

LEZIONI 20-21

CONTENTS

8.4.	Teorema degli Zeri e Teorema di Weierstrass	95
8.5.	Ulteriori nozioni sui limiti di funzioni.	101
8.6.	Asintoto obliquo.	107
8.7.	Funzione Inversa. Continuità della funzione inversa.	107

[B] Dispense a cura del docente.

8.4. Teorema degli Zeri e Teorema di Weierstrass.

TEOREMA [TEOREMA DEGLI ZERI]

Siano $-\infty < a < b < +\infty$ e $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua.

Se $f(a)f(b) < 0$, esiste $c \in (a, b) : f(c) = 0$.

Dimostrazione.

Per ipotesi si ha $f(a)f(b) < 0$. Quindi o $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ o $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Se $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, moltiplicando f per -1 , otteniamo una funzione che verifica invece la prima ipotesi ed è continua in $[a, b]$, ovvero che verifica le ipotesi date dal Teorema. Possiamo quindi supporre senza perdita di generalità che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Poniamo $a_0 = a$, $b_0 = b$ e definiamo $M = \frac{b-a}{2}$. Si ha quindi

$$a_0 < b_0, \quad 0 < b_0 - a_0 = 2M, \quad f(a_0) < 0, \quad f(b_0) > 0.$$

Se $f(\frac{a_0+b_0}{2}) = 0$ poniamo $c = \frac{a_0+b_0}{2}$ e la dimostrazione è terminata.

Possiamo supporre quindi senza perdita di generalità che $f(\frac{a_0+b_0}{2}) \neq 0$.

Se $f(\frac{a_0+b_0}{2}) > 0$, poniamo $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$.

Se $f(\frac{a_0+b_0}{2}) < 0$, poniamo $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, $b_1 = b_0$.

In entrambe i casi, è chiaro che,

$$a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0,$$

$$0 < b_1 - a_1 = M, \quad \text{e} \quad f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0.$$

La funzione f è continua e verifica le ipotesi del Teorema su $[a_1, b_1]$. Possiamo quindi ripetere l'argomento (METODO DI BISEZIONE), e costruire per induzione una successione di intervalli $[a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tali che

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$0 < b_n - a_n = \frac{M}{2^{n-1}}, \quad \text{e} \quad f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dato che a_n è monotona crescente e limitata (perché $a_n \leq b_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$), allora è convergente (vedere [B] §7.5) ad un numero reale, che indichiamo con $\bar{a}$, $a_n \rightarrow \bar{a}$.

Dato che b_n è monotona decrescente e limitata (perché $b_n \geq a_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$), allora è convergente ad un numero reale, che indichiamo con $\bar{b}$, $b_n \rightarrow \bar{b}$.

Dato che $\frac{M}{2^{n-1}} \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$, e dato che

$$0 < b_n - a_n = \frac{M}{2^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dal Teorema di confronto 7.4.2 in [B] §7.4, si ha

$$0 \leq \bar{b} - \bar{a} \leq 0.$$

Quindi $\bar{b} = \bar{a}$. Sia $c = \bar{b} = \bar{a}$ il valore comune definito da $\bar{b} = \bar{a}$ grazie al metodo di bisezione.

Dimostriamo ora che $f(c) = 0$. Infatti, dato che $a_n \rightarrow c$, $b_n \rightarrow c$, e dato che f è continua, si ha

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq 0, f(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) \geq 0.$$

Quindi $f(c) = 0$. ■

Osservazione

Nella dimostrazione si è detto che le successioni a_n, b_n , $n \in \mathbb{N}$, vengono costruite iterando per induzione l'argomento di bisezione. Per essere più precisi, la definizione per induzione di a_n, b_n è la seguente:

$$a_0 = a, b_0 = b.$$

Dati a_k, b_k , supponiamo senza perdita di generalità che $f(\frac{a_k+b_k}{2}) \neq 0$. Definiamo allora

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}, & \text{se } f(\frac{a_k+b_k}{2}) > 0; \\ a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}, b_{k+1} = b_k, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

□

COROLLARIO

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $\text{Im}(f)$ è un intervallo.

Dimostrazione.

Per definizione, $\text{Im}(f)$ è un intervallo se e solo se

$$y_1 \in \text{Im}(f), y_2 \in \text{Im}(f), y_1 < z < y_2 \implies z \in \text{Im}(f).$$

Si tratta quindi di far vedere che se $y_1 < z < y_2$, esiste $c \in I : f(c) = z$. Siano quindi $\{x_1, x_2\} \subset I$ tali che $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Possiamo supporre senza perdita di generalità che $x_1 < x_2$. La funzione $g(x) = f(x) - z$ è continua in $[x_1, x_2]$ e verifica $g(x_1) < 0$, $g(x_2) > 0$. Per il Teorema degli Zeri, esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che $g(c) = f(c) - z = 0$. ■

Osservazione

Nella dimostrazione si dice che si può supporre senza perdita di generalità che $x_1 < x_2$. Infatti, se si avesse $x_2 < x_1$, si potrebbero scambiare y_1 e y_2 (ovvero passare da f a $-f$) e ottenere nuovamente $x_1 < x_2$. Un modo equivalente di procedere, che non richiede lo scambio di y_1 e y_2 , è quello di osservare che g è continua in $[\min\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_2\}]$.

Il Teorema 8.4.1 del §8.1 può essere migliorato assumendo la continuità della funzione f . Infatti si ha:

TEOREMA [PERMANENZA DEL SEGNO PER LE FUNZIONI CONTINUE]

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0 (< 0),$$

esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 tale che $f(x) > 0 (< 0)$, $\forall x \in \mathcal{U} \cap \{X \setminus \{x_0\}\}$.

