

$$\boxed{\log_2 3 \notin \mathbb{Q}}$$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

$\nexists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
PRIMI TRA LORO:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2}$$

DIMOSTRAZIONE PER
ASSURDO

PER ASSURDO SUPPONIAMO

$$\boxed{\sqrt{2} = \frac{m}{n}},$$

SENZA PERDITA DI
GENERALITÀ POSSIAMO
SUPPORRE CHE

$$m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$$

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \in 2\mathbb{N}$$

DIMOSTRIAMO CHE:

$$\boxed{m^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow m \in 2\mathbb{N}}$$

DIMOSTRAZIONE

PER ASSURDO: $m^2 \in 2\mathbb{N}$

2 SUPPONIAMO
PER ASSURDO CHE

$$\boxed{m \in 2\mathbb{N} - 1}$$

$$m = 2k - 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} m^2 &= (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = \\ &= 4k^2 - 4k + 2 - 2 + 1 \\ &= 2(2k^2 - 2k + 1) - 1 \in 2\mathbb{N} - 1 \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $\mathbb{N}$

ASSURDO

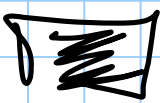
$$m = 2k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$m^2 = 4k^2 \quad \text{e} \quad m^2 = 2m^2$$

$$4k^2 = 2m^2 \Rightarrow m^2 = 2k^2$$

$$\Rightarrow m^2 \in 2\mathbb{N} \Rightarrow m \in 2\mathbb{N}$$

ASSURDO, PERCHÉ

m e n sono PER IPOTESI
PRIMI TRA LORO 

NUMERI **IRRAZIONALI**

OVVERO GLI SVILUPPI
DECIMALI ILLIMITATI
A PERIODICI

π , e , $\sqrt{2}$

NUMERI **REALI**

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{NUMERI IRRAZIONALI}\}$$

$$q \in \mathbb{Q}^+ \not\Rightarrow \log_2 q \in \mathbb{Q}$$

$$x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \log_a x \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

$$x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x^a \in \mathbb{R}^+ \\ a > 0$$

RELAZIONE D'ORDINE IN $\mathbb{R}$
 "... $\leq$..." **MINORE O UGUALE**

$$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

(i) $a \leq b$ o $b \leq a$ (TOTALE)

(ii) $a \leq b$ e $b \leq a$ allora

$$a = b \text{ (ANTISIMMETRICA)}$$

(iii) $a \leq b$ e $b \leq c$ allora
 $a \leq c$ (TRANSITIVA)

(i) $a \leq b$



(ii) $a = b$



(iii) $a \leq c$



$\mathbb{R}^- = \{b \in \mathbb{R} : b \leq 0, b \neq 0\}$ $\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} : 0 \leq a, 0 \neq a\}$

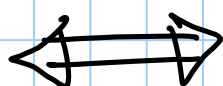


$b \leq 0, b \neq 0, \boxed{b < 0}$

" b MINORE di 0 "

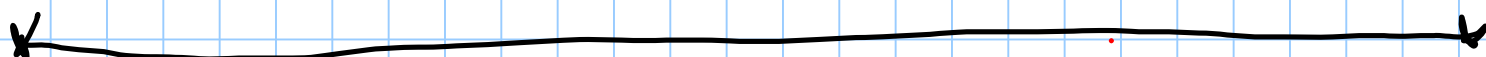
PER DEFINIZIONE

$a \geq b$



$b \leq a$

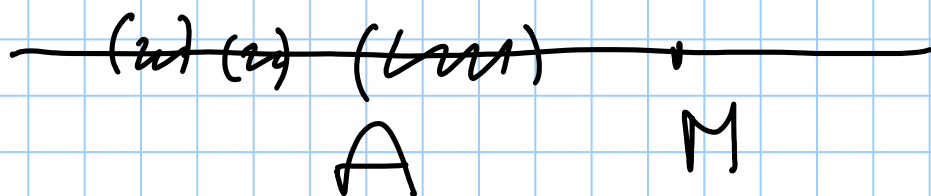
(a MAGGIORE o UGUALE a b)



DEFINIZIONE

$A \subseteq \mathbb{R}$. M è un **MAGGIORANTE** di A
(**MINORANTE**)

$$\exists a \leq M \quad (a \geq M) \quad \forall a \in A$$



$M \in \mathbb{R}$ è il **MASSIMO** di A
(**MINIMO**)

