

$$f(x) = \log_2(x^2 - 6|x-1|)$$

dom(f)?

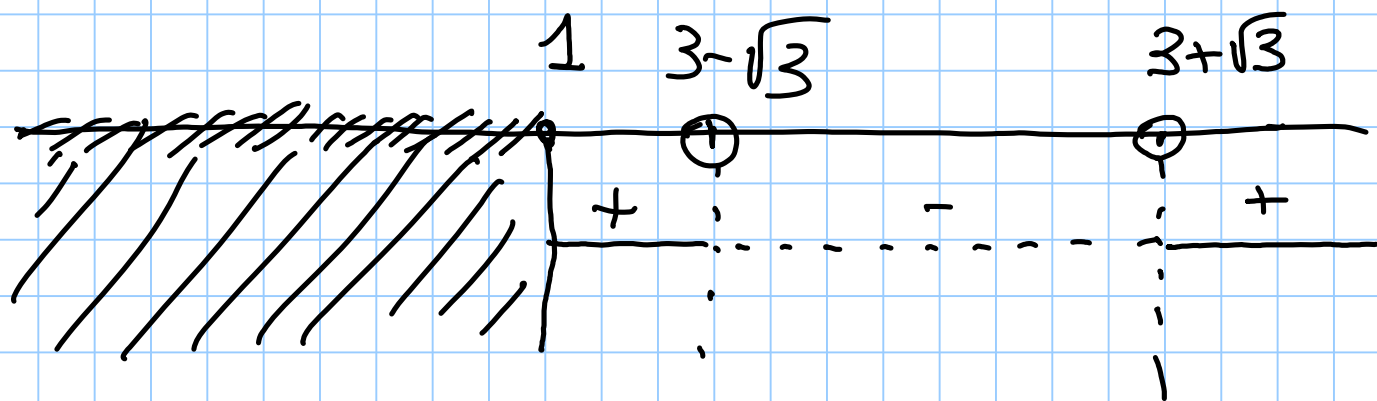
$$x^2 - 6|x-1| > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 6(x-1) > 0 \\ x \geq 1, \text{ } x-1 \geq 0 \end{array} \right\} \cup$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 6(x-1) > 0 \\ x < 1, \text{ } x-1 < 0 \end{array} \right\}$$

$$\underline{x^2 - 6x + 6 > 0}, \quad \underline{x \geq 1}$$

$$X_{\pm} = 3 \pm \sqrt{9-6} = 3 \pm \sqrt{3}$$

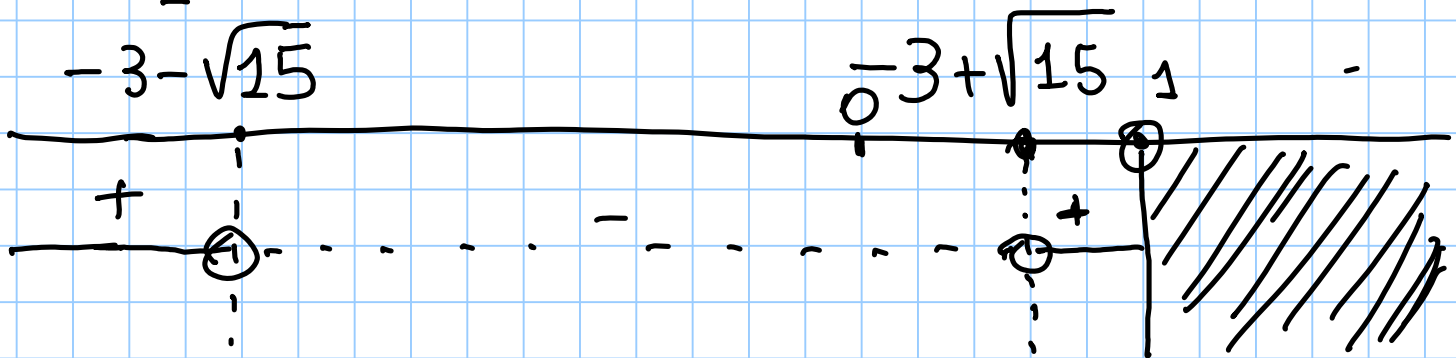


$$1 \leq x < 3 - \sqrt{3}, \quad x > 3 + \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} 3 - \sqrt{3} > 1 &\iff 2 > \sqrt{3} \iff \\ &4 > 3 \end{aligned}$$