In particolare, sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua in x_0 . Se $f(x_0) > 0 (< 0)$, esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 tale che $f(x) > 0 (< 0)$, $\forall x \in \mathcal{U} \cap X$.

Dimostrazione.[Facoltativa](Dimostrare per esercizio).

Osservazione[Facoltativa]

Utilizzando il Teorema di permanenza del segno si può dare una dimostrazione alternativa del Teorema

degli Zeri. Dimostrare per esercizio che nelle ipotesi del Teorema degli Zeri, se per esempio $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, allora definendo

$$c = \sup\{x \in [a, b] : f(y) < 0, \forall y < x\},$$

si ha $f(c) = 0$. **Suggerimento.** Dimostrare utilizzando il Teorema di permanenza del segno che $a < c < b$ e che non può aversi nè $f(c) < 0$ nè $f(c) > 0$. $\square$

Esempio. La funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0 \end{cases}$ verifica $f(-2) = -1 < 0$, $f(2) = 1 > 0$ ma

non è continua e non assume nessun valore $y \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. In particolare la sua immagine non è un intervallo: $\operatorname{Im}(f) = \{-1, 0, 1\}$.

Esempio. La funzione $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (0, 1], \\ -1, & x = 0 \end{cases}$, verifica $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 2 > 0$, ma non è continua in $[0, 1]$ e non assume il valore $y = 0$. In particolare la sua immagine non è un intervallo: $\operatorname{Im}(f) = \{-1\} \cup (1, 2]$. Inoltre $f(0) = -1 < 0$ e non esiste nessun intorno $\mathcal{U}$ di $x_0 = 0$ tale che $f(x) < 0 \forall x \in \mathcal{U} \cap [0, 1]$. Infatti in questo caso $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1^+$ e il teorema di permanenza del segno continua a valere nel senso del limite destro.

Esercizio 1. Si vuole provare l'esistenza di una soluzione dell'equazione

$$e^{-x} = \log x.$$

Sia $f(x) = e^{-x} - \log x$, $\operatorname{dom}(f) = (0, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Dal Teorema di permanenza del segno, è chiaro che $\exists b > 1 : f(b) < 0$, e $\exists a \in (0, 1) : f(a) > 0$. Dato che f è continua in $[a, b]$, il Teorema degli Zeri implica che $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$, ovvero una soluzione dell'equazione data $e^{-c} = \log c$. Osserviamo che dal punto di vista dell'applicazione del Teorema non è necessario conoscere la disposizione relativa di a e b . Al contrario, è sufficiente che f sia continua in $[\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$. La dizione utilizzata in questo caso $a \in (0, 1)$ e $b > 1$ è solo un modo per puntualizzare che, per avere un'informazione sul segno di f , si usa il Teorema di permanenza del segno, che garantisce, in questo caso, che f è definitivamente strettamente positiva per $x \rightarrow 0^+$ e strettamente negativa per $x \rightarrow +\infty$.

Osservazione[ESISTENZA DI UNA RADICE REALE PER I POLINOMI DI GRADO DISPARI]

Sia $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} \neq 0$ e $P_{2k+1}(x) = a_{2k+1}x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $x \in \mathbb{R}$, un polinomio di grado $2k+1$ (**dispari**). Dividendo per a_{2k+1} , possiamo supporre senza perdita di generalità che $a_{2k+1} = 1$. Si ha allora

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_{2k+1}(x) = \pm\infty,$$

e quindi esistono $-\infty < a < 0 < b < +\infty$ tali che $P_{2k+1}(a) < 0$ e $P_{2k+1}(b) > 0$. Dal Teorema degli Zeri, segue che esiste almeno uno zero di P_{2k+1} in (a, b) . Abbiamo quindi dimostrato il seguente:

TEOREMA

Ogni polinomio reale di grado dispari ammette almeno una radice reale.

$\square$

TEOREMA [WEIERSTRASS]

Siano $-\infty < a < b < +\infty$ e $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua.

Allora f ammette massimo e minimo in $[a, b]$.

Dimostrazione.

Siano $M = \sup_{[a,b]} f$ e $m = \inf_{[a,b]} f$. Dimostriamo che $M = \max_{[a,b]} f$. Si può determinare una successione

$\{y_n\} \subset \mathbb{R} : y_n \rightarrow M, y_n < M, \forall n \in \mathbb{N}$. Infatti, se $M = +\infty$, possiamo definire $y_n = n \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$. Se $M \in \mathbb{R}$, possiamo definire $y_n = M - \frac{1}{n} \rightarrow M^-, n \rightarrow +\infty$. Dato che $y_n < M, \forall n \in \mathbb{N}$, allora dalla definizione di $\sup$ si ha che y_n non è un maggiorante per $\text{Im}(f)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) \geq y_n$, e in particolare

$$y_n \leq f(x_n) \leq M, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (8.4.1)$$

Dato che $\{x_n\} \subset [a, b]$, $\{x_n\}$ è limitata. Dal Teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione convergente $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} : x_{n_k} \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}$. D'altra parte, $\{x_{n_k}\} \subset [a, b]$ e $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$, implicano che $\bar{x}$ è un punto di accumulazione per $[a, b]$. Ma $[a, b]$ è chiuso, quindi $\bar{x} \in [a, b]$. Dato che f è continua, usando la (8.4.1), concludiamo che

$$M = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k} \leq f(\bar{x}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) \leq M.$$

Quindi $f(\bar{x}) = M$. Questa uguaglianza implica che:

(i) $M < +\infty$. Perché M è uno dei valori assunti da f in $[a, b]$.

(ii) $M = \max_{[a,b]} f$, perché $f(\bar{x}) = M, \bar{x} \in [a, b]$.

