LE SOLUZIONI DI QUESTI ESERCIZI SONO A CURA DELLA STUDENTESSA FEDERICA GALDELLI

1

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

i) $p_{22}^{(2)} = \sum_{h=1}^{4} p_{h2} \cdot p_{2h} = p_{12} \cdot p_{21} + p_{22}^2 + p_{32} \cdot p_{23} + p_{42} p_{24} = 0 + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{4}$

$p_{32}^{(2)} = \sum_{h=1}^{4} p_{h2}\, p_{3h} = p_{12}\, p_{31} + p_{22} p_{32} + p_{32} p_{33} + p_{42}\, p_{34} = 0$

ii) Dallo stato 1 posso andare negli stati 1 e 3 (direttamente).
Scrivo: $1 \to 1, 3$. Analogamente si ha:
$2 \to 1, 2, 3$
$3 \to 1, 3$
$4 \to 2, 3, 4$

2, 4 transitori. Infatti se vanno negli stati 1 o 3 non possono tornare indietro.
1, 3 sono stati ricorrenti e formano una classe chiusa irriducibile.
$E = \{1,2,3,4\} = T \cup C$. $T = \{2,4\}$, $C = \{1,3\}$

$p_{22}^{(12)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$ (Unico modo di restare in 2 e' di rimanerci ad ogni passo!)
Oppure si puo' usare la Formula di Chapman – Kolmogorov:
$p_{ij}^{(n)} = \sum_{h=1}^{N} p_{hj} \cdot p_{ih}^{(n-1)}$ $N = \#$ stati.

iii) $p_{33} = p_{34} = 1/4$

i) $p_{22}^{(2)} = \frac{1}{4}$ $p_{32}^{(2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

ii) $1 \to 1, 3$
$2 \to 1, 2, 3$
$3 \to 1, 3, 4$
$4 \to 2, 3, 4$
$\to$ Tutti gli stati sono ricorrenti.

In questo caso $p_{22}^{(12)}$ non si puo' calcolare se non con la Formula di Chapman – Kolmogorov:
$p_{22}^{(12)} = \sum_{h=1}^{4} p_{h2}\, p_{2h}^{(11)} = \ldots$

② $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

i) $\begin{cases} 1 \to 2,3 \\ 2 \to 2,3,4 \\ 3 \to 2,3 \\ 4 \to 4,5 \\ 5 \to 4,5 \end{cases}$

$T = \{1,2,3\}$ transitori

$C = \{4,5\}$ ricorrenti, classe chiusa irriducibile

ii) $\pi \overset{?}{=} P^T \pi$

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = \frac{2}{3}\pi_3 \\ \pi_3 = 0 \\ \pi_4 = \frac{2}{3}\pi_5 \\ \pi_5 = \pi_5 \end{cases} \to \underline{\pi} = (0,0,0,\tfrac{2}{3}k, k)$$

Ora impongo che sia un vettore di probabilità, cioè che $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$

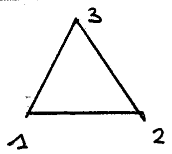
$\Rightarrow \frac{2}{3}k + k = 1 \longrightarrow k = \frac{3}{5} \Rightarrow \underline{\pi} = (0,0,0,\frac{2}{5},\frac{3}{5})$ = distribuzione stazionaria.

iii) Cerchiamo la probabilità, partendo da 1, di finire nella classe chiusa.
Problema di assorbimento.

