

DEFINIZIONE

a_n si dice **MONOTONA
CRESCENTE**

$$\text{SE } a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

TEOREMA [**REGOLARITÀ
delle SUCCESSIONI
MONOTONE**]

Sia a_n una SUCCESSIONE
MONOTONA CRESCENTE
(DECRESCENTE)

ALLORA

(i) a_n è INFERIORMENTE
(SUPERIORMENTE)

LIMITATA

$$a_1 = \min_{\mathbb{N}} a_m \quad \left(a_1 = \max_{\mathbb{N}} a_m \right)$$

(ii) a_m è **REGOLARE**

e si ha $\lim_m a_m = \sup_{\mathbb{N}} a_m$

$$\left(\lim_m a_m = \inf_{\mathbb{N}} a_m \right)$$

DIMOSTRAZIONE

a_m DECRESCENTE

$$(i) \quad a_1 \geq a_m \quad \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$a_1 = \max_{\mathbb{N}} a_m$$

$$(ii) \quad L = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n \in [-\infty, +\infty)$$

$$L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

TRATTIAMO SOLO IL CASO $L \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \star$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon : L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

$$\forall n > \nu_\varepsilon$$

$$L = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n \Rightarrow L \text{ è MINORANTE di } \{a_n\}$$

$$a_n \geq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(a_n \geq L - \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}) \quad \text{E' VERA}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : a_n < L + \varepsilon$$

$$\forall n > \nu_\varepsilon$$

$L =$ MASSIMO dei MINORANTI?

$\varepsilon > 0$ FISSATO $\exists n_\varepsilon : a_{n_\varepsilon} < L + \varepsilon$
 L $L + \varepsilon$ non è minorante

USIAMO LA MONOTONIA ($a_n \downarrow$)

$$(n) > n_\varepsilon \Rightarrow a_n \leq a_{n_\varepsilon}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : a_n \leq a_{n_\varepsilon} < L + \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$$



$$a_n \nearrow \Rightarrow b_n = -a_n \searrow,$$

applico il RISULTATO a b_n

$$\begin{array}{l} \alpha > 0 \\ a > 1 \\ \beta > 0 \end{array}$$

$$(\log_a(m^\alpha))^\beta \nearrow, \quad \underline{m^\alpha} \nearrow, \quad a^{m^\beta} \nearrow$$

$$m^{-\alpha} = \frac{1}{m^{\alpha}} \downarrow, \quad a^{-m^{\beta}} = \frac{1}{a^{m^{\beta}}} \downarrow$$

$$-m^{\alpha} \downarrow, \quad -a^{m^{\beta}} \downarrow$$

COROLLARIO

Se a_n è MONOTONA e LIMITATA

$\Rightarrow a_n$ è CONVERGENTE

DIMOSTRAZIONE

a_n MONOTONA $\Rightarrow a_n$ è REGOLARE

$\Rightarrow \exists \lim_n a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$

a_n LIMITATA $\Rightarrow L \in \mathbb{R}$

TEOREMA [IL NUMERO DI NEPERO]

Sia $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$

(i) a_n è STRETTAMENTE CRESCENTE

(ii) a_n è LIMITATA

$$2 \leq a_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$e := \lim_n a_n$ NUMERO DI NEPERO

$$e \approx 2,71$$

DIM.

DIMOSTREREMO CHE a_n è STRETTAMENTE CRESCENTE

IN PARTICOLARE QUINDI

OTTENIAMO $2 = a_1 \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

INOLTRE SI HA

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$$

e si DIMOSTRA in modo ANALOGO
CHE b_n è STRETTAMENTE
DECRESCENTE e quindi si ha

$$2 = a_1 \leq a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

$$= b_n \leq b_1 = 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_m > a_{m-1} \quad m \geq 2$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \iff$$

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^m > \left(\frac{m}{m-1}\right)^m \left(\frac{m}{m-1}\right)^{-1} \iff$$

$$\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)^m > \left(\frac{m-1}{m}\right) \iff$$

$$\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^m > 1 - \frac{1}{m}$$

(BERNOULLI) $h > -1, h \neq 0$

$$(1+h)^m > 1+hm, \forall m \geq 2$$

$$h = -\frac{1}{m^2} > \underline{-1}, \forall m \geq 2$$

$$\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^m > 1 + \left(-\frac{1}{m^2}\right)m = 1 - \frac{1}{m}$$

$$\forall m \geq 2$$



NOTA si DIMOSTRA CON
ARGOMENTI SIMILI CHE

$$x > 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \nearrow$$

$$e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sup_{\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$\log(x) = \log_e(x)$$

TEOREMA

Se $a_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$

$$\text{ALLORA } \lim_n \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} = e$$

Se $a_n \rightarrow -\infty$, $n \rightarrow +\infty$

$$\text{ALLORA } \lim_n \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} = e$$

Dim. (FACOLTATIVA)

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1} \right)^{[a_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[a_n]} \right)^{[a_n] + 1}$$

$$[a_n] \leq a_n \leq [a_n] + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