Quindi f ammette massimo in $[a, b]$. Per dimostrare che $m = \min_{[a,b]} f$ è sufficiente osservare che $\max_{[a,b]}(-f) = -\min_{[a,b]} f$. Dato che $(-f)$, per quanto appena dimostrato, ammette massimo $-m = \max_{[a,b]}(-f)$, concludiamo che $-m = -\min_{[a,b]} f$, ovvero che $\min_{[a,b]} f = m$. ■

Osservazione

Un'altra formulazione del Teorema di Weierstrass è la seguente:

Sia $f : X \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua. Se X è **chiuso e limitato**, f ammette massimo e minimo in X .

Non è difficile verificare che, con le opportune modifiche, la dimostrazione fornita per il caso $X = [a, b]$ funziona anche in questo caso. □

Esempio. La funzione $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 2 \\ x, & x \in (-2, 2), \\ 0, & x = -2 \end{cases}$ non è continua in $[-2, 2]$ e non ammette né massimo né minimo in $[-2, 2]$. La funzione $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ è continua in $\mathbb{R}$, che però non è limitato e $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$, che non è un minimo e $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$. La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$ è continua in $(-1, 1)$, che però non è chiuso e $\min_{(-1,1)} f = 0$, che è minimo, ma $\sup_{(-1,1)} f = +\infty$. La funzione $f(x) = \tan x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è continua in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, che però non è chiuso e $\inf_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} f = -\infty$ e $\sup_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} f = +\infty$.

Esercizio. Determinare (se esistono) minimo e massimo dell'insieme

$$A = \{3 + |e^{-x} - \log x|, x \in (0, +\infty)\}.$$

Si osserva innanzitutto che il problema è equivalente a quello di determinare minimo e massimo della funzione $g(x) = 3 + |f(x)|$, con $f(x) = e^{-x} - \log x, x \in (0, +\infty)$. È chiaro che g è continua su $(0, +\infty)$, che però non è chiuso e limitato. Quindi il Teorema di Weierstrass non si può applicare. Infatti A è

superiormente illimitato, perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, e quindi g non ammette massimo, $\sup_{(0, +\infty)} g = \sup A = +\infty$. D'altra parte, è chiaro che $g(x) = 3 + |f(x)| \geq 3 \forall x \in (0, +\infty)$. Quindi, $\inf_{(0, +\infty)} g \geq 3$. Se esiste $c \in (0, +\infty)$ tale che $f(c) = 0$, si ha $3 = g(c) = 3 + f(c) \geq \inf_{(0, +\infty)} g$, e quindi l'estremo inferiore di g coincide con 3, $\inf_{(0, +\infty)} g = 3$, e in particolare è assunto in $x_0 = c$, e quindi è minimo, $\min_{(0, +\infty)} g = 3$. A questo punto, l'Esercizio 1 di cui sopra, garantisce che tale numero esiste, e quindi $\min A = 3$.

Esercizio. Determinare (se esistono) massimo e minimo di $f(x) = \begin{cases} \arctan(\log|x|), & x \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \end{cases}$ su $X_1 = [-e, e]$ e $X_2 = \mathbb{R}$.

Primo Caso: $X_1 = [-e, e]$, $f : X_1 \mapsto \mathbb{R}$.

Si è visto negli esercizi in [B] §8.2 che f è continua in $\mathbb{R}$. Dato che $[-e, e]$ è chiuso e limitato, si può applicare il Teorema di Weierstrass su $[-e, e]$. Quindi f ammette massimo e minimo in questo caso. Per determinare massimo e minimo, dato che f è pari, è sufficiente studiare f su $[0, e]$. Dato che f è la composta in $(0, e]$, di due funzioni strettamente monotone crescenti, è a sua volta strettamente monotona crescente in $(0, e]$. Per le proprietà degli estremi delle funzioni monotone su di un intervallo (vedere [B] §4.4), f ha massimo

$$\max_{[-e, e]} f = \max_{(0, e]} f = f(e) = \arctan(\log e) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Dato che f è strettamente monotona crescente in $(0, e]$, si ha (provare a dare una dimostrazione di questo fatto e poi vedere il Teorema seguente su limiti ed estremi di funzioni monotone)

$$\inf_{(0, e]} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Ma f è continua in $[0, e]$ e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Quindi l'inf è un valore assunto da f e quindi è il minimo

$$\min_{[-e, e]} f = \min_{[0, e]} f = f(0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Secondo Caso: $X_2 = \mathbb{R}$, $f : X_2 \mapsto \mathbb{R}$.

Si è visto negli esercizi in [B] §8.2, che f è continua in $\mathbb{R}$. Dato che $\mathbb{R}$ non è limitato, non si può applicare il Teorema di Weierstrass su $\mathbb{R}$. Dato che f è pari, è sufficiente studiare il problema di massimo/minimo per f su $[0, +\infty)$. Dato che f è la composta, in $(0, +\infty)$, di due funzioni strettamente monotone crescenti, è a sua volta strettamente monotona crescente. Come sopra per le proprietà degli estremi delle funzioni monotone (vedere [B] §4.4), f non ha massimo, e dato che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, si ha $\sup_{\mathbb{R}} f = \sup_{[0, +\infty)} f = \frac{\pi}{2}$.

Viceversa, ragionando come nel Primo Caso, concludiamo che f ammette minimo

$$\min_{\mathbb{R}} f = \min_{[0, +\infty)} f = f(0) = -\frac{\pi}{2}.$$

■

Si può a questo punto meglio apprezzare l'importanza del seguente Teorema sugli estremi delle funzioni monotone (già enunciato in [B] §4.4):

TEOREMA [ESTREMI DI FUNZIONE MONOTONE SU DI UN INTERVALLO]

Sia $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ crescente. Allora $\min f = f(a)$, $\max f = f(b)$.