$\lambda_i = P\{X_n \in C, \text{ per qualche } n \in \mathbb{N} \mid X_0 = i \in T\} := \sum_{k \in C} p_{ik} + \sum_{j \in T} p_{ij}\lambda_j$

$$\begin{cases} \lambda_1 = p_{14} + p_{15} + p_{11}\lambda_1 + p_{12}\lambda_2 + p_{13}\lambda_3 \\ \lambda_2 = p_{24} + p_{25} + p_{21}\lambda_1 + p_{22}\lambda_2 + p_{23}\lambda_3 \\ \lambda_3 = p_{34} + p_{35} + p_{31}\lambda_1 + p_{32}\lambda_2 + p_{33}\lambda_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda_3 \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 \end{cases}$$

$\to \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

(3) 

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

i) P regolare: $P^2 = \begin{pmatrix} 2p(1-p) & (1-p)^2 & p^2 \\ p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ (1-p)^2 & p^2 & 2p(1-p) \end{pmatrix} > 0$

La matrice P e' bistocastica (somma degli elementi su ogni colonna uguale a 1)

$\Rightarrow \ \Pi = \frac{1}{N}(1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

ii) $P(X_n = 1, X_{n+1} = 2) = P(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 1) \cdot P(X_n = 1) = p \cdot \frac{1}{3}$

$P(X_n = 2, X_{n+1} = 1) = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2) \cdot P(X_n = 2) = (1-p) \cdot \frac{1}{3}$

iii) CM e' reversibile se $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \quad \forall i,j = 1 \dots N$

Per P si ha: $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \iff \frac{1}{3} p_{ij} = \frac{1}{3} p_{ji} \iff p_{ij} = p_{ji} \iff p = 1-p = \frac{1}{2}$

(4) $P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/5 & 0 & 1/3 & 7/15 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

i) $\begin{cases} 1 \to 1,2,4 \\ 2 \to 1,3,4 \\ 3 \to 2,3 \\ 4 \to 1,2,3,4 \end{cases}$ Tutti gli stati sono ricorrenti

ii) P regolare $(P^2 > 0) \Rightarrow$ vale il teorema ergodico; $\exists$ probabilita' stazionaria.

iii) $\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/5 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 2/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 7/15 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \Pi = (\ - - - - \ )$

⑤ $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/8 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

i) $\begin{cases} 1 \to 1,2 \\ 2 \to 1,2,3 \\ 3 \to 3,4 \\ 4 \to 3,4 \end{cases}$ $T = \{1,2\}$ stati transitori

$C = \{3,4\}$ stati riconnessi, classe chiusa irriducibile.

Probabilita' di Assorbimento:

$\begin{cases} \lambda_1 = p_{13} + p_{14} + p_{11}\lambda_1 + p_{12}\lambda_2 \\ \lambda_2 = p_{23} + p_{24} + p_{21}\lambda_1 + p_{22}\lambda_2 \end{cases} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (ovvio se C e' una sola!)

Tempo medio di Assorbimento in C: $i \in T$ $\quad T_i = 1 + \sum_{k \in T} p_{ik} T_k$

$\begin{cases} T_1 = 1 + p_{11}T_1 + p_{12}T_2 \\ T_2 = 1 + p_{21}T_1 + p_{22}T_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_1 = 1 + \frac{1}{3}T_1 + \frac{2}{3}T_2 \\ T_2 = 1 + \frac{3}{4}T_1 + \frac{1}{8}T_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_1 = 37/2 \\ T_2 = 17 \end{cases}$

⑥ $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$

i) $\beta > 0$: $\begin{matrix} 1 \to 1,2,3 \\ 2 \to 1,3 \\ 3 \to 2,3 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ 1,2,3 riconnessi $\Rightarrow$ catena irriducibile.

$\beta = 0 \rightarrow P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3 e' uno stato assorbente, 1,2 transitori.

ii) $\begin{cases} T_1 = 1 + p_{11}T_1 + p_{12}T_2 \\ T_2 = 1 + p_{21}T_1 + p_{22}T_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_1 = 1 + \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{4}T_2 \\ T_2 = 1 + \frac{1}{2}T_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{10}{3} \\ T_2 = \frac{8}{3} \end{cases}$

iii) $\beta = 3/4 \Rightarrow$ P e' bistocastica $\Rightarrow \pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

iv) Non si puo' calcolare.

