ESERCITAZIONE 01

Disequzioni razionali

I seguenti esercizi sono tratti dal libro 'Marcellini-Sbordone, *Esercitazioni di matematica*, Vol. I, parte 1a, Liguori Ed. (1994)'.

- **Esercizio 3.3**: (a), (b), (c).
- **Esercizio 3.4**: (c).
- **Esercizio 3.5**: (b).
- **Esercizio 3.6**: (b).
- **Esercizio 3.7**: (b).
- **Esercizio 3.9**.
- **Esercizio 3.22**: (a), (b).
- **Esercizio 3.23**.
- **Esercizio 3.30**.
- **Esercizio 3.32**: (b).
- **Esercizio 3.34**: (b).

ESERCITAZIONE 02

Disequazioni irrazionali con radicali, esponenziali, logaritmi e funzioni circolari

I seguenti esercizi sono tratti dal libro 'Marcellini-Sbordone, *Esercitazioni di matematica*, Vol. I, parte 1a, Liguori Ed. (1994)'.

- **Esercizio 3.37**.
- **Esercizio 3.38**.
- **Esercizio 3.50**.
- **Esercizio 3.51**.
- **Esercizio 3.55**: (a).
- **Esercizio**: Determinare il dominio della funzione

  $$f(x) = \sqrt{-\log_2\big(x^2(x^2-2)\big)+3}.$$

  Soluzione:

  Bisogna imporre che l'argomento del logaritmo sia positivo, mentre l'argomento della radice non sia negativo, quindi

  $$\begin{cases} x^2(x^2-2) & > & 0, \\ -\log_2\big(x^2(x^2-2)\big)+3 & \geqslant & 0. \end{cases}$$

  A questo punto si procede come nell'Esercizio 3.56: (a) e si ottiene la soluzione

  $$-2 \leqslant x < -\sqrt{2}, \qquad \sqrt{2} < x \leqslant 2.$$

  ∎

- **Esercizio 3.61**: (a).
- **Esercizio**: Risolvere la disequazione trigonometrica

  $$-\sin^2(x) - 2\cos(x) - 2 < 0.$$

  Soluzione:

  Sfruttando l'uguaglianza

  $$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

  si riscrive la disequazione nella seguente forma equivalente:

  $$\cos^2(x) - 2\cos(x) - 3 < 0.$$

  Dopodiché si ragiona come nell'Esercizio 3.72: (a). ∎

- **Esercizio 3.80**.

ESERCITAZIONE 03

Limiti di successioni: prima parte

Le soluzioni dei seguenti esercizi sono riportate nelle dispense online del docente: '*Soluzioni Esercizi Lezioni 9 & 10 & 11 & 12 & 13*'.

Calcolare i seguenti limiti:

- $\lim_n \dfrac{n^{\frac{5}{3}} - (\log_2 n)^{-\frac{1}{4}} + 5n}{n^{-n} - n^2}$.
- $\lim_n \dfrac{(6n^2+1)\big((\log_2(n))^3 - n^{-n}\big)}{(n\log_2(n) - \sqrt{n})(n+3^{-n})(\log_2(n))^2}$.
- $\lim_n \dfrac{3^n + 4^n}{4^n + 7^n}$.
- $\lim_n (n^n)^{\frac{1}{n}}$.
- $\lim_n (n^n)^{\frac{3n+1}{n^3+e^{-n}}}$.
- $\lim_n \dfrac{(n+3)^{n+1}\log(n) - (n!)\sin(3n+2)\cos(n)}{n\sqrt{\log(n)}\Big(n^n\sqrt{\log(n)} - 4\arctan(\log(n))\Big)}$.

ESERCITAZIONE 04

Limiti di successioni: seconda parte

Calcolare i seguenti limiti:

- $\lim_n \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n}\left(2^{-n}+\sqrt{n}\right)}$.