DIMOSTRIAMO CHE

$$\bullet \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{[a_n]} \right)^{[a_n] + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$$

DATO CHE

$$a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow [a_n] \geq a_n - 1 \rightarrow +\infty$$

Si ha

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{[a_n]} \right)^{[a_n]} \left(1 + \frac{1}{[a_n]} \right)$$

Quindi è SUFFICIENTE DIM. CHE

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n]} \right)^{[a_n]} \rightarrow e, \quad n \rightarrow +\infty$$

DALLA DEFINIZIONE 1.1
Si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: \left| \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k - e \right| < \varepsilon$$
$$\forall k > N_\varepsilon$$

DATO CHE $[a_n] \rightarrow +\infty$, si ha
 $\exists N_\varepsilon^{(2)}$:

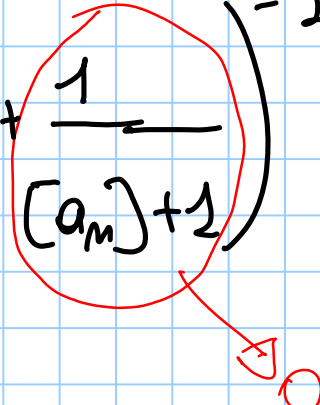
$$\forall n \exists [a_n] > N_\varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon^{(2)}$$

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]} = \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n}, \quad k_n = [a_n]$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon^{(2)}: \left| \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]} - e \right| < \varepsilon$$
$$\forall n > N_\varepsilon^{(2)}$$

DIMOSTRIAMO CHE

$$\bullet \left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{[a_n]} \longrightarrow e$$

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{[a_n]} = \left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{[a_n] + 1} \left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{-1}$$


OSSERVIAMO CHE

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{[a_n] + 1} > \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]}$$

In fatti $[a_n] + 1 > [a_n]$ e

$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ è STRETTAMENTE CRESCENTE.

DAL RISULTATO PRECEDENTE

$$\left(1 + \frac{1}{[a_m]}\right)^{[a_m]} < \left(1 + \frac{1}{[a_m]+1}\right)^{[a_m]+1} < e$$

$e = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$

Per confronto $\left(1 + \frac{1}{[a_m]+1}\right)^{[a_m]+1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} e$

Segue per confronto che

$$a_m \rightarrow +\infty \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{a_m}\right)^{a_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} e$$

$$\left(1 + \frac{1}{a_m}\right)^{a_m} \longrightarrow e$$

$$a_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} -\infty$$

$$b_m = -a_m - 1 \longrightarrow +\infty, m \rightarrow +\infty$$

$$a_m = -(b_m + 1)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{a_m}\right)^{a_m} &= \left(1 - \frac{1}{b_m + 1}\right)^{-(b_m + 1)} \\ &= \left(\frac{b_m}{b_m + 1}\right)^{-(b_m + 1)} = \left(\frac{b_m + 1}{b_m}\right)^{b_m + 1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{b_m}\right)^{b_m} \left(1 + \frac{1}{b_m}\right) \xrightarrow{b_m \rightarrow +\infty} e \cdot 1 \end{aligned}$$

Note: Red circles and arrows highlight the limit process. One circle around $\left(1 + \frac{1}{b_m}\right)^{b_m}$ with an arrow pointing to e . Another circle around $\left(1 + \frac{1}{b_m}\right)$ with an arrow pointing to 1 .

LIMITI DI
POTENZE,
ESPOENZIALI,
LOGARITMI di
SUCCESSIONI

- i) $x > 1 \Rightarrow x^{+\infty} = +\infty, x^{-\infty} = 0$;
- ii) $x \in (0, 1) \Rightarrow x^{+\infty} = 0, x^{-\infty} = +\infty$;
- iii) $x > 0 \Rightarrow (+\infty)^x = +\infty$; $x < 0 \Rightarrow (+\infty)^x = 0$
- iv) $x > 0 \Rightarrow 0^x = 0$
- v) $(+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$; $(+\infty)^{(-\infty)} = 0$, $0^{+\infty} = 0$

TEOREMA [POTENZA, ESPONENZIALI]
LOGARITMI E SUCCESSIONI

a_m e b_m SUCCESSIONI REGOLARI

Supponiamo $\boxed{a_m > 0}$ definitivamente in m ,

$a_m \rightarrow a \in [0, +\infty]$ e $b_m \rightarrow b \in \overline{\mathbb{R}}$

SE $a^b \notin \{1^{+\infty}, (+\infty)^0, 0^0\}$

ALLORA $\lim_m a_m^{b_m} = a^b$

In particolare, se $a = 0$ e $b < 0$

$$\lim_n a_n^{b_n} = +\infty$$

Inoltre si ha

$$\lim_n \log(a_n) = \begin{cases} +\infty & , a = +\infty \\ \log(a) & , a \in (0, +\infty) \\ -\infty & , a = 0 \end{cases}$$

L'ipotesi $a_n > 0$ definitivamente
è NECESSARIA.

