

TEOREMA $\mathbb{R}$ è COMPLETO
OVVERO OGNI SOTTOINSIEME
di $\mathbb{R}$ SUPERIORMENTE
(INFERIORMENTE)
LIMITATO AMMETTE
ESTREMO SUPERIORE
(INFERIORE)

N.B.

$\mathbb{Q}$ NON È COMPLETO
 $A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 \geq 2, q \geq 0\}$ e

SE CERCHIAMO L'ESTREMO
INFERIORE in $\mathbb{Q}$ ($\inf_{\mathbb{Q}} A$)
TROVIAMO CHE $\nexists \inf_{\mathbb{Q}} A$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3, x > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

DIMOSTRIAMO CHE $\exists \sup A$
IN PARTICOLARE si ha:

$$\sqrt{3} := \sup A$$

USEREMO IL FATTO CHE
POSTO

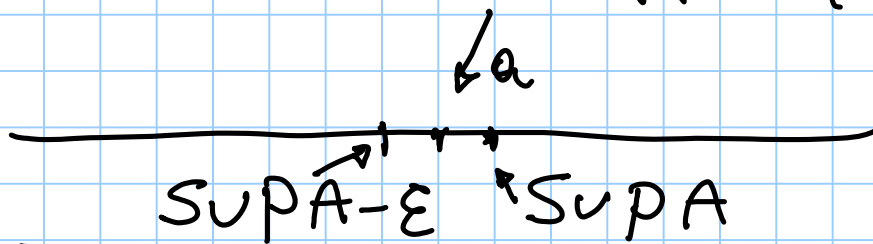
$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 3, x > 0\}$$

(INSIEME di MAGGIORANTI di A)

si ha $A \cup B = \mathbb{R}$

$$(i) \sup A \geq a, \forall a \in A$$

$$(ii) \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > \sup A - \varepsilon$$

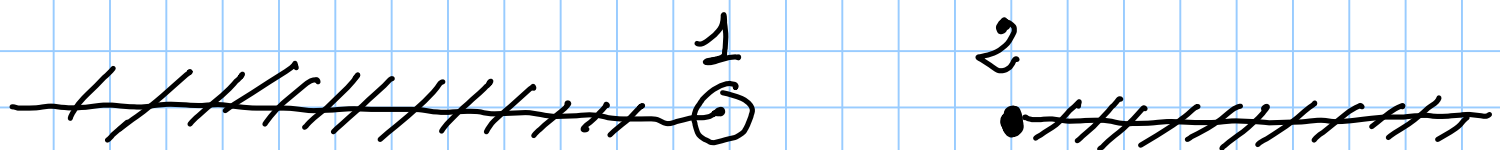


$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 3, x > 0\}$$

INSIEME dei MAGGIORANTI di A

$$x=1, 1^2 = 1 < 3 \quad 1 \notin B$$

$$x=2, 2^2 = 4 > 3 \quad 2 \in B$$



SE $\exists \sup A$
ALLORA $1 \leq \sup A \leq 2 = 1 + 10^0$

$$1,2 \quad 1,4 \quad 1,6 \quad 1,8$$



$$1 \quad 1,1 \quad 1,3 \quad 1,5 \quad 1,7 \quad 1,9 \quad 2$$

$$1,7 < \sup A \leq 1,8 = 1,7 + 10^{-1} \quad \leftarrow \boxed{\text{SE } \exists \sup A}$$

$$1,1; (1,1)^2 = 1,21 < 3, \quad 1,1 \notin B$$

$$1,2; (1,2)^2 = 1,44 < 3, \quad 1,2 \notin B$$

.....

$$1,7; (1,7)^2 = 2,89 < 3, \quad 1,7 \notin B$$

$$1,8; (1,8)^2 = 3,24 > 3, \quad 1,8 \in B$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1,73 & & 1,75 & & \\ \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & \\ 1,70 & 1,71 & 1,72 & 1,74 & - & - & 1,80 \end{array}$$

$$(1,71)^2 < 3, \quad 1,71 \notin B$$

$$(1,72)^2 < 3, \quad (1,72) \notin B$$

$$\dots \dots \dots (1,73) \notin B$$

$$(1,74)^2 = 3,0276 > 3, \quad 1,74 \in B$$

$$\boxed{\text{SE } \exists \text{ SUP } A} \quad 1,73 < \text{SUP } A \leq 1,74 = 1,73 + 10^{-2}$$

