

LEZIONI 01-02-03

CONTENTS

1. NOTAZIONI MATEMATICHE. CENNI DI ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI.	1
1.1. Notazioni matematiche.	1
1.2. Cenni di elementi di teoria degli insiemi.	2
1.3. Insiemi Numerici: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.	3
1.4. Insiemi Prodotto.	5
2. PROPRIETÀ DEI NUMERI REALI.	6
2.1. La Relazione d'ordine " $\leq$ " in $\mathbb{R}$.	6
2.2. Massimi, minimi, estremo superiore e inferiore in $\mathbb{R}$.	6
2.3. La completezza di $\mathbb{R}$.	10

[B] Dispense a cura del docente.

1. NOTAZIONI MATEMATICHE. CENNI DI ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI.

1.1. Notazioni matematiche.

$\implies$ che significa/si legge, "...implica..." o anche "Se....allora....".

Esempio. La proposizione: $n = 5 \implies n + 1 = 6$, si legge come segue:
 "n = 5 implica n + 1 = 6", o anche, "Se n = 5 allora n + 1 = 6".

$\iff$ che si significa/si legge, "...se e solo se....".

Esempio. La proposizione: " $n = 5 \iff n + 1 = 6$ " si legge come segue:
 "n = 5 se e solo se n + 1 = 6".

$\forall$ che significa/si legge, "Per ogni...".

$\exists$ che significa/si legge, "Esiste...".

$\nexists$ che significa/si legge, "Non esiste...".

$:$ che significa/si legge, "...tale che....".

$\in$ che significa/si legge, "...appartiene a....".

$\notin$ che significa/si legge, "...non appartiene a....".

$\wedge$ che significa/si legge, "...e...".

$\forall$ che significa/si legge, "...o...".

1.2. Cenni di elementi di teoria degli insiemi.

Un insieme si può definire tramite un elenco

$$A = \{a, b, c, d\}$$

o tramite una proprietà :

$$A = \{x \in \mathcal{U} : P(x)\}$$

che, in questo caso, si legge come segue:

"A è l'insieme degli x che appartengono a $\mathcal{U}$ tali che vale la proprietà P ".

Definizione[SOTTOINSIEME]

Se A e B sono due insiemi si dice che A è un **sottoinsieme** di B , e si scrive

$$A \subseteq B,$$

se ogni elemento di A appartiene a B .

Se $A \subseteq B$ si dice anche che A è **incluso** in B . Osserviamo che

$$A \subseteq B \iff (x \in A \implies x \in B).$$

Osservazione

La relazione di inclusione $A \subseteq B$ non esclude che $A = B$. Se si vuole specificare che $A \subseteq B$, ma che A non coincide con B ($A \neq B$), si scrive

$$A \subset B,$$

e si dice che A è un **sottoinsieme proprio** di B o, equivalentemente, che A è **strettamente incluso** in B . Osserviamo che

$$\begin{aligned} A \subset B &\iff (A \subseteq B \text{ e } A \neq B), \\ A = B &\iff (x \in A \iff x \in B) \iff (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A). \end{aligned}$$

□

Definizione[UNIONE]

Se A e B sono due insiemi, si definisce l'insieme **unione** di A e B , che si indica con $A \cup B$, come l'insieme degli elementi che appartengono ad A o a B , ovvero

$$A \cup B := \{x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Esempio. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Definizione[INTERSEZIONE]

Se A e B sono due insiemi, si definisce l'insieme **intersezione** tra A e B , che si indica con $A \cap B$, come l'insieme degli elementi che appartengono ad A e a B , ovvero

$$A \cap B := \{x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Osservazione

Se A e B sono assegnati tramite delle proprietà

$$A = \{x \in \mathcal{U} : P(x)\}, \quad B = \{x \in \mathcal{U} : Q(x)\},$$

si ha

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} : P(x) \text{ o } Q(x)\} \quad \text{e} \quad A \cap B = \{x \in \mathcal{U} : P(x) \text{ e } Q(x)\}.$$

□

Il simbolo $\emptyset$ denota l' **insieme vuoto**.

Definizione[INSIEMI DISGIUNTI]

Due insiemi A e B si dicono **disgiunti** se

$$A \cap B = \emptyset.$$

Definizione[INSIEME DIFFERENZA]

Se A e B sono due insiemi, si definisce l' insieme **differenza** B meno A , che si indica con $B \setminus A$, come l' insieme degli elementi che appartengono a B ma non appartengono ad A , ovvero

$$B \setminus A := \{x \in B \text{ e } x \notin A\}.$$

Non è difficile verificare che $B \setminus A \neq A \setminus B$. Dunque, diversamente da unione e intersezione, l'operazione differenza non è simmetrica, ovvero, il risultato cambia se cambiamo B con A e viceversa. Per questa ragione si introduce la differenza simmetrica.

Definizione[INSIEME DIFFERENZA SIMMETRICA]

Se A e B sono due insiemi, si definisce l' insieme **differenza simmetrica** tra B e A , che si indica con $B \Delta A$, come l' insieme degli elementi che appartengono a B ma non appartengono ad A o che appartengono ad A ma non appartengono a B , ovvero

$$B \Delta A := (B \setminus A) \cup (A \setminus B).$$

Si verifica subito che $B \Delta A = A \Delta B$.