  Soluzione:
  Si ha
  $$\sqrt{n}\left(2^{-n}+\sqrt{n}\right) = \sqrt{n}\sqrt{n}(1+\mathrm{o}(1)) = n(1+\mathrm{o}(1)).$$
  Inoltre, possiamo scrivere
  $$\frac{n^2+n+1}{n^2-1} = \frac{(n^2-1)+n+2}{n^2-1} = 1+\frac{n+2}{n^2-1}.$$
  Quindi
  $$\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n}\left(2^{-n}+\sqrt{n}\right)} = \left(1+\frac{n+2}{n^2-1}\right)^{n(1+o(1))} = \left[\left(\left(1+\frac{n+2}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{n+2}}\right)^{\frac{n+2}{n^2-1}}\right]^{n(1+o(1))} =$$
  $$= \left[\left(1+\frac{n+2}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{n+2}}\right]^{\frac{n^2+2n}{n^2-1}(1+o(1))} = \left[\left(1+\frac{n+2}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{n+2}}\right]^{\frac{n^2}{n^2}\frac{1+o(1)}{1+o(1)}(1+o(1))} =$$
  $$= \left[\left(1+\frac{n+2}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{n+2}}\right]^{\frac{1+o(1)}{1+o(1)}(1+o(1))}$$
  Osservando che $\frac{n+2}{n^2-1} \longrightarrow 0$, si può utilizzare il limite notevole per ottenere
  $$\left[\left(1+\frac{n+2}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{n+2}}\right]^{\frac{1+o(1)}{1+o(1)}(1+o(1))} \longrightarrow e.$$
  ∎

- $\lim_n \frac{\left(n^4\sqrt{\log n}-n^5(\log n)^{-3}-n^2+e^{-n}\right)\left(\left(2+\frac{1}{n}\right)^n-2^{\sqrt{n}}\right)}{2^n\left(n^6\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-n^5\log n\right)(\log n)^{-4}}$.

  Soluzione:
  Si ha
  $$n^4\sqrt{\log n}-n^5(\log n)^{-3}-n^2+e^{-n} = -n^5(\log n)^{-3}(1+\mathrm{o}(1)),$$

$$\left(2+\frac{1}{n}\right)^n - 2^{\sqrt{n}} = 2^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n - 2^{\sqrt{n}} = 2^n\sqrt{e}(1+\mathrm{o}(1)) - 2^{\sqrt{n}} =$$

$$= 2^n(\sqrt{e}+\mathrm{o}(1) - 2^{\sqrt{n}-n}) = 2^n\sqrt{e}(1+\mathrm{o}(1)),$$

$$n^6\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - n^5\log n = n^5\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - n^5\log n = n^5\log(e+\mathrm{o}(1)) - n^5\log n =$$

$$n^5\log n\left(\frac{\log(e+\mathrm{o}(1))}{\log n} - 1\right) = -n^5\log n(1+\mathrm{o}(1)).$$

Se ne deduce che

$$\frac{\left(n^4\sqrt{\log n} - n^5(\log n)^{-3} - n^2 + e^{-n}\right)\left(\left(2+\frac{1}{n}\right)^n - 2^{\sqrt{n}}\right)}{2^n\left(n^6\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - n^5\log n\right)(\log n)^{-4}} = \frac{-n^5(\log n)^{-3}(1+\mathrm{o}(1))2^n\sqrt{e}(1+\mathrm{o}(1))}{2^n(-n^5\log n)(1+\mathrm{o}(1))(\log n)^{-4}} =$$

$$\sqrt{e}(1+\mathrm{o}(1)) \longrightarrow \sqrt{e}.$$

∎

- $\displaystyle\lim_n \frac{\sqrt[n]{n^4}\, e^{-(\log n)^2}}{\left(n^4e^{-4n} + n^7e^{-5n} - e^{-n^4}\right)}$.

Soluzione:
Si ha

$$n^4e^{-4n} + n^7e^{-5n} - e^{-n^4} = n^4e^{-4n}(1+\mathrm{o}(1)) = e^{-4n+4\log n}(1+\mathrm{o}(1)),$$

$$\sqrt[n]{n^4} = n^{\frac{4}{n}} = e^{4\frac{\log n}{n}}.$$

Se ne deduce che

$$\frac{\sqrt[n]{n^4}e^{-(\log n)^2}}{\left(n^4e^{-4n} + n^7e^{-5n} - e^{-n^4}\right)} = \frac{e^{4\frac{\log n}{n}}e^{-(\log n)^2}}{e^{-4n+4\log n}(1+\mathrm{o}(1))} =$$

$$(1+\mathrm{o}(1))e^{4\frac{\log n}{n} - (\log n)^2 + 4n - 4\log n} = (1+\mathrm{o}(1))e^{4n(1+o(1))} \longrightarrow +\infty.$$

∎

- $\displaystyle\lim_n \frac{n^4e^{2n}}{\cos(n) + e^n}\frac{\sqrt{1+\log\left(\frac{n^4}{1+n^4}\right)}}{\left(\frac{e^n}{\log n} + ne^{\frac{n}{2}} - n^2e^{-n^4}\cos(n)\right)}$.

