

LEZIONI 22-23-24

CONTENTS

9.	DERIVATE DI FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE	110
9.1.	Definizioni. Derivabilità e prime conseguenze.	110
9.2.	Derivate di funzioni elementari e calcolo delle derivate.	112
9.3.	Derivate, rette tangenti e limiti notevoli.	117
9.4.	Punti di non derivabilità.	119
9.5.	Teoremi di Fermat, Rolle, Lagrange.	122

[B] Dispense a cura del docente.

9. DERIVATE DI FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE

9.1. Definizioni. Derivabilità e prime conseguenze.

Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione arbitraria e siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$ fissati. La retta passante per i punti appartenenti al grafico di f , $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, dove $x_1 = x_0 + h$, ha equazione

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot (x - x_0).$$

Il coefficiente angolare della retta secante il grafico di f è quindi

$$m_f(x_0, h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad (9.1.1)$$

detto anche **rapporto incrementale** di f tra x_0 e $x_0 + h$.

Si usa spesso una notazione lievemente diversa per indicare il rapporto incrementale. Indicando con x_1 il punto $x_1 = x_0 + h$, si ha $h = x_1 - x_0$ e sostituendo nella (9.1.1), si ottiene

$$P_f(x_1, x_0) = m_f(x_0, x_1 - x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad (9.1.2)$$

ovvero il rapporto incrementale di f tra x_0 e x_1 .

È chiaro che se $m_f(x_0, h) > 0$ e se $h > 0$, allora $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$. Viceversa, se $m_f(x_0, h) > 0$ e se $h < 0$, allora $f(x_0) - f(x_0 + h) > 0$. Ci si potrebbe allora chiedere se esiste una relazione tra le proprietà di monotonia di f e il segno di $m_f(x_0, h)$. Infatti, si può dimostrare il seguente

TEOREMA

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Allora:

(i) f è monotona crescente (strettamente crescente) in $I \iff$

$$P_f(x, x_0) \geq 0 (> 0) \quad \forall x \in I, \forall x_0 \in I : x \neq x_0.$$

(ii) f è monotona decrescente (strettamente decrescente) in $I \iff$

$$P_f(x, x_0) \leq 0 (< 0) \quad \forall x \in I, \forall x_0 \in I : x \neq x_0.$$

Dimostrazione.

(i) Se f è monotona crescente, si ha $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in I, \forall x_0 \in I : x > x_0$. Quindi in particolare $P_f(x, x_0) \geq 0$, $\forall x > x_0$. Viceversa, se $x < x_0$, si ha $f(x) \leq f(x_0)$ e quindi $P_f(x, x_0) \geq 0$. Quindi $P_f(x, x_0) \geq 0$, $\forall x \in I, \forall x_0 \in I : x \neq x_0$.

Se f è strettamente crescente lo stesso argomento può essere applicato senza difficoltà sostituendo le

disuguaglianze $\geq$ con le disuguaglianze $>$.
È immediato verificare l'implicazione inversa.

(ii) Se f è monotona decrescente (strettamente decrescente), allora $g = -f$ è monotona crescente (strettamente crescente) e $P_g(x, x_0) \geq 0 (> 0)$, $\forall x \in I$, $\forall x_0 \in I : x \neq x_0$, dal punto (i). Ma $P_g(x, x_0) = P_{-f}(x, x_0) = -P_f(x, x_0)$, e quindi $P_f(x, x_0) \leq 0 (< 0)$, $\forall x \in I$, $\forall x_0 \in I : x \neq x_0$.
È immediato verificare l'implicazione inversa. ■

Si vuole ora ottenere una nuova funzione, che possa essere calcolata a partire da f , il cui segno sia direttamente collegato alla monotonia della funzione come per il rapporto incrementale, ma che dipenda da una sola variabile. Si introduce allora la seguente fondamentale definizione:

Definizione[DERIVATA]

Sia $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Si dice che f è **derivabile** in x_0 se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (9.1.3)$$

In particolare, se f è derivabile in x_0 , il limite definito dalla (9.1.3) si dice **derivata** di f in x_0 e si indica con uno dei seguenti simboli

$$Df(x_0), \quad f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$

Se f è derivabile per ogni $x \in (a, b)$, la funzione $f' : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, definita da

$$x \mapsto f'(x), \quad \forall x \in (a, b),$$

si dice **funzione derivata** o **derivata** di f in (a, b) .