Sia $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ strettamente crescente. Allora f non ammette né massimo né minimo.

Dato che l'esistenza del massimo/minimo su di un intervallo chiuso e limitato è garantita in generale **solo** per le funzioni continue, si capisce ora l'importanza di avere un risultato di esistenza del massimo/minimo che non richiede l'ipotesi di continuità.

Concludiamo questo paragrafo con il seguente Teorema che "completa" il Teorema sugli estremi delle funzioni monotone.

TEOREMA [LIMITI ED ESTREMI DI FUNZIONE MONOTONE]

(i) Sia $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ monotona crescente. Allora il limite di f per $x \rightarrow b^-$ e $x \rightarrow a^+$ (si pone $x \rightarrow +\infty$ se $b = +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ se $a = -\infty$), esiste, finito o infinito, e si ha

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{(a, b)} f,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{(a, b)} f.$$

(ii) Sia $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ strettamente crescente. Allora f non ammette né massimo né minimo e si ha

$$\sup_{(a, b)} f = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x),$$

$$\inf_{(a, b)} f = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Dimostrazione.[Facoltativa]

(i) Sia $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ monotona crescente e $M = \sup_{(a, b)} f$. Per semplicità, consideriamo solo il caso $b \in \mathbb{R}$ e $M \in \mathbb{R}$. Si tratta di far vedere che

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = M,$$

ovvero che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - M| < \varepsilon, \forall x \in (b - \delta_\varepsilon, b). \quad (8.4.2)$$

Dato che $M = \sup_{(a, b)} f$, la (8.4.2) è equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : M - \varepsilon < f(x) \leq M, \forall x \in (b - \delta_\varepsilon, b). \quad (8.4.3)$$

Sia quindi $\varepsilon > 0$ fissato arbitrariamente e sia $y_\varepsilon \in \mathbb{R} : M > y_\varepsilon > M - \varepsilon$. Per definizione di $\sup$, si ha che y_ε non è un maggiorante per f , quindi $\exists x_\varepsilon \in (a, b) : f(x_\varepsilon) \geq y_\varepsilon$. Concludiamo quindi che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in (a, b) : M - \varepsilon < y_\varepsilon \leq f(x_\varepsilon) \leq M,$$

dove abbiamo usato il fatto che, per definizione di $\sup$, se $x_\varepsilon \in (a, b)$, si ha $f(x_\varepsilon) \leq M$. Sia ora $\delta_\varepsilon = \frac{b - x_\varepsilon}{2}$. Dato che f è monotona, si ha

$$f(x) \geq f(b - \delta_\varepsilon) \geq f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon, \forall x \in (b - \delta_\varepsilon, b),$$

e quindi, usando nuovamente il fatto che, per definizione di $\sup$, se $x \in (a, b)$, si ha $f(x) \leq M$ otteniamo, la (8.4.3).

Per dimostrare che $m = \inf_{(a, b)} f = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ è sufficiente osservare che $\sup_{y \in (-b, -a)} (-f(-y)) = - \inf_{(a, b)} f$. Dato che per $(-f(-y))$, per quanto appena dimostrato, si ha $-m = \sup_{(-b, -a)} (-f(-y)) = - \lim_{y \rightarrow (-a)^-} f(-x) = - \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, concludiamo che $-m = - \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, ovvero che $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m$.

(ii) Sia $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ strettamente crescente. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che f ammetta massimo in (a, b) , che indichiamo con $M = \max_{(a, b)} f$. Sia quindi $x_0 \in (a, b) : f(x_0) = M$. Dato che $x_0 < b$, esiste $x_1 \in (x_0, b)$ e per la stretta monotonia di f , si ha $f(x_1) > f(x_0) = M$, ovvero M non è il massimo. Questa contraddizione mostra che l'ipotesi iniziale era errata, ovvero che non esiste il massimo di f su

(a, b) . L'argomento per il minimo è lo stesso se si scambia f con $-f$. Dal punto (i) si ottiene poi la tesi per il sup / inf. ■

8.5. Ulteriori nozioni sui limiti di funzioni.

Siano $f : X \mapsto \mathbb{R}$, $g : X \mapsto \mathbb{R}$ due funzioni infinitesime per $x \rightarrow x_0$, ovvero

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Supponiamo che $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ e che $g(x) > 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Se inoltre

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

segue dalla definizione di limite che per ogni $\varepsilon > 0$, si ha

$$0 \leq f(x) < \varepsilon g(x), \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0.$$

Quindi f è definitivamente "molto più piccola di g ".

Definizione[ORDINE DI INFINITESIMO RELATIVO]

Siano $f : X \mapsto \mathbb{R}$, $g : X \mapsto \mathbb{R}$ due funzioni infinitesime per $x \rightarrow x_0$, ovvero

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

si dice che " f è un **infinitesimo di ordine superiore a g** per $x \rightarrow x_0$ ", o si dice che " f è un **o-piccolo di g** per $x \rightarrow x_0$ " e si scrive

$$f = o(g), \quad x \rightarrow x_0.$$

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \notin \{0, \pm\infty\},$$

si dice che " f e g hanno lo stesso ordine di infinitesimo".

