1. Il Teorema Ergodico per le catene di Markov *

Definizione *Una catena di Markov discreta con spazio degli stati E, si dice regolare se, detta $P = (P)_{ij}$ la matrice delle probabilità di transizione associata, esistono un intero $s > 0$ ed un numero $\alpha \in (0,1)$ tali che $P^s_{ij} \geq \alpha \ \forall i, j \in E$.*

Teorema *Sia X_k una catena di Markov regolare con spazio degli stati E, allora esiste un' unica misura invariante π per cui risulta:*

(i) $\pi P = \pi$

(ii) $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{ij} = \pi_j \ , j \in E$

Inoltre la velocità di convergenza in (ii) è esponenziale. La misura π viene anche detta stazionaria.

Prima di dimostrare questo teorema, introduciamo alcune notazioni e risultati preliminari dei quali avremo bisogno.

Sia data una catena di Markov discreta (CM) e supponiamo per semplicità di identificare lo spazio degli stati con l'insieme $E = \{1, 2, ..., N\}$; sia inoltre $P = (p_{ij})$ la matrice delle probabilità di transizione della CM e denotiamo con $p^{(n)}_{ij}$ la probabilità di transizione dallo stato i allo stato j in n passi. Sia μ una probabilità su E; μ può essere pensata come un vettore appartenente al s.i. di $\mathbf{R^N}$:

$$S = \{x \in \mathbf{R^N} : x_i \geq 0, \ \sum_i x_i = 1\}$$

Ricordiamo che una misura $\mu \in S$ si dice invariante se $\mu P = \mu$, cioé se μ è un autovettore sinistro di P relativo all'autovalore 1, o ciò che è lo stesso, se μ è un autovettore di P^T relativo all'autovalore 1.

1. Osserviamo che ogni matrice stocastica P (per la quale cioé $\sum_j p_{ij} = 1$) ammette sempre un autovalore, diciamo $\lambda_1 = 1$, e tutti gli altri autovalori sono in modulo non superiori a 1. Infatti si verifica subito che il vettore con componenti tutte uguali a 1 è un autovettore di P relativo all'autovalore 1. Inoltre, se λ è un qualunque altro autovalore di P relativo all'autovettore u e $\max_{j=1,..,N} |u_j| = |u_h|$ per un certo $h \leq N$, si ha:

$$\lambda u_h = \sum_{j=1}^{N} p_{hj} u_j$$

e quindi:

$$|\lambda||u_h| = |\sum_{j=1}^{N} p_{hj} u_j| \leq \sum_{j=1}^{N} p_{hj}|u_j| \leq |u_h| \sum_{j=1}^{N} p_{hj} = |u_h|$$

da cui segue $|\lambda| \leq 1$.

* Questi appunti sono parte integrante del corso: M. Abundo, *Probabilità 2,* laurea in Matematica, Università *Tor Vergata*, a.a. 2003/ 2004.

2. $\forall \mu \in S$ si ha $\mu P \in S$.
Infatti, $(\mu P)_i \geq 0$, inoltre:

$$\sum_{i=1}^{N} (\mu P)_i = \sum_i \sum_j \mu_j p_{ji} = \sum_j \mu_j \sum_i p_{ji} = \sum_j \mu_j = 1$$

ove nell' ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $\sum_i p_{ji} = 1$, essendo P una matrice stocastica.

3. $S \subset \mathbf{R^N}$ è un s.i. chiuso e limitato, dunque è compatto.

4. Se $\mu_0 \in S$ è la distribuzione o misura di probabilità iniziale della CM, ovvero $(\mu_0)_j = P(X_0 = j)$ ed essa è invariante, cioé $\mu_0 P = \mu_0$, allora, posto $\mu_n \doteq \mu_0 P^n$, si ha $\mu_n = \mu_0$; infatti $\mu_n = \mu_0 P^n = (\mu_0 P) P^{n-1} = \mu_0 P^{n-1} = ... = \mu_0 P = \mu_0$. Siccome

$$P(X_n = j) = \sum_{i_0} \sum_{i_1} ... \sum_{i_{n-1}} P(X_0 = i_0) p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} .... p_{i_{n-1} j} = (\mu_0 P^n)_j = (\mu_n)_j$$

si ottiene allora che se la distribuzione iniziale μ_0 è invariante, allora per ogni n si ha $P(X_n = j) = P(X_0 = j)$, ovvero la distribuzione dopo n passi è la stessa di quella iniziale.