Soluzione:
Si ha

$$\frac{e^n}{\log n} + ne^{\frac{n}{2}} - n^2e^{-n^4}\cos(n) = \frac{e^n}{\log n}(1+\mathrm{o}(1)),$$

$$\sqrt{1+\log\left(\frac{n^4}{1+n^4}\right)} = 1+\mathrm{o}(1)$$

$$\cos(n) + e^n = e^n(1+\mathrm{o}(1)).$$

Se ne deduce che

$$\frac{n^4e^{2n}}{\cos(n)+e^n}\,\frac{\sqrt{1+\log\left(\frac{n^4}{1+n^4}\right)}}{\left(\frac{e^n}{\log n}+ne^{\frac{n}{2}}-n^2e^{-n^4}\cos(n)\right)} =$$

$$\frac{n^4e^{2n}}{e^n(1+\mathrm{o}(1))}\,\frac{1+\mathrm{o}(1)}{\frac{e^n}{\log n}(1+\mathrm{o}(1))} = n^4\log n(1+\mathrm{o}(1)) \longrightarrow +\infty.$$

∎

- $\lim_n \dfrac{n\sqrt[n]{\log n}\left(1+\left(\frac{\log n}{n}\right)^2\right)^{-3\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{n^3}\sin^2\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right)-\frac{1}{n^2}\right)\left((\log n)^n-\log(1+n)\right)}$.

Soluzione:
Si ha

$$\frac{1}{n^3}\sin^2\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right)-\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{n^2}(1+\mathrm{o}(1)),$$

$$(\log n)^n - \log(1+n) = (\log n)^n(1+\mathrm{o}(1)),$$

$$\left(1+\left(\frac{\log n}{n}\right)^2\right)^{-3\sqrt{2}} = 1+\mathrm{o}(1).$$

Se ne deduce che

$$\frac{n\sqrt[n]{\log n}\left(1+\left(\frac{\log n}{n}\right)^2\right)^{-3\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{n^3}\sin^2\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right)-\frac{1}{n^2}\right)\left((\log n)^n-\log(1+n)\right)} = \frac{n(\log n)^{\frac{1}{n}}\left(1+\mathrm{o}(1)\right)}{-\frac{1}{n^2}\left(1+\mathrm{o}(1)\right)(\log n)^n(1+\mathrm{o}(1))} =$$

$$-(1+\mathrm{o}(1))n^3(\log n)^{\frac{1}{n}-n} = -(1+\mathrm{o}(1))e^{3\log n+(\frac{1}{n}-n)\log(\log n)} =$$

$$-(1+\mathrm{o}(1))e^{-(1+o(1))n\log(\log n)} \longrightarrow 0.$$

∎

ESERCITAZIONE 05

Limiti di successioni e derivate di funzioni

Limiti di successioni: terza parte

Usando i limiti notevoli si può mostrare che

(1) $\sin(x) = x + \mathrm{o}(x), \quad x \to 0,$

(2) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \mathrm{o}(x), \quad x \to 0, \forall \alpha \in \mathbb{R},$

(3) $\log(1+x) = x + \mathrm{o}(x), \quad x \to 0,$

(4) $e^x = 1 + x + \mathrm{o}(x), \quad x \to 0,$

(5) $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2), \quad x \to 0,$

vedasi le dispense online del docente: '*Lezione 17*' e *Lezioni 18 & 19 & 20*'.

Calcolare i seguenti limiti:

- $\displaystyle \lim_n \frac{\left(1 + \frac{1}{(\log(n))^2}\right)^{-\pi} + \sin(e^{-n}) - 1}{\left(\frac{1}{n^3}\cos^2\left(\frac{\sqrt{n}}{\log(n)}\right) - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \sqrt[n]{\log(n)}\right)}.$

  Soluzione:
  Osservando che $\dfrac{1}{(\log(n))^2} \to 0$, $e^{-n} \to 0$ per $n \to +\infty$ ed usando (1), (2) si ha

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{(\log(n))^2}\right)^{-\pi} + \sin(e^{-n}) - 1}{\left(\frac{1}{n^3}\cos^2\left(\frac{\sqrt{n}}{\log(n)}\right) - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \sqrt[n]{\log(n)}\right)} = \frac{1 - \pi(\log(n))^{-2} + \mathrm{o}(\log(n)^{-2}) + e^{-n} + \mathrm{o}(e^{-n}) - 1}{-\frac{1}{n^2}\big(1 + \mathrm{o}(1)\big)\left(1 + e^{\frac{\log(\log(n))}{n}}\right)}.$$