⑦ $P = \begin{pmatrix} 1-\beta & 0 & 0 & \beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\beta = 0$ $\quad 1 \to 1$, $2 \to 1$, $3 \to 2$, $4 \to 3$

Gli stati 2,3,4 sono transitori ; 1 e' assorbente

La catena non e' irriducibile.

ii) $\beta > 0$ $\quad 1 \to 1,4$, $2 \to 1$, $3 \to 2$, $4 \to 3$

Tutti gli stati sono ricorrenti $\Rightarrow$ CM irriducibile

iii) $\pi = P^T \pi \rightarrow \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\pi} = \left(\frac{1}{1+3\beta}, \frac{\beta}{1+3\beta}, \frac{\beta}{1+3\beta}, \frac{\beta}{1+3\beta} \right)$

⑧ $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 2/3\, \pi_2 \\ \pi_2 = \pi_2 \end{cases} \rightarrow \underline{\pi} = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right)$

ii) Usiamo la formula per la matrice di transizione ad n passi.

Se $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ a & 1-a \end{pmatrix}$ $\qquad P^n = \begin{pmatrix} \frac{a}{a+p} & \frac{p}{a+p} \\ \frac{a}{a+p} & \frac{p}{a+p} \end{pmatrix} + \frac{(1-a-p)^n}{a+p} \begin{pmatrix} p & -p \\ -a & a \end{pmatrix}$

$P^k = \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$P_{12}^{(k)} = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^k$

$|P_{12}^{(k)} - \pi_2| = \left| -\frac{3}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^k \right| < 10^{-5} \iff \left(\frac{1}{6}\right)^k < \frac{5}{3} \cdot 10^{-5} \iff 6^k > \frac{3}{5 \cdot 10^{-5}} \iff$

$\iff \log_{10} 6^k > \log_{10} \frac{3}{5} 10^5 \iff k \log_{10} 6 > 5 + \log_{10} \frac{3}{5}$

$k > \frac{5 + \log_{10} 3/5}{\log_{10} 6} \sim 6.1 \implies k = 7$

iii) $P_{21}^{(13)} = \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{6}\right)^{13} \cdot \frac{6}{5} \left(-\frac{1}{3}\right) \sim \pi_1$

(9) $P = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ $\qquad 0<a<1$

La matrice e' bistocastica $\Rightarrow \underline{\pi} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(10) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/9 & 2/3 & 1/9 \end{pmatrix}$

Tutti gli stati sono ricorrenti.

$P^2 = \begin{pmatrix} 2/9 & 2/3 & 1/9 \\ 2/27 & 2/9 & 19/27 \\ 38/81 & 4/9 & 37/81 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow$ P e' regolare, quindi ergodica. $\Rightarrow \exists\ \underline{\pi}$ stazionaria.

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/9 \\ 0 & 0 & 2/3 \\ 1 & 1/3 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\pi} = \left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

i) $\lim_{n \to +\infty} p_{13}^{(n)} = \pi_3 = \frac{3}{7}$

ii) Velocita' di convergenza a 0 di $|p_{13}^{(n)} - \alpha| = |p_{13}^{(n)} - \pi_3|$ e' fornita dalla quantita' λ_2^n. Dobbiamo quindi calcolare il secondo autovalore di P (il primo e' $\lambda_1 = 1$).

$$\begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -2/3 & x & -1/3 \\ -2/9 & -2/3 & x-\frac{1}{9} \end{pmatrix} \to x\left(x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{2}{9}\right) - \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9}x\right) = 0 \to 9x^3 - x^2 - 4x - 4 = 0$$

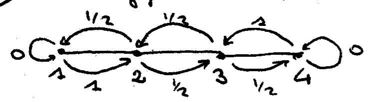
$9x^3 - x^2 - 4x - 4 = (x-1)(9x^2 + 8x + 4)$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-36}}{9} = -\frac{4}{9} \pm \frac{i\sqrt{20}}{9}$ due autovalori complessi coniugati.