Osservazione

È chiaro che f è derivabile in x_0 se e solo se esiste finito il limite per $h \rightarrow 0$ del rapporto incrementale nella forma (9.1.1),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

□

TEOREMA [CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI]

Sia $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se f è derivabile in x_0 , allora è continua in x_0 .

Dimostrazione.

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0) + f(x_0)] = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \\ &= f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0), \end{aligned}$$

ovvero f è continua in x_0 . ■

Definizione[FUNZIONI DIFFERENZIABILI]

Sia $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Si dice che f è **differenziabile** in x_0 se esiste $\lambda_{f, x_0} \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_0) + \lambda_{f, x_0}(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0. \quad (9.1.4)$$

Se f è differenziabile in x_0 , la retta $y = f(x_0) + \lambda_{f, x_0}(x - x_0)$ si dice **retta tangente** al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

TEOREMA [DIFFERENZIABILITÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI]

Sia $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Allora f è derivabile in x_0 se e solo se f è differenziabile in x_0 e $\lambda_{f, x_0} = f'(x_0)$. In particolare, se f è derivabile in x_0 , allora è ben definita la retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$, ed ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (9.1.5)$$

Dimostrazione.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

ovvero se e solo se

$$f(x) = f(x_0) + \lambda_{f, x_0}(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0,$$

con $\lambda_{f, x_0} = f'(x_0)$. ■

Osservazione [INTERPRETAZIONE GEOMETRICA]

Al variare di $x \in (a, b)$, come osservato precedentemente, $P_f(x, x_0)$ descrive il coefficiente angolare delle rette secanti il grafico di f . Se il limite (9.1.3) esiste finito, ovvero se f è differenziabile, il coefficiente angolare delle rette secanti tende al coefficiente angolare $f'(x_0)$ della retta tangente (9.1.5). In particolare, in questo caso, la funzione definita dalla retta tangente, $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, è una "buona" approssimazione della funzione data per $x \rightarrow x_0$, nel senso che l'errore che si commette nell'approssimare $f(x)$ con $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)$ per $x \rightarrow x_0$,

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0.$$

Si parla anche di **migliore approssimazione lineare** di f in x_0 , nel senso che, se f è differenziabile, esiste un **unico** polinomio di primo grado che verifica la (9.1.4), ovvero $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Il polinomio definito dalla retta tangente è unico, perché il limite dei rapporti incrementali, se esiste, è unico. □

9.2. Derivate di funzioni elementari e calcolo delle derivate.

Utilizzando la definizione di derivata, calcoliamo le derivate di alcune funzioni elementari.

Sia $c \in \mathbb{R}$. Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Quindi

$$f'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Quindi

$$f'(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = x^\alpha, \quad x \in (0, +\infty).$$

Fissato $x_0 \in (0, +\infty)$, si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^\alpha - x_0^\alpha}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} x_0^\alpha \frac{(1 + \frac{h}{x_0})^\alpha - 1}{h} = \alpha x_0^{\alpha-1}.$$

Quindi

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}.$$

Quindi

$$f'(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO. Dimostrare che $D(\log x) = \frac{1}{x}$, $D(\cos x) = -\sin x$ e $D(\sin x) = \cos x$ nei loro domini naturali.

TEOREMA [DERIVATA DELLA SOMMA/PRODOTTO/FUNZIONE COMPOSTA]

(i) Sia I un insieme aperto, $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $g : I \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e $c \in \mathbb{R}$. Se f e g sono derivabili in x_0 , allora $f \pm g$, cf e $f \cdot g$ sono derivabili in x_0 e sia ha

$$D[f \pm g](x_0) = Df(x_0) \pm Dg(x_0), \quad D[cf](x_0) = c \cdot Df(x_0), \quad D[f \cdot g](x_0) = Df(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot Dg(x_0).$$

(ii) Siano I e J due insiemi aperti $f : J \mapsto \mathbb{R}$, $g : I \mapsto \mathbb{R}$, $\text{Im}(g) \subset J$, $x_0 \in I$, $g(x_0) = y_0$, $y_0 \in J$. Se g è derivabile in x_0 e f è derivabile in y_0 , allora la funzione composta $f \circ g$ è derivabile in x_0 e si ha

$$D[f \circ g](x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0).$$

Dimostrazione[Facoltativa]

(i) Il fatto che

$$D[f \pm g](x_0) = Df(x_0) \pm Dg(x_0), \quad D[cf](x_0) = c \cdot Df(x_0),$$

è una conseguenza immediata della definizione di derivata.

