

PROF. DANIELE

BARTOLUCCI



....IMPLICA.....

SE....ALLORA.....

$$m = 5 \Rightarrow m + 1 = 6$$



....SE E SOLO SE..

$$m = 5 \Leftrightarrow m + 1 = 6$$

$\in$

APPARTIENE

$\notin$

NON APPARTIENE

$\forall$

PER OGNI

$\exists$

ESISTE

NON ESISTE

: TALE CHE

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} : m > n$$

$$\bullet A = \{a, b, c, d\}$$

$$\bullet A = \{x \in \mathcal{U} : P(x)\}$$

$$\mathcal{U} = \{a, b, c, d\}$$

$$A = \{x \in \mathcal{U} : (x \neq b)\} = \\ = \{a, c, d\}$$

A e B due INSIEMI.

• A è un SOTTOINSIEME di B
e INCLUSO in B

$A \subseteq B$ SE 
 $x \in A \Rightarrow x \in B$

A è un SOTTOINSIEME
PROPRIO di B
(e STRETTAMENTE INCLUSO in B)

SE $A \subseteq B$ e $A \neq B$

$A \subset B$

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } A \neq B$

$$\Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } \exists b \in B : b \notin A$$

• L'INSIEME **UNIONE** di A e B

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

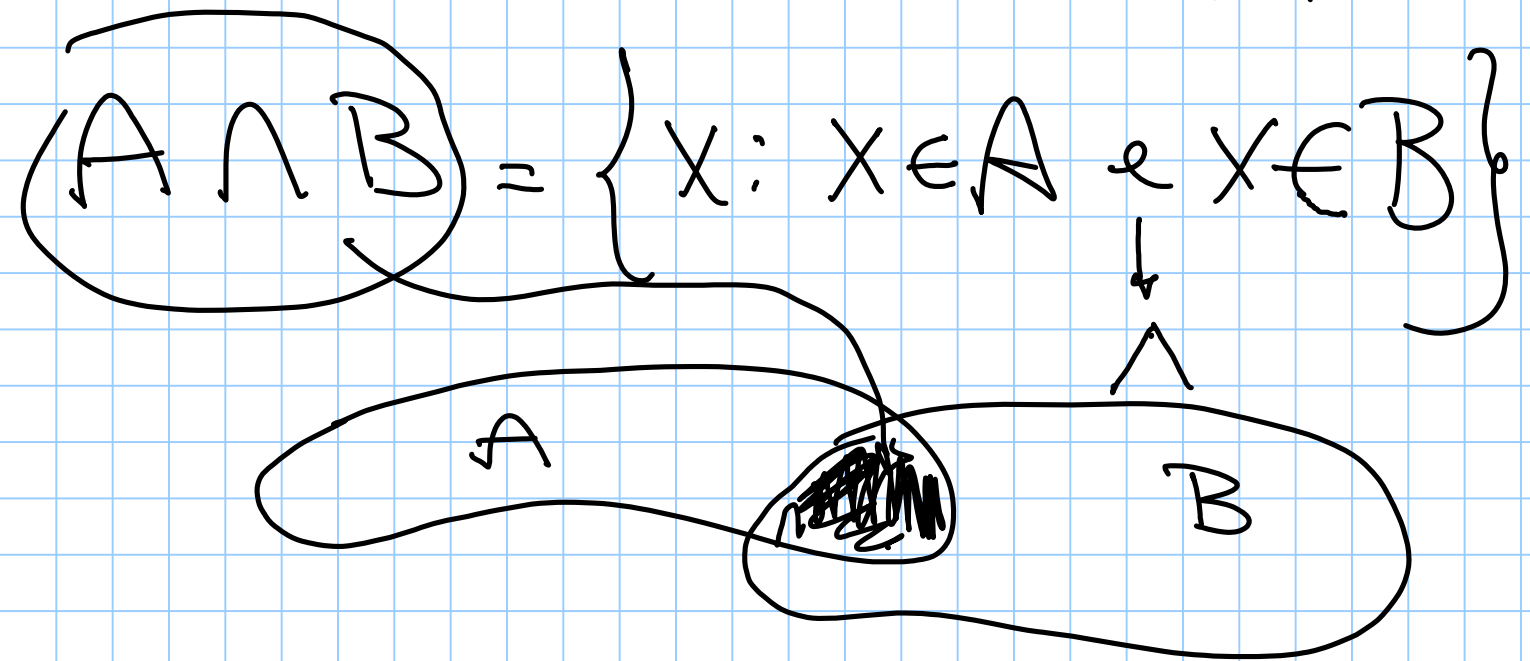


$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{b, c, d\} \quad | \quad A \cap B = \{b, c\}$$

