

LEZIONI 06-07-08

CONTENTS

5. INTRODUZIONE ALLO STUDIO QUALITATIVO DELLE FUNZIONI.	22
5.1. Operazioni elementari sui grafici di funzioni.	22
5.2. Funzione composta. Monotonia della funzione composta.	25
5.3. Grafico qualitativo di una funzione composta.	26
6. SUCCESSIONI NUMERICHE.	27
6.1. Definizioni ed esempi.	27
6.2. Il Principio di Induzione.	28
6.3. Altre applicazioni del Principio di Induzione: numeri fattoriali e coefficienti binomiali.	29
6.4. Simbolo di somma e formula del binomio di Newton.	31

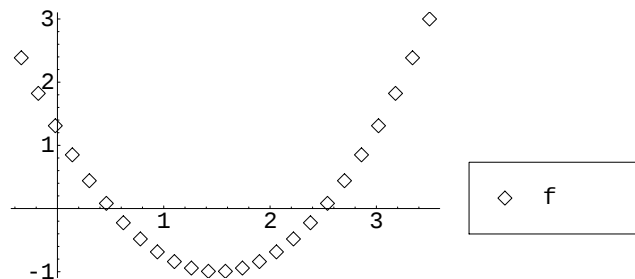
[B] Dispense a cura del Docente.

5. INTRODUZIONE ALLO STUDIO QUALITATIVO DELLE FUNZIONI.

5.1. Operazioni elementari sui grafici di funzioni.

Se è noto il grafico di una funzione f , si possono ottenere i grafici di alcune altre funzioni con operazioni elementari su $\text{graf}(f)$.

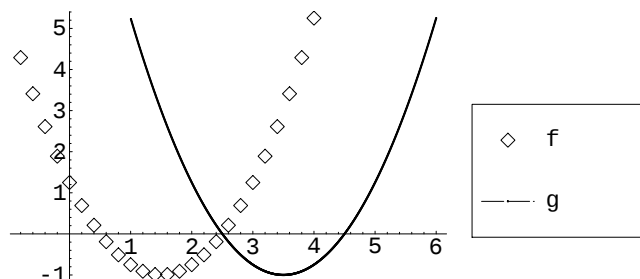
In quanto segue studieremo la funzione $f(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$, $x \in \mathbb{R}$, il cui grafico, per maggiore chiarezza nel confronto con i grafici che andremo a dedurre, sarà tracciato per punti nella forma seguente:



Si ha $f(x) = 0 \iff x \in \{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$. Il vertice della parabola ha ascissa $x_v = \frac{3}{2}$ con $f(x_v) = -1$ e $f(0) = \frac{5}{4}$.

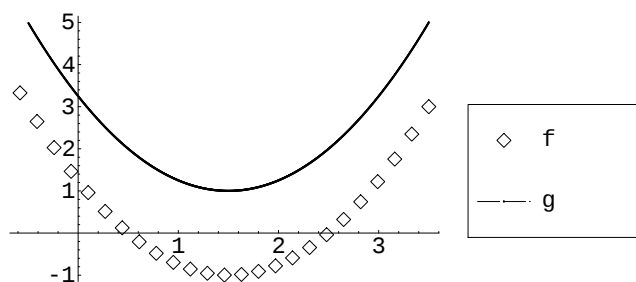
Esempio. $[g(x) = f(x - 2)]$

$f(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$, $g(x) = f(x - 2)$. Se, fissato $t \in \mathbb{R}$, indichiamo con $y = f(t)$ il valore assunto da f in t , allora la funzione $g(x) = f(x - 2)$ assumerà il valore y quando $x - 2 = t$, ovvero quando $x = t + 2$. Dunque il grafico di g si ottiene traslando a destra di 2 graf(f).



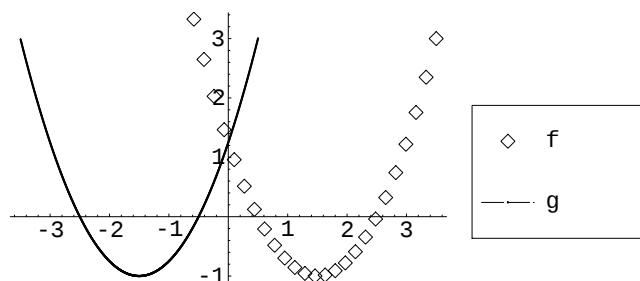
Esempio. $[g(x) = f(x) + 2]$

$f(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$, $g(x) = f(x) + 2$. In questo caso è chiaro che il grafico di g si ottiene traslando verso l'alto di 2 graf(f).