$$x^2 + 6x - 6 > 0, \quad \underline{x < 1}$$

$$X_{\pm} = -3 \pm \sqrt{9+6} = -3 \pm \sqrt{15}$$



$$-3 + \sqrt{15} < 1 \iff \sqrt{15} < 4 \iff 15 < 16$$

$$\begin{aligned} \text{dom}(f) = & (-\infty, -3 - \sqrt{15}) \cup \\ & (-3 + \sqrt{15}, 1) \cup \\ & [1, 3 - \sqrt{3}) \cup (3 + \sqrt{3}, +\infty) \end{aligned}$$

$$= (-\infty, -3 - \sqrt{15}) \cup (-3 + \sqrt{15}, 3 - \sqrt{3}) \cup (3 + \sqrt{3}, +\infty)$$

↓

DEFINIZIONE

Una **SUCCESSIONE** $\bar{e}$
 una funzione il cui dominio e
 è $\mathbb{N}$.

NOTAZIONE

$f(m), m \in \mathbb{N}$

$$a_m = \frac{m^4}{m^4 + 1}, m \in \mathbb{N}$$

$b_m, c_m, \dots$

$c_m, m \in \mathbb{Z}$

TEOREMA

[PRINCIPIO di
INDUZIONE]

Sia P_m una proposizione
definita $\forall m \in \mathbb{N}$

Se

(i) P_1 è VERA;

(ii) $\forall m \in \mathbb{N}, P_m \Rightarrow P_{m+1}$,

ALLORA P_m è VERA $\forall m \in \mathbb{N}$.

OSSERVAZIONE La (i) dice
che : $\forall m \in \mathbb{N}$, Se P_m è VERA
ALLORA è VERA P_{m+1} .

←————→
ESEMPIO

$$a_m = 2^m$$

$$b_m = m+1, m \in \mathbb{N}$$

$$P_m = "2^m \geq m+1", m \in \mathbb{N}$$

$$"a_m \geq b_m"$$

$$m=1, 2 = 2^1 \geq 1+1 = 2$$

$$m=2, 4 = 2^2 \geq 2+1 = 3$$

$$m=3, 8 = 2^3 \geq 3+1 = 4$$

⋮

$$P_1, \quad 2^m \geq m+1, \quad m=1$$
$$2^1 \geq 1+1 \quad \underline{\text{E' VERA}}$$

SUPPONIAMO DI AVER
DIMOSTRATO CHE

$$P_1 \Rightarrow P_2. \quad \text{ALLORA:}$$

P_1 E' VERA

$$\Rightarrow$$

P_2
E' VERA

SUPPONIAMO DI AVER
DIMOSTRATO CHE

$$P_2 \Rightarrow P_3. \quad \text{ALLORA}$$

P_2 E' VERA

$$\Rightarrow$$

P_3
E' VERA

DIMOSTRIAMO PER
INDUZIONE CHE $2^n \geq n+1$

(i) P_1 è VERA.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, Se P_n è VERA

$P_n = "2^n \geq n+1"$, ALLORA
È VERA $P_{n+1} = "2^{n+1} \geq (n+1)+1"$

IPOTESI INDUTTIVA

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \geq 2(n+1) = 2n+2 \\ (2^n \geq n+1) &\Rightarrow 2 \cdot 2^n \geq 2(n+1) \\ &= 2n+2 > n+2 = (n+1)+1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (i) P_2 \text{ e' VERA} \\ (ii) \forall m \geq 2, P_m \Rightarrow P_{m+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_m \text{ e' VERA } \forall m \geq 2$$

$$2^m > m, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$(i) P_1 \text{ e' VERA, } 2^1 > 1, \text{ e' VERA}$$

$$(ii) m \in \mathbb{N} \text{ " } 2^m > m \text{ " } \Rightarrow \text{ " } 2^{m+1} > m+1 \text{ "}$$