Definizione[INSIEME COMPLEMENTARE]

Se A e B sono due insiemi, e se $A \subseteq B$, si definisce l' insieme **complementare** di A in B , che si indica con $\mathbb{C}_B A$, come l' insieme degli elementi che appartengono a B e non appartengono ad A , ovvero

$$\mathbb{C}_B A := B \setminus A.$$

Osservazione

Osserviamo che se $A_1 \subseteq B$ e $A_2 \subseteq B$, si ha

$$\mathbb{C}_B(A_1 \cup A_2) = \mathbb{C}_B A_1 \cap \mathbb{C}_B A_2,$$

$$\mathbb{C}_B(A_1 \cap A_2) = \mathbb{C}_B A_2 \cup \mathbb{C}_B A_1.$$

□

1.3. Insiemi Numerici: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

L' insieme dei **numeri Naturali** consiste di tutti gli interi positivi, e si indica con $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Ricordiamo che $\mathbb{N}$ verifica:

$$(i) \quad 1 \in \mathbb{N};$$

$$(ii) \quad n \in \mathbb{N} \implies n + 1 \in \mathbb{N}.$$

Un insieme numerico che verifica (ii) si dice **induttivo**. In particolare, $\mathbb{N}$ si caratterizza come il più piccolo insieme induttivo che contiene 1.

Si usa la notazione $2\mathbb{N}$ per indicare i **numeri pari**,

$$2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k, k \in \mathbb{N}\},$$

e la notazione $2\mathbb{N} - 1$ per indicare i **numeri dispari**,

$$2\mathbb{N} - 1 = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}.$$

I numeri pari e dispari sono disgiunti $2\mathbb{N} \cap \{2\mathbb{N} - 1\} = \emptyset$.

L'insieme dei **numeri Relativi** consiste di tutti gli interi positivi e negativi e dello 0, e si indica con $\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

L'insieme dei **numeri Razionali**, che si indica con $\mathbb{Q}$ è definito come segue:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \{\mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \right\}.$$

$\mathbb{Q}$ si caratterizza anche come l'insieme di tutti i numeri il cui sviluppo decimale è finito, come per esempio

$$1,85 = \frac{37}{20}$$

o illimitato periodico, come per esempio

$$0,28\overline{153} = \frac{125}{444}.$$

Fanno eccezione gli sviluppi decimali del tipo $n, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k 9999$, ovvero che finiscono con $\overline{9}$. Infatti si può dimostrare che non esistono numeri razionali il cui sviluppo decimale ha la forma $n, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k 9999$.

Spiegare questo peculiare comportamento delle rappresentazioni decimali esula dallo scopo di queste note. Acceniamo solo al fatto che, utilizzando la teoria dei limiti, si può dimostrare che si ha $0, \overline{9} = 1$. Gli sviluppi decimali che non sono del tipo $n, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k 9999$, ovvero che non finiscono con $\overline{9}$, sono detti di tipo proprio. Più precisamente $\mathbb{Q}$ si caratterizza anche come l'insieme di tutti i numeri il cui sviluppo decimale è finito, o illimitato periodico proprio.

In particolare, il fatto che ogni frazione con numeratore intero $m \in \mathbb{Z}$ e denominatore intero non nullo $n \in \{\mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ sia un numero con sviluppo decimale al più periodico (quando non finito) è dovuto al fatto che i resti possibili nella divisione sono solo $0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$.

È ben noto che esistono numeri non razionali. Citiamo per esempio $\sqrt{2}, \pi, \log_2 3$ e in particolare e , il numero di Nepero, che definiremo più avanti.

PROPOSIZIONE $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che $\log_2 3 \in \mathbb{Q}$. Quindi,

$$\exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 : \log_2 3 = \frac{m}{n}.$$

Senza perdita di generalità, possiamo supporre m e n positivi. Di conseguenza $2^{m/n} = 3$. Allora $2^m = 3^n$. Ma 2^m è pari e 3^n è dispari (perché tutti i suoi fattori sono uguali a 3). Questa contraddizione (un numero pari non può essere uguale ad un numero dispari) mostra che l'ipotesi iniziale era errata. Quindi $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$. ■

PROPOSIZIONE $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Quindi

$$\exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 : \sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Semplificando gli eventuali fattori comuni, possiamo supporre m e n primi tra loro e positivi. Quindi, elevando al quadrato, si ha $2 = \frac{m^2}{n^2}$, ovvero $m^2 = 2n^2$. Concludiamo che m^2 è pari. Si verifica subito (dimostrare per esercizio) che m^2 è pari se e solo se m è pari. Quindi m è pari a sua volta. Ma se $m \neq 0$, $m \in 2\mathbb{N}$, si ha $m = 2k$, per qualche $k \in \mathbb{N}$, e quindi $4k^2 = 2n^2$, ovvero $n^2 = 2k^2$. Dunque anche n^2 è pari. Segue come sopra che n è pari. Questa contraddizione (m e n sono entrambe pari contro l'ipotesi che m e n fossero primi tra loro), mostra che l'ipotesi iniziale era errata. Quindi $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ■

Dato che $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$ e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, concludiamo anche che:

$$\nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2, \text{ e } \nexists x \in \mathbb{Q} : 2^x = 3.$$

Più in generale, $\mathbb{Q}$ non è chiuso rispetto alle operazioni di **estrazione di radice e logaritmo**, ovvero radici e logaritmi di numeri razionali non sono necessariamente numeri razionali. Per "risolvere" questo (e molti altri problemi), si introducono i numeri Irrazionali.