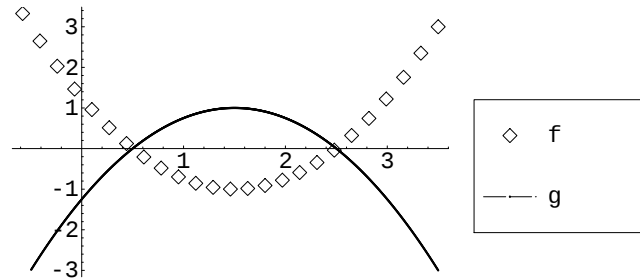
Esempio. $[g(x) = f(-x)]$

$f(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$, $g(x) = f(-x)$. Se, fissato $t \in \mathbb{R}$, indichiamo con $y = f(t)$ il valore assunto da f in t , allora la funzione $g(x) = f(-x)$ assumerà il valore y quando $-x = t$, ovvero quando $x = -t$. In altri termini il valore assunto da f nel punto 1 è assunto da g in -1 , il valore assunto da f nel punto -2 è assunto da g in 2 etc.. Dunque il grafico di g si ottiene ruotando graf(f) rigidamente intorno all'asse y .



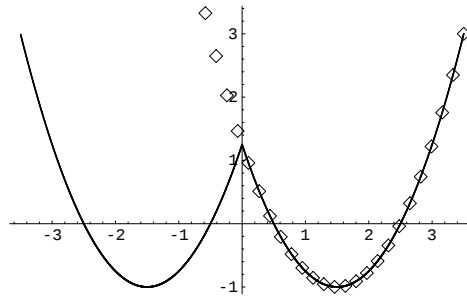
Esempio. $[g(x) = -f(x)]$

$f(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$, $g(x) = -f(x)$. Se, fissato $t \in \mathbb{R}$, indichiamo con $y = f(t)$ il valore assunto da f in t , allora la funzione $g(x) = -f(x)$ assume in $x = t$ il valore $-y$. Dunque il grafico di g si ottiene ruotando graf(f) rigidamente intorno all'asse x .



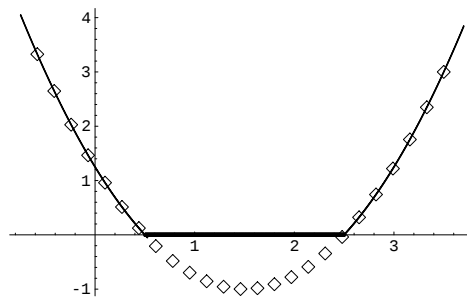
Esempio. $[g(x) = f(|x|)]$

$f(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$, $g(x) = f(|x|)$. In questo caso, è chiaro che il grafico di g coincide con il grafico di f per $x \geq 0$ e con quello di $f(-x)$ per $x < 0$. Si può anche osservare che g è pari e quindi $\text{graf}(g)$ si può ottenere in questo caso "cancellando" la parte di grafico di f per $x < 0$ e ruotando intorno all' asse delle y il grafico di f per $x \geq 0$.



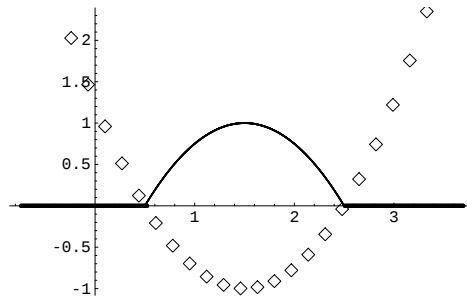
Esempio. $[g(x) = f^+(x)]$

$f(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$, $g(x) = f^+(x)$. In questo caso, per definizione di parte positiva (vedere [B] §4.4), $g(x)$ coincide con $f(x)$ se $f(x) \geq 0$ ed è nulla altrimenti.



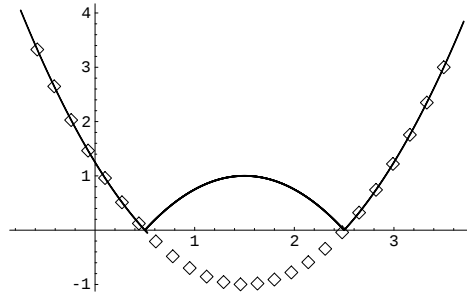
Esempio. $[g(x) = f^-(x)]$

$f(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$, $g(x) = f^-(x)$. In questo caso, per definizione di parte negativa (vedere [B] §4.4), $g(x)$ coincide con $-f(x)$ se $f(x) \leq 0$ ed è nulla altrimenti.