I POTESI INDUTTIVA

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m > 2m = m+m \geq m+1$$

$$2^m > m \Rightarrow 2 \cdot 2^m > 2m$$

$$2^{m+1} > m+1$$

TEOREMA [DISUGUAGLIANZA di BERNOLLI]

$$h > -1, (1+h)^m \geq 1+mh, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$h > -1, h \neq 0, (1+h)^m > 1+mh, \forall m \geq 2, m \in \mathbb{N}'$$

DIMOSTRAZIONE
PER INDUZIONE

$$h > -1, h \neq 0, (1+h)^m > 1+mh, \forall m \geq 2.$$

(i) P_2 È VERA.

$$(1+h)^2 > 1+2h$$

$$1+2h+h^2 > 1+2h, \text{ È VERA}$$

$$h \neq 0 \Rightarrow h^2 > 0 \quad 1+2h+h^2 > 1+2h$$

$$(ii) m \in \mathbb{N} \quad "(1+h)^m > 1+mh" \Rightarrow$$
$$"(1+h)^{m+1} > 1+(m+1)h"$$

$$(1+h)^{m+1} = (1+h)(1+h)^m > (1+h)(1+mh) =$$

IPOTESI INDUTTIVA

$$h > -1$$

$$(1+h)^m > (1+mh)$$

$$\stackrel{\geq 0}{(1+h)(1+h)^m} > \stackrel{\geq 0}{(1+h)(1+mh)}$$

$$= 1 + h + mh + mh^2 \geq 1 + h + mh =$$

$$= 1 + (m+1)h \quad \blacksquare$$

SIMBOLO di SOMMA

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$$

$$\sum_{k=1}^m a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$$

$$a_m = \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} = a_1 + a_2 + \dots + a_m = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}$$

Σ
"Sigma"

SOMMA di POTENZE

$$S_m(x) = \sum_{k=1}^m x^k, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$= x + x^2 + x^3 + \dots + x^m$$

$$\text{"} S_m(x) = \frac{x - x^{m+1}}{1-x}, \quad x \neq 1 \text{"}$$

$$(i) S_1(x) = \frac{x - x^2}{1-x} = x \frac{(1-x)}{(1-x)} =$$

$$S_1(x) = x = x$$

$$(ii) \text{"} S_m(x) = \frac{x - x^{m+1}}{1-x} \text{"}$$

$$\text{"} S_{m+1}(x) = \frac{x - x^{m+2}}{1-x} \text{"}$$

$$S_{m+1}(x) = \sum_{k=1}^{m+1} x^k =$$

$$= \sum_{k=1}^m x^k + x^{m+1} = S_m(x) + x^{m+1}$$

I.P. INDUCTION

$$= \frac{x - x^{m+1}}{1-x} + x^{m+1} =$$

$$= \frac{x - x^{m+1} + x^{m+1} - x^{m+2}}{1-x} = \frac{x - x^{m+2}}{1-x}$$



←

$$x + x^2 + \dots + x^m = \frac{(x + x^2 + \dots + x^m) \cdot (1-x)}{(1-x)}$$

$$= \frac{x + \cancel{x^2} + \dots + \cancel{x^m} - \cancel{x^2} - \cancel{x^3} - \dots - x^{m+1}}{1-x}$$

$$= \frac{x - x^{m+1}}{1-x}$$



←

$$\sigma_1(m) = \sum_{k=1}^m k = 1+2+3+\dots+m$$

sigma
σ

$$\sigma_1(m) = \frac{m(m+1)}{2}$$

PER INDUZIONE

$$(i) \quad \sigma_1(1) = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 \quad \text{VERA.}$$

$$(ii) \quad m \in \mathbb{N} \quad \sigma_1(m) = \frac{m(m+1)}{2} \Rightarrow \sigma_1(m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$$\sigma_1(m+1) = \sum_{k=1}^{m+1} k = \sum_{k=1}^m k + m+1 =$$

$$\stackrel{\text{IP.}}{=} \text{INDUTTIVA} = \frac{m(m+1)}{2} + m+1 =$$

$$= \frac{m(m+1) + 2m+2}{2} = \frac{m^2 + 3m + 2}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad \blacksquare$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{1} + \dots + \dots + \frac{(m-1)}{1} + \frac{m}{x} \quad m \text{ PARI}$$

$$m-1 \text{ PARI} \quad \leftarrow \quad \frac{m(m+1)}{2} \quad m \text{ DISPARI}$$