$\exists$ (i) M è un **MAGGIORANTE** di A
(**MINORANTE**)

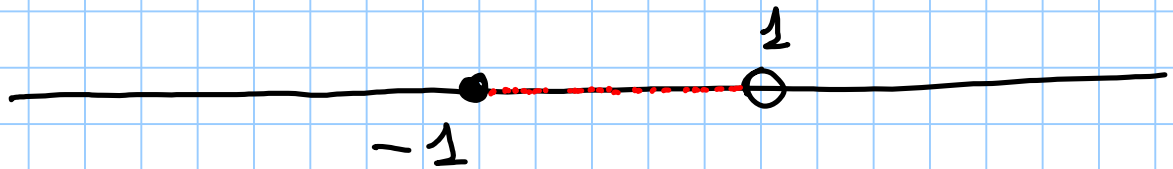
(ii) $M \in A$

MASSIMO ($\exists \exists$) $\max A$

MINIMO ($\exists \exists$) $\min A$

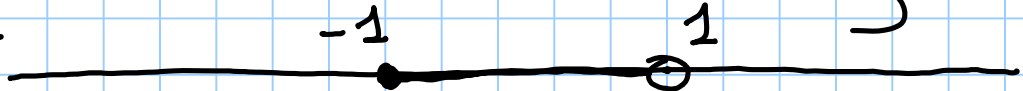
$\exists \exists \max A \Rightarrow \text{È UNICO}$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : -1 \leq x < 1\}$$



$-1 = \min A$, 1 è MAGGIORANTE
 $1 \notin A$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 1\}$$

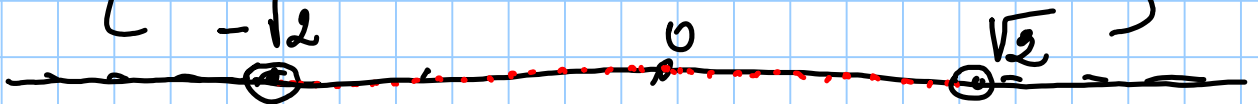


$-1 = \min A$, 1 è MAGGIORANTE
 $1 \notin A$

L'insieme non ha massimo
 $\nexists \max A$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 \leq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$$



$-\sqrt{2}$ è MINORANTE di A

$\sqrt{2}$ è MAGGIORANTE di A

$-\sqrt{2} \notin A$, $\sqrt{2} \notin A$ e si può DIMOSTRARE
CHE $\nexists \min A$ e $\nexists \max A$

[OVVERO, CHE SE x è un ^{minorante} _(maggiorante) $\Rightarrow x \notin A$]

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$$

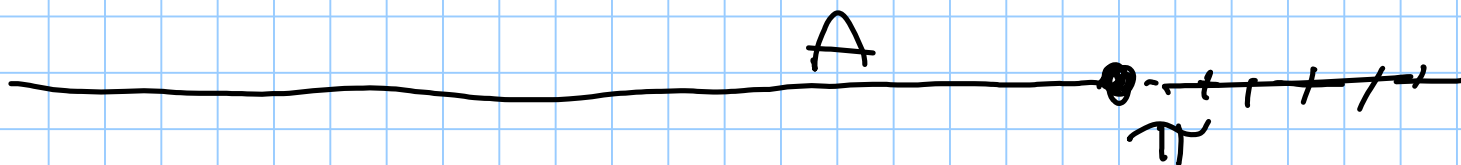
$$-\sqrt{2} = \min A$$

$$\sqrt{2} = \max A$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \pi\}$$

$$\max A = \pi$$

A non ha MINORANTI



$$I \in \mathbb{N} \quad I = \min \mathbb{N}$$

$\mathbb{N}$ non ha MAGGIORANTI

$\mathbb{Z}$ NON HA MAGGIORANTI
e NON HA MINORANTI

DEFINIZIONE (INFERIORMENTE)

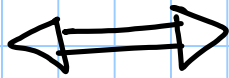
$A \subseteq \mathbb{R}$. A è SUPERIORMENTE

LIMITATO SE $\exists$ ALMENO
UN MAGGIORANTE DI A
(MINORANTE)