Esempio. $[g(x) = |f(x)|]$

$f(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$, $g(x) = |f(x)|$. In questo caso, per definizione di modulo (vedere [B] §4.4), $g(x)$ coincide con $f^+(x)$ se $f(x) \geq 0$ e coincide con $f^-(x)$ se $f(x) \leq 0$.



5.2. Funzione composta. Monotonia della funzione composta.

Definizione [FUNZIONE COMPOSTA]

Siano $g : X \rightarrow Z$ e $h : W \rightarrow Y$ due funzioni. Se $\text{Im}(g) \cap W \neq \emptyset$, si dice **funzione composta** di g e h , e si indica con $f = h \circ g$, la funzione $f : V \rightarrow Y$, definita da

$$f(x) = h(g(x)), \quad x \in V$$

$$V = \{x \in X : g(x) \in W\}.$$

Esempio. Se $g(x) = x^2 - x$, $X = \text{dom}(g) = \mathbb{R}$, e $h(y) = 3^y$, $W = \text{dom}(h) = \mathbb{R}$, allora $V = \{x \in X : g(x) \in W\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ e la funzione composta $f = h \circ g$ è in questo caso

$$f(x) = h(g(x)) = 3^{x^2 - x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esempio. Se $g(x) = x^2 - x$, $X = \text{dom}(g) = \mathbb{R}$, e $h(y) = \log_2 y$, $W = \text{dom}(h) = (0, +\infty)$, allora $V = \{x \in X : g(x) \in W\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \in (0, +\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x > 0\} = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ e la funzione composta $f = h \circ g$ è in questo caso

$$f(x) = h(g(x)) = \log_2(x^2 - x), \quad x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

Osservazione

La condizione $\text{Im}(g) \cap W \neq \emptyset$ è necessaria per la validità del teorema. Infatti, se per esempio $g(x) = -x^2$, $X = \text{dom}(g) = \mathbb{R}$ e $h(y) = \log_2 y$, $W = \text{dom}(h) = (0, +\infty)$, è chiaro che la funzione composta non è definita, dato che $g(x) \leq 0, \forall x \in X$ (in particolare $\text{Im}(g) = (-\infty, 0]$) e quindi $\text{Im}(g) \cap W = (-\infty, 0] \cap (0, +\infty) = \emptyset$. $\square$

Osservazione

Se $X \neq \text{dom}(g)$ o se $W \neq \text{dom}(h)$, e se $\text{Im}(g) \cap W \neq \emptyset$, si può definire la funzione composta ma in generale V non coincide con il dominio naturale della legge $h(g(x))$. Infatti, se per esempio $g(x) = x^2 - x$, $X = \text{dom}(g) = \mathbb{R}$, e $h(y) = \log_2 y$, $W = [1, +\infty)$, allora

$$V = \{x \in X : g(x) \in W\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \in [1, +\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \geq 1\} =$$

$$\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right),$$

e la funzione composta $f = h \circ g$ è in questo caso

$$f(x) = h(g(x)) = \log_2(x^2 - x), \quad x \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

TEOREMA [MONOTONIA DELLA FUNZIONE COMPOSTA]

Siano $g : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : W \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y$ due funzioni. Supponiamo che sia ben definita la funzione composta $f = h \circ g$. Allora:

- Se g è monotona crescente (strettamente crescente) e h è monotona crescente (strettamente crescente) allora f è monotona crescente (strettamente crescente).
- Se g è monotona decrescente (strettamente decrescente) e h è monotona decrescente (strettamente

decescente) allora f è monotona crescente (strettamente crescente).

(c) Se g è monotona crescente (strettamente crescente) e h è monotona decrescente (strettamente decrescente) allora f è monotona decrescente (strettamente decrescente).

(d) Se g è monotona decrescente (strettamente decrescente) e h è monotona crescente (strettamente crescente) allora f è monotona decrescente (strettamente decrescente).