Osservazione

La relazione $f = o(g)$, $x \rightarrow x_0$, si esprime talvolta scrivendo

$$f \ll g, \quad x \rightarrow x_0.$$

Esercizio. Per ogni $\alpha > 0$, e per ogni $\beta > 0$, determinare l'ordine di infinitesimo relativo di $f(x) = |x|^\alpha$ e $g(x) = \frac{1}{|\log |x||^\beta}$, $x \rightarrow 0$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha \left(\frac{1}{|\log |x||^\beta} \right)^{-1} = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha |\log |x||^\beta = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha |\log t|^\beta =$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} e^{\alpha y} |y|^\beta = \lim_{s \rightarrow +\infty} e^{-\alpha s} |s|^\beta = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s^\beta}{e^{\alpha s}} = 0^+.$$

Quindi

$$|x|^\alpha = o\left(\frac{1}{|\log |x||^\beta}\right), \quad x \rightarrow 0.$$

Esercizio. Per ogni $\alpha > 0$, e per ogni $\beta > 0$, determinare l'ordine di infinitesimo relativo di $f(x) = |x|^\alpha$ e $g(x) = e^{-\frac{1}{|x|^\beta}}$, $x \rightarrow 0$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^\alpha}{e^{-\frac{1}{|x|^\beta}}} = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha e^{\frac{1}{|x|^\beta}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha e^{\frac{1}{t^\beta}} =$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{y^\beta}}{y^\alpha} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{e^s}{s^{\frac{\alpha}{\beta}}} = +\infty.$$

Quindi

$$e^{-\frac{1}{|x|^\beta}} = o(|x|^\alpha), \quad x \rightarrow 0,$$

perché se $\frac{|x|^\alpha}{e^{-\frac{1}{|x|^\beta}}} \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 0$, si ha $\frac{e^{-\frac{1}{|x|^\beta}}}{|x|^\alpha} \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0$.

Osservazione

Più in generale, se f e g sono infinitesime per $x \rightarrow x_0$, e se

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow x_0, \quad (8.5.1)$$

allora

$$g = o(f), \quad x \rightarrow x_0,$$

perché dalla (8.5.1) si ha

$$\frac{g(x)}{f(x)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0.$$

□

Esercizio. Disporre in ordine di infinitesimo crescente le funzioni

$$(\sin x)^2, \quad \frac{1}{(\log |x|)^3}, \quad e^{-\frac{1}{\sqrt{|x|}}},$$

per $x \rightarrow 0$.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^2 \left(\frac{1}{(\log |x|)^3} \right)^{-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x^2} \cdot x^2 (\log |x|)^3 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 x^2 (\log |x|)^3 = 1 \cdot 0 = 0,$$

e quindi $(\sin x)^2 = o\left(\frac{1}{(\log |x|)^3}\right)$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{e^{-\frac{1}{\sqrt{|x|}}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x^2} \cdot x^2 e^{\frac{1}{\sqrt{|x|}}} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty,$$

e quindi $e^{-\frac{1}{\sqrt{|x|}}} = o((\sin x)^2)$. Dunque la disposizione cercata è

$$\frac{1}{(\log |x|)^3}, \quad (\sin x)^2, \quad e^{-\frac{1}{\sqrt{|x|}}}.$$

Osservazione[ORDINE DI INFINITESIMO ASSOLUTO]

In alcuni testi, si definisce $(x - x_0)$ come l'infinitesimo campione per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$, e si definisce poi l'ordine di infinitesimo di **qualsunque funzione** relativamente a $(x - x_0)$. In questo senso si dice per esempio che, se $\alpha > 0$, $|x - x_0|^\alpha$ ha ordine di infinitesimo α . In questo senso, la funzione $(\sin x)^2$, che ha lo stesso ordine di infinitesimo di x^2 con le nostre notazioni, ha ordine di infinitesimo 2 per $x \rightarrow 0$.

Le seguenti regole "algebriche" per gli o -piccolo sono una immediata conseguenza della definizione

- (i) $o(f) + o(f) = o(f)$;
- (ii) $o(o(f)) = o(f)$;
- (iii) $o(f + o(f)) = o(f)$;
- (iv) $g \cdot o(f) = o(gf)$;

I limiti notevoli in [B] §8.3 si possono scrivere, nel linguaggio degli o -piccolo ragionando come segue. Ricordiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (8.5.2)$$

Dalla (8.5.2), si ottiene subito che

$$\frac{\sin x - x}{x} = \frac{\sin x}{x} - 1 \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0,$$

e quindi si ha $\sin x - x = o(x)$, $x \rightarrow 0$, ovvero

$$\sin x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0. \quad (8.5.3)$$

In modo del tutto analogo si ha

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0, \quad (8.5.4)$$

$$\log(1+x) = x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (8.5.5)$$

$$e^x = 1 + x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (8.5.6)$$

$$a^x = 1 + (\log a)x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad \forall a > 0, a \neq 1, \quad (8.5.7)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (8.5.8)$$

BREVE DIGRESSIONE SULLA NOTAZIONE $o(1)$ E L'UTILIZZO DEGLI o -PICCOLI.

Si indica con

$$o(1)$$

qualunque funzione infinitesima. Dato che abbiamo definito la notazione o -piccolo solo per le funzioni infinitesime, è chiaro che $o(1)$ non rientra nel caso di specie. Tuttavia, questa definizione è giustificata se si pensa che la notazione $o(f)$ indica semplicemente

”qualunque funzione che tende a 0 più velocemente di f ”.