  Osservando che $e^{-n} = \mathrm{o}\big((\log(n))^{-2}\big)$ e $\frac{\log(\log(n))}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$ ed usando (4) si ottiene

$$\frac{1 - \pi(\log(n))^{-2} + \mathrm{o}(\log(n)^{-2}) + e^{-n} + \mathrm{o}(e^{-n}) - 1}{-\frac{1}{n^2}\big(1 + \mathrm{o}(1)\big)\left(1 + e^{\frac{\log(\log(n))}{n}}\right)} = \frac{-\pi(\log(n))^{-2}\big(1 + \mathrm{o}(1)\big)}{-\frac{1}{n^2}\big(1 + \mathrm{o}(1)\big)\left(1 + 1 + \frac{\log(\log(n))}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\log(\log(n))}{n}\right)\right)} =$$

$$= \frac{\pi n^2}{(\log(n))^2} \frac{1 + \mathrm{o}(1)}{\big(1 + \mathrm{o}(1)\big)\big(2 + \mathrm{o}(1)\big)} \longrightarrow +\infty.$$

  ∎

- $\displaystyle \lim_n \frac{\big(\sin(n) + e^n\big)^{\sqrt{2}} n^{\frac{1}{n}}}{\log\left(1 + \frac{\log(n)}{n^2}\right) - \log\left(1 + e^{\sqrt{n}}\right) + \sqrt{n}}.$

Soluzione:
Osservando che $\frac{\log(n)}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$ e usando (4) si ha

$$\big(\sin(n) + e^n\big)^{\sqrt{2}} n^{\frac{1}{n}} = e^{\sqrt{2}n}\big(1 + \mathrm{o}(1)\big)e^{\frac{\log(n)}{n}} = e^{\sqrt{2}n}\big(1 + \mathrm{o}(1)\big)\left(1 + \frac{\log(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\log(n)}{n}\right)\right) =$$
$$= e^{\sqrt{2}n}\big(1 + \mathrm{o}(1)\big)\big(1 + \mathrm{o}(1)\big) = e^{\sqrt{2}n}\big(1 + \mathrm{o}(1)\big).$$

D'altra parte $\frac{\log(n)}{n^2} \to 0$ per $n \to +\infty$, quindi usando (3) si ottiene

$$\log\left(1 + \frac{\log(n)}{n^2}\right) - \log\left(1 + e^{\sqrt{n}}\right) + \sqrt{n} = \frac{\log(n)}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\log(n)}{n^2}\right) - \log\left(e^{\sqrt{n}}\left(1 + e^{-\sqrt{n}}\right)\right) + \sqrt{n}$$
$$= \frac{\log(n)}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\log(n)}{n^2}\right) - \sqrt{n} - \log\left(1 + e^{-\sqrt{n}}\right) + \sqrt{n}.$$

Osservando che $e^{-\sqrt{n}} \to 0$ per $n \to +\infty$ e usando (3) si ha

$$\frac{\log(n)}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\log(n)}{n^2}\right) - \sqrt{n} - \log\left(1 + e^{-\sqrt{n}}\right) + \sqrt{n} = \frac{\log(n)}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\log(n)}{n^2}\right) - e^{-\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(e^{-\sqrt{n}}\right).$$

Mostriamo ora che $e^{-\sqrt{n}} = \mathrm{o}\left(\dfrac{\log(n)}{n^2}\right)$. Infatti

$$\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{\log(n)}{n^2}} = \frac{1}{e^{\sqrt{n}+\log(\log(n))-2\log(n)}} = \frac{1}{e^{\sqrt{n}(1+o(1))}} \longrightarrow 0.$$

Segue che

$$\frac{\log(n)}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\log(n)}{n^2}\right) - e^{-\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(e^{-\sqrt{n}}\right) = \frac{\log(n)}{n^2}\big(1 + \mathrm{o}(1)\big).$$

Quindi alla fine vale

$$\frac{\big(\sin(n) + e^n\big)^{\sqrt{2}} n^{\frac{1}{n}}}{\log\left(1 + \frac{\log(n)}{n^2}\right) - \log\left(1 + e^{\sqrt{n}}\right) + \sqrt{n}} = \frac{e^{\sqrt{2}n}\big(1 + \mathrm{o}(1)\big)}{\frac{\log(n)}{n^2}\big(1 + \mathrm{o}(1)\big)} \longrightarrow +\infty.$$