(INFERIORMENTE)
 A è SUPERIORMENTE

ILLIMITATO SE NON È
SUPERIORMENTE
(INFERIORMENTE)
LIMITATO

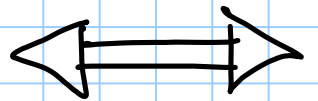
$A \subseteq \mathbb{R}$ è SUPERIORMENTE LIMITATO



$$\exists M \in \mathbb{R} : \boxed{a \leq M \quad \forall a \in A}$$

A è SUPERIORMENTE

ILLIMITATO



NON È SUPERIORMENTE

LIMITATO

$\forall M \in \mathbb{R} \Rightarrow M$ non è MAGGIORANTE
di A

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A : M < a}$$



DEFINIZIONE

$A \subseteq \mathbb{R}$. A è **LIMITATO** SE

A è SUPERIORMENTE E

INFERIORMENTE

LIMITATO

A è **ILLIMITATO** SE
NON È LIMITATO

A è LIMITATO $\iff$

$\exists M_- \in \mathbb{R}, \exists M_+ \in \mathbb{R} :$

$$M_- \leq a \leq M_+ \quad \forall a \in A$$

A è ILLIMITATO $\iff$

(i) $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A : a < M$ o

(ii) $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A : a > M$ o

(iii) VALGONO (i) e (ii) insieme.

$$A = \{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 1 \}$$

è LIMITATO

$C_{\mathbb{R}} A$

è ILLIMITATO

IN illimitato

-5

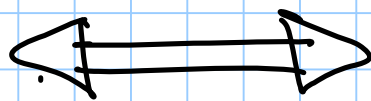
$$A = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 5\}$$

$$\subset \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x \leq 5\}$$

MODULO

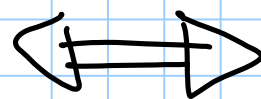
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$-5 \leq x \leq 5$$



$$|x| \leq 5$$

$$\begin{cases} x \leq 5, & x \geq 0 \\ -x \leq 5, & x < 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq 5, & x \geq 0 \\ x \geq -5, & x < 0 \end{cases} \iff$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

A LIMITATO $\iff$

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ : |a| \leq M$$

$$\forall a \in A$$

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

$$\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$$

DEFINIZIONE
 $A \subseteq \mathbb{R}$ SI DEFINISCE ESTREMO
SUPERIORE

(INFERIORE) di A in $\mathbb{R}$
il MINIMO (SE ESISTE)
(MASSIMO)

dei MAGGIORANTI di A
(MINORANTI)

E SI SCRIVE $\sup A$ ($\inf A$)

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : -1 \leq x < 1\}$$

$$-1 = \min A = \inf A$$

INSIEME DEI MAGGIORANTI
di A

0

1

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$$

$$\sup A = 1$$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$$

INSIEME DEI MAGGIORANTI
di A

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{2}\}$$

$$\sup A = \sqrt{2}$$

TEOREMA. $A \subseteq \mathbb{R}$

• SE $\exists \max A$, allora

A è SUPERIORMENTE LIMITATO

$$\text{e } \sup A = \max A$$

• SE $\exists \sup A \Rightarrow$

A è SUPERIORMENTE LIMITATO

$$\text{e } \exists \max A \iff \sup A \in A$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$$