Per esempio $o(x)$ indica qualunque funzione che tende a 0 più velocemente di x per $x \rightarrow 0$. In questo senso è importante porre attenzione al fatto che la quantità

$$\frac{o(x)}{|x|^\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1)$$

ha limite ben definito per $x \rightarrow 0$, perché si ha

$$\frac{o(x)}{|x|^\alpha} = \frac{o(x)}{x} \cdot (x|x|^{-\alpha}) \rightarrow 0 \cdot 0, \quad x \rightarrow 0,$$

cosa che è equivalente a dire che, utilizzando la (iv) di cui sopra,

$$\frac{o(x)}{|x|^\alpha} = o\left(\frac{x}{|x|^\alpha}\right) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0,$$

e che il caso limite $\alpha = 1$ si può, leggere come segue

$$\frac{o(x)}{x} = o\left(\frac{x}{x}\right) = o(1) \rightarrow 0, x \rightarrow 0.$$

Al contrario, la quantità

$$\frac{o(x)}{|x|^\alpha}, \alpha > 1$$

NON ha limite ben definito per $x \rightarrow 0$, perché $o(x)$ potrebbe essere per esempio $|x|^{2\alpha}$ o $e^{-\frac{1}{|x|}}$ e allora il limite sarebbe 0, ma potrebbe essere anche $|x|^\beta$, con $\beta \in (1, \alpha)$ o $|x|^\alpha \log |x|$ e allora il limite sarebbe $+\infty$.

È bene ricordare che l'uso della notazione o -piccolo è utile in alcune situazioni nelle quali i cambiamenti di variabili e i passaggi algebrici per il calcolo dei limiti sarebbero più lunghi e/o più complicati, o anche in molte situazioni in cui i limiti notevoli noti non sono sufficienti a risolvere le forme indeterminate. Torneremo su questo punto quando studieremo il Polinomio di Taylor. Per il momento bisogna tenere presente che sostituire per esempio

$$\sin x = x + o(x)$$

in una espressione di limite equivale semplicemente a dire che si indica con $o(x)$ la quantità $\sin x - x$, sperando che, UTILIZZANDO DALLA SOSTITUZIONE IN POI SOLO IL FATTO CHE $\frac{o(x)}{x} \rightarrow 0, x \rightarrow 0$, il calcolo posto in essere conduca ad un risultato non ambiguo. A tale proposito, è utile considerare il seguente semplice esempio:

Esempio. Si vuole calcolare il limite per $x \rightarrow 0$ di

$$\frac{\tan x - \sin x}{\sqrt{|x|}}.$$

Dato che $\tan x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$, si scrive

$$\frac{\tan x - \sin x}{\sqrt{|x|}} = \frac{(x + o(x)) - (x + o(x))}{\sqrt{|x|}} = \frac{o(x)}{\sqrt{|x|}} \rightarrow 0, x \rightarrow 0,$$

e quindi in questo caso la semplificazione voluta non ha dato risultati ambigui.

Viceversa, supponiamo di voler calcolare il limite per $x \rightarrow 0$ di

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$$

Dato che $\tan x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$, si potrebbe pensare di semplificare il limite scrivendo

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{(x + o(x)) - (x + o(x))}{x^3} = \frac{o(x)}{x^3}, x \rightarrow 0,$$

ottenendo ora un risultato ambiguo, perché la quantità $\frac{o(x)}{x^3}$ non è determinata nel limite. Infatti, come già osservato, si potrebbe avere, $o(x) = x^2$ o $o(x) = x^3$ o $o(x) = x^4$ o $o(x)$ = qualunque altra funzione infinitesima che tende a 0 più velocemente di x . In questo caso è chiaro che il livello di approssimazione ottenuto nel sostituire $\tan x - \sin x$ con $o(x)$ non è sufficiente a risolvere la forma indeterminata e bisogna riprendere il problema dall'inizio. In questo caso particolare, si può procedere come segue

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x^3} \frac{1 - \cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}, x \rightarrow 0.$$

Si perviene quindi alla conclusione che $\tan x - \sin x$ è dello stesso ordine di x^3 per $x \rightarrow 0$, e quindi che

$$\tan x - \sin x = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0.$$

□

Esempio. Si vuole calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}.$$

Dato che $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$, si ha

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right), \quad x \rightarrow 0.$$

Dato che $\log(1+y) = 1 + y + o(y)$, $y \rightarrow 0$, ponendo $y = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, si ha

$$\log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Se ne deduce che

$$\frac{\log(\cos x)}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}, \quad x \rightarrow 0.$$

Esempio. Si vuole calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Si ha

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\log(\cos x)}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}}, \quad x \rightarrow 0.$$

Osservazione [FUNZIONI INFINITESIME PER $x \rightarrow x_0 \neq 0$, $x \rightarrow \pm\infty$]

Nel caso in cui $\mathbb{R} \ni x_0 \neq 0$ le funzioni infinitesime per $x \rightarrow x_0$, analoghe alle potenze, logaritmi, esponenziali viste sopra, sono, per ogni $\alpha > 0$ e $\beta > 0$,

$$|x - x_0|^\alpha, \quad \frac{1}{|\log|x - x_0||^\beta}, \quad e^{-\frac{1}{|x - x_0|^\alpha}},$$

e se $x \rightarrow \pm\infty$, sono

$$|x|^{-\alpha}, \quad \frac{1}{|\log|x||^\beta}, \quad e^{-|x|^\alpha}.$$

□

ESERCIZIO. Disporre in ordine di infinitesimo crescente le funzioni

$$e^{x^3}, \quad \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^4, \quad \cos\left(\frac{1}{(\log|x|)^3}\right) - 1,$$

per $x \rightarrow -\infty$.

È sempre bene ricordare che la composizione di funzioni esponenziali e logaritmiche può portare ad andamenti di tipo potenza, come appare evidente pensando al fatto che $x = e^{\log x}$, o svolgendo il seguente:

ESERCIZIO. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-(\log x)^\alpha}$$

al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$.

Dalla soluzione si evincerà che $e^{-(\log x)^\alpha} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ se $\alpha > 1$ e viceversa, se $\alpha \in (0, 1]$, $\frac{1}{x^2} = o\left(e^{-(\log x)^\alpha}\right)$.