L'insieme dei **numeri Irrazionali** si caratterizza come l'insieme di tutti i numeri il cui sviluppo decimale è illimitato e aperiodico.

L'insieme dei **numeri Reali** è per definizione l'insieme unione dell'insieme dei numeri razionali e dell'insieme dei numeri irrazionali e si indica con $\mathbb{R}$. Una importantissima proprietà di $\mathbb{R}$ è quella di essere chiuso rispetto alle operazioni di estrazione di radice e logaritmo di numeri reali positivi. In particolare, l'operazione di **elevamento a potenza (e quindi di estrazione di radice) di ogni grado è ben definita in $\mathbb{R}^+$** ,

$$x \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R} \implies x^a \in \mathbb{R}, \text{ (in particolare per } a = \frac{1}{2} \text{ si ha } x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}),$$

e l'operazione di **estrazione di logaritmo con base positiva è ben definita in $\mathbb{R}^+$** , ovvero

$$x \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+ \implies \log_a(x) \in \mathbb{R}, \text{ (in particolare per } a = 2 \text{ si ha } \log_a(x) = \log_2(x)),$$

dove si è usata la notazione, $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Sono numeri irrazionali in particolare $\sqrt{2}, \pi, \log_2 3, e$. Si hanno le inclusioni

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Esempio. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 = 0\}$. Risolvendo la disequazione si conclude subito che $A = \{1, 4\}$. Se definiamo $B = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x-4) = 0\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} : (x-1) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : (x-4) = 0\}$, si verifica immediatamente che $B = A$ (perché $x^2 - 5x + 4 = 0 \iff (x-1)(x-4) = 0$) e che $C = A$ (perché $(x-1)(x-4) = 0 \iff (x-1) = 0$ o $(x-4) = 0$).

Esempio. $A = \{x \in \mathbb{R} : \cos \frac{1}{x} = 0\}$. Risolvendo la disequazione si conclude subito che $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, ovvero $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbb{Z}\}$.

ESERCIZIO: Esprimere in forma di elenco gli insiemi: $A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 4) \cos \frac{1}{x} = 0\}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{R}^+$.

1.4. Insiemi Prodotto.

Definizione[INSIEME PRODOTTO]

Se A e B sono due insiemi si dice **insieme Prodotto** di A e B , e si indica con $A \times B$, l'insieme delle **coppie ordinate** che si possono formare con gli elementi di A e B ,

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Osserviamo anche che due elementi di $A \times B$, (a, b) e (a_1, b_1) , sono uguali se e solo se $a = a_1$ e $b = b_1$, ovvero

$$(a, b) = (a_1, b_1) \iff (a = a_1 \text{ e } b = b_1).$$

Notare che, al contrario, l'insieme $\{a, b\}$ è uguale all'insieme $\{b, a\}$.

Il prodotto di un insieme per se stesso $A \times A$ si indica anche con A^2 .

Esempio. Il piano Cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. PROPRIETÀ DEI NUMERI REALI.

2.1. La Relazione d'ordine " $\leq$ " in $\mathbb{R}$.

L'insieme $\mathbb{R}$ (come anche gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$), è dotato di una Relazione d'ordine totale, che si indica con " $\leq$ ", e si legge "minore o uguale". La Relazione " $\leq$ " verifica le seguenti proprietà:

$$(i) \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \implies a \leq b \text{ o } b \leq a; \quad [\text{Proprietà di Totalità}]$$

$$(ii) \quad a \leq b, b \leq a \implies a = b; \quad [\text{Proprietà Antisimmetrica}]$$

$$(iii) \quad a \leq b, b \leq c \implies a \leq c; \quad [\text{Proprietà Transitiva}]$$

In particolare, la (i) esprime il fatto che tutti gli elementi sono confrontabili tra loro. Ogni insieme con questa proprietà si dice **totalmente ordinato**.

Dato che tutti gli elementi di $\mathbb{R}$ sono confrontabili tra loro, si può in particolare stabilire un "ordinamento" in $\mathbb{R}$, che, da un punto di vista grafico, rappresentando $\mathbb{R}$ come una retta, si può visualizzare dicendo che se $a \leq b$ ("a è minore o uguale a b") allora o a si trova a sinistra di b o $a = b$. Se $a \leq b$ ma $a \neq b$ si scrive $a < b$ (a è minore di b) e allora a si trova a sinistra di b. Si usa anche dire che $b \geq a$ per dire che a non è minore di b.

Con le notazioni del paragrafo precedente si ha $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q} \cap \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$, $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

2.2. Massimi, minimi, estremo superiore e inferiore in $\mathbb{R}$.

Definizione[MAGGIORANTE/MINORANTE]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un **maggiorante** per A se

$$a \leq M, \quad \forall a \in A. \quad (2.2.1)$$

Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un **minorante** per A se

$$a \geq M, \quad \forall a \in A. \quad (2.2.2)$$

Osservazione

È chiaro che M NON è un maggiorante per A se e solo se

$$\exists a \in A : a > M.$$

□

ESERCIZIO: Caratterizzare allo stesso modo i valori M che NON sono minoranti per A.

Esempio 1. $A = \{x \in \mathbb{Q} : -1 \leq x < 1\}$. L'insieme dei maggioranti di A è $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$.

L'insieme dei minoranti è $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$.

Osserviamo che 1 è un maggiorante e che $1 \notin A$, mentre -1 è un minorante e $-1 \in A$.