ESERCIZI

Dimostrare che:

- $\displaystyle \lim_n \frac{n^2 \sqrt[n]{\log(n)} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 - n^3 \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left((\log(n))^n - \log(1+n)\right)} = 0.$
- $\displaystyle \lim_n \frac{2n^6 e^{2n}\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\left(1 + ne^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{e^n}{\log(n)} + ne^{\frac{n}{2}} - n^2 e^{-n^4}\cos(n)\right)} = +\infty.$

Derivate di funzioni

I seguenti esercizi sono tratti dal libro 'Marcellini-Sbordone, *Esercitazioni di matematica*, Vol. I, parte 1a, Liguori Ed. (1994)'. Calcolare le derivate:

- **Esercizio 10.1**:

  1) $D\left(\dfrac{x^3}{1-x}\right)$.
  2) $D(x\log(x) - x)$.
  3) $D(x^2 2^x)$.
  4) $D\left(\dfrac{1+\sqrt[4]{x^3}}{1-\sqrt[4]{x^3}}\right)$.

ESERCITAZIONE 06

Grafici di funzioni

I seguenti esercizi sono tratti dal libro 'Marcellini-Sbordone, *Esercitazioni di matematica*, Vol. I, parte 2a, Liguori Ed. (1995)'.

- **Esercizio 2.49**.
- **Esercizio 2.56**.

ESERCITAZIONE 07

Grafici di funzioni: seconda parte

I seguenti esercizi sono tratti dal libro 'Marcellini-Sbordone, *Esercitazioni di matematica*, Vol. I, parte 2a, Liguori Ed. (1995)'.

- **Esercizio 2.68**: (a).
- **Esercizio 2.85**.

ESERCIZI DA SVOLGERE

- **Esercizio 2.59**.
- **Esercizio 2.65**.
- **Esercizio 2.81**: (a).
- **Esercizio 2.95**: (c).

ESERCITAZIONE 08

Integrali: prima parte

- $$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx =$$
  $$= \sqrt{x^2+2x+2} + \log|2x+2\sqrt{x^2+2x+2}+2| + C.$$

I seguenti esercizi sono tratti dal libro 'Marcellini-Sbordone, *Esercitazioni di matematica*, Vol. I, parte 2a, Liguori Ed. (1995)'.

- **Esercizio 4.120**.
- **Esercizio 4.122**: (b).
- **Esercizio 4.153**.

ESERCIZIO DA SVOLGERE

- **Esercizio 4.124**: (a).

ESERCITAZIONE 09

Integrali: seconda parte

Il seguente esercizo è tratto dal libro 'Marcellini-Sbordone, *Esercitazioni di matematica*, Vol. I, parte 2a, Liguori Ed. (1995)'.

- **Esercizio 4.160**.

I seguenti esercizi sono tratti dalle dispense online del docente: '*Soluzioni Esercizi Lezioni 36* & *37*'.

- Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\sqrt[3]{|x|}} \arctan\bigl(e^{x^2}\bigr) \log\bigl(1 + |x|| \sin(|x|)|^2\bigr)}{\sqrt{|x|}| \arctan\bigl(x^{\frac{1}{3}}\bigr)|} \right) dx.$$

- Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{e^{-x^2}}{\bigl| \log |x| \arctan(x^2 - 1)\bigr|^{\alpha}} \, dx.$$

ESERCITAZIONE 10

Numeri complessi ed Esercizi di riepilogo

Numeri complessi

- Lavorando in $\mathbb{C}$, dimostrare che vale la seguente fattorizzazione:

$$z^4 + z^2 + 1 = (z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1).$$

Esercizi di riepilogo

- Data la funzione

$$f(x) = 3\log(|x|) + \frac{1}{(\log(|x|))^3},$$

  studiare il dominio di f, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo/assoluto, eventuali punti di non derivabilità e disegnare un grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

- Verificare che vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 e^{-2n} + n^{-3n}\sin\big(n^6\log(n)\big) - \big(5n^4\log(n)\big)^{-1}}{\cos\left(\frac{1}{n\sqrt{\log(n)}}\right) - 1 + \frac{1}{2n^2\log(n)}} = -\infty.$$

ESERCITAZIONE 11

Esercizi di riepilogo

- Provare che le soluzioni di $z^8 - 2(1+i\sqrt{3})z^5 + 2(i\sqrt{3}-1)z^2 = 0$, $z \in \mathbb{C}$, sono date da $z = 0$ e $z_k = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k}$, $k = 0, 1, 2$.