Usando la definizione di differenziabilità e la continuità di f e g in x_0 , per $x \rightarrow x_0$, si ha,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) = \\ &= (f(x) - f(x_0))g(x) + (g(x) - g(x_0))f(x_0) = \end{aligned}$$

$$(f(x) - f(x_0))g(x_0) + (f(x) - f(x_0))(g(x) - g(x_0)) + (g(x) - g(x_0))f(x_0) =$$

$$(Df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))g(x_0) + o(x - x_0) + (Dg(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))f(x_0) =$$

$$Df(x_0)g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)Dg(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = [Df(x_0)g(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)](x - x_0) + o(x - x_0).$$

Concludiamo quindi che $f \cdot g$ è differenziabile e che $D[f \cdot g](x_0) = Df(x_0)g(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)$.

(ii) Sia

$$Q(x, x_0) = f(g(x)) - f(g(x_0)) - Df(g(x_0))Dg(x_0)(x - x_0).$$

Per definizione di o -piccolo, la tesi è equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Q(x, x_0)}{x - x_0} = 0,$$

e quindi è sufficiente verificare che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : |Q(x, x_0)| < \varepsilon |x - x_0|, \forall x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\}.$$

Dato che f è differenziabile, si ha

$$\forall \sigma > 0, \exists \mu_\sigma > 0 : |f(y) - f(y_0) - Df(y_0)(y - y_0)| \leq \sigma |y - y_0|, \forall y \in (y_0 - \mu_\sigma, y_0 + \mu_\sigma). \quad (9.2.1)$$

Osserviamo che non è necessario escludere il punto y_0 dall'intorno $(y_0 - \mu_\sigma, y_0 + \mu_\sigma)$, come sarebbe doveroso dalla definizione di limite, perché la (9.2.1) non richiede la disuguaglianza stretta ed è quindi una conseguenza della condizione di differenziabilità di f . In questo caso quindi la (9.2.1) è identicamente verificata per $y = y_0$.

Dato che $Im(g) \subset J$ e $y = g(x) \rightarrow y_0, x \rightarrow x_0$, esiste $\rho_\sigma > 0$ tale che $g(x) \in (y_0 - \mu_\sigma, y_0 + \mu_\sigma)$ per ogni $x \in (x_0 - \rho_\sigma, x_0 + \rho_\sigma)$. Quindi

$$|f(g(x)) - f(g(x_0)) - Df(g(x_0))(g(x) - g(x_0))| \leq \sigma |g(x) - g(x_0)|, \forall x \in (x_0 - \rho_\sigma, x_0 + \rho_\sigma). \quad (9.2.2)$$

D'altra parte si ha, per ogni $x \in I$

$$|Q(x, x_0)| \leq |f(g(x)) - f(g(x_0)) - Df(g(x_0))(g(x) - g(x_0))| + |Df(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) - Dg(x_0)(x - x_0)|, \quad (9.2.3)$$

e dato che g è differenziabile,

$$\exists \nu_\sigma > 0 : |g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)| \leq \sigma |x - x_0|, \forall x \in (x_0 - \nu_\sigma, x_0 + \nu_\sigma), \quad (9.2.4)$$

dove, come sopra, non è necessario escludere x_0 dall'intorno $(x_0 - \nu_\sigma, x_0 + \nu_\sigma)$.

Segue in particolare dalla (9.2.4) che

$$|g(x) - g(x_0)| \leq |Dg(x_0)||x - x_0| + \sigma |x - x_0|, \forall x \in (x_0 - \nu_\sigma, x_0 + \nu_\sigma). \quad (9.2.5)$$