Dimostrazione.[Facoltativa]

Supporremo per semplicità che $\text{dom}(g) = \mathbb{R}$ e $\text{dom}(h) = \mathbb{R}$ in modo che $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

(a) Se $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$ per ipotesi si ha

$$g(x_1) \leq g(x_2) \quad (g(x_1) < g(x_2)).$$

Dato che $y_1 = g(x_1) \in \text{dom}(h)$ e $y_2 = g(x_2) \in \text{dom}(h)$ si ha anche

$$h(g(x_1)) \leq h(g(x_2)) \quad (h(g(x_1)) < h(g(x_2))).$$

In particolare concludiamo che

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 : -\infty < x_1 < x_2 < +\infty.$$

(c) Se $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$ per ipotesi si ha

$$g(x_1) \leq g(x_2) \quad (g(x_1) < g(x_2)).$$

Dato che $y_1 = g(x_1) \in \text{dom}(h)$ e $y_2 = g(x_2) \in \text{dom}(h)$ si ha anche

$$h(g(x_1)) \geq h(g(x_2)) \quad (h(g(x_1)) > h(g(x_2))).$$

In particolare concludiamo che

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 : -\infty < x_1 < x_2 < +\infty.$$

I casi (b) e (d) seguono nello stesso modo. ■

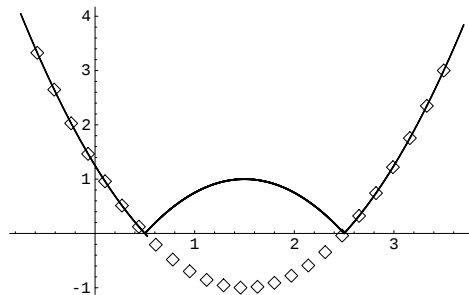
5.3. Grafico qualitativo di una funzione composta.

Utilizzando il teorema di monotonia della funzione composta del §5.2 di cui sopra, si possono ottenere i grafici di alcune funzioni composte $f = h \circ g$ a partire dai grafici delle funzioni h e g .

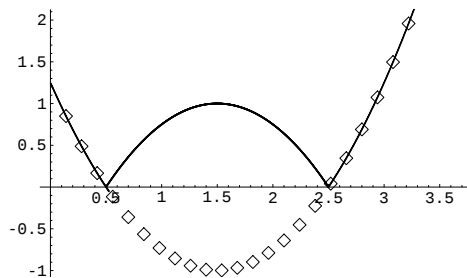
Esempio. Sia $f(x) = \log_2 |x^2 - 3|x| + \frac{5}{4}|$. L'insieme di definizione è chiaramente non vuoto (perché l'argomento del logaritmo è positivo per ogni $|x|$ sufficientemente grande).

Osserviamo innanzitutto che f è pari (perché dipende solo da x^2 e $|x|$). Quindi è sufficiente ricavare $\text{graf}(f)$ per $\text{dom}(f) \cap [0, +\infty)$.

Consideriamo allora la funzione ausiliaria $\phi(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$. Il grafico di ϕ è noto, come anche quello di $|\phi(x)|$ (vedere il §5.1 sopra)



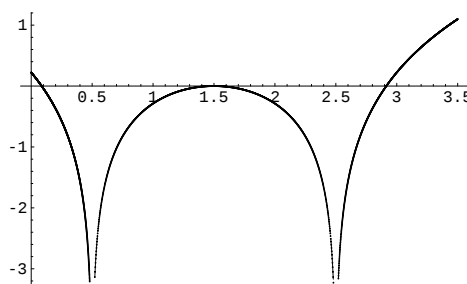
È quindi noto anche il grafico di $|\phi(|x|)|$ (che è simmetrico rispetto all'asse delle y) che possiamo considerare per i soli valori $x \geq 0$ (perché f è pari):



Sia quindi $g(x) = |\phi(|x|)|$, $x \in [0, +\infty)$ e $h(y) = \log_2(y)$, $y \in (0 + \infty)$.

È chiaro che $g(x) \geq 0$. D' altra parte, dato che $\phi(x) = 0 \iff x \in \{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$ si ha anche $g(x) = 0 \iff x \in \{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$. Quindi $f = h \circ g$ è definita in $[0, +\infty) \setminus \{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\} = [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$. Dato che h è monotona strettamente crescente nel suo dominio, e dato che g è monotona strettamente decrescente in $[0, \frac{1}{2})$, dal teorema di monotonia segue che f è monotona strettamente decrescente in $[0, \frac{1}{2})$. Dato che g è strettamente crescente in $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (perché $x = \frac{3}{2}$ è il vertice della parabola), strettamente decrescente in $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ e strettamente crescente in $(\frac{5}{2}, +\infty)$, con lo stesso ragionamento concludiamo che f è strettamente crescente in $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, strettamente decrescente in $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ e strettamente crescente in $(\frac{5}{2}, +\infty)$.