Esempio 2. $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 \leq 0\}$. Dato che $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, concludiamo che $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 < 0\}$.

L'insieme dei maggioranti di A è $\{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{2}\}$. L'insieme dei minoranti di A è $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -\sqrt{2}\}$.

Osserviamo che $\sqrt{2}$ è un maggiorante e che $\sqrt{2} \notin A$ e che $-\sqrt{2}$ è un minorante e che $-\sqrt{2} \notin A$.

Esempio 3. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \leq 0\}$. L'insieme dei maggioranti di A è $\{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{2}\}$.

L'insieme dei minoranti di A è $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -\sqrt{2}\}$.

Osserviamo che $\sqrt{2}$ è un maggiorante e che $\sqrt{2} \in A$, e che $-\sqrt{2}$ è un minorante e che $-\sqrt{2} \in A$.

Esempio 4. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \pi\}$. L'insieme dei maggioranti di A è $\{x \in \mathbb{R} : x \geq \pi\}$. L'insieme dei minoranti di A è vuoto. Osserviamo che π è un maggiorante e che $\pi \in A$.

Esempio 5. $A = \mathbb{N}$. L'insieme dei maggioranti di A è vuoto. L'insieme dei minoranti di A è $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$. Osserviamo che 1 è un minorante e che $1 \in A$.

Esempio 6. $A = \mathbb{Z}$. L'insieme dei maggioranti di A è vuoto. L'insieme dei minoranti di A è vuoto.

Definizione[MASSIMO/MINIMO]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un **massimo** per A , e si indica con $\max A$, se:

(i) M è un maggiorante per A ;

(ii) $M \in A$.

Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un **minimo** per A , e si indica con $\min A$, se:

(i) M è un minorante di A ;

(ii) $M \in A$.

Esempio 1. $A = \{x \in \mathbb{Q} : -1 \leq x < 1\}$. $\min A = -1$ e A non ha massimo (perché $1 \notin A$).

Esempio 2. $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 \leq 0\}$. Dato che $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 < 0\}$, A non ha né massimo né minimo.

Esempio 3. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \leq 0\}$. $\min A = -\sqrt{2}$, $\max A = \sqrt{2}$.

Esempio 4. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \pi\}$. $\max A = \pi$ e A non ha minimo.

Esempio 5. $A = \mathbb{N}$. A non ha massimo e $\min A = 1$.

Esempio 6. $A = \mathbb{Z}$. A non ha né massimo né minimo.

TEOREMA [UNICITÀ DEL MASSIMO/MINIMO] Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Il massimo(minimo) di A , se esiste, è unico.

Dimostrazione.[Facoltativa]

Supponiamo che A ammetta minimo M_1 . Supponiamo che esista un altro minimo M_2 , e dimostriamo che $M_2 = M_1$. Dato che M_1 è minimo per A , si ha in particolare,

$$M_1 \leq a, \forall a \in A,$$

perché M_1 è minorante per A . Dato che anche M_2 è minimo, si ha in particolare $M_2 \in A$, e quindi possiamo porre $a = M_2$ nella disuguaglianza $M_1 \leq a$. Quindi $M_1 \leq M_2$. Viceversa, dato che M_2 è minimo per A , si ha in particolare,

$$M_2 \leq a, \forall a \in A,$$

perché M_2 è minorante per A . Dato che anche M_1 è minimo, si ha in particolare $M_1 \in A$, e quindi possiamo porre $a = M_1$ nella disuguaglianza $M_2 \leq a$. Quindi $M_2 \leq M_1$. Dato che $M_1 \leq M_2$ e $M_2 \leq M_1$, dalla proprietà di antisimmetria della relazione d'ordine, segue che $M_2 = M_1$. ■

Definizione[INSIEMI SUPERIORMENTE/INFERIORMENTE LIMITATI]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che A è **superiormente limitato** se esiste almeno un maggiorante di A :

$$\exists M \in \mathbb{R} : a \leq M, \forall a \in A.$$

Si dice che A è **inferiormente limitato** se esiste almeno un minorante di A :

$$\exists M \in \mathbb{R} : a \geq M, \forall a \in A.$$

Osservazione

Se A non è superiormente(inferiormente) limitato, si dice anche che A è superiormente(inferiormente) illimitato. In particolare, A è superiormente illimitato se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A : a > M.$$

□

ESERCIZIO: Caratterizzare analogamente gli insiemi inferiormente illimitati.

Definizione[INSIEMI LIMITATI]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che A è **limitato** se è superiormente e inferiormente limitato, ovvero:

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ : |a| \leq M, \forall a \in A.$$

Osservazione

Dato che

$$|a| \leq M \iff -M \leq a \leq M,$$

si conclude che A è **limitato** se e solo se

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ : -M \leq a \leq M, \forall a \in A.$$

La terminologia "insieme illimitato" si usa per indicare gli insiemi non limitati. Dunque in particolare A è **illimitato** se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists a \in A : |a| > M,$$

e sono quindi illimitati tutti gli insiemi superiormente e inferiormente illimitati.

□

Esempio 1. $A = \{x \in \mathbb{Q} : -1 \leq x < 1\}$. A è limitato.

Esempio 2. $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 \leq 0\}$. A è limitato.

Esempio 3. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \leq 0\}$. A è limitato.

Esempio 4. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \pi\}$. A è inferiormente illimitato e superiormente limitato.