$$A \cup B = \{a, b, c, d\}$$

• L'insieme **INTERSEZIONE**
di A e B



$$A = \{x \in U: P(x)\}$$

$$B = \{x \in U: Q(x)\}$$

$$A \cup B = \{x \in U: P(x) \vee Q(x)\}$$

$$A \cap B = \{x \in U: P(x) \wedge Q(x)\}$$

$$A \subseteq B$$



$$A \cup B = B$$

$$A \cap B = A$$

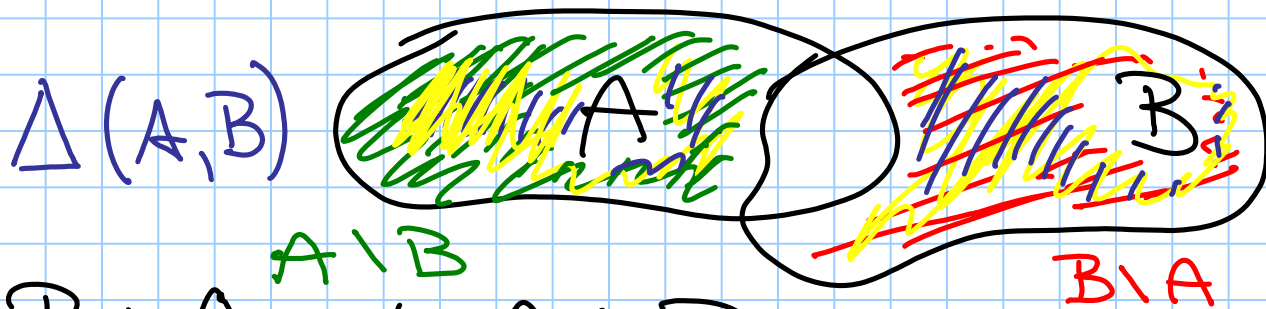
$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

SONO RELAZIONI
COMMUTATIVE

- L'INSIEME **DIFFERENZA**
di B meno A

$$B \setminus A = \{x : x \in B \text{ e } x \notin A\}$$



$$B \setminus A \neq A \setminus B$$

L'OPERAZIONE

DIFFERENZA

NON È COMMUTATIVA

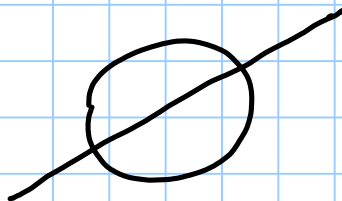
DIFFERENZA

SIMMETRICA

TRA A e B

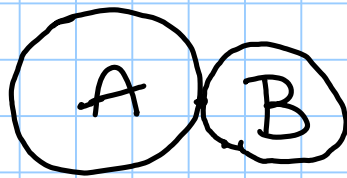
$$\Delta(A, B) = B \setminus A \cup A \setminus B$$

L'INSIEME VUOTO



• A, B **DISGIUNTI** SE

$$A \cap B = \emptyset$$



• $A \subseteq B$

INSIEME **COMPLEMENTARE**

di A in B

$$C_B A = B \setminus A$$

$$A_1 \subseteq B, A_2 \subseteq B$$

$$C_B (A_1 \cup A_2) = C_B(A_1) \cap C_B(A_2)$$

$$C_B (A_1 \wedge A_2) = C_B (A_1) \cup C_B (A_2)$$

NUMERI **NATURALI**
(INTERI POSITIVI)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$\mathbb{N}$ è INDUTTIVO

$m \in \mathbb{N} \Rightarrow m+1 \in \mathbb{N}$

$(\mathbb{N}, +, \cdot, 1)$

SOMMA $\uparrow$ $\cdot$ $\uparrow$ UNITÀ

prodotto $\nwarrow$

$$m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$$

1 è l'ELEMENTO **NEUTRO**
RISPETTO
AL PRODOTTO

$$m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m+n \in \mathbb{N}$$

$$m \cdot n \in \mathbb{N}$$

$$2\mathbb{N} = \{m \in \mathbb{N} : m = 2 \cdot k, k \in \mathbb{N}\}$$

NUMERI **PARI**

$$2\mathbb{N}-1 = \{m \in \mathbb{N} : m = 2 \cdot k - 1, k \in \mathbb{N}\}$$

NUMERI **DISPARI**

$$2\mathbb{N} \cap 2\mathbb{N}-1 = \emptyset$$

$$2\mathbb{N} \cup 2\mathbb{N}-1 = \mathbb{N}$$

$$5-2=3 \in \mathbb{N}$$

$$2-5=-3 \notin \mathbb{N}$$

$$m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \not\Rightarrow m-n \in \mathbb{N}$$

NUMERI **RELATIVI**
(INTERI POSITIVI, NEGATIVI
o NULLI)

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

$$(\mathbb{Z}, +, \cdot, 1, 0)$$

0 è l'ELEMENTO **NEUTRO**

RISPETTO ALLA SOMMA

$$0 + m = m + 0 = m$$

$$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} :$$

$$m + m = 0$$

m è l'ELEMENTO **OPPOSTO** di m

RISPETTO ALLA SOMMA

$$m = -m$$

$$m \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$$

$$0 \cdot m = 0, \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m + m \in \mathbb{Z}$$

$$m - m \in \mathbb{Z}$$

$$m \cdot m \in \mathbb{Z}$$

$$m \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{m} \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$$

INSIEME dei NUMERI

RAZIONALI

$$\mathbb{Q} = \left\{ x : x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

$$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \quad \frac{2}{3}, \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \dots$$