Dal grafico della funzione h osserviamo poi che se x è "vicino" a $\frac{1}{2}$ o a $\frac{5}{2}$, allora $g(x)$ è "vicina" a $y = 0$ e quindi $f = h(g(x))$ è negativa e "grande" in modulo, mentre se $x > 0$ è "grande", anche g e quindi anche f è "grande". Concludiamo che il grafico qualitativo di f per $x \geq 0$ ha la forma seguente



6. SUCCESSIONI NUMERICHE.

6.1. Definizioni ed esempi.

Definizione[SUCCESSIONE]

Una **successione** (o *successione numerica reale*) è una funzione il cui dominio è $\mathbb{N}$ o un suo sottoinsieme non limitato, e il cui codominio è $\mathbb{R}$.

Osservazione

Si possono avere anche successioni definite su sottoinsiemi di numeri interi relativi. Per esempio è chiaro che nulla cambia in sostanza se la successione, invece che su $\mathbb{N}$, è per esempio definita su $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq -3\}$.

□

Osservazione

Per definire una successione, invece di usare la notazione standard $n \mapsto f(n)$, si preferisce la notazione

$$n \mapsto a_n.$$

In particolare, se il dominio non è specificato, si intende che la successione è definita in $\mathbb{N}$.

□

Osservazione

Una funzione definita su di un sottoinsieme **limitato** di $\mathbb{N}$ si chiama **sequenza**.

Esempi di successioni:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+3},$$

$$a_n = \frac{1}{n},$$

$$a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right),$$

$$a_n = 1 - \frac{1}{n^2},$$

$$a_n = (-1)^n n,$$

$$a_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

ESERCIZIO CONSIGLIATO: Disegnare un grafico qualitativo delle successioni di cui sopra.

6.2. Il Principio di Induzione.**TEOREMA** [PRINCIPIO DI INDUZIONE]

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{P}_n$ una proposizione. Supponiamo che valgano:

(i) $\mathcal{P}_1$ è vera;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$.

Allora $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$ è vera.

Dimostrazione.[Facoltativa]

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}_n \text{ è vera}\}$. La (ii) implica che A è induttivo. La (i) implica che $1 \in A$. Dato che $\mathbb{N}$ si caratterizza come il più piccolo insieme induttivo che contiene 1 (vedere [B] §1.3), in particolare $\mathbb{N}$ è contenuto in ogni insieme induttivo che contiene 1. Quindi $\mathbb{N} \subseteq A$. D' altra parte A è per definizione un sottoinsieme di $\mathbb{N}$. Quindi $A \subseteq \mathbb{N}$. Concludiamo allora che $\mathbb{N} = A$. ■

Osservazione

Se $\mathcal{P}_n$ è definita per $n = k, k+1, \dots$ ($k \in \mathbb{Z}$ fissato; p.es. $k = -2$), e sostituiamo a (ii) l'ipotesi " $\mathcal{P}_k$ è vera" allora la tesi diventa: " $\mathcal{P}_n$ è vera $\forall n \in \mathbb{Z} : n \geq k$ ".

Al posto di (i) si può sostituire l'ipotesi " $\forall n \in \mathbb{N} (\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \dots \vee \mathcal{P}_n) \implies \mathcal{P}_{n+1}$ ", oppure: " $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_{n-1} \implies \mathcal{P}_n$ ".

Esempio 1.[UN ESEMPIO DI DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE]

Vogliamo dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $2^n \geq n+1$. Adottiamo a tale scopo il metodo induttivo. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia quindi $\mathcal{P}_n$ la proposizione definita da:

$$\mathcal{P}_n = "2^n \geq n+1".$$

Verifichiamo (i). Sostituendo $n = 1$ in $\mathcal{P}_n$, si ha $2^1 = 2^1 = 1+1 = n+1$. Quindi (i) è vera.

Verifichiamo (ii). Supponiamo che sia vero che per $n \in \mathbb{N}$ fissato vale $\mathcal{P}_n$, ovvero $2^n \geq n+1$, e dimostriamo che allora è vera anche $\mathcal{P}_{n+1}$, ovvero $2^{n+1} \geq (n+1)+1$. Si ha infatti

$$2^n \geq n+1 \implies 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n+1) = 2n+2 > n+2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il principio di induzione dice allora che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $2^n \geq n+1$.

Esempio.

