Università di Roma *Tor Vergata*

Corso di Laurea in Matematica
Probabilità 2 **a.a 2003-2004** M. Abundo

Lista di esercizi N.2

1. Sia $X \sim \mathcal{N}(\mathbf{b}, C)$, ove
$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Trovare, se esiste, la densità del vettore aleatorio X.

2. Sia $\alpha \in (0, 2\pi)$; se
$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
A è una matrice ortogonale ($A^T A = I$) e rappresenta una rotazione di angolo α in verso antiorario. Sia ora $X \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$ e $Y = AX$.
(i) Trovare la legge di Y.
(ii) Trovare la legge di
$$Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + Y.$$

3. Siano $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a. indipendenti e Gaussiane standard.
(i) Qual è la densità del vettore aleatorio $X = (X_1, X_2, .., X_n)$?
(ii) Se $U = X_1/2 + \sqrt{3}X_2/2$ e $V = -\sqrt{3}X_1/2 + X_2/2$, trovare la densità congiunta di U e V. U e V sono indipendenti?

4. Sia X una v.a. unidimensionale assolutamente continua. Provare che la densità di X è pari se e solo se la funzione caratteristica $\phi(t)$ di X è reale.

5. Il vettore aleatorio (X, Y) ha densità:
$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \exp -[(x-1)^2 - \sqrt{2}(x-1)y + y^2].$$
Dire se si tratta di una densità Gaussiana bivariata e, in caso affermativo, calcolare la matrice di covarianza di X e Y. Queste sono indipendenti?

6. (i) Per $\lambda > 0$, sia U una v.a. con densità
$$f(u) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|u|}.$$
(i) Calcolare la funzione caratteristica di U.

(ii) Siano X e Y v.a. indipendenti ed esponenziali di parametro λ. Calcolare la funzione caratteristica e la densità di $X - Y$.

7. Sia (X, Y) un vettore aleatorio di densità congiunta

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-y} \mathbf{1}_E$$

ove $E = \{(x, y) : x > 0, y \geq \sqrt{x}\}$.
(i) Trovare le densità di X e Y.
(ii) Le v.a. X e Y sono indipendenti?
(iii) Le v.a. X e $Y - \sqrt{X}$ sono indipendenti?