5. Per ogni misura iniziale μ_0 assegnata (anche non invariante), $\mu_n = \mu_0 P^n$ è una successione di probabilità su E, cioé di elementi di S; siccome S è compatto, da questa successione si può estrarre una sottosuccessione $\mu_{n_k} \doteq \mu_\nu$ convergente, per $\nu \to \infty$, ad un vettore $\pi \in S$. Inoltre π è invariante; infatti

$$\pi = \lim_{\nu \to \infty} \mu_0 P^\nu = \lim_{\nu \to \infty} \mu_0 P^{\nu+1} = \lim_{\nu \to \infty} (\mu_0 P^\nu) P = \pi P$$

6. S è un s.i. dello spazio metrico $\mathbf{R^N}$, pertanto eredita qualunque distanza $d(\cdot, \cdot)$ in $\mathbf{R^N}$. Ricordiamo che una distanza su uno spazio metrico V è una funzione

$$d : V \times V \longrightarrow [0, +\infty)$$

tale che:
(i) $d(x, y) \geq 0 \; \forall x, y \in V$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
(ii) $d(x, y) = d(y, x) \; \forall x, y \in V$ (proprietà simmetrica) ;
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \; \forall x, y, z \in V$ (disuguaglianza triangolare)
Ad esempio, in $\mathbf{R^N}$ possiamo considerare la distanza Euclidea:

$$d_E(x, y) = d((x_1, x_2, ..., x_N), (y_1, y_2, ..., y_N)) \doteq \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ma esistono infinite altre distanze, per esempio:

$$d_1(x,y) \doteq \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|$$

oppure

$$d_2(x,y) \doteq \max_{i=1,..N} \{|x_i - y_i|\}$$

Le distanze d_E e d_1 sono equivalenti, nel senso che esistono costanti $A, B > 0$ tali che:

$$A \cdot d_1(x,y) \leq d_E(x,y) \leq B \cdot d_1(x,y)$$

(per esempio, per $N = 2$, la prima di queste disuguaglianze è soddisfatta per $0 < A < \sqrt{2}/2$); analogamente d_E e d_2 sono equivalenti, ovvero esistono costanti $C, D > 0$ tali che:

$$C \cdot d_2(x,y) \leq d_E(x,y) \leq D \cdot d_2(x,y)$$

Dunque, le distanze d_E, d_1 e d_2 sono tutte equivalenti tra loro. Ciò significa che, data una successione di vettori $\{x_\nu\}$, se $d_E(x_\nu, y) \to 0,\ \nu \to \infty$, allora x_ν converge a y anche con la metrica fornita dalle altre distanze, e viceversa.

Dunque, ritornando al nostro discorso, se d è una qualunque distanza in S equivalente alla distanza Euclidea d_E e $d_E(\mu_\nu, \pi) \to 0$, allora si ha anche $d(\mu_\nu, \pi) \to 0,\ \nu \to \infty$.

7. La misura invariante π trovata al punto 5 non è necessariamente unica, se P non possiede certe proprietà.

8. Introduciamo ora la distanza su S definita da:

$$d(\mu', \mu'') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} |\mu'_i - \mu''_i| \ , \quad \mu', \mu'' \in S$$

Essa è equivalente alla metrica Euclidea.
Osserviamo che:

$$0 = \sum_i \mu'_i - \sum_i \mu''_i = \sum_i (\mu'_i - \mu''_i) = \sum^{+} (\mu'_i - \mu''_i) - \sum^{+} (\mu''_i - \mu'_i) \qquad (*)$$

ove $\sum^+$ denota la somma rispetto agli indici i per i quali i termini sono positivi. Si ha allora:

$$d(\mu', \mu'') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} |\mu'_i - \mu''_i| =$$

$$= \frac{1}{2} \sum^{+} (\mu'_i - \mu''_i) + \frac{1}{2} \sum^{+} (\mu''_i - \mu'_i) = \ \textit{(per (*))}$$

$$= \sum^{+} (\mu'_i - \mu''_i) \leq \sum^{+} \mu'_i \leq \sum_i \mu'_i = 1$$

9. Lemma Sia $Q = (q_{ij})$ una matrice stocastica. Allora, $\forall \mu', \mu'' \in S$:
(i) $d(\mu'Q, \mu''Q) \leq d(\mu', \mu'')$
(ii) se esiste $0 < \alpha < 1$ per cui $q_{ij} \geq \alpha \ \forall i, j$ allora:

$$d(\mu'Q, \mu''Q) \leq (1-\alpha) d(\mu', \mu'')$$

Prova. (i) Si ha $(\mu'Q)_j = \sum_i \mu'_i q_{ij}$ e $(\mu''Q)_j = \sum_i \mu''_i q_{ij}$. Allora:

$$d(\mu'Q, \mu''Q) = \sum_j^{+} \sum_i (\mu'_i - \mu''_i) q_{ij} \leq \sum_j^{+} \sum_i^{+} (\mu'_i - \mu''_i) q_{ij} = \sum_i^{+} (\mu'_i - \mu''_i) \sum_j^{+} q_{ij}$$

