

LEZIONE 19

CONTENTS

8.3. Limiti notevoli.

91

[B] Dispense a cura del docente.

8.3. Limiti notevoli.

Andiamo ad illustrare nel seguito una serie di limiti importanti, detti anche **limiti notevoli**.

LIMITE NOTEVOLE 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \quad (8.3.1)$$

Dimostrazione.

Si usano le disuguaglianze elementari

$$\sin(x) < x, \quad x > 0$$

e

$$x < \tan(x), \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Dalla prima si ottiene subito

$$\frac{\sin(x)}{x} < 1, \quad x \rightarrow 0^+$$

e dalla seconda si ha

$$\frac{\sin(x)}{x} > \frac{1}{\cos(x)}, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Dunque la (8.3.1) per $x \rightarrow 0^+$ segue dal Teorema di confronto. La dimostrazione è completata osservando che $\frac{\sin(x)}{x}$ è pari e usando la caratterizzazione del limite tramite i limiti sinistro e destro. ■

Osservare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

risulta essere continua in \mathbb{R} .

Esercizio.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x^3 + x^5}{x^5 + x^6} \sin(x^2) = \pi.$$

Infatti si ha,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x^3 + x^5}{x^5 + x^6} \sin(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x^3 + x^5}{x^5 + x^6} \cdot x^2 \cdot \frac{\sin(x^2)}{x^2}.$$

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(y)}{y} = 1,$$

dal Teorema sul prodotto dei limiti, segue che è sufficiente calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x^3 + x^5}{x^5 + x^6} \cdot x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{x^3 \pi + x^2}{x^5 (1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi + x^2}{1+x} = \pi.$$

Usando la (8.3.1), otteniamo il:

LIMITE NOTEVOLE 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}. \quad (8.3.2)$$

Si ha infatti

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = 2 \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{2}{4} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}, \quad x \rightarrow 0.$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi x + x^{\frac{3}{2}}}{e x^4 + x^9} \sin\left(\frac{3x^5 + 2x^8}{x^2 + 6x^{\frac{5}{2}}}\right), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-4x} \sin(e^{-4x}). \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\log|x|)^4 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{(\log|x|)^4}\right)\right) \end{aligned}$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \sin(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (1 - \cos(x)).$$

LIMITE NOTEVOLE 3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (8.3.3)$$

Questo limite è stato dedotto nella (8.1.13) di [B] §8.1.

Esercizio.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(1 + \frac{x}{x+1} - 1\right)^{-x} = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{-x} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{-(x+1)+1} = \left(1 + \frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)} \left(1 + \frac{1}{-(x+1)}\right). \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Quindi, dato che

$$\left(1 + \frac{1}{-(x+1)}\right) \rightarrow 1, \quad x \rightarrow -\infty,$$

si ha

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)} \left(1 + \frac{1}{-(x+1)}\right) \rightarrow e \cdot 1 = e, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Esercizio.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Per risolvere questo limite è utile ricorrere alla caratterizzazione tramite il limite destro e sinistro. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Dato che i limiti per $x \rightarrow 0^\pm$ coincidono con e , anche il limite per $x \rightarrow 0$ vale e .

LIMITE NOTEVOLE 4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1. \quad (8.3.4)$$

Infatti si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log(e) = 1.$$

LIMITE NOTEVOLE 5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (8.3.5)$$

Usiamo il cambio di variabili $e^x - 1 = y$. È chiaro che $y \rightarrow 0$, se $x \rightarrow 0$ e che $x = \log(1+y)$. Quindi, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1.$$

ESERCIZI: Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x.$$

LIMITE NOTEVOLE 6.

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha. \quad (8.3.6)$$

Osserviamo innanzitutto che se $\alpha = 0$, la funzione a numeratore è identicamente nulla per ogni $x \neq 0$, e quindi il limite (8.3.6) in questo caso è certamente 0. Sia quindi $\alpha \neq 0$. Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\log(1+x)} \frac{\log(1+x)}{x}.$$

Dato che

$$\frac{\log(1+x)}{x} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0,$$

è sufficiente calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\log(1+x)}.$$

Usiamo il cambio di variabili $t = \log(1+x)$. È chiaro che $t \rightarrow 0$, se $x \rightarrow 0$ e che $(1+x)^\alpha = e^{\alpha t}$. Quindi, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\log(1+x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha t} - 1}{t} = \lim_{y \rightarrow 0} \alpha \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha \cdot t} = \alpha.$$

ESERCIZIO: Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4 - e^x)^\pi - 4^\pi}{e^{2x}}$$

ESERCIZI: Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)^2}{\sin(x) \log(1+x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)^4}{(\sin(x))^3 \log(1+x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(x)}.$$

ESERCIZIO: Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x^\alpha}.$$