Esempio 5. $A = \mathbb{N}$. A è inferiormente limitato e superiormente illimitato.

Esempio 6. $A = \mathbb{Z}$. A è inferiormente illimitato e superiormente illimitato.

Osservazione

Si verifica facilmente che l'insieme dei maggioranti(minoranti) di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, può essere solo di tre tipi:

- (i) Una semiretta, caso che si presenta se e solo se A è superiormente(inferiormente) limitato;
- (ii) L'insieme vuoto, caso che si presenta se e solo se A è superiormente(inferiormente) illimitato;

(iii) Tutti i numeri reali, caso che si presenta se e solo se A è vuoto, $A = \emptyset$. $\square$

Abbiamo visto che non sempre un sottoinsieme limitato dei numeri reali ha massimo o minimo. Introduciamo ora i concetti di estremo superiore e inferiore di un insieme di numeri reali che, come vedremo più avanti, esistono sempre, almeno per i sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$. In particolare si può dimostrare che l'estremo inferiore (superiore), coincide con il minimo (massimo) di un insieme quando questo esiste. Questa proprietà fondamentale non vale per l'insieme totalmente ordinato dei numeri razionali.

Definizione[ESTREMO SUPERIORE/INFERIORE]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Definiamo **estremo superiore** di A in $\mathbb{R}$, che indicheremo con $\sup A$, il minimo (se esiste) dei maggioranti di A . Definiamo **estremo inferiore** di A in $\mathbb{R}$, che indicheremo con $\inf A$, il massimo (se esiste) dei minoranti di A .

Osservazione

Segue dall'unicità del massimo/minimo che anche l'estremo superiore/inferiore se esiste è unico. $\square$

Esempio 1. $A = \{x \in \mathbb{Q} : -1 \leq x < 1\}$. $\inf A = \min A = -1$, A non ha massimo e $\sup A = 1$.

Esempio 2. $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 \leq 0\}$. Dato che $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 < 0\}$, A non ha né massimo né minimo, e $\inf A = -\sqrt{2}$, $\sup A = \sqrt{2}$.

Esempio 3. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \leq 0\}$. $\inf A = \min A = -\sqrt{2}$, $\sup A = \max A = \sqrt{2}$.

Esempio 4. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \pi\}$. $\sup A = \max A = \pi$ e A non ha estremo inferiore.

Esempio 5. $A = \mathbb{N}$. $\inf A = \min A = 1$ e A non ha estremo superiore.

Esempio 6. $A = \mathbb{Z}$. A non ha estremo inferiore e non ha estremo superiore.

TEOREMA Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

- (i) Se esiste $\max A$, allora A è superiormente limitato e $\sup A = \max A$;
- (ii) Se esiste $\min A$, allora A è inferiormente limitato e $\inf A = \min A$;
- (iii) Se esiste $\sup A$, allora esiste $\max A$ se e solo se $\sup A \in A$;
- (iv) Se esiste $\inf A$, allora esiste $\min A$ se e solo se $\inf A \in A$;

Dimostrazione.[Facoltativa]

(i) Sia $M = \max A$. Allora M è un maggiorante per A e quindi A è superiormente limitato. In particolare, dato che $M = \max A$ si ha $M \in A$. Se ne deduce che se M' è un altro maggiorante per A , allora $M' \geq M$, ovvero che M è il minimo dei maggioranti. Quindi $\sup A = M = \max A$.

(ii) Sia $m = \min A$. Si ha $-m = \max B$ dove $B = -A$. La conclusione segue allora applicando (i) a B .

(iii) Sia $M = \sup A$. Se esiste $\max A$, allora $\max A = M$ dalla (i), ovvero $M \in A$. Viceversa, se $M \in A$, dalla definizione si sup si ha $M \geq a \forall a \in A$, ovvero M verifica la definizione di $\max A$.

(iv) Si procede come in (ii). ■

TEOREMA [Caratterizzazione operativa di sup/inf]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\mu \in \mathbb{R}$. Allora $\mu = \sup A$ se e solo se:

$$(i) \ a \leq \mu, \forall a \in A;$$

$$(ii) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : a > \mu - \varepsilon,$$

e $\mu = \inf A$ se e solo se:

$$(i) \ a \geq \mu, \forall a \in A;$$

$$(ii) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : a < \mu + \varepsilon.$$

Osserviamo che la (i) asserisce che μ è maggiorante(minorante) per A . La (ii) invece asserisce che non possono esistere maggioranti(minoranti) minori(maggiori) di μ , cioè che μ è il più piccolo, quindi il minimo, dei maggioranti (il più grande, quindi il massimo, dei minoranti).

2.3. La completezza di $\mathbb{R}$.

TEOREMA [$\mathbb{R}$ è COMPLETO] $\mathbb{R}$ è completo, ovvero ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente(inferiormente) limitato ammette estremo superiore(inferiore) in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione.[Facoltativa] Vedere la fine del paragrafo.

Questa proprietà permette di definire in $\mathbb{R}$ alcune operazioni fondamentali (per es. radice e logaritmo di numeri positivi). Per alcuni cenni su questo punto vedere [B] §7.9, p. 71-72.