Sia ora $\bar{\delta}_\sigma = \min\{\rho_\sigma, \nu_\sigma\}$. Sostituendo la (9.2.5) nella (9.2.2), e poi la (9.2.2) e la (9.2.4) nella (9.2.3), concludiamo che

$$|Q(x, x_0)| \leq \sigma |Dg(x_0)||x - x_0| + \sigma |x - x_0| + \sigma |Df(g(x_0))||x - x_0| = \sigma M |x - x_0|, \forall x \in (x_0 - \bar{\delta}_\sigma, x_0 + \bar{\delta}_\sigma),$$

dove

$$M = |Dg(x_0)| + 1 + |Df(g(x_0))|$$

è una costante positiva che non dipende da σ . A questo punto, per ogni $\varepsilon > 0$, è sufficiente scegliere $\sigma = \sigma_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{M}$ e definire $\delta_\varepsilon = \bar{\delta}_{\sigma_\varepsilon}$, per ottenere che

$$|Q(x, x_0)| < \varepsilon |x - x_0|, \forall x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon).$$

■

Osservazione

La dimostrazione della (ii) di cui sopra equivale al seguente argomento. Dato che

$$f(y) - f(y_0) - Df(y_0)(y - y_0) = o(y - y_0), \quad y \rightarrow y_0,$$

e dato che $Im(g) \subset J$ e $g(x) \rightarrow y_0, x \rightarrow x_0$, possiamo porre $y = g(x)$ per ogni x sufficientemente vicino a x_0 . In particolare, concludiamo che, definitivamente per $x \rightarrow x_0$, si ha

$$\begin{aligned} f(g(x)) - f(g(x_0)) &= Df(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) = \\ &= Df(g(x_0))(Dg(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(x - x_0) = \\ &= Df(g(x_0))Dg(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

Concludiamo quindi che $f \circ g$ è differenziabile e che $D[f \circ g](x_0) = Df(g(x_0))Dg(x_0)$. □

Una classe di funzioni di largo uso nelle applicazioni è quella delle funzioni iperboliche,

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

che devono il loro nome alla identità,

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R},$$

che implica che il punto $(\cosh x, \sinh x)$, al variare di x in $\mathbb{R}$, descrive il ramo della iperbole equilatera $x_1^2 - x_2^2 = 1, x_1 > 0$.

ESERCIZIO. Dimostrare che $D(\cosh x) = \sinh x$ e $D(\sinh x) = \cosh x$ nei loro domini naturali.

Calcoliamo alcune derivate usando le tabelle di derivazione delle funzioni elementari.

Esempio. Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = \sin(x^3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Quindi,

$$Df(x) = D(\sin(y))|_{y=x^3} D(x^3) = \cos(x^3) \cdot 3x^2.$$

Esempio. Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = \log(\sin(e^{3x})), \quad x \in \text{dom}(f).$$

Quindi,

$$Df(x) = \frac{1}{\sin(e^{3x})} \cdot \cos(e^{3x}) \cdot e^{3x} \cdot 3.$$

Si suggerisce di determinare $\text{dom}(f)$.

Esempio. Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = \sqrt{x^4 + e^{\sin x}}, \quad x \in \text{dom}(f).$$

Quindi,

$$\begin{aligned} Df(x) &= D\left[(x^4 + e^{\sin x})^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2} (x^4 + e^{\sin x})^{-\frac{1}{2}} D(x^4 + e^{\sin x}) = \\ &= \frac{1}{2} (x^4 + e^{\sin x})^{-\frac{1}{2}} (4x^3 + e^{\sin x} \cos x). \end{aligned}$$

Si suggerisce di determinare $\text{dom}(f)$.

Esempio. Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = x^{x^2}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Quindi,

$$\begin{aligned} Df(x) &= D(x^{x^2}) = D(e^{x^2 \log x}) = e^{x^2 \log x} D(x^2 \log x) = \\ &= x^{x^2} \left(2x \log x + x^2 \frac{1}{x} \right) = x^{x^2} (2x \log x + x), \end{aligned}$$

dove si è usata la formula di derivata del prodotto.

ESERCIZIO. Dimostrare che

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(Df)g - f(Dg)}{g^2}.$$

Esempio. Si vuole calcolare la derivata di

$$f(x) = \tan(x), \quad x \in \text{dom}(f).$$

Quindi,

$$Df(x) = D(\tan x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cos x - (\sin x \cdot (-\sin x))}{\cos^2(x)} =$$

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

dove si è usata la formula di derivata del prodotto.