Modificando lievemente la dimostrazione precedente, verifichiamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $2^n > n$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia quindi $\mathcal{P}_n$ la proposizione definita da:

$$\mathcal{P}_n = "2^n > n".$$

Verifichiamo (i). Sostituendo $n = 1$ in $\mathcal{P}_n$, si ha $2^1 = 2^1 = 1+1 > 1 = n$. Quindi (i) è vera.

Verifichiamo (ii). Supponiamo che sia vero che per $n \in \mathbb{N}$ fissato vale $\mathcal{P}_n$, ovvero $2^n > n$ e vediamo se questo implica $\mathcal{P}_{n+1}$, ovvero $2^{n+1} > (n+1)$. Si ha

$$2^n > n \implies 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n = n+n \geq n+1, \quad \forall n \geq 1.$$

La disuguaglianza dell' Esempio 1 è un caso particolare della disuguaglianza di Bernoulli. ■

Esempio 2.[LA DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI]

Sia $h > -1$. La seguente disuguaglianza è nota come ”**disuguaglianza di Bernoulli**”.

$$(1 + h)^n \geq 1 + hn, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In particolare, per $h \neq 0$, $h > -1$ si ha

$$(1 + h)^n > 1 + hn, \quad \forall n \geq 2. \quad (6.2.1)$$

Dimostrazione.

Per $h > -1$ dato e $n = 2$ si ha

$$(1 + h)^2 = (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h = (1 + h)^2.$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$(1 + h)^{n+1} = (1 + h)(1 + h)^n > (1 + h)(1 + nh) = 1 + h + nh + nh^2 > 1 + (n + 1)h.$$

■

Osserviamo che dall’ Esempio 1 segue che se definiamo le successioni $a_n = 2^n$ e $b_n = n + 1$ si ha $a_n \geq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, mentre dall’ Esempio 2 segue che se $h > -1$ e definiamo le successioni $c_n = (1 + h)^n$ e $d_n = 1 + hn$ si ha $c_n \geq d_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definizione[UN ESEMPIO DI DEFINIZIONE PER INDUZIONE: LA POTENZA n -ESIMA]

Se $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ si definisce per induzione la potenza n -esima di a come segue:

$$a^0 = 1, \quad \begin{cases} a^{n+1} = a \cdot a^n, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ a^1 = a. \end{cases}$$

Questa è una scrittura rigorosa per $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-volte}}$.

6.3. Altre applicazioni del Principio di Induzione: numeri fattoriali e coefficienti binomiali.**Definizione**[UN ESEMPIO DI DEFINIZIONE PER INDUZIONE: n FATTORIALE]

Se $n \in \mathbb{N}$ si definisce il numero n **fattoriale** (che si indica con $n!$), come segue:

$$0! = 1, \quad \begin{cases} (n + 1)! = (n + 1) \cdot n!, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ 1! = 1. \end{cases}$$

Per esempio se $n \geq 3$, si ha $n! = n \cdot (n - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Quindi: $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Facoltativo[INTERPRETAZIONE DEI NUMERI FATTORIALI]

Sia dato un insieme composto di 3 elementi, che numeriamo semplicemente indicandoli con la sequenza

$$1, 2, 3.$$

La sequenza

$$2, 1, 3,$$

nella quale sono stati scambiati i primi due elementi, si chiama **permutazione** della sequenza originaria. Più in generale, si dice che 1, 2, 3 e 2, 1, 3 sono **permutazioni** dei 3 oggetti dati. Siamo interessati a stabilire quante siano TUTTE le permutazioni che si possono realizzare con 3 oggetti dati. Per determinare il numero di tutte le permutazioni possibili di 3 oggetti dati, procediamo come segue:

Fissiamo innanzitutto il primo elemento della sequenza (cosa che si può fare ovviamente in tre modi diversi: 1 o 2 o 3).

Fatto questo scegliamo il secondo elemento (cosa che ora si potrà fare solo in due modi diversi, perché il primo elemento è stato fissato al passo precedente). Quindi se avevamo scelto 1 possiamo scegliere solo 2 o 3, se avevamo scelto 2 possiamo scegliere solo 1 o 3, se avevamo scelto 3 possiamo scegliere solo 1 o 2.

A questo punto è rimasto solo un elemento da scegliere. Quindi, in questo caso tutte le permutazioni possibili sono:

$$123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

Quindi il numero delle permutazioni di 3 oggetti è dato dal numero dei modi possibili di scegliere il primo elemento (ovvero 3), moltiplicato per il numero dei modi possibili di scegliere il secondo elemento (ovvero 2), moltiplicato per il numero dei modi possibili di scegliere il terzo elemento (ovvero 1), cioè $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.