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x}.$$

Quanto detto per le funzioni infinitesime, si estende alle funzioni che hanno limite non finito come segue:

Definizione[ORDINE DI INFINITO RELATIVO]

Siano $f : X \mapsto \mathbb{R}$, $g : X \mapsto \mathbb{R}$ due funzioni infinite per $x \rightarrow x_0$, ovvero

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

si dice che " g è un **infinito di ordine superiore a f** per $x \rightarrow x_0$ ".

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \notin \{0, \pm\infty\},$$

si dice che " f e g hanno lo stesso ordine di infinito".

Osservazione[FUNZIONI INFINITE PER $x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow \pm\infty$]

Nel caso in cui $x_0 \in \mathbb{R}$ le funzioni infinite per $x \rightarrow x_0$, analoghe alle potenze, logaritmi, esponenziali viste sopra, sono, per ogni $\alpha > 0$ e $\beta > 0$,

$$|x - x_0|^{-\alpha}, \quad |\log |x - x_0||^\beta, \quad e^{|x - x_0|^{-\alpha}},$$

e se $x \rightarrow \pm\infty$, sono

$$|x|^\alpha, \quad |\log |x||^\beta, \quad e^{|x|^\alpha}.$$

□

ESERCIZIO. Disporre in ordine di infinito crescente le seguenti successioni

$$4^{n^2}, \quad 4^{n^2} n^4, \quad \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

ESERCIZIO. Calcolare il limite

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\cos\left(2\pi 2^{\frac{1}{y}}\right) - 1}{\cos\left(2^{\frac{\pi}{y}} - 1\right) - 1}$$

Osservazione

Se $f : X \mapsto \mathbb{R}$ e $g : X \mapsto \mathbb{R}$ sono due funzioni infinite per $x \rightarrow x_0$ e se

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0,$$

si scrive anche $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$ e si dice anche in questo caso che f è un **o-piccolo di g** per $x \rightarrow x_0$. In questo caso si intende che f è definitivamente molto più piccola di g per $x \rightarrow x_0$. Infatti, se $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$, si ha anche che g è un infinito di ordine superiore a f per $x \rightarrow x_0$. □

Osservazione

Concludiamo questo paragrafo ricordando una notazione usata frequentemente in alcuni testi. Due funzioni $f : X \mapsto \mathbb{R}$, $g : X \mapsto \mathbb{R}$ si dicono **asintoticamente equivalenti** per $x \rightarrow x_0$ se hanno lo stesso limite, finito o infinito, $f \rightarrow L$, $g \rightarrow L$, e se

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow x_0.$$

In questo caso si usa anche la notazione

$$f \sim g, x \rightarrow x_0.$$

In altri testi si dice che f è **asintotica** a g per $x \rightarrow +\infty(-\infty)$, se

$$f(x) - g(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty(-\infty).$$

8.6. Asintoto obliquo.

Definizione[Asintoto Obliquo]

Sia $a \in [-\infty, +\infty)$ e $f : (a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$. Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $q \in \mathbb{R}$, si dice che la retta $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + q\}$ è un **asintoto obliquo** per f , per $x \rightarrow +\infty$ se

$$f(x) - (mx + q) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty. \quad (8.6.1)$$

Osservare che se $y = mx + q$ è un asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$, ovvero se vale la (8.6.1), allora

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - (mx + q)}{x} + \frac{(mx + q)}{x} \rightarrow m, x \rightarrow +\infty, \quad (8.6.2)$$

e

$$f(x) - mx = q + f(x) - (mx + q) \rightarrow q, x \rightarrow +\infty. \quad (8.6.3)$$

Viceversa, se valgono le (8.6.2) e (8.6.3) allora $y = mx + q$ è un asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$, ovvero vale la (8.6.1).

Concludiamo che $y = mx + q$ è un asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$, se e solo se esistono $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $q \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q.$$

Generalizzare al caso $x \rightarrow -\infty$ per esercizio.

Esempio. Sia

$$f(x) = \frac{x}{3} 2^{\frac{1}{x}} - 1, x \neq 0.$$

Si ha

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3} 2^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{3}, x \rightarrow +\infty.$$

Quindi $m = \frac{1}{3}$. D' altra parte

$$f(x) - mx = \frac{x}{3} 2^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{x}{3} = \frac{x}{3} \left(2^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - 1 \rightarrow \frac{\log(2)}{3} - 1, x \rightarrow +\infty.$$

Quindi $q = \frac{\log(2)}{3} - 1$.

Concludiamo che $y = \frac{x}{3} + \frac{\log(2)}{3} - 1$ è un asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$.

Determinare l' asintoto obliquo (se esiste) di f per $x \rightarrow -\infty$. ■

8.7. Funzione Inversa. Continuità della funzione inversa.

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \mapsto \mathbb{R}$ una funzione iniettiva e $Y = \text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Per definizione (vedere [B] §7.8) f è una corrispondenza biunivoca tra X e Y .

Si può allora definire una applicazione che ha come dominio di definizione Y (l' immagine di f) e come immagine X (il dominio di definizione di f) in modo che ad ogni $y \in Y$ corrisponda la sua controimmagine $x \in X$. Dato che per ipotesi f è iniettiva, ad ogni $y \in Y$ corrisponderà una ed una sola controimmagine $x \in X$, ovvero ad ogni $y \in Y$ corrisponderà uno ed un solo elemento $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

In particolare, l' applicazione definita in questo modo risulterà essere una funzione di dominio Y e immagine X .