$$\text{SE } \sup A \notin A \Rightarrow \nexists \max A$$

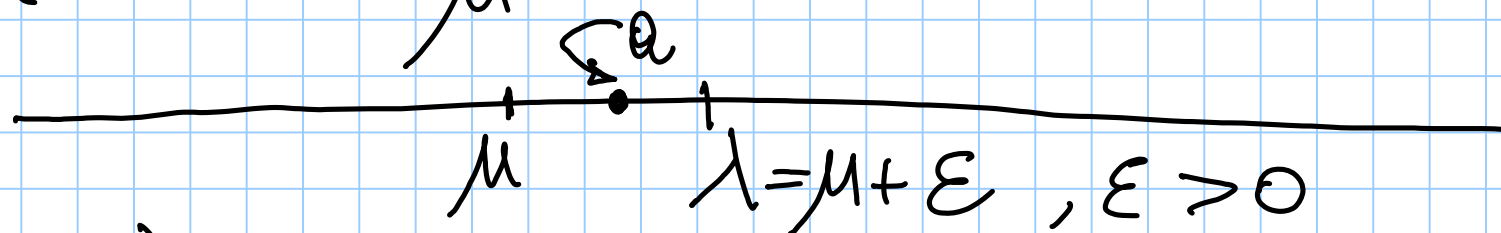
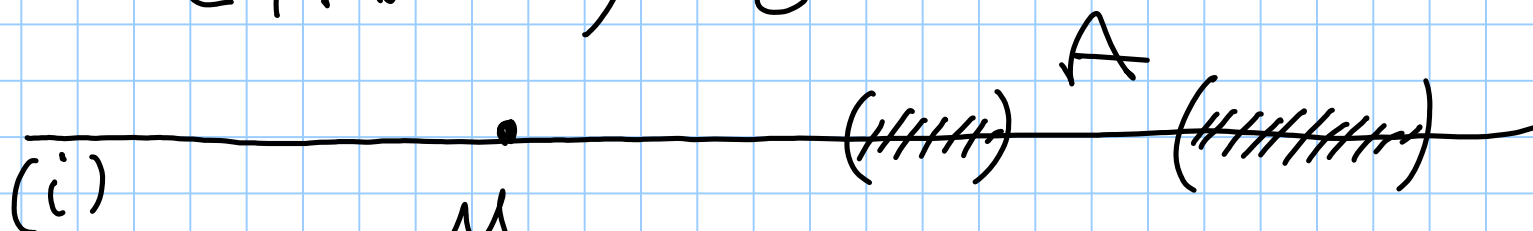
TEOREMA

$A \subseteq \mathbb{R}$ e $\mu \in \mathbb{R}$. $\mu = \inf A \iff$

(i) $\mu \leq a, \forall a \in A$ (μ è MINORANTE)

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ (μ è il MASSIMO DEI MINORANTI)

$\exists a \in A : a < \mu + \varepsilon$



(ii) $\lambda > \mu \implies \lambda$ NON È MINORANTE $\iff$

$\forall \lambda > \mu \quad \exists a \in A : a < \lambda$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : a < \mu + \varepsilon$$

APPENDICE

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : -1 \leq x < 1\}$$

Dimostriamo che $\nexists \max A$

$$x \geq 1 \implies x \notin A$$

$\implies x$ NON è il MASSIMO

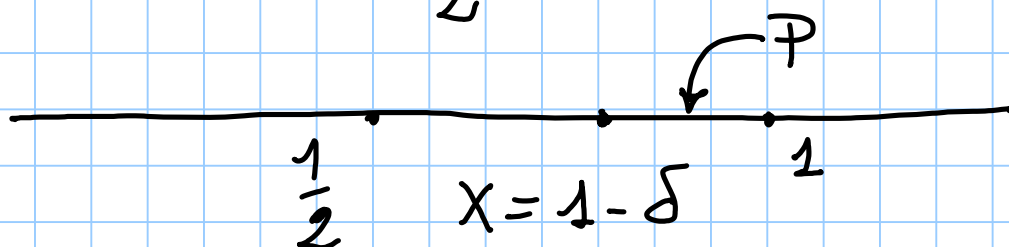
Se $x < 1$, $x \in A$ dimostriamo
che x non è un MAGGIORANTE

Sia $x \in \mathbb{Q}$, $x < 1$. Se $x \leq \frac{1}{2}$, $p = \frac{2}{3}$

VERIFICA $p > x$, $p \in A$,
quindi x non è MAGGIORANTE

Se $\frac{1}{2} < x < 1$, $x \in \mathbb{Q}$, sia $\delta := 1 - x$.

Quindi $0 < \delta < \frac{1}{2}$ e $x = 1 - \delta$



Sia $p_m = 1 - \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$

Sì ho $p_m < 1$, $\forall m \in \mathbb{N}$

e $p_m \in \mathbb{Q}$ $\forall m \in \mathbb{N}$. $p_m > x \iff$

$$1 - \frac{1}{m} > 1 - \delta \iff$$

$$\frac{1}{m} < \delta \iff m > \frac{1}{\delta}$$

Quindi fissato $x < 1$, se $x \leq \frac{1}{2}$

prendo $p = \frac{2}{3}$, se $\frac{1}{2} < x < 1$

prendo $p = 1 - \frac{1}{m}$ con $m > \frac{1}{1-x}$. 