ESERCIZI: Calcolare le derivate delle seguenti funzioni nei loro domini naturali.

$$\tanh(x), \quad \frac{1}{\log x}, \quad \frac{1}{x^2 \log x}, \quad e^{\frac{x^4}{x^2-1}}, \quad (\log x)^{\sin x}.$$

Ricordiamo che $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

Per determinare la derivata di alcune funzioni inverse si usa il seguente:

TEOREMA [DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA]

Sia $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ iniettiva e derivabile e $g = f^{-1}$ la sua funzione inversa. Se $x_0 \in (a, b)$ e $Df(x_0) \neq 0$, allora $g(y)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha

$$Dg(y_0) = \frac{1}{Df(g(y_0))}. \quad (9.2.6)$$

Dimostrazione.[Facoltativa]

Per dimostrare che g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, se f è derivabile in x_0 e $Df(x_0) \neq 0$, osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = Df(x_0) \neq 0,$$

e quindi è ben definito il limite del reciproco del rapporto incrementale,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{Df(x_0)} \in \mathbb{R}.$$

Dato che ad ogni x in (a, b) corrisponde uno ed un solo $y = f(x)$ in $\text{Im}(f)$, è ben definito il cambiamento di variabile $y = f(x)$ che implica,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{Df(x_0)}.$$

La (9.2.6) segue osservando che $Df(x_0) = Df(g(y_0))$. ■

Osservazione

La dimostrazione data è la versione rigorosa del seguente argomento euristico. Dato che $g = f^{-1}$, si ha

$$f(g(y)) = y, \quad \forall y \in \text{Im}(f). \quad (9.2.7)$$

Supponiamo che g sia derivabile in $y = y_0 = f(x_0)$. Allora, derivando l'identità (9.2.7) rispetto a y e usando il teorema della derivata della funzione composta, si ha

$$Df(g(y_0)) \cdot Dg(y_0) = 1,$$

e la (9.2.7) segue non appena $Df(g(y_0)) = Df(x_0) \neq 0$. □

Esempio. Si vuole calcolare la derivata di $g(y) = \sqrt{y}$, $y \in (0, +\infty)$. Dato che $g = f^{-1}$, $f(x) = x^2$, $x \in (0, +\infty)$ si ha

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \Big|_{x=g(y)} = \frac{1}{2x} \Big|_{x=\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

che coincide con la formula già nota per la derivata di potenza. Osserviamo che il dominio naturale della derivata di Dg è $(0, +\infty)$ e non coincide con quello di g , che invece è $[0, +\infty)$.

Esempio. Si vuole calcolare la derivata di $g(y) = \arctan y$, $y \in \mathbb{R}$. Dato che $g = f^{-1}$, $f(x) = \tan x$, si ha

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \Big|_{x=g(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \Big|_{\tan x = y} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

In questo caso $\text{dom}(g) = \text{dom}(Dg)$.

ESERCIZIO. Dimostrare che per $y \in (-1, 1)$, si ha

$$D(\arcsin y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad D(\arccos y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Osservare che i domini naturali delle derivate delle funzioni circolari inverse non coincidono con quelli delle funzioni stesse.

9.3. Derivate, rette tangenti e limiti notevoli.

Si osserva che, applicando la definizione di differenziabilità alla funzione $f(x) = \sin x$ in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\sin x = \sin x_0 + (\cos x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0.$$

In particolare, per $x_0 = 0$, ritroviamo la ben nota

$$\sin x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

e la retta tangente al grafico di $\sin x$ nel punto $(0, 0)$ è

$$y = x.$$

Più in generale, tutti i limiti notevoli per $x \rightarrow 0$ fin ora esaminati corrispondono ad una formula di differenziabilità per una funzione derivabile in $x_0 = 0$. Osserviamo comunque che il limite notevole $\frac{1-\cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ è più delicato. Infatti in questo caso la differenziabilità dice solo che

$$\cos x = 1 + \sin(0)x + o(x) = 1 + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

e infatti la retta tangente al grafico di $\cos x$ nel punto $(0, 1)$ è

$$y = 1.$$

È chiaro che il risultato ottenuto, $\cos x = 1 + o(x)$, è coerente con il limite notevole che specifica in questo caso una ulteriore proprietà della quantità $o(x)$, ovvero $o(x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$.

Usando la definizione di differenziabilità sulle funzioni circolari inverse, possiamo ottenere altri limiti importanti.