Ma $\sum_j^{+} q_{ij} \leq \sum_j q_{ij} = 1$. Dunque, abbiamo ottenuto:

$$d(\mu'Q, \mu''Q) \leq \sum_i^{+} (\mu'_i - \mu''_i) = d(\mu', \mu'')$$

che prova la tesi.
(ii) La somma $\sum_j^{+}$ nel calcolo di $d(\mu'Q, \mu''Q)$ non può essere una somma su tutti gli indici j. Infatti, se fosse $\sum_i \mu'_i q_{ij} > \sum_i \mu''_i q_{ij} \ \forall j$, allora sarebbe anche:

$$\sum_j \sum_i \mu' q_{ij} > \sum_j \sum_i \mu'' q_{ij}$$

ma ciò è assurdo, essendo entrambi i membri dell' ultima disuguaglianza uguali a 1(infatti $\sum_j \sum_i \mu'_i q_{ij} = \sum_j \mu'_i (\sum_j q_{ij}) = \sum_j \mu'_j = 1$). Dunque, almeno un indice, diciamo j_0, è mancante nella somma $\sum_j^{+} q_{ij}$. Quindi:

$$\sum_j^{+} q_{ij} \leq \sum_{j \neq j_0}^{+} q_{ij} \leq 1 - q_{ij_0} \leq 1 - \alpha$$

eesendo $q_{ij} \geq \alpha \ \forall i, j$. Infine:

$$d(\mu'Q, \mu''Q) \leq \sum_i^{+} (\mu'_i - \mu''_i) \sum_j^{+} q_{ij} \leq$$

$$(1-\alpha) \sum_i^{+} (\mu'_i - \mu''_i) = (1-\alpha) d(\mu', \mu'')$$

che prova il secondo asserto.

Dimostrazione del Teorema ergodico
(i) Abbiamo già provato al punto 5 che esiste (almeno) una misura invariante π che è il limite di una sottosuccessione $\{\mu_\nu\}$ estratta da $\{\mu_n\}$. In realtà nell'ipotesi che P è regolare, cioé esistono un numero $0 < \alpha < 1$ ed un intero $s > 0$ tale che $p_{ij}^{(s)} \geq \alpha > 0 \; \forall i, j$, si ha che $\{\mu_n\}$ è una successione di Cauchy. Per mostrare ciò, basta osservare che per ogni coppia di interi $h < k$:

$$d(\mu_h, \mu_k) = d(\mu_0 P^h, \mu_0 P^k) \leq (1-\alpha) d(\mu_0 P^{h-s}, \mu_0 P^{k-s}) \leq$$
$$(1-\alpha)^2 d(\mu_0 P^{h-2s}, \mu_0 P^{k-2s}) \leq ..... \leq$$
$$(1-\alpha)^m d(\mu_0 P^{h-ms}, \mu_0 P^{k-ms}) \leq (1-\alpha)^m \to 0$$

per $h, k \to \infty$ poiché, se $h = ms + j$, con j intero $< s$, allora $m = (h-j)/s \to \infty$ per $h \to \infty$. Nei passaggi di sopra abbiamo applicato il Lemma con P^s in luogo di Q, osservando che $d(\mu_0 P^{h-ms}, \mu_0 P^{k-ms}) \leq 1$, sempre per il Lemma.
Dunque $\{\mu_n\}$ è una successione di Cauchy nella metrica d, pertanto risulta addirittura $d(\mu_n, \pi) \to 0, \; n \to \infty$.

Occorre ora provare che esiste un' unica misura invariante. Supponiamo per assurdo che esistano due misure invarianti π_1 e π_2 tali che $\pi_1 = \pi_1 P$ e $\pi_2 = \pi_2 P$. Dunque si ha anche $\pi_1 = \pi_1 P^s, \; \pi_2 = \pi_2 P^s$; per il Lemma, abbiamo:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(\pi_1 P^s, \pi_2 P^s) \leq (1-\alpha) d(\pi_1, \pi_2)$$

Questo implica che deve aversi $d(\pi_1, \pi_2) = 0$, i.e. $\pi_1 = \pi_2$.