I seguenti esercizi sono tratti dalla prova scritta del 28/02/12, Compito A.

- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-\frac{1}{n}} - 1}{e^{\pi n}(1+e^n)^{-\pi} - n^2(1+n)^{-2}} = -\infty.$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} + (\log(x))^4 - \frac{1}{x}}{(1-2x)^{\frac{1}{x}} - e} = +\infty.$
- $\displaystyle \int_{e^4}^{e^5} \frac{1}{x\log(x)}\,dx = \log\left(\frac{5}{4}\right).$
- $\displaystyle \int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{5}{2}} + x^5}\,dx = \frac{4}{5\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

ESERCIZIO DA SVOLGERE

- Data la funzione
$$f(x) = -\frac{x-1}{\log(|x-1|)},$$
studiare il dominio di f, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo/assoluto, eventuali punti di non derivabilità e disegnare un grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

ESERCITAZIONE 12

Esercizi di riepilogo

I seguenti esercizi sono tratti dalla prova scritta del 18/09/12, Compito A.

- Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, discutere la convergenza del seguente integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3 |\log(x)| e^{-2x}}{|x-1|^{3\alpha}}\, dx\,.$$

  Soluzione. L'integrale è convergente per $\alpha < \frac{2}{3}$.

- Data la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{e^{-x} - e^{-2x}}$$
studiare il dominio di f, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo/assoluto, eventuali punti di non derivabilità e disegnare un grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{e^{4n} - e^{4n}\cos(e^{-2n}\sqrt[4]{n})}{n^{\frac{n^2}{n^3+2}}(\sin(n)) - (\arctan(n^4))(\log|n|)\sqrt[3]{n} + \log(1+e^{\sqrt{n}})} = \frac{1}{2}\,.$

- $\displaystyle \int \frac{(\log(x))^3}{2(\log(x))^2 - 1}\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\log(x)^2 + \frac{1}{8}\log|2\log(x)^2 - 1| + C.$

ESERCITAZIONE 13

Esercizi di riepilogo

- Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sin(\frac{1}{2x})}{\cos(\frac{1}{2x})\big(\sin^2(\frac{1}{x})+2\sin(\frac{1}{x})\big)}\,\frac{dx}{x^2}\,.$$

Soluzione.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(\frac{1}{2x})}{\cos(\frac{1}{2x})\big(\sin^2(\frac{1}{x})+2\sin(\frac{1}{x})\big)}\,\frac{dx}{x^2} &= -\frac{1}{2}\tan\left(\frac{1}{2x}\right)+\frac{1}{4}\log\left(\left|\tan^2\left(\frac{1}{2x}\right)+\tan\left(\frac{1}{2x}\right)+1\right|\right)+\\ &- \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{1}{2x}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C.\end{aligned}$$

- Determinare l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x)-2y'(x)+y(x)=x\cos(3x)\\ y(0)=0\\ y'(0)=0\end{cases}$$

Detta $y(x)$ tale soluzione, studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}y(x)\log(|x|)}{\sqrt{|x-2|^{\alpha}}}\,dx\,,$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

Soluzione. La soluzione del problema di Cauchy è data da

$$y(x)=\frac{1}{250}\big(13e^x-20xe^x-13\cos(3x)-20x\cos(3x)+9\sin(3x)-15x\sin(3x)\big).$$

Per quanto riguarda l'integrale, basta osservare che per $x\geqslant 0$, $|y(x)|\leqslant C_1+C_2xe^x$, mentre per $x<0$, $|y(x)|\leqslant C_3|x|$, dove C_1,C_2,C_3 sono costanti positive. Data la presenza del termine e^{-x^2} nella funzione integranda, usando il metodo di confronto, si conclude che

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{e^{-x^2}y(x)\log(|x|)}{\sqrt{|x-2|^{\alpha}}}\,dx\,,\qquad \int_{3}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}y(x)\log(|x|)}{\sqrt{|x-2|^{\alpha}}}\,dx$$

sono convergenti $\forall\alpha\in\mathbb{R}$. Mentre

$$\int_{1}^{3}\frac{e^{-x^2}y(x)\log(|x|)}{\sqrt{|x-2|^{\alpha}}}\,dx$$

è convergente se e solo se $\alpha<2$.