NOTA SULLA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL SECONDO ORDINE NON OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI

Consideriamo una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti del tipo

$$y'' + ay' + by = g(x), \quad (1.1)$$

con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e

$$g(x) = p_{k_1}(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + q_{k_2}(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

dove p_{k_1} e q_{k_2} sono due polinomi di grado k_1 e k_2 rispettivamente. La soluzione generale di (1.1) è della forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x), \quad c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$$

dove $\{y_1, y_2\}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti della equazione omogenea associata a (1.1), ovvero

$$y_0'' + ay_0' + by_0 = 0,$$

e y_p una qualunque soluzione di (1.1), detta **soluzione particolare**.

Siano $\lambda_+ \in \mathbb{C}$ e $\lambda_- \in \mathbb{C}$ le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

e sia $\lambda_0 = \alpha + i\beta$. Si può dimostrare che:

(1) Se $\lambda_0 \neq \lambda_+$ e $\lambda_0 \neq \lambda_-$ (ovvero λ_0 non è soluzione dell'equazione caratteristica) allora è possibile determinare la soluzione particolare come segue

$$y_p(x) = M(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + N(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

dove M e N sono polinomi di grado minore o uguale al massimo tra k_1 e k_2 .

(2) Se $\lambda_+ \neq \lambda_-$ e se $\lambda_0 = \lambda_+$ o se $\lambda_0 = \lambda_-$ (ovvero λ_0 è soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità 1) allora è possibile determinare la soluzione particolare come segue

$$y_p(x) = x(M(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + N(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)),$$

dove M e N sono polinomi di grado minore o uguale al massimo tra k_1 e k_2 .

(3) Se $\lambda_+ = \lambda_-$ e se $\lambda_0 = \lambda_+ \equiv \lambda_-$ (ovvero λ_0 è soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità 2) allora è possibile determinare la soluzione particolare come segue

$$y_p(x) = x^2(M(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + N(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)),$$

dove M e N sono polinomi di grado minore o uguale al massimo tra k_1 e k_2 .