Un esempio di insieme numerico con relazione d'ordine totale **NON COMPLETO** è quello dei numeri razionali. Infatti, se nella definizione di maggiorante (minorante) di cui sopra si sostituisce $\mathbb{R}$ con $\mathbb{Q}$, ovvero si definiscono maggioranti (minoranti) di un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ gli **ELEMENTI DI** $\mathbb{Q}$ che verificano la (2.2.1) ((2.2.2)), allora si può dimostrare per esempio che l'insieme dei maggioranti (minoranti)

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 \leq 0\},$$

NON AMMETTE minimo(massimo) in $\mathbb{Q}$. In altre parole:

L' INSIEME TOTALMENTE ORDINATO DEI NUMERI RAZIONALI CONTIENE INSIEMI LIMITATI CHE NON AMMETTONO ESTREMO SUPERIORE/INFERIORE.

Esercizio. Determiniamo sup/inf dell' insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dato che $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$, è chiaro che $1 \in A$ e che $1 \geq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Quindi $\max A = 1$. Dato che $A \subset \mathbb{R}^+$, l' estremo inferiore deve essere non negativo. Dato che i numeri $\frac{1}{n}$ assumono valori positivi e arbitrariamente piccoli, è ragionevole supporre che l' estremo inferiore di A sia $\mu = 0$. La (i) di cui sopra è soddisfatta perché $\frac{1}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo la (ii). Si tratta di far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a < 0 + \varepsilon,$$

ovvero che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Ma $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$, e quindi sarà sufficiente scegliere $n > \nu_\varepsilon$, con $\nu_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}]$, dove $[\frac{1}{\varepsilon}]$ indica la parte intera di $\frac{1}{\varepsilon}$. Quindi $0 = \inf A$ che comunque non è minimo perché $0 \notin A$.

Esercizio. Determiniamo sup/inf dell' insieme

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Dato che $A = \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots \right\}$, si ha $A = B \cup C$, dove

$$B = \left\{ \frac{1}{2k+3} : k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots \right\},$$

$$C = \left\{ \frac{-1}{2k+4} : k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\} = \left\{ -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \dots \right\}.$$

È quindi chiaro che, come nell' esempio precedente, $\max B = \frac{1}{3}$ e $\min C = -\frac{1}{4}$. D' altra parte $\sup A = \sup B$ perché gli elementi di C sono tutti negativi e $\inf A = \inf C$ perché gli elementi di B sono tutti positivi. Quindi $\max A = \frac{1}{3}$ e $\min A = -\frac{1}{4}$. Determinare per esercizio $\inf B$ e $\sup C$.

Esercizio. Determiniamo sup/inf dell' insieme

$$A = \left\{ \sin \left(n \frac{\pi}{3} \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Si verifica facilmente che $A = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$, e quindi $\max A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\min A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ESERCIZIO: Determinare (quando esistono) sup/inf degli insiemi

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}, A = \{(-1)^n n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, A = \left\{ \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Osservazione[Densità dei razionali]

Se $x < y$ sono due numeri reali, allora esiste $p \in \mathbb{Q}$ tale che

$$x < p < y.$$

Questa proprietà fondamentale dei numeri razionali è detta **densità** di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Asserisce in particolare che ogni numero irrazionale può essere approssimato a meno di un errore prefissato tramite un numero razionale. Per avere un'idea degli argomenti che si usano nella dimostrazione di questa proprietà vedere la dimostrazione del Teorema di completezza alla fine del paragrafo.

Un algoritmo per il calcolo approssimato di $x = \sqrt{2}$ è il seguente. Assegnato un numero reale positivo arbitrario $\bar{x} > 0$, si utilizza la formula ricorsiva

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right), \quad x_0 = \bar{x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Le prime 4 iterate con $\bar{x} = 1$ sono

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} = 1,5 \\ x_2 &= \frac{17}{12} = 1.41\bar{6} \\ x_3 &= \frac{577}{408} = 1.414215... \\ x_4 &= \frac{665857}{470832} = 1.414213562374...., \end{aligned}$$

da confrontare con

$$\sqrt{2} = 1.414213562373....$$

□

Dimostrazione del Teorema di completezza di $\mathbb{R}$.[Facoltativa] Dimostriamo il Teorema nel caso in cui A è limitato superiormente. Il caso in cui A è limitato inferiormente segue applicando il risultato a

$B = -A$ che in questo caso risulta essere limitato superiormente.

Si tratta di far vedere che

$$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, A \text{ superiormente limitato} \implies \exists \sup A \in \mathbb{R}.$$

Dato che A è limitato superiormente ammette almeno un maggiorante, che indichiamo con $m \in \mathbb{R}$. Per semplificare la dimostrazione, consideriamo l'insieme

$$A_m = \{y \in \mathbb{R} : y = x - m - 1, x \in A\}.$$

Si verifica facilmente che -1 è un maggiorante per A_m e che

$$\sup A = \ell \iff \sup A_m = \ell - m - 1. \quad (2.3.1)$$

Se ne deduce in particolare che è sufficiente considerare il caso $m < 0$. Infatti, se si avesse $m \geq 0$, la tesi seguirebbe applicando il risultato ad A_m (che ha $-1 < 0$ come maggiorante) e usando la (2.3.1).

Sia dunque $m < 0$ un maggiorante per A .

Parte Prima.

Costruiremo un candidato estremo superiore per A utilizzando la teoria degli sviluppi decimali, ovvero faremo vedere che

$$\exists p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \beta_j \in \{0, 1, \dots, 9\} \forall j \in \mathbb{N} \text{ tale che } \ell = -p, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$$

verifica

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} -p, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n & \text{è maggiorante di } A \\ -p, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n - 10^{-n} & \text{non è maggiorante di } A \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Sia $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definito come segue.