(ii) Scegliamo $\mu_0 = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ nel quale tutte le componenti sono nulle, tranne l' i-esima che vale 1. Allora $\mu_0 P^n$ è la distribuzione di probabilità $\{p_{ij}^{(n)}\}_{j=1,..,N}$. Siccome $\mu_0 P_n \to \pi$, si ha:

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

Andiamo ora a stimare la velocità di convergenza di $p_{ij}^{(n)}$ a π_j. Tenendo conto che $\pi P = \pi$, si ha:

$$d(\mu_n, \pi) = d(\mu_0 P^n, \pi) = d(\mu_0 P^n, \pi P^n)$$

e, posto $n = ks + h, \; h < s$, l'ultima distanza si scrive:

$$d(\mu_0 P^h (P^s)^k, \pi P^h (P^s)^k)$$

che, per il Lemma risulta essere

$$\leq (1-\alpha)^k d(\mu_0 P^h, \pi P^h) \leq (1-\alpha)^k$$

essendo $d(\mu_0 P^h, \pi P^h) \leq 1$. Abbiamo dunque ottenuto:

$$d(\mu_n, \pi) \leq (1-\alpha)^k = (1-\alpha)^{n/s} \cdot \frac{1}{(1-\alpha)^{h/s}} = \beta^n \cdot \frac{1}{\beta h}$$

dove abbiamo posto $\beta = (1-\alpha)^{1/s} < 1$. Dunque, la velocità di convergenza è esponenziale. Ciò conclude la dimostrazione del Teorema ergodico.

2. Matrice di transizione ad n passi

In questa sezione ci occuperemo del calcolo esplicito della matrice di transizione ad n passi di una CM, ovvero della matrice $P^n = (p_{ij}^{(n)})$ il cui elemento di posto i, j rappresenta $P(X_n = j | X_0 = i)$.

Ricordiamo dall' algebra lineare la nozione di matrice diagonalizzabile. Sia A una matrice quadrata di ordine N con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ e supponiamo che per ciascuno dei λ_i, $i = 1, .., N$, la molteciplità geometrica uguagli la molteplicità algebrica; allora A è diagonalizzabile, cioé esiste una matrice U di ordine N, tale che $U^{-1}AU$ è una matrice diagonale e risulta

$$U^{-1}AU = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N)$$

La matrice U ha per colonne gli N autovettori indipendenti di A.

Consideriamo ora, al posto di A, la matrice di transizione P di una CM con spazio degli stati $E = \{1, 2, ..., N\}$, e supponiamo che gli autovalori di P siano tutti distinti. Allora, P è diagonalizzabile e risulta $P = U\Lambda U^{-1}$; pertanto, come è immediato verificare, si ha $P^n = U\Lambda^n U^{-1}$.

Effettuiamo il calcolo esplicito di P^n, nel caso in cui P è una matrice stocastica di ordine 2, con elementi strettamente positivi, cioé essa è la matrice delle probabilità di transizione di una CM regolare a due stati; P può essere posta nella forma:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ a & 1-a \end{pmatrix}$$

dove $a, p \in (0, 1)$. Gli autovalori di P sono: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1 - a - p$ con $|\lambda_2| \leq 1$ (v. punto 1. della precedente sezione), ed essi sono distinti; dunque:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-p \end{pmatrix}$$

I due autovettori relativi a λ_1 e λ_2 sono, a meno di un fattore di proporzionalità:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{p} \end{pmatrix}$$

Si ha allora:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{a}{p} \end{pmatrix}$$

e

$$U^{-1} = \frac{p}{a+p} \begin{pmatrix} \frac{a}{p} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$P^n = U\Lambda^n U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{a}{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-p)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{a+p} & \frac{p}{a+p} \\ \frac{p}{a+p} & -\frac{p}{a+p} \end{pmatrix}$$

ed effettuando i calcoli si ottiene infine:

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{a}{a+p} & \frac{p}{a+p} \\ \frac{a}{a+p} & \frac{p}{a+p} \end{pmatrix} + \frac{(1-a-p)^n}{a+p} \begin{pmatrix} p & -p \\ -a & a \end{pmatrix}$$

Le due righe (uguali) della prima matrice sono costituite dalle componenti del vettore π delle probabilità stazionarie (π è l' autovettore sinistro di P relativo all'autovalore 1), che è :

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a+p} \\ \frac{p}{a+p} \end{pmatrix}$$

Abbiamo allora ottenuto:

$$P^n = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} + \lambda_2^n T$$

ove T è la matrice (non stocastica) data da:

$$T = \frac{1}{a+p} \begin{pmatrix} p & -p \\ -a & a \end{pmatrix}$$

La velocità di convergenza nel teorema ergodico è fornita allora dalla quantità λ_2^n ove, come abbiamo visto, $|\lambda_2| \leq 1$: più vicino a zero è il secondo autovettore di P, maggiore è la velocità di convergenza di $p_{ij}^{(n)}$ a π_j per $n \to \infty$.