ALTRIMENTI POTREMMO

AVERE ESPRESSIONI

PRIVE DI SIGNIFICATO:

$$b_n = \frac{1}{2} \quad a_n = -\frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad \nexists a_n^{b_n}$$

NOTA Se $a_n \rightarrow 0$, $a_n > 0$
definitivamente e $b < 0$,
STIAMO "DIVIDENDO PER 0".

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = -1$$

$$a_n^{b_n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{n}} \rightarrow +\infty$$

Se $a_n \rightarrow 0$ e $a_n > 0$ definitivamente
Si dice che $a_n \rightarrow 0^+$

$$\text{Quindi } "0^{+\infty}" = (0^+)^{+\infty} = 0$$

$$\text{e } \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE

INIZIAMO DAL CASO

$$a_m \equiv a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$$

$$b_m \rightarrow b \in \mathbb{R}$$

e Dimostriamo che

$$a^{b_m} \rightarrow a^b, \quad m \rightarrow +\infty$$

$$a^{b_n} = e^{b_n \log a}$$

$$b_n \log a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b \log a$$

quindi S.F.D.G.

poniamo $a = e$ e dimostriamo

$$\text{che: } \lim_n e^{b_n} = e^b, \quad b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: |e^{b_n} - e^b| < \varepsilon, \forall n > N_\varepsilon$$

$$- \varepsilon + e^b < e^{b_n} < e^b + \varepsilon$$

SE $-\varepsilon + e^b \leq 0$ E' SEMPRE VERA

$$S.P.D.G. \quad \varepsilon < e^b$$

$$1 - \varepsilon e^{-b} < e^{b_m - b} < 1 + \varepsilon e^{-b}$$

$\downarrow$
0

$$\log_{(0^m, 1)}(1 - \varepsilon e^{-b}) < b_m - b < \log_{(1, +\infty)}(1 + \varepsilon e^{-b})$$

$$\sigma_{\varepsilon,-} = \log(1 - \varepsilon e^{-b}) < 0, \quad \sigma_{\varepsilon,+} = \log(1 + \varepsilon e^{-b}) > 0$$

$$\sigma_{\varepsilon,-}/2 < b_m - b < \sigma_{\varepsilon,+}/2$$

$$-|\sigma_{\varepsilon,-}|/2 < b_m - b < \sigma_{\varepsilon,+}/2$$

$$0 > \tilde{\sigma}_{\varepsilon,-} = -|\sigma_{\varepsilon,-}|$$

$$\sigma_{\varepsilon} := \min \left\{ \frac{\sigma_{\varepsilon,+}}{2}, \frac{|\sigma_{\varepsilon,-}|}{2} \right\}$$

E' SUFFICIENTE DIM. CHE

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon} : -\sigma_{\varepsilon} < b_m - b < \sigma_{\varepsilon} \quad \forall m > N_{\varepsilon}$$

DATO CHE $b_m \rightarrow b, m \rightarrow +\infty$

SI HA

$$\forall \sigma > 0 \quad \exists \mu_\sigma \in \mathbb{N}: |b_m - b| < \sigma \\ \forall m > \mu_\sigma$$

Allora, dato $\varepsilon > 0$ Troviamo

σ_ε , dato σ_ε Troviamo

μ_{σ_ε} . Posto $N_\varepsilon := \mu_{\sigma_\varepsilon}$ si ha

$$-\sigma_\varepsilon < b_m - b < \sigma_\varepsilon \quad \forall m > N_\varepsilon$$

ESEMPIO

$$b_m \rightarrow b, m \rightarrow +\infty, b \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{b_m} \rightarrow e^b, m \rightarrow +\infty.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: |e^{b_m} - e^b| < \varepsilon, \forall m > N_\varepsilon$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: -\sigma_\varepsilon < b_m - b < \sigma_\varepsilon \quad \forall m > N_\varepsilon$$

$$\varepsilon \rightarrow \sigma_\varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-3} \rightarrow \sigma_\varepsilon = \frac{1}{15}$$

$$\forall \sigma > 0 \exists \mu_\sigma \in \mathbb{N}: -\sigma < b_m - b < \sigma \quad \forall m > \mu_\sigma$$

$$\mu_{1/15}$$

$$\left[\lim_n b_m = b \right]$$

$$N_\varepsilon = \mu_{\sigma_\varepsilon} = \mu_{1/15}$$



$$\frac{(2m)!}{m^m} = \frac{2m \cdot (2m-1)(2m-2) \dots (m+1)}{m^m} \cdot m!$$

$$\frac{m!}{m^m} \rightarrow 0$$

$$\frac{2m}{m} \left(2 - \frac{1}{m}\right) \left(2 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(2 - \frac{m-2}{m}\right) \cdot \left(2 - \frac{m-1}{m}\right)$$

$$\frac{1}{m} \leq \frac{2}{m} \leq \dots \leq \frac{m-2}{m} \leq \frac{m-1}{m} < 1$$

$$\geq 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \dots 1$$

$$\frac{(2m)!}{m^m} \geq 2 \cdot m!$$