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+m &= 1+2+3+\dots+(m-1)+m = \\ &= \frac{(m-1)m}{2} + m = \frac{(m-1)m + 2m}{2} = \\ &= \frac{m^2 - m + 2m}{2} = \frac{m(m+1)}{2} \end{aligned}$$

*  *

$m \in \mathbb{N}$ m FATTORIALE

$$m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\{1, 2, 3\}$$

$\{1, 3, 2\}$ PERMUTAZIONE
di $\{1, 2, 3\}$

QUANTE SONO LE
PERMUTAZIONI di 3 ELEMENTI?

1° el.	2° el.	3° el.
1	$\begin{matrix} 12 \\ 13 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 123 \\ 132 \end{matrix}$
2	$\begin{matrix} 21 \\ 23 \end{matrix}$	$\vdots$
3	$\begin{matrix} 31 \\ 32 \end{matrix}$	$\vdots$
3	2	1

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

$n!$ = NUMERO di PERMUTAZIONI
di n elementi

$\{1, 2, 3\}$ LE PERMUTAZIONI
di 3 ELEMENTI PRESI
2 a 2

1° el.	2° el.
1	→ $\begin{smallmatrix} 12 \\ 13 \end{smallmatrix}$
2	→ $\begin{smallmatrix} 21 \\ 23 \end{smallmatrix}$
3	→ $\begin{smallmatrix} 31 \\ 32 \end{smallmatrix}$
3	2

Si dicono
DISPOSIZIONI di
3 ELEMENTI di
CLASSE 2
 $3 \cdot 2$

LE **DISPOSIZIONI**

di m ELEMENTI di
CLASSE k

**PRESI
K a K**

$$m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1) =$$

$$\frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)(m-k)!}{(m-k)!} = \frac{m!}{(m-k)!}$$

⊗ VEDI SOTTO

$$6 = 3 \cdot 2 \quad \begin{matrix} \{1,2\} \\ \times \end{matrix} \quad \begin{matrix} \{1,3\} \\ \times \end{matrix} \quad \{2,1\} \quad \begin{matrix} \{2,3\} \\ \times \end{matrix} \quad \{3,1\} \quad \{3,2\}$$

QUANTE SONO LE
DISPOSIZIONI DI m ELEMENTI
DI CLASSE 2 INDIPENDENTEMENTE
DALL'ORDINE?

LE DISPOSIZIONI DI m ELEMENTI
DI CLASSE k
INDIPENDENTEMENTE
DALL'ORDINE SI DICONO
COMBINAZIONI DI m ELEMENTI
DI CLASSE k

$$1 \leq k \leq m$$



$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-k+2) \cdot (m-k+1) =$$

$$\begin{matrix} \text{1° el.} & \text{2° el.} & \text{3° el.} & \dots & \text{(k-1)° el.} & \text{k° el.} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (m-(2-1)) & (m-(3-1)) & \dots & (m-(k-1-1)) & (m-(k-1)) \end{matrix}$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

PERMUTAZIONI di k ELEMENTI $\rightarrow k!$

COEFFICIENTE
BINOMIALE

di m su k
 $1 \leq k \leq m, k=m$

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$$\binom{m}{m} = 1$$

$$\binom{m}{0} = 1$$

$$\frac{m!}{m!(m-m)!} = \frac{1}{0!};$$

$$\frac{m!}{0!(m-0)!} = \frac{1}{0!}$$

$$\boxed{0! := 1}$$

$\binom{m}{k}$ = # di sottoinsiemi di k elementi
di un insieme di m elementi