Poniamo $q = 0$. Per ipotesi q è un maggiorante di A . Se $q - 1 = 0 - 1 = -1$ non è un maggiorante di A poniamo $p = q = 0$. Altrimenti, poniamo $q = -1$ che in questo caso risulta essere un maggiorante di A . Se $q - 1 = -1 - 1 = -2$ non è un maggiorante di A poniamo $p = q = -1$. Altrimenti, poniamo $q = -2$ e ripetiamo il procedimento. Dato che $A \neq \emptyset$ e A ammette un maggiorante negativo, concludiamo subito che p è ben definito e in particolare che $0 \leq p \leq -a$ con $a \in A$ un elemento arbitrariamente scelto in A . Abbiamo quindi individuato $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tale che

$$\begin{cases} -p & \text{è maggiorante di } A \\ -p - 1 & \text{non è maggiorante di } A \end{cases}$$

Sia $\beta_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ definito come segue.

Poniamo $q_1 = 0$. Per ipotesi $-p, q_1 = -p, 0 = -p$ è un maggiorante di A . Se $-p, q_1 - 10^{-1} = -p, 0 - 10^{-1} = -p, 1$ non è un maggiorante di A poniamo $\beta_1 = q_1 = 0$. Altrimenti, poniamo $q_1 = 1$ e in questo caso $-p, 1$ risulta essere un maggiorante di A . Se $-p, q_1 - 10^{-1} = -p, 1 - 10^{-1} = -p, 2$ non è un maggiorante di A poniamo $\beta_1 = q_1 = 1$. Altrimenti, poniamo $q_1 = 2$ e ripetiamo il procedimento. Dato che $-p - 1 = -p, 9 - 1$ non è un maggiorante per A , concludiamo che

$$\exists \beta_1 \in \{0, 1, \dots, 9\} : \begin{cases} -p, \beta_1 & \text{è maggiorante di } A \\ -p, \beta_1 - 10^{-1} & \text{non è maggiorante di } A \end{cases}$$

Lo stesso argomento permette di concludere che

$$\exists \beta_2 \in \{0, 1, \dots, 9\} : \begin{cases} -p, \beta_1 \beta_2 & \text{è maggiorante di } A \\ -p, \beta_1 \beta_2 - 10^{-2} & \text{non è maggiorante di } A \end{cases}$$

Il procedimento si può ripetere per $\beta_3, \dots, \beta_n$ con $n \in \mathbb{N}$ fissato arbitrariamente. Se ne deduce che risulta ben definito uno sviluppo decimale $\ell = -p, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$ che verifica (2.3.2).

Parte Seconda.

Facciamo vedere ora che ℓ (che dalla parte prima verifica (2.3.2)), verifica le due proprietà che caratterizzano il sup:

$$(i) \quad a \leq \ell, \quad \forall a \in A;$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > \ell - \varepsilon.$$

Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che $\delta = x - \ell > 0$. Dimostriamo innanzitutto il seguente:

Lemma

$$\exists n_\delta \in \mathbb{N} : \delta > 10^{-n_\delta}. \quad (2.3.3)$$

Dimostrazione del Lemma.

Siano

$$q \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \alpha_j \in \{0, 1, \dots, 9\} \quad \forall j \in \mathbb{N} : \quad x = -q, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots > \ell.$$

Dato che $x > \ell$ allora o $q < p$ o altrimenti, se $q = p$, si deve avere $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} \neq \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$ e in particolare il primo tra i valori $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ tale che $\alpha_j \neq \beta_j$ deve verificare $\alpha_j < \beta_j$.

Iniziamo dal caso $q < p$.

Se $q < p$, dato che si ha in particolare $p \geq q + 1$, otteniamo

$$\begin{aligned} x - \ell &= (-q, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots) - (-p, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) = (p, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) - (q, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots) \geq \\ &= (q, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) + (1, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) - (q, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots) \geq \\ &= (q, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) + (1, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) - (q, 999 \dots) = \\ &= (q, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) + (1, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) - q, \bar{9} = \\ &= (q, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) + (1, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) - (q + 1) = \\ &= 2(0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) \geq 0, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

dove il segno di uguale vale se e solo se $p = q + 1$, $\beta_j = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ e $\alpha_j = 9 \quad \forall j \in \mathbb{N}$, ovvero se e solo se $\ell = p = q + 1 = x$, che è impossibile perché abbiamo supposto $x - \ell > 0$. Nel dedurre la (2.3.4) e nella conclusione precedente si è usato il fatto (che diamo per acquisito dalla teoria degli sviluppi decimali) che $1 = 0, \bar{9}$ ovvero che $(10^{-k}) = 0, \bar{9} \cdot (10^{-k})$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Se ne deduce che la disuguaglianza nella (2.3.4) deve essere stretta e in particolare che o $p > q + 1$ o almeno uno dei valori β_j verifica $\beta_j > 0$ o almeno uno dei valori α_j verifica $\alpha_j < 9$. Se $p > q + 1$ si ha $p \geq q + 2$ e inoltre

$$x - \ell \geq 1 + 2(0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) \geq 1 > 10^{-1},$$