Si può ripetere lo stesso ragionamento per una sequenza di n elementi.

Il numero di permutazioni di n elementi è dato dal numero dei modi possibili di scegliere il primo elemento (ovvero n), moltiplicato per il numero dei modi possibili di scegliere il secondo elemento (ovvero $n-1$), $\dots$, moltiplicato per il numero dei modi possibili di scegliere l'elemento $(n-1)$ -esimo (ovvero 2), moltiplicato per il numero dei modi possibili di scegliere l'ultimo elemento, cioè l'elemento n -esimo, (ovvero 1), cioè $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$.

Concludiamo che il numero delle permutazioni di n oggetti è $n!$.

Dati n elementi e un intero $1 \leq k < n$, costruiamo una permutazione di k elementi tra gli n dati. La generica permutazione così definita si chiama **disposizione di n elementi di classe k** . Con un ragionamento analogo al precedente, si può verificare che il numero di tutte le disposizioni di n elementi di classe k è $\underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}_{k\text{-termini}}$.

Per esempio le disposizioni di 3 elementi di classe 2 sono

$$12, 13, 21, 23, 31, 32,$$

e infatti se $n = 3$ e $k = 2$ si ha $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = 3 \cdot 2 = 6$. □

Definizione[APPLICAZIONE DEI FATTORIALI: I COEFFICIENTI BINOMIALI]

Se $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $k \leq n$, si definisce il **coefficiente binomiale di n su k** (che si indica con $\binom{n}{k}$), come segue:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$\text{In particolare } \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \text{ e } \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n.$$

Notare che si ha sempre

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{6.3.1}$$

Osservazione

Una regola di costruzione ricorsiva dei coefficienti binomiali si ottiene tramite il triangolo di Tartaglia, che ben illustra la simmetria espressa dalla (6.3.1). □

Osservazione

Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ è pari al numero di sottoinsiemi di k elementi che si possono formare a partire da n elementi dati. Per maggiori dettagli vedere la dissertazione che segue. □

Facoltativo[INTERPRETAZIONE DEI COEFFICIENTI BINOMIALI]

Si sono definite le disposizioni di n elementi di classe k . Ricordiamo che le disposizioni di 3 elementi di classe 2 sono:

$$12, 13, 21, 23, 31, 32.$$

Osserviamo che se siamo interessati al numero di modi in cui si possono scegliere 2 elementi tra 3 dati, INDIPENDENTEMENTE dall'ordine che i 2 elementi scelti occupano nella sequenza, otteniamo

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\},$$

ovvero il numero di sottoinsiemi di 2 elementi tra 3 elementi dati. La generica scelta di k elementi tra n dati, effettuata INDIPENDENTEMENTE dall'ordine che i k elementi occupano nella sequenza, ovvero la scelta di un sottoinsieme di k elementi tra n dati, si chiama **combinazione di n elementi di classe k** . Per determinare il numero di TUTTE le combinazioni possibili di n elementi di classe k , procediamo come segue:

Fissiamo il primo elemento (cosa che si può fare in n modi), poi fissiamo il secondo elemento (cosa che si può fare in $n-1$ modi), $\dots$, poi fissiamo l'elemento $(k-1)$ -esimo (cosa che si può fare in $n - [(k-1) - 1] = n - k + 2$ modi), poi fissiamo l'elemento k -esimo (cosa che si può fare in $n - [k - 1] = n - k + 1$ modi). Il prodotto di questi numeri è pari alle disposizioni di n elementi di classe k , ovvero $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$, il cui numero eccede il numero delle combinazioni di n elementi di classe k perché include tutte le possibili permutazioni dei k elementi scelti. Ma il numero delle permutazioni di k elementi è $k!$, e quindi il numero delle combinazioni di n elementi di classe k è pari a:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

A questo punto, moltiplicando e dividendo per $(n-k)!$, si ha

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ è quindi pari al numero di sottoinsiemi di k elementi che si possono formare a partire da n elementi dati. $\square$

6.4. Simbolo di somma e formula del binomio di Newton.

Sia $\{a_n\}$ una successione numerica. Fissato $n \in \mathbb{N}$, consideriamo la somma

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n. \quad (6.4.1)$$

Il simbolo di somma si introduce allo scopo di avere una notazione compatta per la somma (6.4.1).