"m e n PRIMI-TRA LORO"

$$p \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

INFATTI SI HA:

$$p = \frac{m}{n}, \quad q = \frac{k}{l} \quad \text{e} \quad k \neq 0$$

$n \neq 0 \quad l \neq 0$

$$\frac{p}{q} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{k}{l}} = \frac{l \cdot m}{k \cdot n} \Rightarrow \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

$k \cdot n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \begin{array}{l} \text{INSIEME degli "Sviluppi"} \\ \text{DECIMALI LIMITATI} \\ \text{e ILLIMITATI e PERIODICI} \\ \text{PROPRI} \end{array} \right\}$

$$7, \overbrace{36}^{\text{ANTIPERIODO}} \overbrace{4}^{\text{PERIODO}} = 7,364444\dots$$

ANTIPERIODO PERIODO

UNO SVILUPPO DECIMALE

SI DICE **PROPRIO**

SE "NON TERMINA" CON $\overline{9}$

$$\boxed{0, \overline{9} = 1}$$

$$0,2\overline{9} = 0,3$$

SE $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$

E SE

ESIEGUIAMO IL PRIMO PASSO

DELL'ALGORITMO DI DIVISIONE
OTTENIAMO UN RESTO

$$r \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$$

Se $r=0$ m è DIVISIBILE PER
 m e OTTENIAMO UN INTERO,

ALTRIMENTI DOPO AL PIÙ m

PASSI OTTENIAMO o il

NUMERO 0 (SVILUPPO

DECIMALE LIMITATO) o

un resto già OTTENUTO

(SVILUPPO DECIMALE

ILLIMITATO PERIODICO)

Quindi $\frac{m}{m}$ è uno SVILUPPO

LIMITATO o PERIODICO

VIC E VERSA, DATO UNO
SVILUPPO PERIODICO,
CERCHIAMO LA FRAZIONE $\frac{m}{n}$.

$$7,36\bar{4} \quad \leftarrow \quad 7,36\bar{4} \times 10^3 \quad \dots$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

3

$$7364 - 736$$

Tanti 9 quanti
sono le cifre del periodo $\rightarrow$ 900 $\rightarrow$ Tanti 2eri quanti sono
le cifre dell'anti-periodo

$$7,36\bar{4} = 7,36 + 0,00\bar{4}$$

$$0,00\bar{4} = \frac{0,\bar{4}}{10^2}$$

$$0,\bar{4} = \frac{k}{\ell}$$

$$k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}$$

$$k < \ell$$

$$\begin{array}{r}
 K \\
 K0 \\
 \underline{4 \cdot l} \\
 K
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 l \\
 \hline
 0,444\dots
 \end{array}$$

$$K0 = K \cdot 10$$

$$K \cdot 10 - 4l = K$$

$$K9 - 4l = 0$$

$$\frac{K}{l} = \frac{4}{9} = 0,\overline{4}$$

Se il periodo fosse stato di
2 cifre avrei ottenuto 99
a denominatore

$$0,\overline{65} = \frac{65}{99}$$

$$0,\overline{4} = \frac{4}{9}$$

$$7,36 + \frac{0,\overline{4}}{100} = 7,36 + \frac{4}{900} =$$

$$= 7,36 + \frac{4}{1000-100} =$$

$$\frac{7360 - 736 + 4}{1000 - 100} = \frac{7364 - 736}{900}$$

NUMERI IRRAZIONALI

ESISTONO DEI NUMERI
CHE NON SONO RAZIONALI

$$\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$$

DIMOSTRAZIONE
PER ASSURDO
PER ASSURDO
SUPPONIAMO CHE
 $\exists m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$

$$\frac{m}{m} = \log_2 3 \Rightarrow 2^{\frac{m}{m}} = 3$$

$$\left[k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2^{\log_2 k} = k \right]$$

$$\Rightarrow 2^m = 3^m \Rightarrow \boxed{\text{ASSURDO}}$$

$$2^{\uparrow \mathbb{N}}$$

$$2^{\uparrow \mathbb{N}} - 1 \text{ (non è Divisibile per 2)}$$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

APPENDICE

La PROPRIETÀ

$$q \cdot 0 = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q}$$

IMPLICA CHE "NON SI PUO'
DIVIDERE PER 0"

Infatti "dividere per 2" significa
più precisamente: dato un

numero $p \in \mathbb{Q}$, calcolare

$2^{-1} \cdot p$, dove 2^{-1} è

l'opposto di 2 rispetto

al prodotto: $2^{-1} \cdot 2 = 1$

Dato che $\nexists 0^{-1} \in \mathbb{Q} : 0^{-1} \cdot 0 = 1$

(perché $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow q \cdot 0 = 0$).

allora $\nexists 0^{-1}$ e in particolare

non si può dividere per 0.

APPENDICE

SVILUPPI DECIMALI

$$257,364 = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$$

($10^0 = 1$)

$$0,\overline{4} = 4 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} + \dots + 4 \cdot 10^{-M} + \dots$$