Università di Roma *Tor Vergata*

Corso di Laurea in Matematica
Probabilità 2 **a.a 2003-2004** M. Abundo

Soluzioni degli esercizi della lista N.2

1. La densità del vettore aleatorio X non esiste, poiché C è singolare.

2. (i) La legge di Y è ancora $\mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$ per l'invarianza di un vettore Gaussiano sotto trasformazioni ortogonali;
(ii) la legge di Z è allora

$$\mathcal{N}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, I).$$

3. (i) La densità di X è :

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-||\mathbf{x}||^2/2}.$$

(ii) **Primo procedimento**
Consideriamo la trasformazione:

$$(X_1, X_2) \longrightarrow (U, V)$$

ovvero:

$$\begin{cases} u = x_1/2 + \sqrt{3}x_2/2 \\ v = -\sqrt{3}x_1/2 + x_2/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = u/2 - \sqrt{3}v/2 \\ x_2 = \sqrt{3}u/2 + v/2 \end{cases}$$

La matrice Jacobiana della trasformazione inversa $(U, V) \longrightarrow (X_1, X_2)$ è:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e $detJ = 1$. Pertanto, la densità di (U, V) è:

$$g(u, v) = f(u/2 - \sqrt{3}v/2, \sqrt{3}u/2 + v/2) \cdot 1 = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[(u/2-\sqrt{3}v/2)^2+(\sqrt{3}u/2+v/2)^2]} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[u^2+v^2]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2}$$

da cui segue che U e V sono indipendenti.

Secondo procedimento
Si ha:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

ove

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

($\alpha = \pi/3$) è una matrice ortogonale. Per l'invarianza sotto trasformazioni ortogonali, siccome

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$$

allora risulta anche:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$$

cioé U e V sono indipendenti e ciascuna ha distribuzione gaussiana standard.

Terzo procedimento
La densità di (U, V) è:

$$g(u,v) = \frac{1}{|detA|} f\left(A^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2\pi|detA|} e^{-\frac{1}{2}||(A^{-1}(u,v)^T||^2}$$

Siccome $detA = 1$ e, visto che A è ortogonale,

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

si ottiene $A^{-1}(u,v)^T = (u/2 - \sqrt{3}v/2, \sqrt{3}u/2 + v/2)^T$ da cui, effettuando i calcoli: $||A^{-1}(u,v)^T||^2 = u^2 + v^2$. Sostituendo nell'espressione sopra, si ottiene la densità $g(u,v)$.

4. Si ha (z^* indica il complesso coniugato di z) :

$$\phi^*(t) = E^*(e^{itX}) = E(e^{-itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(x)dx =$$

(effettuando la sostituzione $y = -x$)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f(-y)dy.$$

(i) Se f è pari, cioé $f(-y) = f(y)$, dal calcolo di sopra si ottiene $\phi^*(t) = \phi(t)$, ovvero $\phi(t)$ è reale.

(ii) Se $\phi(t)$ è reale, allora $E(e^{-itX}) = E(e^{itX})$ da cui segue che la funzione caratteristica di $-X$ è uguale a quella di X. Questo implica che X e $-X$ hanno la stessa legge (grazie al teorema di inversione di Levy), da cui segue facilmente che la densità di X è pari.

5. Per un vettore $X \sim \mathcal{N}(\mathbf{b}, C)$, la densità è:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{detC}} e^{-\frac{1}{2}<C^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{b}),\mathbf{x}-\mathbf{b}>}$$

oppure, scrivendo esplicitamente l'espressione della densità di una generica v.a. gaussiana bidimensionale:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2}[(x-m_1)^2/\sigma_1^2 - 2\rho(x-m_1)(y-m_2)/\sigma_1\sigma_2 + (y-m_2)^2/\sigma_2^2]}.$$

Dal confronto con l'espressione data, segue: $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = \sqrt{2}/2$, $m_1 = 1$, $m_2 = 0$ e

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque X e Y sono correlate ($\rho \neq 0$) e quindi non sono indipendenti.

6. (i) Si ha:

$$\phi_U(t) = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}e^{-\lambda|u|}du = \frac{\lambda}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{itu}e^{\lambda u}du + \int_{0}^{+\infty} e^{itu}e^{-\lambda u}du\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\lambda+it} + \frac{1}{\lambda-it}\right) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}.$$

(ii) Ricordiamo che la funzione caratteristica di una v.a. esponenziale di parametro λ è:

$$\phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Pertanto, essendo X e Y indipendenti (e quindi anche X e $-Y$), si ha:

$$\phi_{X-Y}(t) = \phi_X(t)\phi_{-Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(-t) = \frac{\lambda}{\lambda-it}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+it} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}.$$

Siccome la funzione caratteristica individua univocamente la densità, per il punto (i) la v.a. $Z = X - Y$ ha densità

$$f(z) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|z|}.$$

7. (i) Le densità marginali di X e Y sono:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-y}\mathbf{1}_{\{x>0\}}(x)dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\mathbf{1}_{\{x>0\}}(x)$$

$$f_Y(y) = e^{-y}\int_0^{y^2} \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbf{1}_{\{y>0\}}(y)dx = ye^{-y}\mathbf{1}_{\{y>0\}}(y).$$

(ii) Le v.a. X e Y non sono indipendenti, poiché la loro densità congiunta non è il prodotto delle marginali, fuori di un insieme di probabilità zero.
(iii) Consideriamo la trasformazione $(X,Y) \longrightarrow (X,Z)$ data da:

$$\begin{cases} X = X \\ Z = Y - \sqrt{X} \end{cases}$$

La matrice Jacobiana della trasformazione inversa:

$$\begin{cases} X = X \\ Y = Z + \sqrt{X} \end{cases}$$

è:

$$J(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{x}} & 1 \end{pmatrix}$$

con $detJ = 1$. Pertanto la densità congiunta di (X,Z) è:

$$g(x,z) = f(x, z+\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\mathbf{1}_{\{x>0\}}(x)e^{-y}\mathbf{1}_{\{y>0\}}(y)$$

che si scrive come il prodotto delle due densità marginali, dunque X e Z sono indipendenti.