Esempio. Sia $f(x) = \arctan x$ e $x_0 = 0$. Si ha

$$\arctan x = f(0) + f'(0)(x - 0) + o(x - 0) = 0 + \frac{1}{1+0}x + o(x) = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

che è equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x} = 0,$$

ovvero a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$$

Più in generale, utilizzando la formula di differenziabilità, si possono ottenere i limiti necessari a risolvere problemi specifici.

Esempio. Sia $f(x) = x \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Si vuole determinare se f ha un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$. Dato che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \cdot \frac{\pi}{4} = +\infty,$$

ha senso cercare di definire il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo. Si ha

$$m_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \arctan(1 + 0^+) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^+.$$

Per determinare l'esistenza dell'asintoto, dobbiamo quindi calcolare, se esiste finito, il limite

$$q_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{4}x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(1+y) - \frac{\pi}{4}}{y},$$

dove rimane inteso che l'ultimo segno di uguaglianza rimane valido se l'ultimo limite esiste.

Usiamo allora la differenziabilità di $\arctan(1+y)$ in $y=0$. Si ha

$$\arctan(1+y) = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{1+(1+y)^2}\Big|_{y=0}\right)y + o(y), \quad y \rightarrow 0,$$

ovvero

$$\arctan(1+y) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}y + o(y), \quad y \rightarrow 0. \quad (9.3.1)$$

Se ne deduce che

$$\frac{\arctan(1+y) - \frac{\pi}{4}}{y} = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}y + o(y) - \frac{\pi}{4}}{y} = \frac{1}{2} + o(1), \quad y \rightarrow 0,$$

e quindi che $q_+ = \frac{1}{2}$. Altrimenti, e in modo del tutto equivalente, dalla (9.3.1) si può ricavare il limite notevole

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(1+y) - \frac{\pi}{4}}{y} = \frac{1}{2}.$$

Esempio. Sia $f(x) = \arctan x$. Si vuole calcolare la retta tangente a f nel punto $(1, \frac{\pi}{4})$. Si ha

$$Df(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

e quindi la retta tangente cercata è

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1).$$

In particolare la relazione di differenziabilità per f in $x_0 = 1$ è

$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + o(x-1), \quad x \rightarrow 1,$$

che implica

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

Ponendo $x = 1 + y$, $y \rightarrow 0$ si ottiene ovviamente il limite dell'esempio precedente.

ESERCIZIO. Determinare la retta tangente a

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \log(x-5),$$

nel punto $x = 6$.

ESERCIZIO. Determinare gli asintoti obliqui di

$$f(x) = (x - 4) \arctan \left| \frac{x}{x - 1} \right|.$$

9.4. Punti di non derivabilità.

Definizione[DERIVATA DESTRA/SINISTRA]

Sia $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Si dice che f è **derivabile da destra** in a , se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (9.4.1)$$

Si dice che f è **derivabile da sinistra** in b , se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}. \quad (9.4.2)$$

Le derivate destra/sinistra di f in a/b si indicano con uno dei seguenti simboli

$$Df^+(a), \quad f'_+(a) \quad / \quad Df^-(b), \quad f'_-(b).$$

Osservazione

Non è difficile verificare che se $x_0 \in (a, b)$, allora f è derivabile in x_0 se e solo se è derivabile da destra e da sinistra in x_0 e $Df^+(x_0) = Df^-(x_0)$. $\square$

Definizione[PUNTO ANGOLOSO]

Sia $f(a, b) \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se f è continua in x_0 e derivabile da sinistra e da destra in x_0 e se

$$D^+f(x_0) \neq D^-f(x_0),$$

allora $(x_0, f(x_0))$ si dice **punto angoloso** di f .

Esempio. Sia $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Dato che

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

si verifica subito che

$$Df(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad x \neq 0,$$

e che

$$D^+f(0) = 1, \quad D^-f(0) = -1.$$

Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ e ha un punto angoloso in $(0, 0)$.

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni:

$$\left| \frac{x}{x - 1} \right|, \quad |\log x|, \quad |\arctan(x^2 - 1)|.$$

Definizione[PUNTO DI TANGENZA VERTICALE]

Sia $f[a, b] \mapsto \mathbb{R}$ e $x_0 \in [a, b]$. Se f è continua in x_0 e se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty, \quad (9.4.3)$$

o se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty, \quad (9.4.4)$$

allora $(x_0, f(x_0))$ si dice **punto di tangenza verticale** di f .