ITERANDO (INDUZIONE) QUESTO

PROCEDIMENTO DEFINIAMO
UNO SVILUPPO DECIMALE

$$\mu \in \mathbb{R} : \forall m \in \mathbb{N}$$

$$1,73\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_m < \mu$$

$$\mu \leq 1,73\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_m + 10^{-m}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{1,73\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_m} \notin B \\ \forall m \in \mathbb{N} \\ \underline{1,73\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_m + 10^{-m}} \in B \end{array} \right.$$

$$m=1, 1,7 < \mu \leq 1,8 = 1,7 + 10^{-1}$$

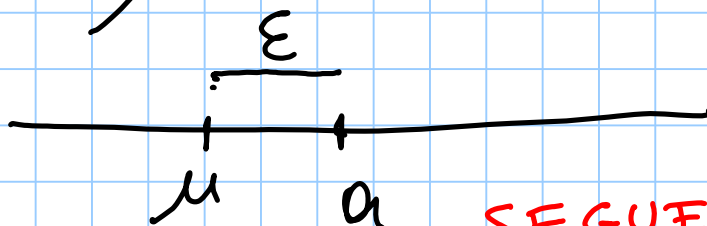
$$m=2, 1,73 < \mu \leq 1,74 = 1,73 + 10^{-2}$$

$$3,14 = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$$

$$10^0 = 1, 10^{-1} = 0,1, 10^{-2} = 0,01$$

(i) μ è UN MAGGIORANTE

PER ASSURDO: se μ non fosse
MAGGIORANTE



$$\exists a \in A : a > \mu$$

SEGUE
PROPRIETA' DALLA
ARCHIMEDEA

$$a - \mu =: \varepsilon > 0$$

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} : 10^{-m_\varepsilon} < \varepsilon$$

" $\varepsilon = 0,00034\bar{5}$

$$0,00001 = 10^{-5} \Rightarrow m_\varepsilon = 5 "$$

PROPRIETA' ARCHIMEDEA

$$\forall x > 0, \forall y > 0 \exists m \in \mathbb{N} : \\ m \cdot x \geq y$$

$$x = \varepsilon, y = 1 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: m \cdot \varepsilon \geq 1$$

(INDUZIONE)

$$\hookrightarrow 10^m > m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^m \cdot \varepsilon > m \cdot \varepsilon \geq 1,$$

$$10^m \cdot \varepsilon > 1,$$

$$\varepsilon > 10^{-m}$$

$$|a - \mu| = \varepsilon > 10^{-m} \varepsilon$$

ASSURDO

$$A \ni a > \mu + 10^{-m} \varepsilon > \boxed{a \in A, a > \mu \text{ è un MAGGIORANTE di } A}$$

$$1, 73 \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_{m_\varepsilon} + 10^{-m} \varepsilon \in B$$

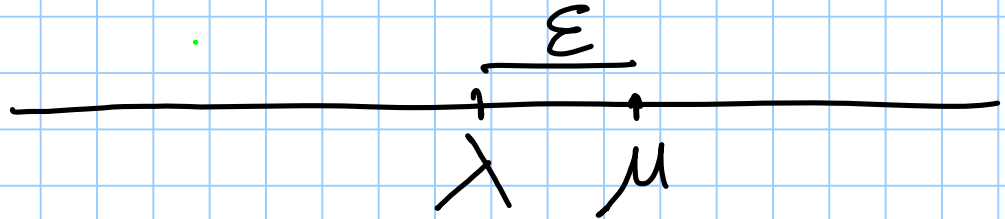
$$m = m_\varepsilon$$

È UN MAGGIORANTE di A

(ii) μ MINIMO dei MAGGIORANTI

PER ASSURDO, SE μ NON
FOSSSE IL MINIMO DEI

MAGGIORANTI, $\exists \lambda < \mu$:
 $\lambda \notin \text{MAGGIORANTE di } A$



$$\lambda < \mu$$

$$\mu - \lambda =: \varepsilon > 10^{-m_\varepsilon}$$

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists m_\varepsilon : \varepsilon > 10^{-m_\varepsilon}$$

$$\lambda < \mu - 10^{-m_\varepsilon} \leq \boxed{M = m_\varepsilon}$$

NON $\exists 1, 73 \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_{m_\varepsilon} + \cancel{10^{-m_\varepsilon}} - \cancel{10^{-m_\varepsilon}}$
 $\notin B$

MAGGIORANTE

ASSURDO

$$\boxed{M = m_\varepsilon}$$

$$\begin{aligned} a \leq \lambda < a_0 \notin B &\Rightarrow a_0 \in A \\ \forall a \in A & \\ (A \cup B = \mathbb{R}) & \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\boxed{1 = 0, \overline{9}}$$

