

NOTA SUL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO PER GLI INTEGRALI IMPROPRI.

TEOREMA [CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO] Siano fissati $-\infty < a < b \leq +\infty$ e siano $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, due funzioni Riemann integrabili in (a, t) per ogni $t \in (a, b)$. Supponiamo che si abbia:

(1) $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, definitivamente per $x \rightarrow b^-$;

(2) $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, $L \in [0, +\infty]$.

Allora si ha:

(i) $L \in (0, +\infty)$. $\int_a^b f(x)dx$ converge (diverge) se e solo se $\int_a^b g(x)dx$ converge (diverge).

(ii) $L = 0$. Se $\int_a^b f(x)dx$ diverge allora $\int_a^b g(x)dx$ diverge, mentre se $\int_a^b g(x)dx$ converge allora $\int_a^b f(x)dx$ converge.

(iii) $L = +\infty$. Se $\int_a^b f(x)dx$ converge allora $\int_a^b g(x)dx$ converge, mentre se $\int_a^b g(x)dx$ diverge allora $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Dimostrazione.

Per semplicità trattiamo solo il caso $b = +\infty$ e $g(x) > 0$ definitivamente.

(i) Per ipotesi si ha,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \geq a : L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon, \forall x > x_\varepsilon.$$

Dato che $g(x) \geq 0$ si ha in particolare,

$$(L - \varepsilon)g(x) < f(x) < g(x)(L + \varepsilon), \forall x > x_\varepsilon.$$

Dato che $L \in (0, +\infty)$ possiamo scegliere $\varepsilon = \frac{L}{2}$ e concludere che,

$$\frac{L}{2}g(x) < f(x) < g(x)\frac{3L}{2}, \forall x > x_\varepsilon.$$

Dalla disuguaglianza di destra e dal Teorema del confronto per gli integrali impropri segue che se $\int_a^b f(x)dx$

diverge allora $\int_a^b g(x)dx$ diverge, mentre se $\int_a^b g(x)dx$ converge allora $\int_a^b f(x)dx$ converge. Dalla disug-

uaglianza di sinistra e dal Teorema del confronto per gli integrali impropri segue che se $\int_a^b f(x)dx$ converge

allora $\int_a^b g(x)dx$ converge, mentre se $\int_a^b g(x)dx$ diverge allora $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

(ii) Per ipotesi si ha

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \geq a : \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon, \forall x > x_\varepsilon.$$

Dato che $g(x) \geq 0$ e $f(x) \geq 0$ si ha in particolare,

$$0 \leq f(x) < g(x)\varepsilon, \forall x > x_\varepsilon.$$

Dal Teorema del confronto per gli integrali impropri segue che se $\int_a^b g(x)dx$ converge allora $\int_a^b f(x)dx$ converge, mentre se $\int_a^b f(x)dx$ diverge allora $\int_a^b g(x)dx$ diverge.

(iii) Per ipotesi si ha

$$\forall M > 0, \exists x_M \geq a : \frac{f(x)}{g(x)} > M, \forall x > x_M.$$

Dato che $g(x) \geq 0$ si ha in particolare,

$$f(x) > g(x)M, \forall x > x_M.$$

Dal Teorema del confronto per gli integrali impropri segue che se $\int_a^b g(x)dx$ diverge allora $\int_a^b f(x)dx$ diverge, mentre se $\int_a^b f(x)dx$ converge allora $\int_a^b g(x)dx$ converge. ■