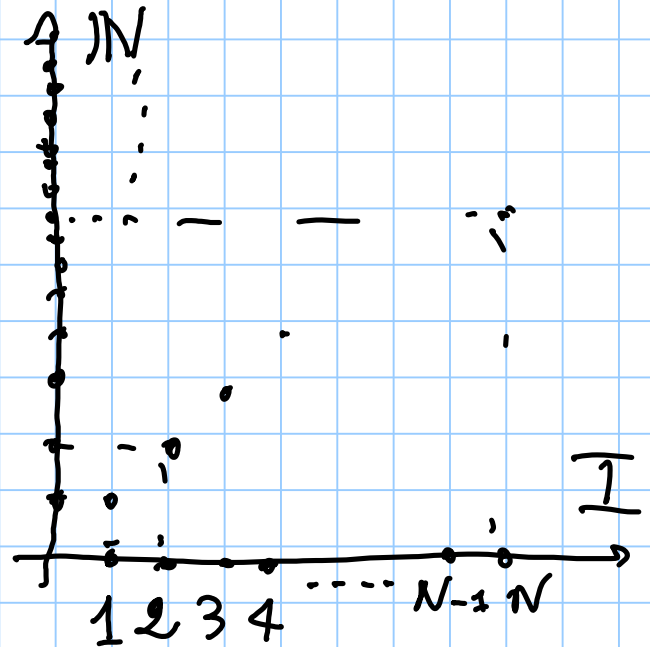
$$f: I \rightarrow \mathbb{N}$$

INIETTIVA e

SURIETTIVA

$$f(1) = 1, f(2) = 2,$$

$$\dots \dots \dots f(N) = N$$



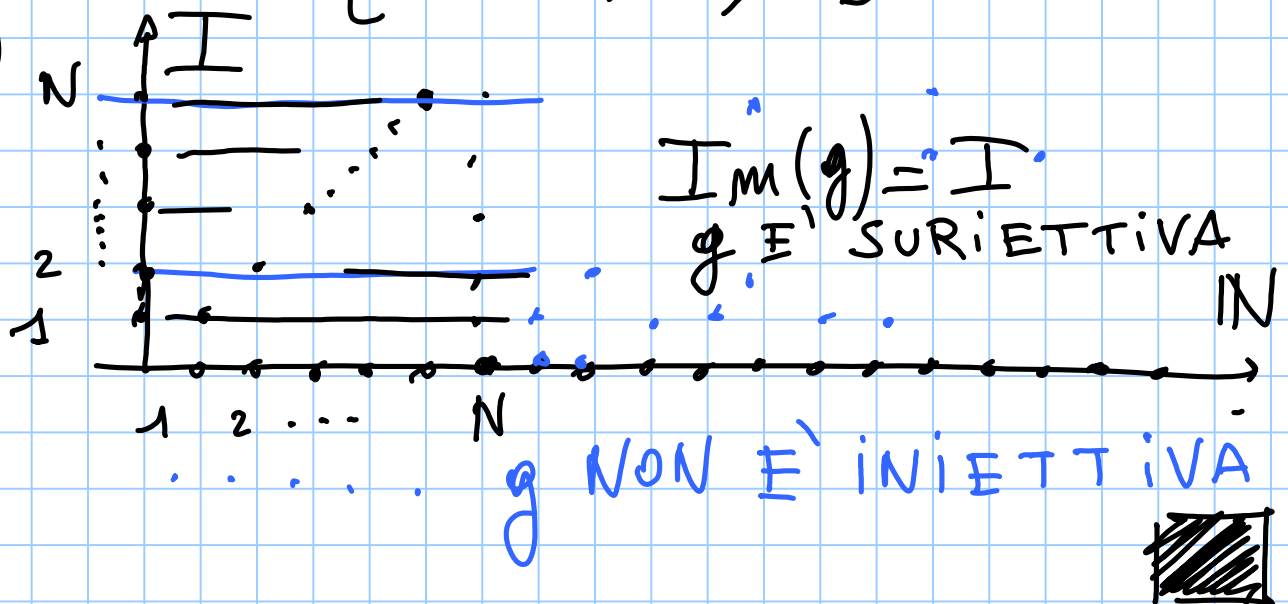
$$Im(f) \subset \{1, 2, \dots, N\} \Rightarrow$$

$$Im(f) = \{f(1), \dots, f(N)\} \quad \left\{ \begin{array}{l} N+1 \notin Im(f) \\ (NON \text{ È } SURIETTIVA) \end{array} \right.$$

$$\max_{k \in \{1, 2, \dots, N\}} f(k) = \max Im(f) = m_0 \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (m_0 + 1 \notin Im(f)) \quad \square$$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, N\} = \mathbb{I}$$



DEFINIZIONE [DEFINIZIONE
EQUIVALENTE]
 X è INFINITO

$S \in E'$ EQUIVALENTE AD
UN SUO SOTTOINSIEME
PROPRIO

$$\mathbb{N} \longleftrightarrow 2\mathbb{N} \Rightarrow e^- \text{ INFINITE}$$

DEFINIZIONE [EQUIVALENTE]
 X è FINITO SE NON

E' INFINITO.

$\{1, 2, \dots, 7\}$ E' FINITO

Ex

NON E' Equivalente
ad UN SUO SOTTOINSIEME
PROPRIO