$|\lambda_2| = \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{20}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{2}{3}$

Allora $|p_{13}^{(n)} - \pi_3| = O\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.

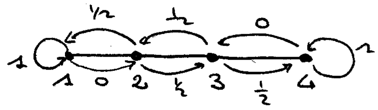
(11) Passeggiata aleatoria con barriere riflettenti.



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \right)$$

(12) Passeggiata aleatoria con barriere assorbenti.



$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per una catena di Markov con due o più stati assorbenti non esistono probabilità stazionarie:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \qquad p_{14}^{(n)} = 0 \quad \forall n \Rightarrow \pi_4 = 0$$
$$p_{44}^{(n)} = 1 \quad \forall n \Rightarrow \pi_4 = 1 \qquad \Rightarrow \nexists\ \pi$$

(13) $P = \begin{pmatrix} \theta & \theta^2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

P e' stocastica se $\theta^2 + \theta = 1$ $\qquad \theta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Infatti θ e' una probabilità, quindi deve essere positivo.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

P e' regolare, quindi ergodica. Esistono π invarianti e stazionarie.

(14) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

La matrice P non e' regolare, la prima riga di P^n, $\forall n$, sara' sempre $(1,0,0)$.
La catena però potrebbe essere ergodica:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_2 = \pi_3 = 0 \\ \pi_1 = 1 \end{cases} \qquad \Pi = (1,0,0)$$

(15) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Classificazione stati: $\begin{cases} 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 1,2,3 \\ 3 \rightarrow 1 \end{cases} \rightarrow$ 2 transitorio, $\{1,3\}$ classe chiusa irriducibile

$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 1/9 & 4/9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La probabilita' stazionaria non esiste, perché la matrice cambia ad ogni passo.
Π invariante e' unica ed e' $\Pi = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

(16) $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \qquad P^n = \frac{1}{q+p}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + \frac{(1-q-p)^n}{q+p}\begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}$

$P^n = \frac{6}{7}\begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{6}\right)^n \cdot \frac{6}{7}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

(17) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$1 \rightarrow 2$; $2 \rightarrow 3$; $3 \rightarrow 1$
La catena e' periodica, di periodo $T = 3$

(18) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$1 \to 2$; $2 \to 3$; $3 \to 4$; $4 \to 1$. Catena periodica di periodo $T=4$.
Non esistono le probabilità stazionarie e non vale il Teorema Ergodico.
Infatti ad ogni passo la configurazione della catena cambia, quindi
$\nexists \lim p_{ij}^{(n)}$.

(19) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$1 \to 2$; $2 \to 3$; $3 \to 1, 3$ $\Rightarrow$ $E = \{1,2,3\}$ classe chiusa indecidibile, stati ricorrenti.
$P^4 > 0$ $\Rightarrow$ CM regolare, quindi ergodica

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \Pi = \left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7} \right)$$

Teorema: se P e' regolare $\Rightarrow \exists! \, \Pi$ fatta di elementi tutti positivi (NON nulli!)

(20) Vedi esercizio 12.

(21) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Un'altra definizione di Catena di Markov periodica e' la seguente:
CM e' periodica se $MCD\{k : p_{ii}^{(k)} > 0 \ \forall i\} > 1$

$P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ P e' periodica di periodo 2.

La catena non e' ergodica, ma le distribuzioni invarianti esistono.
Infatti P e' bistocastica $\Rightarrow$ $\Pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$

(22) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$1 \to 2$; $2 \to 3$; $3 \to 1$. La catena e' periodica, $\nexists \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$, ma la matrice e' bistocastica, quindi le probabilita' invarianti sono $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Non c'e' contraddizione perche' P non si stabilizza mai.

La distribuzione invariante e' una questione algebrica, non si parla di limite.