e la (2.3.3) vale con $n_\delta = 1$. Se $p = q + 1$, $\alpha_j = 9 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ e per almeno un $k \in \mathbb{N}$ si ha $\beta_k > 0$, si ha in particolare $\beta_k \in \{1, 2, \dots, 9\}$ e inoltre

$$x - \ell \geq 2(0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) > (0, 000 \dots \beta_k \dots 000 \dots) \geq (0, 000 \dots 1 \dots 000 \dots) = 10^{-k},$$

e la (2.3.3) vale con $n_\delta = k$. Se $p = q + 1$, $\beta_j = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ e per almeno un $k \in \mathbb{N}$ si ha $\alpha_k < 9$, si ha in particolare $\alpha_k \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$ e inoltre

$$\begin{aligned} x - \ell &\geq (q, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) + (1, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) - (q, 999 \dots \alpha_k \dots 999 \dots) = \\ &= q + 1 - (q, 999 \dots \alpha_k \dots 999 \dots) = (0, 999 \dots 9 \dots 999 \dots) - (0, 999 \dots \alpha_k \dots 999 \dots) \geq \\ &= (9 - \alpha_k)10^{-k} = 10^{-k} > 10^{-k-1}, \end{aligned}$$

e la (2.3.3) vale con $n_\delta = k + 1$.

Possiamo quindi supporre senza perdita di generalità che $p = q$. A questo punto si ha

$$\delta = a - \ell = (0, \beta_1 \beta_2 \dots) - (0, \alpha_1 \alpha_2 \dots) > 0,$$

e necessariamente $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} \neq \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$ e in particolare il primo tra i valori $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ tale che $\alpha_j \neq \beta_j$ deve verificare $\alpha_j < \beta_j$. Sia $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$\alpha_j = \beta_j \quad \forall j \leq m - 1,$$

dove abbiamo posto $\alpha_0 = 0 = \beta_0$. Dato che

$$10^m \delta = (\beta_m, \beta_{m+1} \beta_{m+2} \cdots) - (\alpha_m, \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \cdots) > 0,$$

possiamo definire $x^{(m)} = \alpha_m, \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \cdots$, $\ell^{(m)} = \beta_m, \beta_{m+1} \beta_{m+2} \cdots$, e osservare che, dato che $\alpha_m < \beta_m$, si può applicare lo stesso ragionamento di cui sopra al numero $x^{(m)} - \ell^{(m)}$ per concludere che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$10^m \delta > 10^{-k-1}.$$

Concludiamo allora che la (2.3.3) vale con $n_\delta = k + m + 1$. ■

Osservazione

Una versione semplificata dello stesso argomento utilizzato per dimostrare il Lemma permette di dimostrare che se $\varepsilon > 0$ è un qualunque numero reale, allora

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \varepsilon > 10^{-n_\varepsilon}. \quad (2.3.5)$$

□

Osservazione

Segue in particolare dalla (2.3.5) che $\ell < 0$. Infatti, sia $\varepsilon_m = -\frac{m}{2}$. Dalla (2.3.5) sappiamo che $\exists n_m \in \mathbb{N} : \varepsilon_m > 10^{-n_m}$. Se ne deduce che

$$\ell - \varepsilon_m = -(p, \beta_1 \beta_2 \cdots) - \varepsilon_m < -(p, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{n_m}) - 10^{-n_m} \leq a,$$

per qualche $a \in A$, dove abbiamo usato la seconda proprietà in (2.3.2). Ma $a \leq m$ per ipotesi e possiamo concludere che

$$\ell - \varepsilon_m \leq m, \quad \text{ovvero che} \quad \ell \leq m + \left(-\frac{m}{2}\right) = \frac{m}{2} < 0.$$

□

Dimostriamo la (i). Supponiamo per assurdo che la (i) sia falsa. Allora

$$\exists a \in A : a > \ell.$$

Utilizzando il Lemma con $a = x$ concludiamo che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$a - \ell > 10^{-n}.$$

Questa relazione tuttavia è falsa. Infatti, dato che

$$\ell = -p, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n \cdots \leq -p, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n + 10^{-n},$$

se fosse vera si avrebbe

$$a > -(p, \beta_1 \beta_2 \cdots) + 10^{-n} \geq -(p, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n) - 10^{-n} + 10^{-n} = -(p, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n),$$

e quindi $-(p, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n)$ non sarebbe un maggiorante di A , in contraddizione con quanto stabilito dalla prima delle proprietà in (2.3.2). Questa contraddizione mostra che l'ipotesi iniziale secondo la quale la (i) sarebbe stata falsa era errata, ovvero che la (i) è vera.

Dimostriamo ora la (ii). Supponiamo per assurdo che la (ii) sia falsa. Allora

$$\exists \varepsilon > 0 : a \leq \ell - \varepsilon, \quad \forall a \in A.$$

Dalla (2.3.5) sappiamo che $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varepsilon > 10^{-n}.$$

Se ne deduce che

$$a \leq \ell - \varepsilon = -(p, \beta_1 \beta_2 \cdots) - \varepsilon \leq -(p, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n) - \varepsilon < -(p, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n) - 10^n, \quad \forall a \in A.$$

Questa relazione tuttavia è impossibile, perché asserisce che $-(p, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n) - 10^n$ è un maggiorante di A , in contraddizione con la seconda delle proprietà in (2.3.2). Questa contraddizione mostra che l'ipotesi iniziale secondo la quale la (ii) sarebbe stata falsa era errata, ovvero che la (ii) è vera. ■