PER ASSURDO

$$1 - 0, \overline{9} > 0$$

$$1 - 0, \overline{9} =: \varepsilon$$

$$\exists m \in \mathbb{N}:$$

$$\varepsilon > 10^{-m}$$

$$1 - 0, \overline{9} > 10^{-m}$$

Sia $n \geq m$

$$0, \overline{9} > 0, \underbrace{99 \dots 9}_m$$

$$-0, \overline{9} < -0, \underbrace{99 \dots 9}_m$$

$$1 - 0, \overline{9} < 1 - 0, \underbrace{99 \dots 9}_m = 10^{-m}$$

$$10^{-m} < 1 - 0, \overline{9} < 10^{-m} \quad m \geq m$$

ASSURDO

$$A = \left\{ x = 1 + \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N} \right\} =$$

$$= \left\{ x = \frac{m+1}{m}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\max A = 2$$

$$A \not\emptyset \quad \inf A = 1, \quad \nexists \min A$$

$$\left\{ 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{100}{99}, \frac{101}{100}, \dots \right\}$$

$1 + \varepsilon_0 \qquad 1 + \varepsilon \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2}$



$$1 + \frac{1}{m} \leq 2 \quad \forall m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{m} \leq 1, \quad \boxed{m \geq 1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

VERA

2 è MAGGIORANTE di A

$2 \in A$? Si $\Rightarrow 2 = \max A$

$$1 + \frac{1}{n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

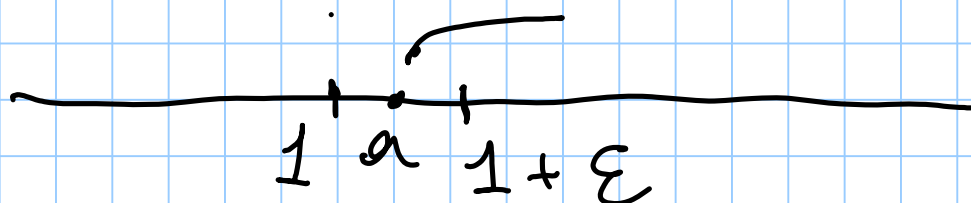
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \underline{\text{VERA}}$$

1 è MINORANTE

$1 \in A$? **NO** $\Rightarrow 1$ NON È minA

(i) 1 MINORANTE

(ii) 1 MASSIMO dei MINORANTI



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : a < 1 + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \boxed{1 + \frac{1}{m} < 1 + \varepsilon}$$

$$\cancel{1} + \frac{1}{m} < \cancel{1} + \varepsilon, \quad \frac{1}{m} < \varepsilon,$$

$$m > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{10}$$

$$m_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = 10, \quad m = 11$$

$$\lceil 10 \rceil = 10$$

$$\varepsilon = \frac{1}{10^{40}}$$

$$\lceil 10^{40} \rceil = 10^{40}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = 10^{40}, \quad m = 10^{40} + 1$$

$$\lceil m \rceil = m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$x \in \mathbb{R}$, $[x] = \text{PARTE INTEGRA}$

$$[x] = \max \{ m \in \mathbb{Z} : m \leq x \}$$

PIÙ GRANDE INTERO
 $\leq x$

$$[10,5] = 10$$

$$[10] = 10$$

$$[10,9] = 10$$

SE FOSSIMO PARTITI COM $\mu > 1$?

$$\mu = 1 + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 > 0$$

$$(i) \quad 1 + \varepsilon_0 \leq 1 + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

? $1 + \varepsilon_0$ MINORANTE ?

$$\varepsilon_0 \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{n \leq \frac{1}{\varepsilon_0} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

IMPOSSIBILE: $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon_0} \right\rceil + 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow n_0 > \frac{1}{\varepsilon_0}$

Se avessimo preso $\mu < 1$?

$$\mu = 1 - \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 > 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A: a < \mu + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: 1 + \frac{1}{n} < \mu + \varepsilon$$

$$1 + \frac{1}{n} < 1 - \varepsilon_0 + \varepsilon$$

$$\boxed{\varepsilon \leq \varepsilon_0}$$

$$1 + \frac{1}{n} < 1 - \varepsilon_0 + \varepsilon \leq 1 - \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 1$$

$$\boxed{\exists m \in \mathbb{N} : 1 + \frac{1}{m} < 1}$$

IMPOSSIBILE

$$\boxed{\frac{1}{m} < 0}$$

$$x > 0 \quad \sqrt{x} := \sup \{ y \in \mathbb{R} : y^2 < x \}$$

$$\sqrt{3} := \sup \{ y \in \mathbb{R} : y^2 < 3 \}$$

$$x > 0 \quad \log_2 x := \sup \{ y \in \mathbb{R} : 2^y < x \}$$

$$\log_2 3 := \sup \{ y \in \mathbb{R} : 2^y < 3 \}$$

DENSITA' dei RAZIONALI in $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y \\ \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}: x < q < y$$

APPENDICE

Se $y \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, COME
DEFINIAMO x^y ?