Osservazione

Se $x_0 = a$ o $x_0 = b$, il limite per $x \rightarrow x_0$ è da intendersi nel senso del limite destro o sinistro rispettivamente. $\square$

Esempio. Sia $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$. Dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = +\infty.$$

Quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$ e ha un punto di tangenza verticale in $(0, 0)$.

Esempio. Sia $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$. Dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty,$$

f non è derivabile da destra in $x_0 = 0$ e ha un punto di tangenza verticale in $(0, 0)$.

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni

$$e^{\sqrt{x}}, \quad \log(1 - x^{\frac{3}{5}}), \quad \sqrt{x + x^2}.$$

ESERCIZIO. Dire se la funzione $f(x) = \frac{1}{\log x}$ si può estendere per continuità in $x_0 = 0$. In tal caso studiare la derivabilità di f in $[0, +\infty)$.

Definizione[PUNTO DI CUSPIDE]

Sia $f(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se f è continua in x_0 e se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty, \quad (9.4.5)$$

o se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mp\infty, \quad (9.4.6)$$

allora $(x_0, f(x_0))$ si dice **punto di cuspidi** di f .

Esempio. Sia $f(x) = |x|^{\frac{1}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$. Dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{|x|^{\frac{1}{3}}}{x} = \pm\infty,$$

f non è derivabile in $x_0 = 0$ e ha un punto di cuspidi in $(0, 0)$.

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni

$$e^{\sqrt{|x|}}, \quad \sin(x^{\frac{2}{3}}), \quad \sqrt{|x + x^2|}.$$

ESERCIZI: Studiare la derivabilità delle seguenti funzioni

$$\cos(x^{\frac{1}{3}}), \quad \cos|x|, \quad \sqrt{\tan x} \quad \sqrt{|\tan x|}.$$

Negli esempi di non derivabilità visti fino a questo punto si è sempre fatto uso del limite del rapporto incrementale per valutare il comportamento di f in x_0 . Ci si potrebbe domandare se sia possibile invece calcolare prima la derivata e successivamente usare il limite della derivata stessa per caratterizzare il punto di non derivabilità.

Esempio. Sia $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$. Si ha $Df(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $x \neq 0$, e inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0} Df(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = +\infty.$$

Quindi in questo caso il limite di Df coincide con il limite del rapporto incrementale. Si sarebbe quindi potuto dedurre per questa via che $(0, 0)$ è un punto di tangenza verticale per f .

Più in generale si ha il seguente:

TEOREMA [TEOREMA DI CONTINUITÀ DELLA DERIVATA PRIMA]

Sia $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in [a, b]$. Se f è derivabile in $[a, b] \setminus \{x_0\}$ continua in $[a, b]$ e se esiste finito o infinito il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} Df(x), \quad (9.4.7)$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} Df(x). \quad (9.4.8)$$

Dimostrazione.[Facoltativa] La dimostrazione di questo Teorema è conseguenza del Teorema di Lagrange o del Valor Medio, vedere §9.5. Il Lettore è invitato a completare i dettagli per esercizio. ■

Osservazione

Se $x_0 = a$ o $x_0 = b$, il limite per $x \rightarrow x_0$ è da intendersi nel senso del limite destro o sinistro rispettivamente. □

Osservazione[DISCONTINUITÀ ELIMINABILI]

Il nome del teorema è dovuto alla seguente osservazione. Se il limite nella (9.4.7) esiste finito,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} Df(x) = L \in \mathbb{R},$$

si ha, usando la definizione di derivata e il Teorema,

$$Df(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} Df(x),$$

ovvero $Df(x)$ è continua in x_0 . È interessante osservare che se g è una funzione arbitraria, e non la derivata di una funzione, il risultato è falso. Per esempio

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

verifica

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1,$$

ma ovviamente non è continua perché $g(0) = 0$. Quindi il risultato dice che una funzione derivata non può avere discontinuità eliminabili.