Definizione[FUNZIONE INVERSA]

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \mapsto \mathbb{R}$ una funzione iniettiva e $Y = \text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Si dice allora che f è invertibile in X e si dice **funzione inversa** di f , che si indica con

$$f^{-1} : Y \mapsto X,$$

l'unica funzione di dominio Y e immagine X che ad ogni $y \in Y$ associa la sua controimmagine tramite f ,

$$\forall y \in Y, f^{-1}(y) = x, \quad \text{dove } x : f(x) = y.$$

Esempio. Se $f(x) = x^2$, $x \in X = [0, +\infty)$, $Y = \text{Im}(f) = [0, +\infty)$ e $y \in Y$ allora $x^2 = y \iff x = \sqrt{y}$. Si ha allora

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad y \in Y = [0, +\infty).$$

Esempio. Se $f(x) = x^2$, $x \in X = (-\infty, +\infty)$, $Y = \text{Im}(f) = [0, +\infty)$ allora f non è iniettiva e quindi, in particolare, non è invertibile in $(-\infty, +\infty)$. Infatti, dato che f non è iniettiva, ad ogni $y \in Y \setminus \{0\}$ non corrisponde una unica controimmagine. In questo caso particolare si hanno due controimmagini: se $y \in Y$, $x^2 = y \iff x \in \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$ e l'applicazione inversa di f associa ad ogni $y \in Y \setminus \{0\}$ due valori

$$y \mapsto \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\},$$

e quindi non è una funzione.

Esempio. Se $f(x) = \arctan(x)$, $x \in X = (-\infty, +\infty)$, $Y = \text{Im}(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $y \in Y$ allora $\arctan(x) = y \iff x = \tan(y)$. Si ha allora

$$f^{-1}(y) = \tan(y), \quad y \in Y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Esempio. Se $f(x) = \log(x)$, $x \in X = (0, +\infty)$, $Y = \text{Im}(f) = (-\infty, +\infty)$ e $y \in Y$ allora $\log(x) = y \iff x = e^y$. Si ha allora

$$f^{-1}(y) = e^y, \quad y \in Y = (-\infty, +\infty).$$

Esempio. Ogni funzione strettamente monotona è invertibile.

Osservazione

La funzione inversa di una funzione invertibile $f : X \mapsto \mathbb{R}$ si caratterizza anche come l'unica funzione $g : \text{Im}(f) \mapsto X$ tale che

$$f(g(y)) = y, \quad \forall y \in \text{Im}(f), \quad \text{e} \quad g(f(x)) = x, \quad \forall x \in X.$$

Osservazione[GRAFICO DELLA FUNZIONE INVERSA]

Se $f : X \mapsto \mathbb{R}$ è invertibile in X , il grafico della funzione inversa si ottiene riflettendo il grafico di f rispetto alla bisettrice $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$. Verificare nei casi discussi negli esempi precedenti che gli asintoti verticali di f si trasformano negli asintoti orizzontali di f^{-1} e viceversa. $\square$

TEOREMA [CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA]

Siano $-\infty < a < b < +\infty$ e $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Se f è iniettiva e continua, allora la funzione inversa $f^{-1} : \text{Im}(f) \mapsto [a, b]$ è continua. In particolare $\text{Im}(f)$ è un intervallo chiuso e limitato e f^{-1} ammette

massimo e minimo assoluto.

Dimostrazione.

Dimostriamo ragionando per assurdo che f^{-1} è continua. Se f^{-1} non fosse continua si potrebbe trovare $y_0 \in \text{Im}(f)$, una successione $\{y_n\} \subset \text{Im}(f)$ tale che $y_n \rightarrow y_0$, $n \rightarrow +\infty$, e una sottosuccessione estratta $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$ tale che

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : |f^{-1}(y_{n_k}) - f^{-1}(y_0)| \geq \varepsilon_0, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (8.7.1)$$

Siano ora $x_0 : f(x_0) = y_0$ e $x_{n_k} : f(x_{n_k}) = y_{n_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Dato che $[a, b]$ è chiuso e limitato, dal Teorema di Bolzano-Weierstrass possiamo estrarre una sotto-sottosuccessione convergente $\{x_{n_{k_j}}\} \subset \{x_{n_k}\} : x_{n_{k_j}} \rightarrow \bar{x}$, $j \rightarrow +\infty$. Dato che $[a, b]$ è chiuso, si ha

$$\bar{x} \in [a, b]. \quad (8.7.2)$$

Dalla (8.7.1) e dalla definizione di funzione inversa otteniamo

$$|x_{n_k} - x_0| \geq \varepsilon_0, \forall k \in \mathbb{N},$$

e quindi in particolare $\bar{x} \neq x_0$. Dato che $y_{n_k} \rightarrow y_0$, $k \rightarrow +\infty$, si ha

$$f(x_{n_{k_j}}) = y_{n_{k_j}} \rightarrow y_0 = f(x_0), \quad j \rightarrow +\infty. \quad (8.7.3)$$

Dato che f è continua in $[a, b]$, passando al limite per $j \rightarrow +\infty$ nella (8.7.3), e usando la (8.7.2) otteniamo

$$f(\bar{x}) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f(x_{n_{k_j}}) = f(x_0).$$

Ma questa uguaglianza è assurda, perché insieme al fatto che $\bar{x} \neq x_0$, contraddice la iniettività di f . Se ne deduce che f^{-1} è continua.

A questo punto applichiamo il Teorema degli Zeri (più precisamente il Corollario che lo segue in [B] §8.4) e il Teorema di Weierstrass a f per concludere che $\text{Im}(f)$ è un intervallo chiuso e limitato. Ma allora f^{-1} è continua su di un intervallo chiuso e limitato, e il Teorema di Weierstrass implica la tesi. ■