DIARIO DELLE LEZIONI 30-31-32-33

Contents

12. **Lezione 30** 1
13. **Lezione 31** 1
14. **Lezione 32** 2
15. **Lezione 33** 2

[B] Dispense a cura del docente.

12. **Lezione 30**

Argomenti trattati:

- Teorema di Cauchy. Teoremi di L'Hopital.

13. **Lezione 31**

Argomenti trattati:

- Derivate di ordine superiore. Derivata n-esima di $\log(1+x)$. La Formula di Leibniz.
- Approssimazione di funzioni a meno di o-piccoli di potenze tramite il Teorema di L' Hopital.

ESERCIZIO. Dimostrare che, fissati $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha

$$D^{(n)}(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

ESERCIZIO. Dimostrare, utilizzando solo il Teorema di L' Hopital che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}}{x^3} = \frac{1}{3!},$$

e quindi in particolare che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3),\ x \to 0.$$

ESERCIZIO. Verificare, utilizzando solo il Teorema di L' Hopital che

$$\sin x = x + o(x^2), \quad \text{e che} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4),\ x \to 0.$$

14. **Lezione 32**

Argomenti trattati:

- Il Polinomio di Taylor. Il Teorema di Peano.

ESERCIZIO. Sia f definita in (a,b), $x_0 \in (a,b)$ e f derivabile n-volte in x_0 con $n \geq 3$. Se

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k,$$

dimostrare che la derivata terza di T_n verifica

$$T_n^{(3)}(x) = \sum_{k=3}^{n} a_k k(k-1)(k-2)(x-x_0)^{k-3},$$

e che

$$T_n^{(3)}(x_0) = 3!\, a_3.$$

Dimostrare inoltre che se $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f^{(1)}(x_0)$, $a_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}$, allora si ha

$$f(x) = T_3(x) + o((x-x_0)^3),\ x \to x_0,$$

se e solo se

$$a_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}.$$

- Svliuppi di Mac Laurin. Esempi di sviluppi di Mac Laurin di ordine $n \in \mathbb{N}$ per e^x, $\log(1+x)$, $\cos x$, $\sin x$.
- Applicazioni del Teorema di Peano. Caratterizzazione dei punti di massimo/minimo/flesso.

15. **Lezione 33**

Argomenti trattati:

- Formula del resto di Lagrange. Esempi di approssimazioni numeriche di funzioni elementari.
- Calcolo del Polinomio di Taylor e applicazioni.

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2) + 2(\cos(x)-1)}{x^\alpha}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2) + 2(\cos(x)-1) + \frac{5}{12}x^4}{e^{x^\alpha}-1},$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2) + 2(\cos(x)-1) + \frac{1}{12}\left(e^{5x^4}-1\right)}{x \arctan x^\alpha}.$$

ESERCIZIO. Utilizzare le formule di addizione e gli sviluppi di Mac Laurin per $\sin y$ e $\cos y$ per calcolare il Polinomio di Taylor di ordine 3 di $f(x) = x \sin x$ in $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

ESERCIZI: Calcolare il seguente limite al variare di $\beta \in \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{(1+\sqrt{x}\log x)^{\beta}}-1\right)\frac{\log\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)-\sin\left(\sqrt{x}\right)+\sqrt{x}}{\log(x)\left[(1+x)^{\frac{1}{10}}-1\right]-\frac{1}{5}\left(x^{\frac{x}{2}}-1\right)}.$$

Esempio: Studiare la derivabilità in $x=0$ di

$$f(x)=\sqrt[4]{\left|e^{|x|^{\frac{3}{2}}}-1-|x|^{\frac{3}{2}}\right|}.$$

Dato che $e^y = 1+y+\frac{y}{2!}+o(y^2)$, $y\to 0$ si ha

$$e^{|x|^{\frac{3}{2}}}-1-|x|^{\frac{3}{2}} = 1+|x|^{\frac{3}{2}}+\frac{(|x|^{\frac{3}{2}})^2}{2}+o((|x|^{\frac{3}{2}})^2)-1-|x|^{\frac{3}{2}} =$$

$$\frac{|x|^3}{2}+o(|x|^3),\ x\to 0,$$

e quindi in particolare

$$f(x)=\sqrt[4]{\left|\frac{|x|^3}{2}+o(|x|^3)\right|}=\sqrt[4]{\left|\frac{|x|^3}{2}+o(|x|^3)\right|}=\sqrt[4]{\left|\frac{|x|^3}{2}\right|\left|(1+o(1))\right|}= \tag{15.1}$$

$$\sqrt[4]{\left|\frac{|x|^3}{2}\right|}\sqrt[4]{|(1+o(1))|}=\frac{|x|^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{2}}(1+o(1)),\ x\to 0$$

Se ne deduce che

$$\lim_{x\to 0^\pm}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{|x|^{\frac{3}{4}}}{x\sqrt[4]{2}}(1+o(1))=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}x^{-\frac{1}{4}}\\ -\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)^{-\frac{1}{4}}\end{cases}=\pm\infty,$$

e quindi in particolare che $x=0$ è un punto di cuspide per f.

Osservazione
Nella (15.1) si sarebbe anche potuto osservare che $\frac{|x|^3}{2}+o(|x|^3)$ è definitivamente positiva per $x\to 0$ e concludere analogamente che

$$\sqrt[4]{\left|\frac{|x|^3}{2}+o(|x|^3)\right|}=\sqrt[4]{\frac{|x|^3}{2}+o(|x|^3)}=\sqrt[4]{\frac{|x|^3}{2}}\sqrt[4]{(1+o(1))},\ x\to 0.$$

Una ulteriore semplificazione si sarebbe potuta ottenere fin dall' inizio studiando il segno di e^y-1-y.

ESERCIZI: Studiare la derivabilità in $x=0$ di

$$f(x)=\sqrt[6]{\left|e^{x^3}-1-x^3\right|},\quad f(x)=\sqrt{\left|e^{x^3}-1-x^3\right|},$$

$$f(x)=\left(e^{x^{\frac{1}{5}}}-1-x^{\frac{1}{5}}\right)^{\alpha},\ \alpha>0.$$

ESERCIZIO. Studiare la derivabilità in $\mathbb{R}$ di

$$f(x)=\sqrt[7]{|e^x-1-x|}.$$

ESERCIZIO. Studiare la derivabilità in $\mathbb{R}$ di

$$f(x)=\sqrt{|\log(1+|x|^5)-2|}.$$

ESERCIZIO. Calcolare gli sviluppi di Mac Laurin di ordine $n = 2$ e $n = 3$ per

$$f(x) = \log\left(1 + x + x^2\right)$$

ESERCIZIO. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+2x-x^2} - \sin 2x - \left(e^{5x^2+x^4} - 1\right) - 1 + 4x}{\log\left(1 + x^3\right)}$$

ESERCIZIO. Calcolare lo sviluppo di Mac Laurin di ordine $n = 4$ per

$$f(x) = \log\left(\cos x\right).$$