È tuttavia necessaria per la validità del Teorema la condizione di esistenza del limite di Df . Infatti, il

seguente controesempio mostra che se il limite di Df non esiste, in generale non è vero che il limite del rapporto incrementale non esiste. Al contrario, sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che f è continua in $\mathbb{R}$ e derivabile in $\mathbb{R}$. Infatti

$$Df(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \quad (9.4.9)$$

e usando la definizione tramite il rapporto incrementale,

$$Df(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0. \quad (9.4.10)$$

Tuttavia, il limite di $Df(x)$ per $x \rightarrow 0$ (verificare per esercizio) non esiste. In questo caso la funzione derivata prima definita nella (9.4.9) per $x \neq 0$ e dalla (9.4.10) ha una discontinuità di seconda specie in $x = 0$. $\square$

9.5. Teoremi di Fermat, Rolle, Lagrange.

Per dimostrare il Teorema di continuità della derivata prima, per stabilire il nesso tra segno della derivata e la monotonia, sono fondamentali i Teoremi di Fermat, Rolle, Lagrange.

Per l'enunciato del Teorema di Fermat è necessaria la nozione di **estremo locale** di una funzione reale.

Definizione[ESTREMO (MASSIMO/MINIMO) LOCALE]

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Si dice che x_0 è un punto di estremo locale (per f) se esiste un intorno $\mathcal{U} \subseteq (a, b)$ di x_0 tale che:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in \mathcal{U}, \text{ (MINIMO LOCALE),}$$

oppure,

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in \mathcal{U}, \text{ (MASSIMO LOCALE).}$$

TEOREMA [FERMAT] Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se f è derivabile in x_0 , e se x_0 è un punto di estremo locale per f , allora

$$Df(x_0) = 0.$$

Dimostrazione.

Scambiando f con $-f$ se necessario, possiamo supporre senza perdita di generalità che x_0 sia un minimo locale. Esiste allora un intervallo aperto $I \subseteq (a, b)$, tale che $x_0 \in I$ e

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in I.$$

Se ne deduce che

$$Df^+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

e

$$Df^-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Ma f è derivabile in x_0 , e allora si ha

$$Df(x_0) = Df^+(x_0) \geq 0, \quad Df(x_0) = Df^-(x_0) \leq 0,$$

ovvero $Df(x_0) = 0$. $\blacksquare$

Esempio. Se $f(x) = e^{x^4}$, è facile verificare che $x_0 = 0$ è un punto di minimo stretto (minimo forte) per f e infatti $Df(0) = 0$. Viceversa $f(x) = x^3$ verifica $Df(0) = 0$, ma si verifica subito che $x_0 = 0$ non è di

estremo. È bene in particolare ricordare che il Teorema di Fermat fornisce, per una funzione f derivabile in un punto x_0 , una condizione **sufficiente** affinché f abbia derivata nulla in x_0 , ovvero che x_0 sia di estremo locale, e **necessaria** affinché f abbia in x_0 un estremo locale, ovvero che la derivata in x_0 sia nulla. In generale si può solo dire che se f è derivabile in x_0 , allora $Df(x_0) = 0$ è condizione necessaria e sufficiente affinché f abbia tangente orizzontale in x_0 .

TEOREMA [ROLLE]

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e se

$$f(a) = f(b),$$

allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$Df(c) = 0. \quad (9.5.1)$$

Dimostrazione.

Senza perdita di generalità possiamo supporre che $f(a) = f(b) = 0$.

Se $f(x) = 0, \forall x \in (a, b)$, possiamo definire c scegliendo un punto arbitrario $c \in (a, b)$, per il quale certamente vale la (9.5.1).

Supponiamo quindi che esista $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) \neq 0$. Scambiando f con $-f$ se necessario, possiamo supporre senza perdita di generalità che $f(x_0) > 0$. Dal Teorema di Weierstrass f assume il suo massimo in un punto $c_M \in [a, b]$. Per definizione di massimo, si ha

$$f(c_M) = \max_{[a, b]} f \geq f(x_0) > 0,$$

e quindi $c_M \in (a, b)$, ovvero $c_M \notin \{a, b\}$. Quindi c_M è un punto di estremo relativo per f , $c_M \in (a, b)$ e dato che f è derivabile in (a, b) , dal Teorema di Fermat, segue che $Df(c_M) = 0$. ■

TEOREMA [LAGRANGE o DEL VALOR MEDIO]

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) , allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$Df(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (9.5.2)$$

Dimostrazione.

Sia

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right).$$

Si verifica facilmente che $h(a) = 0 = h(b)$. Inoltre h è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Dal Teorema di Rolle, esiste $c \in (a, b)$ tale che $Dh(c) = 0$, ovvero

$$Df(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

che è equivalente alla (9.5.2). ■