Sia $y = m, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$

$$x^y := \sup \{ m \in \mathbb{N}, x^{m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} \}$$

Si può dimostrare che:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$(x \cdot y)^a = x^a y^a$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

Se $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}^+$

$\exists!$ $y \in \mathbb{R}$: $a^y = x$ e si ha

$$y = \log_a x.$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

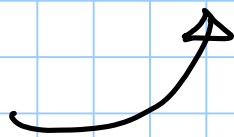
$$\log_a(x^{-1}) = -\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x, \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

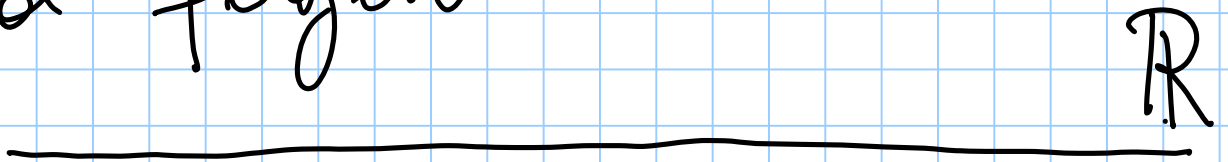
N.B. $\log_a(x^2) = 2 \log_a(|x|)$

Se $x \neq 0$



APPENDICE

La completezza di $\mathbb{R}$
Significa che $\mathbb{R}$ non ha
"buchi". Graficamente
possiamo tracciare $\mathbb{R}$
come una linea "continua"
senza staccare le penne
dal foglio



Si preferisce in
matematica una Teoria
indipendente dalla
rappresentazione
(decimale, binaria,
e sessagesimale ...)

La **TEORIA ASSIOMATICA**
dei numeri Reali
definisce $\mathbb{R}$ come

Segue.

$\mathbb{R}$ è un insieme non vuoto dove sono definite due operazioni, la somma (+) e il prodotto ($\cdot$), commutative ($a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$) associative ($(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$) con elementi identici (o elementi neutri)

$$0 (a + 0 = 0) \text{ e}$$

$$1 (a \cdot 1 = 1). \text{ Per}$$

ogni elemento $a \in \mathbb{R}$

esiste l'opposto $-a$:

$$a + (-a) = 0, \text{ per}$$

ogni elemento $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

esiste l'inverso $a^{-1} = \frac{1}{a}$:

$$a \cdot (a^{-1}) = 1.$$

Valle la legge distributiva

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

E' definita in $\mathbb{R}$ la
relazione d'ordine
" $\leq$ " (totale e

antisimmetrica)

che verifica:

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$0 \leq a \text{ e } 0 \leq b \Rightarrow \begin{matrix} 0 \leq a + b \text{ e} \\ 0 \leq a \cdot b \end{matrix}$$

Con queste ipotesi si
DIMOSTRA CHE:

- $a + b = a + c \Rightarrow b = c$
- $a \neq 0, a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$
- $a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
- $a \in \mathbb{R} \Rightarrow -a$ è unico
- $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow a^{-1}$ è unico
- $-(-a) = a$
- $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

- $a \leq b \iff b - a \geq 0$

(Ricordiamo che per definizione $a \geq b \iff b \leq a$)

- La relazione " $\leq$ " è
Transitiva

- $a \geq 0 \iff -a \leq 0$

- $c \geq 0, a \leq b \implies a \cdot c \leq b \cdot c$

- $c \leq 0, a \leq b \implies a \cdot c \geq b \cdot c$

N.B. $\mathbb{Q}$ ha Tutte le
proprietà sopra elencate

Valle in $\mathbb{R}$ l'Assioma di
completezza:

Siano $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$

$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$:

$a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

Allora $\exists c \in \mathbb{R}$:

$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

APPENDICE

DIMOSTRAZIONE DELLA
PROPRIETÀ ARCHIMEDEA

$$\forall x > 0, \forall y > 0 \exists m \in \mathbb{N} : mx \geq y$$

SUPPONIAMO PER ASSURDO

CHE $\exists x > 0$ e $y > 0$:

$$mx < y \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

In particolare $m < \frac{y}{x} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Quindi $\mathbb{N}$ SAREBBE

SUPERIORMENTE LIMITATO,

ASSURDO ~~■~~