Definizione[IL SIMBOLO DI SOMMA O SOMMATORIA]

Sia $\{a_n\}$ una successione numerica. Si definisce

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \sum_{k=1}^1 a_k = a_1. \end{array} \right.$$

È chiaro dalla definizione che se $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Osservazione

(i) L'indice k è *mutuo*: ovvero non importa se gli si cambia di nome:

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{m=1}^n a_m = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

(ii) Se si hanno solo un numero finito di termini $a_0, \dots, a_m$, ovvero se $\{a_n\}$ è una sequenza, le definizioni si adattano per $n \leq m$.

(iii) Si definisce analogamente il simbolo

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n,$$

per ogni $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ con $m \leq n$.

iv) Per ogni q tale che $m \leq q < n$, valgono le proprietà

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k; & \sum_{k=1}^n c a_k &= c \sum_{k=1}^n a_k; \\ \sum_{k=m}^n a_k &= \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{j=p-m}^{p-n} a_{p-j}; \\ \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) &= a_{n+1} - a_1; & \sum_{k=m}^n a_k &= \sum_{k=m}^q a_k + \sum_{k=q+1}^n a_k. \end{aligned}$$

□

Esempio. [SOMMA DI POTENZE o PROGRESSIONE GEOMETRICA]

Sia $a > 0$. Definiamo la successione

$$s_n = \sum_{k=0}^n a^k = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} + a^n,$$

ovvero ottenuta come sopra con $a_k = a^k$. Notiamo che se $a = 1$ allora $s_n = n + 1$, mentre se $a \neq 1$ si ha

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{(1-a)}{(1-a)} \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1}{1-a} \left(\sum_{k=0}^n a^k - \sum_{k=0}^n a^{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{1-a} \left(\sum_{k=0}^n a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k \right) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}. \end{aligned}$$

Esempio. [FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON]

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ (convenendo in questa scrittura che $0^0 = 1$) si ha

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

ovvero:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots \\ &\quad \dots + \binom{n}{n-2} a^{n-(n-2)} b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1} + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n \\ &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n \\ &= a^n + n a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + n a b^{n-1} + b^n, \end{aligned}$$

dove, nell' ultimo passaggio si è usata la (6.3.1).

Una formulazione equivalente della formula del binomio è la seguente: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k. \quad (6.4.2)$$

Notare che si ha

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + nx^{n-1} + x^n.$$

Alcune formule notevoli che si possono ricavare dalla formula del binomio sono per esempio:

(i) Sostituendo ad x il valore $x = 1$ nella (6.4.2), si ha

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Si può interpretare questa formula ricordando che il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ è pari al numero di sottoinsiemi di k elementi che si possono formare a partire da n elementi dati. Quindi 2^n è il numero di tutti i sottoinsiemi di un insieme di n elementi.

(ii) Sostituendo ad x il valore $x = -1$ nella (6.4.2), si ha

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$$

(iii) Se $n \in \mathbb{N}$, sostituendo ad x il valore $x = \frac{1}{n}$ nella (6.4.2), si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Una maggiorazione che sarà utile nel seguito è la seguente. Sia $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Si ha

$$a^n = (1 + (a-1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a-1)^k > \binom{n}{2} (a-1)^2 = \frac{n(n-1)}{2} (a-1)^2. \quad (6.4.3)$$

Esempio. [FORMULA DI SOMMA DEI PRIMI n NUMERI NATURALI]

Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora, si ha

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (6.4.4)$$

La formula di somma data si dimostra osservando che:

se n è pari la somma è formata esattamente dalle $\frac{n}{2}$ coppie

$$\{1, n\}, \{2, n-1\}, \dots, \left\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right\}$$

ciascuna delle quali ha somma $n+1$;

se n è dispari, $n-1$ è pari e quindi la somma è formata esattamente dalla somma dei primi $n-1$ numeri naturali più n . Quindi dal passo precedente vale $\frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Esercizio. Dimostrare la (6.4.4) con il metodo induttivo.

Una ulteriore applicazione dei coefficienti binomiali è la seguente. Per $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$ sia

$$\sigma_m(n) = \sum_{k=1}^n k^m,$$

la somma delle potenze m -esime dei primi n numeri naturali. Si può dimostrare che

$$\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \sigma_{m-k}(n) = (n+1)^m - 1.$$

Con questa formula si possono calcolare le $\sigma_m(n)$ per un m fissato. Si suggerisce di utilizzare la formula per verificare che $\sigma_0(n) = n$, $\sigma_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sigma_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.